

第72回
トポロジーシンポジウム
講演集

2025年（令和7年）8月4日～8月6日

於 山梨県 恩賜林記念館 大会議室

はしがき

この講演集は 2025 年 8 月 4 日から 8 月 6 日までの 3 日間、山梨県恩賜林記念館大会議室において開催された第 72 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。(ただし、一部の原稿についてはシンポジウム終了後から 9 月 21 日までの期間に修正版に差し替えをおこなっている。) その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

| | |
|--------|--------------------------|
| 研究種目 | 基盤研究(A) |
| 研究代表者 | 大槻知忠 |
| 研究課題名 | 3次元双曲多様体上の量子トポロジー |
| 研究課題番号 | 21H04428 |
| 研究種目 | 基盤研究(A) |
| 研究代表者 | 藤原耕二 |
| 研究課題名 | 離散群に潜む新しい構造の発見と解明 |
| 研究課題番号 | 25H00588 |
| 研究種目 | 基盤研究(C) |
| 研究代表者 | 茂手木公彦 |
| 研究課題名 | デーン手術を背景とする低次元トポロジーの研究 |
| 研究課題番号 | 25K07018 |
| 研究種目 | 基盤研究(C) |
| 研究代表者 | 佐藤進 |
| 研究課題名 | 曲面結び目のリスト作成と仮想結び目の不変量の研究 |
| 研究課題番号 | 22K03287 |
| 研究種目 | 基盤研究(C) |
| 研究代表者 | 中村拓司 |
| 研究課題名 | 局所変形が与える結び目の幾何・代数の研究 |
| 研究課題番号 | 20K03621 |

世話人： 中村拓司（山梨大学）

佐藤進（神戸大学）

逆井卓也（東京大学）

主催：日本数学会トポロジー分科会

協力： 山梨大学

第71回トポロジーシンポジウム

トポロジープロジェクトの一環として、

- 科学研究費補助金基盤研究 (A) 「3次元双曲多様体上の量子トポロジー」(研究代表者:大槻知忠 課題番号:21H04428)
- 科学研究費補助金基盤研究 (A) 「離散群に潜む新しい構造の発見と解明」(研究代表者:藤原耕二 課題番号:25H00588)
- 科学研究費補助金基盤研究 (C) 「デーン手術を背景とする低次元トポロジーの研究」(研究代表者:茂手木公彦 課題番号: 25K07018)
- 科学研究費補助金基盤研究 (C) 「曲面結び目のリスト作成と仮想結び目の不変量の研究」(研究代表者:佐藤進 課題番号: 22K03287)
- 科学研究費補助金基盤研究 (C) 「局所変形が与える結び目の幾何・代数の研究」(研究代表者:中村拓司 課題番号: 20K03621)

の助成により、第72回トポロジーシンポジウムを開催いたします。

日程： 2025年8月4日(月)午前～8月6日(水)午後

会場： 山梨県 恩賜林記念館 大会議室
山梨県甲府市丸の内1丁目5-4

ホームページ：

<https://sites.google.com/yamanashi.ac.jp/72nd-topology-symposium>

プログラム

8月4日(月)

- 9:30～10:30 窪田 陽介 (京都大学)
Stable homotopy theory of invertible quantum spin systems page
- 10:45～11:45 谷口 東曜 (東京大学・日本学術振興会特別研究員 DC 1)
Modular vector fields in non-commutative geometry and loop operations .. page
- 14:30～15:30 田邊 真郷 (北海道大学・日本学術振興会特別研究員 DC 2)
複素曲面特異点リンクにまつわるはめ込みのトポロジー page
- 15:45～16:45 福井 敏純 (埼玉大学)【企画講演】
混合多項式の特異点解消とニュートン図形 page

8月5日(火)

- 9:30 ~ 10:30 井上 歩 (津田塾大学)
カンドルホモロジーに反映される結び目補空間の構造について page
- 10:45 ~ 11:45 直江 央寛 (東京科学大学)
4次元多様体のシャドウと不変量 page
- 13:15 ~ 14:15 根上 生也 (横浜国立大学) 【企画講演】
平面被覆予想, その誕生から未来まで page
- 14:30 ~ 15:30 中江 康晴 (秋田大学)
アノソフ流の手術と8の字結び目の例外手術 page
- 15:45 ~ 16:45 久野 雄介 (津田塾大学)
エマージェント組紐と柏原-ヴェルニユ方程式 page

8月6日(水)

- 9:30 ~ 10:30 松橋 英市 (島根大学)
Recent research on singular decomposable continua page
- 10:45 ~ 11:45 箕輪 悠希 (京都大学)
Parametrized topological complexity of spherical fibrations over spheres ... page
- 13:15 ~ 14:15 浅野 知紘 (京都大学)
正方形杭問題とトポロジー/層理論 page
- 14:30 ~ 15:30 石川 昌治 (慶応義塾大学)
低次元球面内の fibered knot の研究について page

Stable homotopy theory of invertible quantum spin systems

窪田 陽介 (京都大学)*

本文章の増補版が、私の Researchmap 「資料公開」*¹から入手できますので、よろしければご活用ください。

1 背景

Landau–Ginzburg による超伝導の研究以来、相転移には対称性の変化を伴う（相は対称性の群によってラベルされている）という考え方が支持されていたらしい。例えば、金属の温度を下げていくと電子のスピンがある方向に揃うことで空間回転対称性を失って強磁性を得る、というのがその例である。ところが後年、対称性ではなく（何かしらの巻き付き数や Chern 数のような）位相不変量によって区別される相があることがわかってきた。これがいわゆる物質のトポロジカル相である。この概念が物理にどのように反映されるかという点、例えば、異なるトポロジカル相の間を連続的な変形によって移動する過程では状態の劇的な変化を伴う（トポロジカル相転移）。

ここでは、あらゆる量子状態のうち、あるハミルトニアン基底状態として実現されるものに注目する。より正確には、**短距離的でスペクトルギャップ**を持つハミルトニアンである。このような状態のなす空間は、ハミルトニアンをなす空間と同じトポロジーを持つ（同じ基底状態を持つふたつのハミルトニアンは単に線形に繋ぐことでホモトピックになる）ので、以降はハミルトニアンをなす空間のトポロジーについて議論する。本研究では、その中でも特に**可逆**なものなす部分集合に着目する（いずれの用語も §2 で後述）。

1.1 SPT 相の指数

このような空間のトポロジーがなぜ研究に値するのかは、数学の立場からは明白と思う（「そこに空間があるから」）が、その物理的な動機については説明が必要そうである。 π_0 を知りたい理由については上で説明した通りだが、これは1次以上のホモトピー群に同じように興味を持つ理由にはならないだろう。主要な動機として挙げられるのが、SPT (symmetry protected topological) 相の位相不変量を理解する助けとなる、という点である。

これは微妙に不正確だが、SPT 相とは群 G の作用に関して不変な（可逆）トポロジカル相のことだと思って読んで頂いて差し支えない。その最も初期の有名な例が、以下の1次元モデルである。

$$H_{\text{AKLT}} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} S_x \cdot S_{x+1} + \frac{1}{3} \sum_x (S_x \cdot S_{x+1})^2$$

* 〒606-8502 京都府京都市左京区追分町 京都大学 理学研究科
e-mail: ykubota@math.kyoto-u.ac.jp

*¹ https://researchmap.jp/multidatabases/multidatabase_contents/detail/286903/aa3d986d1330a04061b23bc4db910485?frame_id=477881

詳しい定義は省略する．この AKLT 模型はギャップを持ち，その基底状態はいわゆる行列積状態 (MPS) の一種である．そして，有限群 $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ の対称性を持っている．Gu–Wen[6] や Pollmann–Berg–押川–Tener[15] によって， G 対称性を持つ MPS は $H^2(G; \mathbb{T})$ に値を取る位相不変量を持つことが示されており，AKLT 模型はこの値が非自明である．この不変量はのちに緒方 [12] によってより広いクラスの G 対称性を持つ 1 次元量子スピン系に，緒方 [13] および Sopenko[18] によって 2 次元のスピン系に一般化された．

さてここで，次の問が考えられる．

- (1) ここで群コホモロジーが現れるのは (トポロジーの見地から) 何故か？
- (2) $d \geq 3$ でもやはり群コホモロジーに値を取る不変量が構成できるか？

これらに答える筋道を与えたのが Kitaev である．Kitaev は次のことを提唱した [9]．

予想 1.1. d 次元の可逆な gapped ハミルトニアン IP_d のなす集合 IP_d を $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に関して集めたものは Ω -スペクトラムをなす．

もしこの主張が正しいならば，上の問には次のような議論によって解答できる．

$$[\text{pt}, IP_d^G] \xrightarrow{(1)} [EG, IP_d]^G \xrightarrow{(2)} [BG, IP_d] \xrightarrow{(3)} [BG, K(\mathbb{Z}, d+2)] \cong H^{d+2}(G; \mathbb{Z}).$$

(1) は同変写像 $EG \rightarrow \text{pt}$ に関する引き戻しである．常に存在するが，一般に同型とは限らない．(2) は一般には存在しないが，もし IP_d が ‘split G -スペクトラム’ であれば同型になる．最後に (3) について，各種ホモトピーを少し観察すると (§3.3)，自然な写像 $K(\mathbb{Z}, d+2) \rightarrow IP_d$ が存在し， $d \leq 2$ のときにはこれは split することがわかる．この戦略は d が小さいときの不変量の構成に成功していると同時に， d が大きくなると同じようにはいかず，より複雑だが計算可能そうな群 $[BG, IP_d]$ が不変量の値域としてよりふさわしそうであることを示唆している．

本研究はこの予想 1.1 に数学的に厳密な定義を与え，これを証明するものである．

1.2 自由フェルミオンの K 理論による分類

おそらく Kitaev の着想の雛型であったと思われることに，自由フェルミオンのトポロジカル相の理論がある．この分野は，整数量子ホール効果におけるホール伝導度の値の離散化が Chern 数の整数性によって説明できるという発見に端を発しており，物性物理におけるトポロジーのもうひとつの重要な顕れである．Schnyder–笠–古崎–Ludwig[17] および Kitaev[8] は，自由フェルミオンは K 理論によって分類されることを示した．

この事実も色々な数学的定式化を持っているが，中でも特に格子系の量子力学を素直に書き起こしたのが，1980 年代の Bellissard の仕事に端を発する非可換幾何学と作用素環の K 理論を用いたものである．平たく言うと，スピン系と自由フェルミオンの違いはテンソル積と直和の違いである．自由フェルミオンの解析は指数定理を介して K 理論や非

可換幾何と深く関係している．特に強調したいのは，粗幾何学 (coarse geometry) [16] との関係である．粗幾何学というのは空間の距離構造を粗くとらえる幾何学の一分野であり，一様に近い2点のなす集合 $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X^2 \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < R\}$ たちのなす部分集合族を公理化した粗構造によって特徴付けられる．ハミルトニアンの短距離性というのは，まさにこの「一様に近い2点」という構造の言葉で記述される仮定である．実は， d 次元ハミルトニアンの集合のトポロジーは，Euclid空間 \mathbb{R}^d の大域的な構造から規定されている．

この粗幾何学のアイデアや常識を量子スピンの分野に移植したのが本研究である．

2 定義と解析的背景

本研究で扱う数学的对象である量子スピンの解析の一部について，手短かに紹介する．教科書 [3, 4] や論文 [7, 11] などに準拠しつつ，少しずつ必要な形に調整している．

- (1) d 次元格子 Λ . 普通に考えるとこれは \mathbb{R}^d の離散部分集合であるべきだが，ここではのちの議論を成立させるために仮定をやや緩和し， \mathbb{R}^{d+l_Λ} の離散部分集合であって，射影 $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ が固有であるようなものを扱う．正確にはもう少し強い条件を課す（弱一様離散性と射影の線形固有性，参照）．
- (2) 観測量の代数 \mathcal{A}_Λ . 各格子点 $\mathbf{x} \in \Lambda$ に行列 C^* -環 $\mathcal{A}_\mathbf{x} = \text{End}(\mathcal{H}_\mathbf{x})$ を乗せておき，その無限テンソル積として定義する： $\mathcal{A}_\Lambda = \bigotimes_{\mathbf{x} \in \Lambda} \mathcal{A}_\mathbf{x}$. 代数的なテンソル積ではなく，行列ノルムによる完備化した C^* -環を考える．その稠密な部分代数として，almost local な元，すなわち

$$\|a\|_{x,f} := \max \left\{ \|a\|, \sup_{r \geq 1} \left(f(r)^{-1} \cdot \|a - \Pi_{\mathbf{x},r}(a)\| \right) \right\} < \infty \quad \forall f(r) = e^{-r^\mu}, 0 \leq \mu < 1,$$

を満たす元のなす部分 Fréchet 代数を $\mathcal{A}_\Lambda^{\text{al}}$ と置く．ただしここで $\Pi_{\mathbf{x},r}(a) = (\text{id}_{\mathcal{A}_{B_r(\mathbf{x})}} \otimes \text{tr})(a)$ は $\mathcal{A}_{B_r(\mathbf{x})} \subset \mathcal{A}_\Lambda$ の元で a に最も近いものである．すなわち， a が almost local であるというのは，半径 r の球に台を持つような作用素でよく近似できる（誤差が $r \rightarrow \infty$ で f より早く減衰する）ということである．

- (3) 短距離的ハミルトニアン H . これは $\mathcal{A}_\Lambda^{\text{al}}$ の元の族 $H = (H_\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \Lambda}$ であって，各 $H_\mathbf{x}$ が \mathbf{x} の近くに一様に局在しているもの (uniformly almost local (UAL))，すなわち

$$\|H\|_f := \sup_{\mathbf{x} \in \Lambda} \|H_\mathbf{x}\|_{x,f} < \infty \quad \forall f(r) = e^{-r^\mu}, 0 \leq \mu < 1$$

を満たすものによって与えられる．このような作用素の族は，

$$[H, a] := \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} [H_\mathbf{x}, a]$$

によって \mathcal{A}_Λ 上の ($\mathcal{A}_\Lambda^{\text{al}}$ をコアとする) 非有界微分を定める．実はこの微分は1パラメータ変換群 $\tau_H: \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{A}_\Lambda$ を生成する：つまり $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tau_{H,t}(a) = i[H, a]$.

- (4) 非縮退基底状態とスペクトルギャップ. 量子力学における状態とは，可観測量に数を対応させる操作，すなわち線型写像 $\omega: \mathcal{A}_\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ であって， $\omega(a^*a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と

$\omega(1) = 1$ の 2 条件を満たすものである。これがハミルトニアン H のギャップを持つ非縮退な基底状態であるとは、 $\omega(a) = 0$ を満たす任意の $a \in \mathcal{A}_\Lambda$ に対して

$$\omega(a^*[H, a]) \geq \delta\omega(a^*a)$$

を満たすことをいう。この不等式の意味は作用素環の GNS 表現を経由すると明白になる。

(5) **滑らかさ**. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ でパラメトライズされた族 $(H(p), \omega_{H(p)})_{p \in U}$ が滑らかであるとは、

(a) 各 H_x が Fréchet 空間値関数として C^∞ 級であり、それだけではなくその微分のノルム $\|\partial^j H_x\|_{x,f}$ が x に関して一様に有界、

(b) ω_H も C^∞ 級である

ことを言うことにする。これは解析に必要な条件を詰め込んだ恣意的な定義で、例えばある Frechet 多様体への C^∞ 級写像として特徴づけることは難しそうである。

(6) **並行移動と Lieb–Robinson 評価**. UAL 条件を満たす反自己共役作用素の族 $G = (G_x)_{x \in \Lambda}$ (すなわち UAL ハミルトニアンから基底状態に関する条件を落としたもの) のなす集合を $\mathfrak{D}_\Lambda^{\text{al}}$ と書く。 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の、 $\mathfrak{D}_\Lambda^{\text{al}}$ に値を取る接続 1-形式 $G = \sum_i G^i dx_i$ に対して、曲線 $c: [a, b] \rightarrow U$ に沿った時刻 s から t への並行移動

$$\alpha_c(G; s, t): \mathcal{A}_\Lambda \rightarrow \mathcal{A}_\Lambda \quad \text{s.t.} \quad \alpha_c(G; s, t)^{-1} \frac{d}{dt} \alpha_c(G; s, t)(a) = [G, a]$$

が構成できる。これは、スピン系の時間発展に関する Lieb–Robinson 評価 (cf. [11] など) の帰結として、 $f(r) = e^{-r^\mu}$ に対して、別の $f'(r) = e^{-r^{\mu'}}$ によって

$$\|\alpha(G; 0, t)(a)\|_{x,f} \leq \Upsilon_{G,f}(t) \cdot \|a\|_{x,f'}$$

と評価でき、特に H が gapped UAL ハミルトニアンならば

$$\alpha_c(G; s, t)(H) := (\alpha(G; s, t)(H_x))_{x \in \Lambda}$$

もまた gapped UAL ハミルトニアンである。ここで、 $\Upsilon_{G,f}(t)$ がせいぜい $e^{t^{\mu'}}$ 程度の増大度を持つ関数であることも重要である。

(7) **Hasings の断熱過程**. gapped UAL ハミルトニアンの滑らかな族 $(H(p), \omega_{H(p)})$ に対して、

$$G_H := \int \left(\int_0^t \tau_{H,u}(dH) du \right) w(t) dt$$

によって定める 1 形式 ($w(t)$ は”よい”関数) は、曲線に沿って H の基底状態を運搬する。すなわち、

$$\omega_{H(c(t))} = \omega_{H(0)} \circ \alpha(G_H; 0, t)$$

が成り立つ。別の言い方をすると、断熱時間発展を作用させたハミルトニアン $\alpha_c(G_H; 0, t)(H(c(t)))$ の基底状態は一定である。本研究ではこの構成を積極的に利用する。

- (8) **系の合成と可逆性.** ふたつの量子系の合成は、観測量代数のテンソル積 $\mathcal{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\Lambda_2}$ に定まる無限小生成子の和 $H_1 \boxtimes H_2 = H_1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2$ である。可逆性とは、この積に関する（ホモトピーを法とした）可逆性である。各 \mathcal{H}_x に単位ベクトル Ω_x を一つ固定しておく。これは自明な（基準となる）ハミルトニアンを選び方を $h_x := 1 - |\Omega_x\rangle\langle\Omega_x|$ の族として固定しておくことに当たる。H が可逆であるとは、別のハミルトニアン \check{H} と、 $H \boxtimes \check{H}$ と自明なハミルトニアン h を繋ぐホモトピー \bar{H} を持つことを言う。

3 Kitaev 予想の定式化と証明

3.1 多様体の圏の上の層

本研究で興味があるのは gapped UAL ハミルトニアン H のなす集合 $\mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}}$ のトポロジーである。格子 Λ を一つに固定したままではハミルトニアン積（系の合成）が演算として定まらないので、格子 Λ に関して $\mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}}$ の余極限（合併）を取っておいた方がよい。ハミルトニアン積の可逆性というのはこの余極限を取った後に定まる概念である。具体的にどのような余極限を取るのかという定義の話は、[10, Section 3] で丁寧に扱った。

前述のとおり、写像 $\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}}$ の滑らかさの定義は恣意的であり、無限次元多様体のような定式化を受け付けそうには感じられない。特に、連続写像を滑らかな写像で近似する Whitney 近似は望むべくもない。一方で、我々は BG のような多様体とは限らない位相空間から $\mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}}$ への写像を扱いたい。これらの一見すると深刻そうな不整合に関する懸念は、実はちょっとした工夫によって取り払われる。単に、位相空間の代わりに多様体の圏 Man 上の層（あるいは diffeological space）の枠組の中で定式化すればよい。これらは、“ C^∞ 級写像のなす部分集合 $C^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}}) \subset \text{Map}(\mathcal{M}, \mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}})$ ” をすべての多様体 \mathcal{M} に対して指定しようと思ったときに、その満たすべき性質を公理化した概念である。Man 上の層の基礎的なホモトピー論は Madsen–Weiss による Mumford 予想の解決の過程で整備された。特に、層 \mathcal{F} の特異複体を作り、その幾何学的実現を取ると、得られる位相空間 $|\text{Sing}\mathcal{F}|$ は次の意味で \mathcal{F} の滑らかなホモトピー型を完全に記憶していることが示されている：多様体 \mathcal{M} に対して、ホモトピー集合 $[\mathcal{M}, |\text{Sing}\mathcal{F}|]$ は、 \mathcal{M} から \mathcal{F} への滑らかな写像の滑らかなホモトピー類のなす集合（に相当するもの）と同型になる。

定義 3.1. Man 上の層 $C^\infty(_, \mathfrak{H}_\Lambda^{\text{al}})$ の Λ に関する余極限を \mathcal{GP}_d と、その可逆な切断からなる部分層を \mathcal{JP}_d と置く。また、 $IP_d := |\text{Sing}\mathcal{JP}_d|$ と置く。

3.2 Kitaev ポンプ

d 次元可逆ハミルトニアン H に対して、そのホモトピー逆 \check{H} と、 $H \boxtimes \check{H}$ と自明ハミルトニアンを繋ぐホモトピーを \bar{H} を一つ取る^{*2}。これらを用いて $d+1$ 次元ハミルトニアン

^{*2}このような \check{H} と \bar{H} を適当に取ってきて良いのは、 H のなす層と、三つ組 (H, \check{H}, \bar{H}) のなす層が、弱ホモトピー同値であるためである。

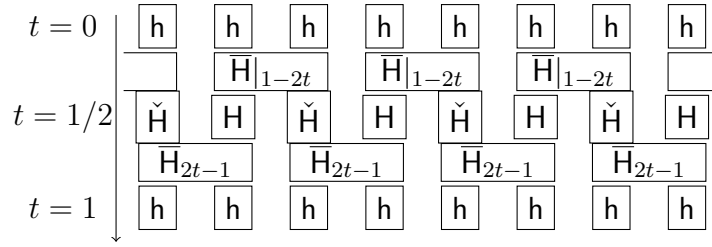


図1 Kitaev ポンプ (左) とその右半空間への切り落とし (横軸は x_{d+1})

のループを作りたい。

まず、 \bar{H} のレイヤーを x_{d+1} 方向に無限枚重ねて $d+1$ 次元の層状のハミルトニアンを作る (図1)。これは自明ハミルトニアンと層状ハミルトニアン $\dots \boxtimes H \boxtimes \check{H} \boxtimes H \boxtimes \dots$ のホモトピーを与える。 $1/2 \leq t \leq 1$ では同様のパスを用いて自明なハミルトニアンに帰ってくるのだが、ここでは H と \check{H} の組み合わせを組み替える。こうすることで、各時刻 t では層状ハミルトニアンなのだが、全体では真に $d+1$ 次元的な広がりを持っているハミルトニアンが手に入る。これを (H, \check{H}, \bar{H}) に付随する Kitaev ポンプと呼ぶ。

ここで、本研究の主定理の一つを正確に主張しておく。

定理 3.2. $\kappa_d: \mathcal{JP}_d \rightarrow \Omega \mathcal{JP}_{d+1}$ は弱ホモトピー同値である。

3.3 変調ハミルトニアンと断熱補間 (adiabatic interpolation)

Kitaev のもともとのアイデアでは、 κ_d の逆写像を構成することが考えられていた。まず、与えられた $d+1$ 次元ハミルトニアンの1パラメータ族 $H(t)$ に対して、 x_{d+1} 方向に $H(0)$ から $H(1)$ へだんだん変調していくハミルトニアン $\vartheta_d H$ を考える (図2)。すなわち、 $\chi(-\infty) = 0$ と $\chi(+\infty) = 1$ を十分なだらかに結ぶ滑らかな関数 χ を使って

$$“(\vartheta_d H)_x = H_x(\chi(x_{d+1}))”$$

という作用素の族 $(\vartheta_d H)_x$ を考えるということである。特に H がループの時には、 $H(0) = H(1) = h$ なのだから、超平面 $\{x_{d+1} = 0\}$ から離れた部分では $\vartheta_d H$ はほぼ自明になる。これはおおよそ $\vartheta_d H$ が d 次元ハミルトニアンであるということである。

しかし、このような構成を実際に解析的に実行しようとするとき、量子スピン系におけるスペクトルギャップの存在が一般にごく小さな摂動に対しても極めて不安定であるとい

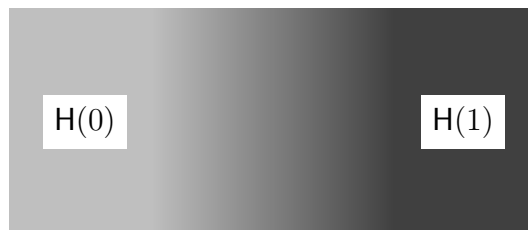


図2 変調ハミルトニアン

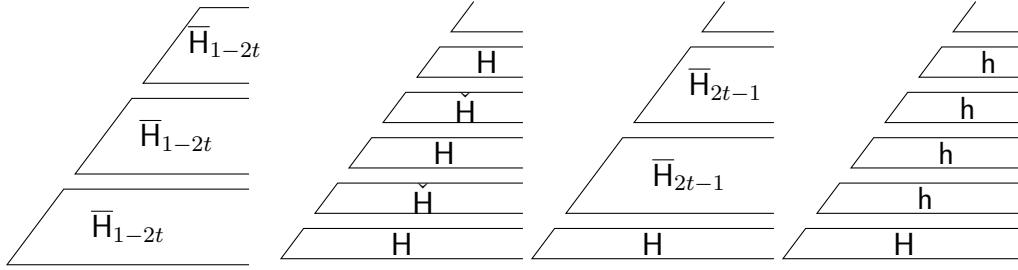


図3 h と H をつなぐ (Carlsson–Pedersen–)Higson–Roe による Eilenberg の詐術 ($d = 1$) : 縦軸は内部自由度の大きさを表しており、一様有限ではないが局所有限である。

う困難によって躓くことになる。そこで、単純に変調ハミルトニアンを考える代わりに、前節で紹介した Hastings の断熱過程を用いる。H そのものを気軽にいじるわけにはいかないが、接続 1-形式 G_H は適当に半空間に切り落としても平気である。このアイデア自体は緒方や Sopenko の $d = 2$ の研究 [13, 18] の中で既に効果的に用いられていた。

左半空間への切り落としを $\Pi_L(G_H)$ と置いて

$$\alpha(\Pi_L(G_H); 0, 1)^{-1} \circ \alpha(G_H; 0, 1)(H(0))$$

を考える。つまり、まず G_H に沿って $t = 1$ まで並行移動し、しかるのちに左半空間でのみ $\Pi_L(G_H)$ によって $t = 0$ まで逆向きに並行移動する。これは左半分ではほとんど $H(0)$ と同じハミルトニアンを持ち、右半分では**基底状態**が $H(1)$ のそれと**完全に一致**する。 $H(0) = H(1) = h$ のとき、実はこのようなハミルトニアンは右半分でギャップを保ったまま切り落とすことができ、 h と h の補間、すなわち d 次元ハミルトニアンが得られる。

3.4 バルク・境界対応

前小節で構成したホモトピー逆の候補に対して、 $\vartheta_d \circ \kappa_d \sim \text{id}$ は比較的簡単に証明できるが、 $\kappa_d \circ \vartheta_d \sim \text{id}$ はどうにもうまくいかない。これは本質的な躓きである。というのも、もし K 理論 (自由フェルミオン) におけるバルク・境界対応の証明がどんなものかを知っていたら、次の二つのことに気がつくはずである。第一に、その議論は上記の断熱補間と平行である。第二に、粗幾何学において「一様 Roe 環と Roe 環の K 群の違い」として知られている微妙な問題が、 $\kappa_d \circ \vartheta_d \sim \text{id}$ が証明できてしまっただけで困る、Kitaev 予想はそのままの素朴な形では成り立ちそうにない、と示唆している。

粗幾何学における教訓は、 $\kappa_d \circ \vartheta_d \sim \text{id}$ が「半空間 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上で定義された可逆ハミルトニアンの層の可縮性」に帰着できるということである。これはある種のバルク・境界対応である。この可縮性が自由フェルミオンに対してどのように証明されていたかという、図3に示したような Eilenberg の詐術による。すなわち、量子スピン系の集合を Kitaev 予想が成り立つような形で定式化したければ、この議論が機能するような定義を採用する必要があるということである。手短かにいうと、内部自由度の次元が各点ごとに一様に有限ではないことを許容するように定義を緩和すればよい (正確にはもっと上手くやる必要があるが)。このようにすることで、物理的には少々格好がつかないが、数学

的にクリーンな可逆トポロジカル相が定義できた。

4 周辺的な話題たち

4.1 ホモトピー群

得られたスペクトラムのホモトピー群はどうなっているのかというと、これは残念ながら現時点ではほとんど手がかりがない。ただし、図4のように、 -1 次より上の次数についてはよくわかっており、ほとんどが消えている（下の二行は次節で説明）。まず、 0 次元の可逆相 IP_0 は、 $\mathbb{C}P^\infty$ とおおよそ同じ空間になっている。このことと Kitaev 予想によって、 IP_1 の 1 次以上のホモトピー群は確定する。唯一非自明なのは π_0 群だが、これは緒方が行った von Neumann 環を用いる議論 [12] によって自明であることがわかる。 $\pi_0(IP_2)$ はもはや不明だが、‘chiral central charge’ という不変量によって \mathbb{Z} と同型で、‘Kitaev の E_8 -状態’ によって生成されることが予想されている。近年 Sopenko が $\mathbb{Z}/12$ に値を取る不変量を構成した。

4.2 フェルミオン系

同じやり方でフェルミオン系を扱うことができるかというのは自然な問であり、かつトポロジーの観点からも有意義なところがある。フェルミオンについては、単にテンソル積 \otimes を次数付きテンソル積 $\hat{\otimes}$ に取り替えるだけで、同様の概念が定義できる。

少なくとも言葉の上では、自由フェルミオンはフェルミオンの一種なので、自由フェルミオンが K 理論によって分類されていたことを思い出すと、

$$Q: \Sigma^{-2}KO \rightarrow fIP$$

という射が存在してもよさそうである。これは実際に定義することができる。これは、荒木による CAR 代数の一連の研究で、準自由第二量子化 (quasi-free second quantization) として知られていたものである。

フェルミオン系 fIP もまた、 -1 次以上のホモトピー群は完全に決定できる。そこで、それ以下のホモトピーを切り落とした被覆 $\Sigma fIP\langle 0, \infty \rangle$ を取ることを考える。すると、準自由第二量子化は、 $\Sigma fIP\langle 0, \infty \rangle$ と $\Sigma^{-1}KO\langle 0, \dots, 3 \rangle$ の間の弱同値を与えている。これは Freed のスペクトラム R^{-1} と呼ばれているもので [5]、 K 理論の振れとの関係からよく調べられている (cf. [2])。このことによって、 $fIP\langle -1, \infty \rangle$ の k -不変量がすべて決定できる。また、この群 $[M, fIP]$ は、Gu–Wen および Wang–Gu の supercohomology 群とも一

| $n - d$ | \dots | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | \dots |
|-------------------|---------|------|--------------|----------------|----------------|-----|--------------|-----|-----|-----|---------|
| $\pi_n(IP_d)$ | \dots | ? | ? | 0 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | 0 | 0 | 0 | \dots |
| $\pi_n(fIP_d)$ | \dots | ? | ? | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | 0 | \mathbb{Z} | 0 | 0 | 0 | \dots |
| $\pi_n(KO_{d+2})$ | \dots | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | 0 | \mathbb{Z} | 0 | 0 | 0 | \dots |

図4 スペクトラム IP と fIP のホモトピー群の表

致する.

4.3 高次 Berry 位相との関係

高次 Berry 位相とは, Kitaev によって提案され Kapustin, Spodyneiko, Sopenko らによって定式化された不変量 $[\mathcal{M}, IP_d] \rightarrow H^{d+2}(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ である. Kitaev 予想によって, このような射が存在することは安定ホモトピー論の一般論 (Chern–Dold 指標) から直ちに従うようになった. この Chern–Dold 指標が高次 Berry 位相と同一であるというのは一応証明が必要な事実だが, これは近日中に続編で発表する予定である.

SPT 相への応用を考えると, この射がいつ \mathbb{Z} 係数コホモロジーに持ちあがるかという問題が気になりとなる (cf. §1.1). これはすなわち, スペクトラムの被覆 $\Sigma^2 H\mathbb{Z} \rightarrow IP$ がいつ split するかという問に他ならない. Artymowicz–Kapustin–Sopenko[1] は $d \leq 2$ のときにこのような持ち上げが存在することを構成的に証明した. この結果は, 現在ではごく簡単な計算によって再証明できるようになっている.

4.4 オンサイト対称性がある場合: SPT 相

G をコンパクト Lie 群とする. 連結性は特に仮定せず, 有限群と $U(1)$ を最も典型的な例として念頭に置いている. 我々は各格子点 $x \in \Lambda$ に行列環 $\mathcal{A}_x = \text{End}(\mathcal{H}_x)$ を置いていたわけだが, この \mathcal{H}_x が G の表現だったとしよう. このとき, 各点で $\beta_x: G \curvearrowright \mathcal{A}_x$ が定まる. これは, ハミルトニアン集合 $\mathfrak{h}_\Lambda^{\text{al}}$, ひいてはその余極限である層 $\mathbb{J}\mathcal{P}_d$ への G の滑らかな作用 $\beta := \prod_x \beta_x$ を与える.

Kitaev ポンプおよびその他の §3 の議論はすべて G 同変にでき, その結果として族 $\{IP_d\}$ は G -スペクトラムを与えていることが証明できる. ただし, この G -スペクトラムはいわゆる $RO(G)$ -スペクトラムではなく, naive な G -スペクトラムである. そのかわり, (\mathcal{A}_x を適切に選んでおくことで) split G -スペクトラムではある. よって, §1.1 でいうところの写像 (2) が構成できる.

結局このことによって得られたのは, $d = 1, 2$ の SPT 相に関する既存の結果の多くの再証明と, 少しの新しい結果である. その比較リストは [10, Example 5.24] にあるが, 大まかには以下のようなになる.

- 1次元および2次元ボソン系では, 知られている SPT 相の分類が再現された.
- 2次元フェルミオン系では, $[BG, fIP_2]$ という群に値を取る不変量が得られた. これは緒方が [14] で構成していたものより値域が小さく, Wang–Gu が予想していたものと一致する.
- 任意の次元で, コホモロジー値不変量の一般化というべき

$$\text{ind}_d^G: IP_d^G \rightarrow [BG, IP_d]$$

が定義できた. 例えば $G = U(1)$ のとき, 両辺に \mathbb{Q} をテンソルすると, Kapustin–Sopenko による相互作用系の量子ホール効果の説明 [7] を再現する.

4.5 可逆なハミルトニアンの例

ここまでの議論の中で抽象的に定義されたハミルトニアンの集合がどのような元を含んでいるのか、簡単に紹介しておく。理論的には、自明なハミルトニアンを自己同型で動かすことによって多様なハミルトニアンが入手できる。我々の IP が十分豊富な元を持つことはこれによって保証されていると言ってもよい。これとは別に、もう少し物理的な文脈のあるハミルトニアンの構成法がいくつかある。

- 格子上の Dijkgraaf–Witten 模型。これは有限群 G の \mathbb{T} 値 $d+1$ -コサイクルから G 不変な d 次元の可逆ハミルトニアンを構成するものだったが、群コサイクルを Cech コサイクルに取り換えることで、最も一般的な形としては、有限群 G に対して G 同変コホモロジー関手の自然変換 $\Sigma^{-2}HZ \rightarrow IP$ を得る。
- 上でも述べた、自由フェルミオンの準自由第二量子化。これは最終的に自然変換 $\Sigma^{-2}KO \rightarrow fIP$ を与える。
- 1次元の行列積状態 (MPS)。これは写像 $K(\mathbb{Z}, 2) \times K(\mathbb{Z}, 3) \rightarrow IP_1$ を与える。これの2次元版と呼ぶべき PEPS に対しても同じようなことがやりたいが、本稿執筆時点では理解は進んでいない。

4.6 局所化流と Baum-Connes 予想

スピン系というのは、場の理論と類似しているであろうという共通理解がある。先行している可逆場の理論の研究を横目に見ると、そこでは「空間」には二つの役割がある。ひとつは（ここまで扱ってきたように）理論をラベルするパラメータ空間であり、もうひとつはその上で物理を考える実際の空間（時空）である。物性物理に話を戻すと、後者の空間とは物質の形状のことである。例えば、 S^n や T^n のような空間の上のスピン系を考えたいのは自然だろう。これが X のホモロジー理論を与えるとなお良い。

しかし、今の定義では、コンパクト空間 X が一点と区別できない。これは、我々のハミルトニアンに課されている「短距離性」が、単に $\|H\|_f$ が有限であることしか仮定しないところに原因がある。これがもし十分小さいと仮定されているのであれば、ハミルトニアンの集合は X の局所的なトポロジーをよく反映するかもしれない。しかし我々の仮定はもっと大味なので、例えば単位球面 S^2 上のレンジが 10000 以下のハミルトニアンというのは、単なる 0次元ハミルトニアンと見分けがつかない。

実は、これまでも手本として参照してきた粗指数理論では、「有限」を「無限小」に取り替えてこの問題をうまくクリアする方法が知られている。特に Yu の localization algebra という概念はこれを文字通り実現するものであり、コンセプチュアルな構成なので真似ができる。ここでは我々も Yu の定義のスピン系における対応物を考える。[10] では、この新しい概念を局所化流 (localization flow) と呼んでいる。この命名は、行列積状態の繰り込み群流と何らかの類似性が感じられることに由来する。

これは本研究の後半部分に相当し、増補版ではもう少し詳しく解説している。

参考文献

- [1] Adam Artymowicz, Anton Kapustin, and Nikita Sopenko, *Quantization of the higher Berry curvature and the higher Thouless pump*, Communications in Mathematical Physics **405** (2024), no. 8, 191.
- [2] Jonathan Beardsley, Kiran Luecke, and Jack Morava, *Brauer-Wall Groups and Truncated Picard Spectra of K-theory* (2023), preprint, [arXiv:2306.1011 \[math.KT\]](https://arxiv.org/abs/2306.1011).
- [3] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1*, 2nd ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-17093-6, (1987).
- [4] ———. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2*, 2nd ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-61443-5, (1997).
- [5] Daniel S. Freed, *Lectures on twisted K-theory and orientifolds* (2012), preprint, <https://web.ma.utexas.edu/users/daf/r/vienna.pdf>.
- [6] Zheng-Cheng Gu and Xiao-Gang Wen, *Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order*, Physical Review B **80** (2009), no. 15, 155131.
- [7] Anton Kapustin and Nikita Sopenko, *Local Noether theorem for quantum lattice systems and topological invariants of gapped states*, Journal of Mathematical Physics **63** (2022), no. 9, 091903.
- [8] Alexei Kitaev, *Periodic table for topological insulators and superconductors*, AIP Conference Proceedings **1134** (2009), no. 1, 22–30.
- [9] ———, *On the classification of short-range entangled states* (2013), Talk at Simons Center. http://scgp.stonybrook.edu/video_portal/video.php?id=2010.
- [10] Yosuke Kubota, *Stable homotopy theory of invertible gapped quantum spin systems II: Kitaev’s Ω -spectrum*, preprint, [arXiv:2503.12618 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/2503.12618).
- [11] Bruno Nachtergaele, Robert Sims, and Amanda Young, *Quasi-locality bounds for quantum lattice systems. I. Lieb-Robinson bounds, quasi-local maps, and spectral flow automorphisms*, Journal of Mathematical Physics **60** (2019), no. 6, 061101, 84.
- [12] Yoshiko Ogata, *A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries*, Transactions of the American Mathematical Society. Series B **8** (2021), 39–65.
- [13] ———, *An $H^3(G, \mathbb{T})$ -valued index of symmetry-protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional quantum spin systems*, Forum of Mathematics. Pi **9** (2021), Paper No. e13, 62.
- [14] ———, *An Invariant of Symmetry Protected Topological Phases with On-Site Finite Group Symmetry for Two-Dimensional Fermion Systems*, Communications in Mathematical Physics **395** (October 2022), no. 1, 405–457.
- [15] Frank Pollmann, Ari M. Turner, Erez Berg, and Masaki Oshikawa, *Entanglement spectrum of a topological phase in one dimension*, Physical Review B **81** (February 2010), no. 6, 064439.
- [16] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, ISBN 0-8218-3332-4, (2003).
- [17] Andreas P. Schnyder, Shinsei Ryu, Akira Furusaki, and Andreas W. W. Ludwig, *Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions*, Physical Review B **78** (November 2008), no. 19, 195125.
- [18] Nikita Sopenko, *An index for two-dimensional SPT states*, Journal of Mathematical Physics **62** (2021), no. 11, 111901.

Modular vector fields in non-commutative geometry and loop operations

谷口 東曜 (東大数理・JSPS 特別研究員 DC1)*

1 Introduction

Σ を向きの入った滑らかな実 2 次元閉多様体とし, $\mathfrak{g}(\Sigma)$ を \mathbb{R} 上の線型空間であって Σ 上の閉曲線の自由ホモトピー類を基底に持つものとする. Goldman は, [Gol86] において $\mathfrak{g}(\Sigma)$ に Lie 代数の構造を定めた. この Goldman Lie 代数の括弧積は, 2 つの曲線の交点での手術をもとにしているが, その定義は基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma)$ の表現の空間の Poisson 構造を位相的に抽出したものになっている. 具体的には, $n \geq 1$ として, Σ が連結かつ閉曲面の場合に affine scheme

$$X = \text{Hom}_{\text{grp}}(\pi, \text{GL}(n)) // \text{GL}(n)$$

を考えると, X にはシンプレクティック構造が入り, その上の関数環 $\mathcal{O}(X)$ への自然な写像

$$\mathfrak{g}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{O}(X): [x] \mapsto ([\rho] \mapsto \text{Tr}(\rho(x)))$$

が Lie 代数の準同型となるように Goldman Lie 代数の括弧積が定まっている. 括弧積の定義自体は任意の有向曲面に対して容易に適用でき, このような曲線のなす演算をループ演算という. Σ が境界を持つ場合には, Fock と Rosly [FR99] により X 上に Poisson 構造が入ることが分かっている.

ここで, 自由ループの空間 $\mathfrak{g}(\Sigma)$ は群環 $\mathbb{R}\pi$ 上の **trace space**

$$|\mathbb{R}\pi| := \text{HH}_0(\mathbb{R}\pi) \cong \mathbb{R}\pi / [\mathbb{R}\pi, \mathbb{R}\pi]$$

と同一視でき, 上の写像による対応のもとで非可換幾何版の関数空間だと思える. ここで HH_0 は 0 次の Hochschild ホモロジーを表し, これは任意の環について定まる. 標題にある非可換幾何とは, 非可換な環に対して上のような (微分) 幾何の類似を考えることとする. 上の例をさらに観察すると, Goldman Lie 代数は「本当の幾何」 X 上のシンプレクティック構造に対応する, 非可換版のシンプレクティック構造であると思える. 本稿では (コ) ホモロジーそのものよりもコサイクル, つまり derivations とその一般化を多く扱う.

Van den Bergh は, [vdB08] において非可換幾何版の (Poisson) bivector を double bracket という名前で導入した. 簡単のため体 \mathbb{K} 上で考えることにすると, double bracket とは一般の \mathbb{K} 代数 A 上の線型写像

$$\Pi: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$$

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: toyo(at)ms.u-tokyo.ac.jp

であって、適切な Leibniz 則を満たすものである。 $A = \mathbb{K}\pi$ の場合は、この上に double bracket κ を基点付き曲線の交差を用いて定めることができ、Goldman 括弧積を自然に誘導する。どちらについてもすぐ後で詳しく述べる。

著者の論文 [Tan25] の目的は、非可換幾何におけるモジュラーベクトル場を導入することである。Poisson 多様体 P とその上の体積形式 α , が与えられると、ベクトル場 \mathbf{m}_α が合成

$$\mathbf{m}_\alpha: C^\infty(P) \xrightarrow{\text{Ham}} \text{Der}(C^\infty(P)) \xrightarrow{\text{div}_\alpha} C^\infty(P)$$

として定まる。ここで Ham は P の Poisson 構造から定まる Hamiltonian flow であり、 div_α は α に関する発散写像である。以下では、まずこれら 2 つの写像の非可換幾何版を紹介し、それが曲面の場合 ($A = \mathbb{K}\pi$) に、Turaev が考えた別のループ演算 (と等価な演算) に一致することをみる。

2 Double Bracket と発散写像

以降 \mathbb{K} を標数 0 の体とし、 A を \mathbb{K} 上の (単位的) 結合代数とする。まずは bivector の類似物から考える。Van den Bergh が [vdB08] において導入した double bracket を土台とするが、ここでは [AKKN23] で扱われているように少し条件を緩めたものを採用する。

まず、テンソル積 $A \otimes A$ には次のようにして可換な 2 つの両側 A 加群の構造が入る。任意の元 $a, b, x, y \in A$ について、outer structure と呼ばれる作用を

$$a \cdot (x \otimes y) \cdot b = ax \otimes yb$$

で定め、inner structure と呼ばれる作用は

$$a * (x \otimes y) * b = xb \otimes ay$$

で定める。

定義 2.1. A 上の double bracket とは \mathbb{K} -線型写像 $\Pi: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ であって

$$\begin{aligned} \Pi(a, bc) &= \Pi(a, b) \cdot c + b \cdot \Pi(a, c) \\ \Pi(ab, c) &= \Pi(a, c) * b + a * \Pi(b, c) \end{aligned}$$

を任意の $a, b, c \in A$ について満たすものである。

重要な例として、2次元トポロジーに現れるループの演算から定まる double bracket κ を紹介する。これは Massuyeau–Turaev [MT14] と河澄–久野 [KK15] によって独立に導入されたものである。 Σ を連結でコンパクトな有向曲面とし、境界は空でないものとする。基点 $*$ を境界 $\partial\Sigma$ 上に取り、基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ 上の群環 $A = \mathbb{K}\pi$ を考える。正の向きの短い弧 $\nu: [0, 1] \rightarrow \partial\Sigma$ を $\nu(1) = *$ となるように取って、 $\nu(0) = \bullet$ とおく。これを用いて

$\pi_1(\Sigma, \bullet)$ は $\pi_1(\Sigma, *)$ と同一視する. 一般の位置にある閉曲線であって, 基点を \bullet にもつ α と, 基点を $*$ にもつ β に対して

$$\kappa(\alpha, \beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \text{sign}(\alpha, \beta; p) \beta_{*p} \alpha_{p\bullet} \nu \otimes \nu^{-1} \alpha_{\bullet p} \beta_{p*},$$

と定める. ここで $\text{sign}(\alpha, \beta; p) \in \{\pm 1\}$ は Σ の向きに関する局所交点数であり, β_{*p} は $*$ から p まで β に沿って進む曲線である. 他も同様である.

ここでは Poisson bivector の満たすべき Jacobi 恒等式の類似物の定義は割愛する. 一般の double bracket に対しての扱いは [vdB08] を, κ の場合の計算は [MT14] を参照されたい.

定義 2.2. A 上の **double derivation** とは \mathbb{K} -線型写像 $\theta: A \rightarrow A \otimes A$ であって

$$\theta(ab) = \theta(a) \cdot b + a \cdot \theta(b)$$

を任意の $a, b \in A$ について満たすものである. A 上の double derivation 全体の集合を $\text{DDer}(A)$ とする.

Double bracket Π が与えられると, 1つ目の条件式により $\Pi(a, \cdot)$ は double derivation である. そこで

$$\Pi: A \rightarrow \text{DDer}(A) : a \mapsto \Pi(a, \cdot),$$

と (記号を濫用して) 書くこととする. これは通常の Poisson 幾何では Hamiltonian flow に対応するものである.

次に発散写像について考える. 上で述べたように, Poisson 多様体 P 上の発散写像は体積形式 α を選ぶごとに

$$\text{div}_\alpha: \Gamma(TP) \rightarrow C^\infty(P), \quad \text{div}_\alpha(\xi)\alpha = L_\xi(\alpha) \in \Omega^{\text{top}}(P)$$

で特徴付けられる. ここで L_ξ はベクトル場 ξ による Lie 微分である. ここで, 体積形式 α を選ぶことは, 階数 1 のベクトル束 $\wedge^{\text{top}} T^*P$ 上の平坦接続 ∇ であって $\nabla(\alpha) = 0$ で指定されるものと等価であり, ファイバーごとのトレース Tr を用いて

$$\text{div}_\alpha(\xi) = \text{Tr}(L_\xi - \nabla_\xi) \tag{1}$$

が成り立つ.

以上の観察のもとで, 非可換幾何の枠組みでも発散写像を導入しよう. $A^e = A \otimes A^{\text{op}}$ を A の普遍包絡代数とする. (ここで述べるような流儀の) 非可換幾何の一般論は [Gin05] を参照されたい.

定義 2.3.

- **非可換 1-形式**の空間 $\Omega^1 A$ は, 両側 A 加群として記号 da ($a \in A$) で生成され, 関係式

$$d(\lambda a + \lambda' a') = \lambda da + \lambda' da', \quad d(aa') = da a' + ada'$$

を各 $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, $a, a' \in A$ について課すものとする. すると, double derivation $\theta \in \text{DDer}(A)$ は両側 A 加群の写像 $i_\theta: \Omega^1 A \rightarrow A \otimes A$ と等価であり, それらの関係は $i_\theta(da) = \theta(a)$ で与えられる.

- Double derivation $\theta \in \text{DDer}(A)$ による $\Omega^1 A$ 上の **Lie 微分** L_θ は

$$L_\theta(adb) = \theta(a)' \otimes \theta(a)'' db + ad\theta(b)' \otimes \theta(b)'' + a\theta(b)' \otimes d\theta(b)''$$

で定まる. ここで Sweedler の記法 $\theta(a) = \theta(a)' \otimes \theta(a)''$ を用いた. 上の式の右辺は $(\Omega^1 A \otimes A) \oplus (A \otimes \Omega^1 A)$ に値をもつ.

- 両側 A 加群 E 上の**接続**とは \mathbb{K} -線型写像

$$\nabla: E \rightarrow \Omega^1 A \otimes_A E \oplus E \otimes_A \Omega^1 A$$

であって Leibniz 則

$$\nabla(aeb) = da \otimes eb + a\nabla(e)b + ae \otimes db$$

を任意の $a, b \in A$ と $e \in E$ について満たすものである.

- E 上の接続 ∇ と double derivation θ が与えられたとき, 写像 ∇_θ を合成

$$\begin{aligned} \nabla_\theta: E &\xrightarrow{\nabla} \Omega^1 A \otimes_A E \oplus E \otimes_A \Omega^1 A \\ &\xrightarrow{i_\theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes i_\theta} (A \otimes A) \otimes_A E \oplus E \otimes_A (A \otimes A) \cong (A \otimes E) \oplus (E \otimes A) \end{aligned}$$

で定める. とくに $E = \Omega^1 A$ の場合は, ∇_θ と L_θ の定義域, 値域はそれぞれ同じものである.

さて, 式 (1) を再現するにはトレースをとる写像が必要であるが, それはより一般的な形で定義することができる.

定義 2.4. B を一般の \mathbb{K} -結合代数とし, E を左 B 加群, W を両側 B 加群とする. また, E は B 上有限生成かつ射影的とする^{*1}. このとき, **トレース** Tr は合成

$$\begin{aligned} \text{Tr}: \text{Hom}_B(E, W \otimes_B E) &\cong E^* \otimes_B W \otimes_B E \rightarrow |W| := \text{HH}_0(B, W) \cong W/[B, W] \\ \varepsilon \otimes w \otimes e &\mapsto \varepsilon(e)w \end{aligned}$$

で定まる. ここで $E^* = \text{Hom}_B(E, B)$ は E の双対であり, これは右 B 加群である.

^{*1} この条件は E が完全, つまり有限生成射影加群による有限長の分解を持つことに緩められる.

これを $B = A^e$, $E = \Omega^1 A$, $W = (A \otimes A \otimes A^{\text{op}}) \oplus (A \otimes A^{\text{op}} \otimes A^{\text{op}})$ として適用する.
標準的な同一視

$$(A \otimes E) \oplus (E \otimes A) \cong W \otimes_B E$$

があることに注意する.

定義 2.5. $\Omega^1 A$ 上の接続 ∇ に伴う **triple divergence** を

$$\begin{aligned} \text{TDiv}^\nabla: \text{DDer}(A) &\rightarrow |W| \cong A \otimes |A| \oplus |A| \otimes A \\ \theta &\mapsto \text{Tr}(L_\theta - \nabla_\theta) \end{aligned}$$

で定める.

これを double bracket Π と合わせると, 合成

$$\phi_{\Pi, \nabla}: A \xrightarrow{\Pi} \text{DDer}(A) \xrightarrow{\text{TDiv}^\nabla} A \otimes |A| \oplus |A| \otimes A$$

を得て, これがモジュラーベクトル場の類似物である.

3 Turaev の演算 μ

ここでは, Turaev が [Tur79] で導入したループの演算 (と等価な演算) μ を紹介する.
曲面 Σ と基点 $\bullet, *$ は上のおりとし, Σ 上の framing (すなわち特異点を持たないベクトル場) fr を 1 つ固定する. 定義は [AKKN23] になった.

定義 3.1. \mathbb{K} -線型写像 $\mu_r: \mathbb{K}\pi \rightarrow |\mathbb{K}\pi| \otimes \mathbb{K}\pi$ を次で定める. 基点を $*$ にもつ, 一般の位置にある閉曲線 $\alpha \in \pi$ について, その端点を弧 ν に沿ってずらすことで \bullet から $*$ への道とし, monogons をいくつか挿入して fr についての回転数 $\text{rot}^{\text{fr}}(\alpha)$ が $-1/2$ となるようにする. そこで

$$\mu_r(\alpha) = \sum_{p \in \text{Self}(\alpha)} \text{sign}(p; \alpha_{\text{first}}, \alpha_{\text{second}}) |\alpha_{pp}| \otimes \alpha_{\bullet p^*}$$

と定める. ここで $\text{Self}(\alpha)$ は α の自己交差点の集合であり, α_{first} は α の p を 1 回目に通るときの速度ベクトルである. α_{second} も同様に定める.

また, \mathbb{K} -線型写像 $\mu_l: \mathbb{K}\pi \rightarrow \mathbb{K}\pi \otimes |\mathbb{K}\pi|$ を次で定める. 基点を $*$ にもつ, 一般の位置にある閉曲線 $\alpha \in \pi$ について, その端点を弧 ν に沿ってずらすことで \bullet から $*$ への道とし, monogons をいくつか挿入して fr についての回転数 $\text{rot}^{\text{fr}}(\alpha)$ が今度は $1/2$ となるようにする. そこで

$$\mu_l(\alpha) = - \sum_{p \in \text{Self}(\alpha)} \text{sign}(p; \alpha_{\text{first}}, \alpha_{\text{second}}) \alpha_{* p \bullet} \otimes |\alpha_{pp}|$$

と定める. 最後に $\mu = \mu_r + \mu_l: \mathbb{K}\pi \rightarrow (|\mathbb{K}\pi| \otimes \mathbb{K}\pi) \oplus (\mathbb{K}\pi \otimes |\mathbb{K}\pi|)$ とおく.

さて、前節の構成を $A = \mathbb{K}\pi$ の場合に適用すると $\phi_{\Pi, \nabla}$ がどのような写像になるか考えよう。その前に、 $\Omega^1 A$ が定義 2.4 の仮定を満たすことを確かめる必要がある。上の曲面 Σ について基本群 π は有限生成自由群であることに注意する。

補題 3.2. 上の曲面 Σ について、両側 A 加群 $\Omega^1 A$ は有限生成かつ自由である。とくに、 π の自由生成系 $\mathcal{C} = \{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq r}$ をとるごとに、集合 $\{d\gamma_i\}_{1 \leq i \leq r}$ は $\Omega^1 A$ の A^e 加群としての基底である。

上の補題を用いて、 \mathcal{C} に付随する接続 $\nabla_{\mathcal{C}}$ を、各 i について

$$\nabla_{\mathcal{C}}(d\gamma_i \gamma_i^{-1}) = 0$$

で定める。このようなものは Leibniz 則により一意に定まる。すると、主結果は以下のよう
に述べられる。

定理 3.3 ([Tan25]). 単純閉曲線からなる自由生成系 \mathcal{C} を適切にとり、framing fr を各 $c \in \mathcal{C}$ について $\text{rot}^{\text{fr}}(c) = 0$ となるものとする。このとき、 $\phi_{\kappa, \nabla_{\mathcal{C}}} = \mu$ が成り立つ。

証明は、自由生成系 \mathcal{C} 上での値が等しいことと、同じ形の (Leibniz 則に似た) 乗法性を満たすことを確認する。

発散写像 (あるいは自己準同型のトレース) は、「自分が自分に作用することで計算される値」である。一方で μ は自分を自己交差で切る演算であり、上の定理はこの点において μ と発散写像を関連づけていると解釈できる。

謝辞. 本研究集会にお呼びくださいました世話人の佐藤先生には、この場をお借りして感謝申し上げます。

参考文献

- [AKKN23] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, Version 3. 2023. [arXiv:1804.09566v3](https://arxiv.org/abs/1804.09566v3).
- [FR99] V. V. Fock and A. A. Rosly. Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r -matrix. *American Mathematical Society Translations*, 191(2):67–86, 1999. [arXiv:math/9802054](https://arxiv.org/abs/math/9802054).
- [Gin05] Victor Ginzburg. Lectures on noncommutative geometry. 2005. [arXiv:math/0506603](https://arxiv.org/abs/math/0506603).
- [Gol86] William M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Inventiones mathematicae*, 85(2):263–302, 1986. [doi:10.1007/BF01389091](https://doi.org/10.1007/BF01389091).
- [KK15] Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno. Intersection of curves on surfaces and their applications to mapping class groups. *Annales de l'Institut Fourier*, 65(6):2711–2762,

2015. [arXiv:1112.3841](#), [doi:10.5802/aif.3001](#).
- [MT14] Gwenael Massuyeau and Vladimir Turaev. Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces. *International Mathematics Research Notices*, 2014:1:1–64, 2014. [arXiv:1205.4898v3](#).
- [Tan25] Toyo Taniguchi. Modular vector fields in non-commutative geometry. *Journal of Geometry and Physics*, 216:105565, 2025. [arXiv:2410.24064](#), [doi:10.1016/j.geomphys.2025.105565](#).
- [Tur79] Vladimir G. Turaev. Intersections of loops in two-dimensional manifolds. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 35(2):229–250, 1979. [doi:10.1070/sm1979v035n02abeh001471](#).
- [vdB08] Michel van den Bergh. Double Poisson algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(11):5711–5769, 2008. [arXiv:math/0410528](#).

複素曲面特異点リンクにまつわるはめ込みとそのトポロジー

田邊 真郷（北海道大学大学院理学院数学専攻，JSPS 特別研究員 DC2）*

1 はじめに

多様体のはめ込みに関する大域的研究の発端は，Whitney が多様体の現代的な定義を与えると同時に発表したはめ込み・埋め込み定理 [Whi36] だと思われる．これによって多様体のはめ込み可能性の研究が隆盛したが，一方で分類問題も大きな興味の対象であった．Whitney–Graustein は正則閉曲線を回転数によって分類し [Whi37]，それを包括する形で，Smale, Hirsch ははめ込みの分類問題をホモトピー論に帰着した [Sma59a, Sma59b, Hir59]．彼らの理論は今日でいう h -原理の源泉でもある．その後も多くの研究者たちによって，分類の完全不変量やその計算公式などが与えられた．今世紀からは，可微分写像の特異点論の観点から不変量の新解釈が与えられたり，それによって具体的なはめ込みの構成・不変量の計算も行われたりと，目覚ましい発展を見せている [ES03, SST02, ET11, Kin15]．以上の事例から，はめ込みのトポロジーは写像のトポロジーの中心的テーマの一つとして，幾何学の発展と共に深く研究されてきたと言える．

複素特異点のトポロジーに関する研究もまた深い歴史を持つ．1928年，Brauerによって複素平面曲線の Brieskorn 特異点とトーラス結び目の間の関係が発見されて以降，Mumford, Milnor, Brieskorn をはじめとする多くの研究者たちによって，特異点とトポロジーの関わりが明らかにされてきた [Bra28, Mil68]．なかでもリンク・Milnor ファイバーは，特異点の性格を象徴する重要な多様体として有名である．これらは Poincaré のホモロジー 3次元球面やエキゾチック球面といった（微分）トポロジーの研究においても重要な対象を例に持つほか，接触幾何・シンプレクティック幾何・複素幾何の観点からも，東化定理やそれに付随する開本構造を通じて研究されてきた．

本稿で紹介する筆者の研究は，これら二つの潮流の交叉点に位置づけられる．本稿の構成は以下の通りである．まず，はめ込みおよび特異点リンクの概要を筆者の知識が及ぶ範囲で振り返る．その後，筆者が特異点リンクをはめ込みの観点から研究して得られた結果を紹介する．最後に，今後の展望についても少し述べる．詳細は [Tan25a, Tan25b] やその参考文献を参照されたい．なお，特に断らない限り，多様体や写像はすべて C^∞ 級とする．

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 西 8 北海道大学大学院理学院数学専攻
メールアドレス: tanabe.masato.i8@elms.hokudai.ac.jp または tanabemasatono34@gmail.com
HP: <https://sites.google.com/view/masatotanabe>
本研究は科研費（課題番号: 25KJ0480）の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: 32S25 (primary), 53D15, 57R42 (secondary)
キーワード: はめ込み, 複素特異点, 単純特異点, 概接触構造, 複素接触

2 はめ込みのトポロジー

埋め込み・はめ込みの理論を詳説した和書として [足立 84] がある。最近出版された [田中 25] でも、古典から今日に至るまでの豊富な話題が紹介されている。

2.1 Smale–Hirsch 理論

多様体 M, N 間の写像 $f: M \rightarrow N$ が**はめ込み**であるとは、任意の点 $x \in M$ における微分 $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射であることをいう。はめ込みを $f: M \looparrowright N$ と表す。

M の N へのはめ込み全体が成す空間に C^∞ 位相が備わったものを $\text{Imm}(M, N)$ と書き、 $\text{Imm}[M, N] := \pi_0(\text{Imm}(M, N))$ と置く。二つのはめ込み $f, g: M \looparrowright N$ が $\text{Imm}[M, N]$ において同じ元を定めるとき、 f と g は**正則ホモトピック**であるという。

はめ込みの分類問題とは、集合 $\text{Imm}[M, N]$ の研究である。分類問題のはじまりに相当する業績は以下の四つであろう。一つ目は Whitney–Graustein の定理である。

定理 2.1 ([Whi37]). 正則閉曲線に対してその回転数を与える写像は、 $\text{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2]$ から $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ への全単射を引き起こす。

この定理は、正則ホモトピック性という（単なるホモトピック性よりも）デリケートな概念が、微分写像の単なるホモトピック性に帰着できるという、大きな示唆を含んでいた。その精神を汲んで、Smale は以下の事実を発見した。 \mathbb{R}^n における一次独立な k 本のベクトルの組全体が成す空間（**Stiefel 多様体**）を $V_{n,k}$ と表す。

定理 2.2 ([Sma59a]). $\text{Imm}[S^2, \mathbb{R}^n]$ からホモトピー群 $\pi_2(V_{n,2})$ への全単射が存在する。

系 2.3 (球面の裏返し). $\text{Imm}[S^2, \mathbb{R}^3]$ は一点集合である。特に、標準的な埋め込み $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ について、 ι と $-\iota$ ははめ込みとして正則ホモトピックである。

第三の結果も Smale による。彼は上の結果から程なくして、任意次元の球面の Euclid 空間へのはめ込みの分類を、**Smale 不変量** Ω という完全不変量の構成によって達成した。 $\text{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n]$ に、はめ込みの連結和で群構造を備える。

定理 2.4 ([Sma59b]). $n > k + 1$ ならば、 $\Omega: \text{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n] \rightarrow \pi_k(V_{n,k})$ は群同型である。

例 2.5. Smale 不変量 $\Omega: \text{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ は「回転数引く 1」によって与えられる。また、 $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \pi_3(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり^{*1}、 $\text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^5] \cong \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathbb{Z}$ である。

^{*1} この場合 ($n = k + 1$) は定理の仮定を充たさず、正則ホモトピーの基点に関する問題を考える必要がある。しかし、 $\pi_1(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z}_2$ の $\pi_3(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ への作用が自明なこと、したがって $\pi_3(V_{4,3})$ は $[S^3, V_{4,3}]$ に全単射であることから、結果としては問題ない。

そして、第四の結果は Hirsch によって与えられた。少しだけ用語を準備する。

定義 2.6. 連続な束準同型 $F: TM \rightarrow TN$ が**形式的なはめ込み**であるとは、任意の点 $x \in M$ において、線型写像 $F_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ が単射であることをいう。

M の N への形式的なはめ込み全体が成す空間にコンパクト開位相が備わったものを $\text{Mon}(M, N)$ と書き、 $\text{Mon}[M, N] := \pi_0(\text{Mon}(M, N))$ と置く。Hirsch の定理を述べよう。

定理 2.7 ([Hir59]). 微分写像 $\text{Imm}(M, N) \rightarrow \text{Mon}(M, N)$; $f \mapsto df$ は弱ホモトピー同値である。特に、 $\text{Imm}[M, N] \rightarrow \text{Mon}[M, N]$ は全単射である。

$\text{Mon}[M, N]$ は $\text{Imm}[M, N]$ よりも格段に扱いやすい。というのも、形式的なはめ込みにおいて、ファイバー方向の振舞いは底空間方向を尊重する必要がないからである。

例 2.8. M を平行化可能多様体（つまり、接束 TM が自明である）とする。このとき、二つの自明化 $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を固定すれば, 全単射

$$\text{Imm}[M, \mathbb{R}^n] = \text{Mon}[M, \mathbb{R}^n] = [M, \mathbb{R}^n \times V_{n,m}] = [M, V_{n,m}]$$

を得る。ただし、 $[X, Y]$ は連続写像のホモトピー集合を表す。

このように、はめ込みの分類理論は「微分写像のホモトピー論」へと厳密に帰着された。今日では、彼らの業績はまとめて **Smale–Hirsch 理論**と呼ばれている。

2.2 特異 Seifert 膜の方法論

Smale 不変量や、Hirsch の結果を具体的状況下で適用しようとする時、現れる不変量の解釈や計算可能性に関する問題が立ち上がる。Ekholm–Szűcs は、 $S^{4m-1} \looparrowright \mathbb{R}^{4m+1}$ の Smale 不変量に対する新解釈を与えた。そこには、可微分写像の特異点論における Thom 多項式理論が応用された。

定理 2.9 ([ES03], $m = 1$ 版). はめ込み $f: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して、 S^3 を境界に持つ有向コンパクト 4次元多様体 X^4 および然るべき条件を充たす拡張写像 $\hat{f}: X^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ をとる。このとき、 f の Smale 不変量は

$$\Omega(f) = \frac{3}{2}\sigma(X^4) + \frac{1}{2}\#\Sigma^{1,1}(\hat{f}) \in \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathbb{Z}$$

により与えられる。ただし、 $\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数、 $\#\Sigma^{1,1}(\hat{f})$ は \hat{f} の上に現れる $\Sigma^{1,1}$ 型特異点の代数的数え上げである。

上記のような \hat{f} を、結び目理論の術語に倣って f の**特異 Seifert 膜**という。この概念は他幾つかの状況にも応用され、はめ込みの不変量に新解釈を与えてきた [SST02, ET11].

3 特異点リンク

$h: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を、原点に孤立特異点を持つ複素正則函数芽とする。このとき、曲面 $(h^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ は原点に孤立特異点を持つ。これを $(\mathbb{C}^3$ 内の) **複素曲面特異点** と言う。複素曲面特異点については、最近出版された入門書 [都丸・奥間 25] も参照されたい。

定理-定義 3.1 ([Mil68]). 充分小さな正数 ε に対して $K = K_\varepsilon := h^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^5$ は有向閉 3 次元多様体を成す。これを h の **リンク** という。さらに、上記の ε に依存して充分小さな正数 δ に対し、偏角写像および制限

$$h/|h|: S_\varepsilon^5 - K_\varepsilon \rightarrow S^1, \quad h|_{h^{-1}(S_\delta^1) \cap \text{Int } B_\varepsilon^6}: h^{-1}(S_\delta^1) \cap \text{Int } B_\varepsilon^6 \rightarrow S_\delta^1$$

は局所自明なファイブレーションであり、互いに同型である。そして、 $h/|h|$ のファイバーの閉包 $F = F_{\varepsilon, \delta}$ は K を境界に持つ有向コンパクト 4 次元多様体を成す。これを h の **Milnor ファイバー** という。

注意 3.2. 上述の同型を通じて、 F は境界付き複素曲面 $h^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon^6$ と見做せる。

Arnol'd は、複素函数芽 $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対してモダリティと呼ばれる概念を導入し、高々 2 のモダリティを持つ函数芽の完全な分類を与えた [Arn72, Arn73, Arn76] ([AGV85] も参照)。なかでも、モダリティ 0 の特異点を **単純特異点** といい、函数芽が 3 変数の場合には以下のように分類される [Arn72]:

- A_{n-1} ($n \geq 2$): $x^2 + y^2 + z^n$
- D_{n+2} ($n \geq 2$): $x^2 + y^2z + z^{n+1}$
- $E_6: x^2 + y^3 + z^4, \quad E_7: x^2 + y^3 + yz^3, \quad E_8: x^2 + y^3 + z^5$

単純特異点は、正多面体や単純 Lie 代数といった数学の重要なトピックと深く関連している。このことから、**Klein 特異点**, **du Val 特異点**, **有理二重特異点** といった別名を持つ。

以下では、単純特異点から定まるリンク (**単純特異点リンク**) が持つ幾何構造を紹介する。

3.1 軌道空間としての単純特異点リンク

Arnol'd の分類よりもずっと昔、Klein は $SU(2)$ の有限部分群を分類し、それらが以下のように単純特異点 (と後に呼ばれたクラスの特異点) と対応することを示した [Kle56].

- A_{n-1} ($n \geq 2$): 位数 n の巡回群 C_n
- D_{n+2} ($n \geq 2$): 位数 $4n$ の二項二面体群 Dic_n
- E_6 : 二項四面体群 $2T$, E_7 : 二項八面体群 $2O$, E_8 : 二項十二面体群 $2I$

$\Gamma \subset SU(2)$ を上記の群の一つとする。 Γ は \mathbb{C}^2 に左から作用し、商特異点 $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ を定める。Klein は $\Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ が \mathbb{C}^3 内の複素曲面の特異点として実現されることを示した。そして、ここ

に現れる曲面の定義方程式が、対応する単純特異点のそれであった。このとき、軌道空間 $\Gamma \backslash S^3$ は、対応する特異点のリンク K に微分同相となることに注意する（言い換えれば、リンク K は S^3 からの普遍被覆 $p: S^3 \rightarrow K$ であって被覆変換群が Γ なるものを許容する）。

3.2 鉛管多様体としての単純特異点リンク

単純特異点のブローアップによる極小特異点解消に対して、重み付きグラフ G を「例外曲線ごとに頂点（重みは自己交叉数）を置き、例外曲線の交わりごとに辺を結ぶ」ことで構成する。このとき、件の特異点解消およびリンクは、 G を台グラフとするような鉛管 4 (resp. 3) 次元多様体 $X(G)$ (resp. $M(G)$) に微分同相となる。さらに、得られるグラフ G は、以下に示す **Dynkin 図形** と一致する。

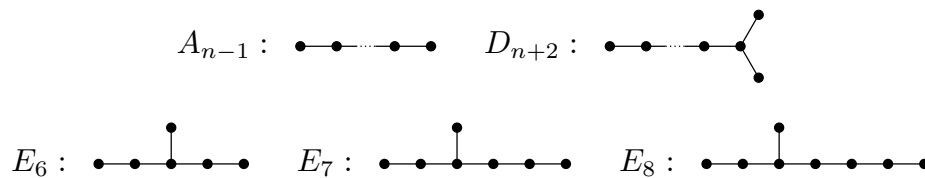


図1 A-D-E 型の Dynkin 図形（頂点数は添字と一致する。頂点は重み -2 ）

単純特異点に限っては、その Milnor ファイバー F も $X(G)$ に微分同相となる [Bri66, Bri68, Bri70] ([OO05] も参照)。ただし、極小特異点解消と Milnor ファイバーそれぞれが許容する自然な複素構造は対極にある。実際、極小特異点解消は例外曲線たちを複素部分多様体として持つ一方、複素曲面としての F は \mathbb{C}^3 の複素部分多様体なので、コンパクトで境界のない複素部分多様体を持たない。

4 動機

本研究は、以下二つの独立した先行研究に動機付けられて始まった。

一つ目の研究は Némethi–Pintér による [NP15]。彼らは、 $(\mathbb{C}^2, 0)$ からのパラメタづけを持つような \mathbb{C}^3 内の曲面孤立特異点に対し、以下の手続きではめ込みを得た。特異点のパラメタづけを $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ と置く。 \mathbb{C}^3 内で原点を中心とする充分小さな球面 S_ε^5 をとり、逆像 $\mathcal{G} := \Phi^{-1}(S_\varepsilon^5)$ を考える。 \mathcal{G} は S^3 に微分同相であることから、はめ込み $\Phi|_{\mathcal{G}}: S^3 \hookrightarrow S_\varepsilon^5 - \{1\text{pt.}\} = \mathbb{R}^5$ が得られる。彼らの主結果は、 Φ が持つ複素特異点の重複度と $\Phi|_{\mathcal{G}}$ の Smale 不変量に関係づける公式であったが、その具体例として以下を述べている。

定理 4.1 ([NP15]). 単純特異点とそのパラメタづけ $\Phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\Gamma \setminus \mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ に対し, 誘導されるはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}}) \in \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}}) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}); \\ -167 & (E_6 \text{ の場合}); \\ -383 & (E_7 \text{ の場合}); \\ -1079 & (E_8 \text{ の場合}). \end{cases}$$

ここで, 上記のはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}$ は

$$\Phi|_{\mathfrak{S}} = f \circ p: S^3 \rightarrow \Gamma \setminus S^3 \cong K \hookrightarrow \mathbb{R}^5$$

と分解されることに注意しておく. ただし, p はリンク上の普遍被覆を, f はリンクの $S^3 - \{1\text{pt.}\} = \mathbb{R}^5$ への包含写像を表す.

二つ目の研究は, Kinjo による, 単純特異点リンクを通じた非自明なはめ込みの構成およびその Smale 不変量の計算である [Kin15]. Kinjo は, 単純特異点リンクの鉛管構造に注目し, 以下のようにはめ込みを構成した. まず, はめ込み $w: S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$ であって, 正の自己交叉を唯一つだけ持つようなもの (Whitney の球面) を考える. この法 Euler 数は -2 であるため, 法束は余接束 T^*S^2 に同型である. 法束の円盤化・円周化をそれぞれ

$$\hat{g}_{A_1}: DT^*S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_{A_1}: UT^*S^2 \looparrowright \mathbb{R}^4$$

と置こう. $DT^*S^2 = X(A_1)$ および $UT^*S^2 = M(A_1)$ に注意 (記号は 3.2 節を参照) すれば, A_1 型リンクの \mathbb{R}^4 へのはめ込みが得られたことになる. あとはこれをはめ込みごと鉛管工事することで, 任意の A - D - E 型 Dynkin 図形 G に対して, はめ込み

$$\hat{g}_G: X(G) \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_G: M(G) \looparrowright \mathbb{R}^4$$

が得られる. Kinjo は, g_G を普遍被覆 $p: S^3 \rightarrow M(G)$ で引き戻すことによって, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ を得た. そして, A 型および D 型に対して, 以下の結果を得た.

定理 4.2 ([Kin15]). A 型および D 型の単純特異点, および対応する Dynkin 図形 G を考える. このとき, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}). \end{cases}$$

注意が二点ある. 一点目に, Kinjo の結果は $M(G)$ の向きを裏返したものに対する計算であって, 上記の結果はそれを裏返し直したものである. 二点目に, Kinjo の手法は E 型に応用可能ではなかった. というのも, Smale 不変量の計算は, 2.2 節で紹介した特異 Seifert 膜の技巧的な構成に依拠していたためである. (膜上の特異点の数え上げには Ekholm–Takase の公式 [ET11] が用いられた.)

上記二つの研究は、それぞれ異なる動機から始まり、手法も別物であったにも拘らず、ある関係を持っていた。 $j: \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ で標準的な包含写像を表す。

系 4.3. A 型・ D 型の単純特異点、および対応する Dynkin 図形 G を考える。このとき、はめ込み $j \circ g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(j \circ g_G \circ p) \in \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(j \circ g_G \circ p) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}). \end{cases}$$

この事実、定理 3.1, そして Smale 不変量が正則ホモトピー分類の完全不変量であることから、 A 型と D 型の場合には、二つのはめ込み $\Phi|_{\mathcal{E}} = f \circ p$ と $j \circ g_G \circ p$ は正則ホモトピックであることが分かる。この現象は既に [NP15, Kin15] 両者から指摘されていたが、幾何学的な理由は調べられていなかった。すると、以下の問いが立ち上がる。

- (Q1) E 型に対しても g_G の Smale 不変量が求められるか？
- (Q2) そもそも f と $j \circ g_G$ が正則ホモトピックなのではないか？

筆者はこれらを肯定的に解決した。その説明のために、以下で有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類について振り返る。

5 有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類

M^3 を有向連結閉 3 次元多様体とする。 M^3 は平行化可能だから、例 2.8 により全単射

$$\text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5] = [M^3, V_{5,3}]$$

を得る。 Wu は [Wu64] において、右辺のホモトピー集合を解析し、 M^3 の \mathbb{R}^5 へのはめ込みに対する完全不変量を得た。これは二つの不変量から成る。一つ目は M^3 の 2-骨格上で定まる **Wu 不変量**、二つ目は Smale 不変量の類似に相当する **Smale 型不変量** である。ただし、Wu が与えた Smale 型不変量の表式は具体的計算に向かなかった。これを改善したのが Saeki–Szűcs–Takase [SST02] (はめ込みの法束が自明な場合。後述する) および Juhász [Juh05] (一般の場合。割愛する) であった。

定義 5.1 (Wu 不変量). 平行化 $\tau: TM^3 \rightarrow M^3 \times \mathbb{R}^3$ を固定する。 はめ込み $f: M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して、その微分の τ (および \mathbb{R}^5 の標準的な平行化) に沿った行列表現を $df^\tau: M^3 \rightarrow V_{5,3}$ と置く。また、生成元 $\Sigma \in H^2(V_{5,3}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を、有向円周束 $\text{SO}(5) \rightarrow \text{SO}(5)/\text{SO}(2) \cong V_{5,3}$ の Euler 類が 2Σ となるように選ぶ。このとき、引き戻し

$$c_\tau(f) := (df^\tau)^*(\Sigma) \in H^2(M^3; \mathbb{Z})$$

を f の τ に関する **Wu 不変量** という。

注意 5.2. 生成元 Σ の選び方から, Wu 不変量の 2 倍は f の法 Euler 類となる. しかし, Wu 不変量自体の値は, M^3 の平行化の選び方に依存して切り替わる [Tan25a, Appendix]. このため, Wu 不変量の計算では, そもそも平行化をどのように選ぶかが重要となる.

定理–定義 5.3 (Smale 型不変量 [SST02]). 法束が自明なはめ込み $f: M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して, M^3 を境界に持つ有向コンパクト 4 次元多様体 X^4 および f の特異 Seifert 膜 $\hat{f}: X^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ をとる. このとき, 整数値

$$i(f) := \frac{3}{2}(\sigma(X^4) - \alpha(M^3)) + \frac{1}{2}\#\Sigma^{1,1}(\hat{f}) \in \mathbb{Z}$$

が f の正則ホモトピー類のみによって定まる. これを f の **Smale 型不変量** という. ただし, $\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数, $\alpha(M^3) := \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Tor } H_1(M^3; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, $\#\Sigma^{1,1}(\hat{f})$ は \hat{f} に現れる $\Sigma^{1,1}$ 型特異点の代数的数え上げである (\hat{f} がはめ込みならば $\#\Sigma^{1,1}(\hat{f}) = 0$).

この下で, [SST02] は以下を示した. 法束が自明なはめ込み $M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の正則ホモトピー類全体が成す集合を $\text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0$ と書き, $\Gamma_2(0) := \{C \in H^2(M^3; \mathbb{Z}) \mid 2C = 0\}$ と置く.

定理 5.4 ([Wu64, SST02]). 対応 $(c_\tau, i): \text{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5]_0 \rightarrow \Gamma_2(0) \times \mathbb{Z}$ は全単射である.

6 主結果

問題 (Q1), (Q2) において注目していた包含写像 $f: K \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ とはめ込み $j \circ g_G: M(G) \looparrowright \mathbb{R}^5$ の定義域は, それぞれリンク K と鉛管多様体 $M(G)$ であり, ある微分同相によって同一視できる. 微分同相を固定すれば, f と $j \circ g_G$ の正則ホモトピック性を問うことに意味がある. しかもそれは, 定理 5.4 から, Wu 不変量と Smale 型不変量の比較によって判定できる. 筆者はこの方針に基づき, 問題 (Q2) を肯定的に解決した. 主定理は以下の通りである.

定理 6.1 ([Tan25a]). 任意の単純特異点を考え, そのリンクを K , Milnor ファイバーを F , 対応する Dynkin 図形を G とする. K の平行化 $\tau: TK \rightarrow K \times \mathbb{R}^3$ を, K 上の標準接触構造に沿って固定する (後述). このとき,

$$(c_\tau(f), i(f)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(F) - \alpha(K))\right), \quad (1)$$

$$(c_\tau(j \circ g_G), i(j \circ g_G)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(X(G)) - \alpha(M(G)))\right). \quad (2)$$

したがって, f と $j \circ g_G$ は正則ホモトピックである.

証明の要点を述べる. Smale 型不変量 i の方は, Milnor ファイバーが (特異点のない) 特異 Seifert 膜として選べるため, 容易に計算できる. 主定理の新規性は, Wu 不変量の特定 — 適切な平行化を選び取り, その下で Wu 不変量の消滅を示したこと — にある.

(1) における f の Wu 不変量の消滅は, K が \mathbb{R}^5 の (概) 接触部分多様体になっていることに由来する. Kasuya [Kas16] の結果により, この接触構造を 2-平面場として自明化できるため, それに沿って K を平行化できる. 筆者はこの結果を, Wu 不変量の棲み処を $V_{5,3} \cong \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(2)$ から接触要素のモジュライである $\mathrm{SO}(5)/\mathrm{U}(2)$ に移すことで得た.

(2) における $j \circ g_G$ の Wu 不変量の消滅は, g_G の構成に用いた w たちが $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ への総実なはめ込みに正則ホモトピックであること, したがって, $M(G)$ 上の (概) 接触構造が g_G によって \mathbb{C}^2 へはめ込まれると複素接触することに由来する. この変形は, g_G および \mathbb{C}^2 が $X(G)$ 上に誘導する複素構造と Milnor ファイバー上の複素構造とが, 概複素構造として同一視できることを見据えたものである. これは, $M(G)$ 上に誘導する概接触構造と K 上の標準接触構造との, 概接触構造としての同一視をも引き起こす. 筆者は複素接触と Wu 不変量の関係を, $V_{5,3} \cong \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(2)$ の中にある $\mathrm{SO}(4) \supset \mathrm{U}(2)$ に着目して得た.

最後に, 上記の正則ホモトピック性を利用することで, 筆者は問題 (Q1) を肯定的に解決した. さらに, [Kin15] により既知であった A, D 型の計算結果を再証明することにも成功した. 証明は Gergő Pintér 氏 (ブダペスト工科経済大学) との議論に基づく.

定理 6.2 ([Tan25a]). 任意の単純特異点, および対応する Dynkin 図形 G を考える. このとき, はめ込み $g_G \circ p: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1} \text{ の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2} \text{ の場合}); \\ (-169, 1) & (E_6 \text{ の場合}); \\ (-385, 1) & (E_7 \text{ の場合}); \\ (-1081, 1) & (E_8 \text{ の場合}). \end{cases}$$

証明には, 今回の主結果である定理 3.1, [NP15] の定理 3.10, そして $g_G \circ p$ の法写像度の計算のみを用いる. これは, Kinjo による特異 Seifert 膜の技巧的構成とは大きく異なる.

定理 6.1(1) について補足する. 実は, この結果は, 任意の孤立特異点リンクに対して成立する. このことと, 有向閉 3 次元多様体上の Milnor 充填可能な正接触構造が向きを保つ接触微分同相を除いて一意であること [CNP06] から以下が従う.

系 6.3 ([Tan25a]). K_i を \mathbb{C}^3 内の孤立特異点リンク, $f_i: K_i \looparrowright \mathbb{R}^5$ をその包含写像とする ($i = 1, 2$). このとき, f_1, f_2 が (向きを保つ接触微分同相を除いて) 正則ホモトピックである必要十分条件は, K_1, K_2 が有向多様体として微分同相であって, かつ Milnor ファイバー F_1, F_2 の符号数が等しいことである.

例 6.4. Brieskorn 特異点 $x^2 + y^9 + z^{18}$, $x^3 + y^5 + z^{15}$ から定まるリンクたちは有向多様体として微分同相である [Mil75]. しかし, 付随する Milnor ファイバーの符号数はそれぞれ $-80, -64$ である. よって, それぞれのリンクの包含写像は互いに正則ホモトピックでない.

7 今後の展望

本研究を踏まえて、新たに立ち上がった問題を幾つか述べる。

問題 7.1. リンクの \mathbb{R}^5 へのはめ込みであって、(標準接触構造に関する) Wu 不変量が非自明であるようなものを構成せよ. 例えば A_1 型リンク ($\cong \mathbb{R}P^3 \cong \text{SO}(3)$) の場合はどうか.

また、以下は Gergő Pintér 氏によって指摘された。

問題 7.2. 定理 6.2 において、Smale 不変量の第 2 成分 $b(g_G \circ p)$ が揃う理由は何か.

筆者の証明において、 $b(g_G \circ p)$ の計算は間接的であった。この問いに答えるには、 $b: \text{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \rightarrow \pi_3(\text{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}$ に対して新たな解釈を与える必要があると考えている。

最後に、高次元においても、リンクの包含写像の正則ホモトピー類を調べることは意義があると思われる (例えば、[KNS14] では 5 次元の A 型リンクが扱われている)。そのためには、[Wu64, SST02] のように、まずははめ込みの分類・不変量の構成から始める必要がある。この営みにおいて、特異 Seifert 膜の方法論が有効ではないかと筆者は期待している。

謝辞

本集会「第 72 回トポロジーシンポジウム」にご招待いただきました世話人の小須田雅先生、中村拓司先生、佐藤進先生、逆井卓也先生に、心より御礼申し上げます。講演におきましてご質問・コメントを下さった皆様にも、この場を借りて御礼申し上げます。特に本稿の話題について、函数芽の特異点分類の歴史について大本亨先生より、接触構造の向きに関する条件について三松佳彦先生より、金城就実氏の研究について境圭一先生よりご教示いただきました。

参考文献

- [足立 84] 足立正久: 埋め込みとはめ込み, 岩波書店, 1984.
- [田中 25] 田中心: 埋め込みとはめ込み, 数理科学 2025 年 4 月号: 《多様体》の探求, サイエンス社, 2025.
- [都丸・奥間 25] 都丸正・奥間智弘: 複素曲面特異点入門, 内田老鶴圃, 2025.
- [Arn72] V. I. Arnol'd: *Normal forms of functions near degenerate critical points, Weyl groups A_k , D_k , E_k and Lagrange singularities*, *Funct. Anal. Appl.* **6**(4) (1972), 254–272.
- [Arn73] V. I. Arnol'd: *Classification of unimodular critical points of functions*, *Funct. Anal. Appl.* **7**(3) (1973), 75–76.
- [Arn76] V. I. Arnol'd: *Local normal forms of functions*, *Invent. Math.* **35** (1976), 87–109.
- [AGV85] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps I*, Monograph in Math. **82**, Birkhäuser, 1985.
- [Bra28] K. Brauner: *Zur geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen III, IV*, *Abh. Math. Sem. Hambrug* **6** (1928), 8–54.
- [Bri66] E. Brieskorn: *Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen*, *Math.*

- Ann. **166** (1966), 76–102.
- [Bri68] E. Brieskorn: *Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen*, Math. Ann. **178** (1968), 255–270.
- [Bri70] E. Brieskorn: *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Proc. Internat. Congress Math. Nice, 1970, 279–284.
- [CNP06] C. Caubel, A. Némethi, and P. Popescu-Pampu: *Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds*, Topology **45**(3) (2006), 673–689.
- [ES03] T. Ekholm and A. Szűcs: *Geometric formulas for Smale invariants of codimension two immersions*, Topology **42**(1) (2003), 171–196.
- [ET11] T. Ekholm and M. Takase: *Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions*, Bull. Lond. Math. Soc. **43**(2) (2011), 251–266.
- [Hir59] M. W. Hirsch: *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.
- [Juh05] A. Juhász: *A geometric classification of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **117**(1) (2005), 65–83.
- [Kas16] N. Kasuya: *An obstruction for codimension two contact embeddings in the odd dimensional Euclidean spaces*, J. Math. Soc. Jpn. **68**(2) (2016), 737–743.
- [KNS14] A. Katanaga, A. Némethi, and A. Szűcs: *Links of singularities up to regular homotopy*, J. Singul. **10** (2014), 174–182.
- [Kin15] S. Kinjo: *Immersions of 3-sphere into 4-space associated with Dynkin diagrams of types A and D*, Bull. Lond. Math. Soc. **47**(4) (2015) 651–662.
- [Kle56] F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner(Leipzig), 1884. [English translation: *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover, 1956.]
- [Mil68] J. W. Milnor: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, AMS **61**, Princeton Univ. Press, 1968.
- [Mil75] J. W. Milnor: *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$* , Ann. of Math. Stud. **84** (1975), 175–225.
- [NP15] A. Némethi and G. Pintér: *Immersions associated with holomorphic germs*, Comment. Math. Helv. **90**(3) (2015), 513–541.
- [OO05] H. Ohta and K. Ono: *Simple Singularities and Symplectic Fillings*, J. Differential Geom. **69**(1) (2005), 1–42.
- [SST02] O. Saeki, A. Szűcs, and M. Takase: *Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **108**(1) (2002), 13–32.
- [Sma59a] S. Smale: *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90**(2) (1959), 281–290.
- [Sma59b] S. Smale: *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*, Ann. of Math. **69** (1959), 327–344.
- [Tan25a] M. Tanabe: *Regular homotopy classes of links of simple singularities and immersions associated with their Dynkin diagrams*, Jour. Lond. Math. Soc. **111**(4) (2025), e70140.
- [Tan25b] M. Tanabe: *Immersions associated with links of complex surface singularities and their topology*, doctoral thesis, Hokkaido University, in preparation.
- [Whi36] H. Whitney. *Differentiable Manifolds*, Ann. of Math. **37**(3) (1936), 645–680.
- [Whi37] H. Whitney: *On regular closed curves in the plane*, Compos. Math. **4** (1937), 276–284.
- [Wu64] W. T. Wu: *On the immersion of C^∞ -3-manifolds in a Euclidean space*, Sci. Sinica **13** (1964), 335–336.

混合多項式の特異点解消とニュートン図形

福井敏純 (埼玉大学)

第 72 回トポロジーシンポジウム (2025 年 8 月 4 日 - 6 日)

2025 年 8 月 4 日 (月) 15:45 - 16:45 (質疑含む)

概要

ニュートン非退化な多項式はトーリック改変でその特異点解消が構成できる. 本稿では混合トーリック改変の概念を導入し, 混合多項式が混合ニュートン非退化ならば混合トーリック改変が混合多項式の特異点解消類似物を与える事を紹介する.

Milnor は, 著書 [5] で複素係数多項式

$$(0.1) \quad f = \sum_{\nu} c_{\nu} \mathbf{x}^{\nu}, \quad c_{\nu} \in \mathbb{C},$$

の定める写像

$$f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}),$$

の特異点の位相を研究し, 特異点の周りに錐構造と束構造が存在することを示した. ここで $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq}^n$ であり, 多重指数の記号

$$\mathbf{x}^{\nu} = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$$

を用いている. Milnor の本は多くの研究者の研究の出発点であり, 微分位相幾何学に豊富な例を提供, 対象の位相を記述する言語の研究へと発展してきた.

Khovanski ([4]) は, 多項式がニュートン非退化ならば, トーリック改変が特異点解消を与える事を示した.

Pichon-Seade ([9]) は複素多項式 f, g に対し積 $f\bar{g}$ の定める写像がしばしば束構造を持つことを示し, 複素多項式を含むより広い特異点のクラスで束構造が存在することを示唆した.

岡睦雄 ([6]) は混合多項式 (2.1 参照) を導入し, その特異点の位相を組織的に調べている ([7], [8]). 例えば, 多項式の場合と類似の束構造が存在するための十分条件を与え, トーリック改変がいつ特異点解消を提供するかなどが調べられている.

本稿では, 混合トーリック改変の定義 (定義 3.4) を与え, 混合多項式が混合ニュートン非退化ならば混合トーリック改変が特異点解消の類似物を与えることを説明する.

1 ニュートン図形とトーリック改変

多項式 (0.1) のニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$ を次で定める.

$$\Gamma_+(f) = \{\nu + \mathbb{R}_{\geq}^n : c_\nu \neq 0\} \text{ の凸包}$$

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\langle \mathbf{a}, \nu \rangle = a_1\nu_1 + \dots + a_n\nu_n$$

と置く.

$$\ell(\mathbf{a}) = \min\{\langle \mathbf{a}, \nu \rangle : \nu \in \Gamma_+(f)\}$$

$$\gamma(\mathbf{a}) = \{\nu \in \Gamma_+(f) : \langle \mathbf{a}, \nu \rangle = \ell(\mathbf{a})\}$$

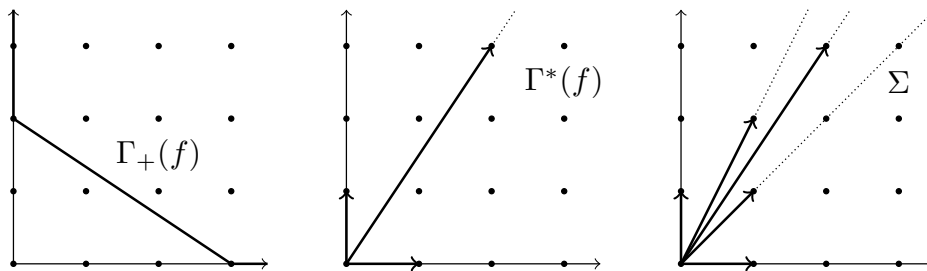
と置いて, $\gamma(\mathbf{a})$ をベクトル \mathbf{a} の支持する $\Gamma_+(f)$ の面という. $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ に対し

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{a}' \iff \gamma(\mathbf{a}) = \gamma(\mathbf{a}')$$

で同値関係を定義すると, 同値類の閉包は \mathbb{R}_{\geq}^n 内の多面錐であり, これは \mathbb{R}_{\geq}^n の分割を与える. この分割を双対ニュートン図形とよび $\Gamma^*(f)$ で表す.

定義 1.1. \mathbb{R}_{\geq}^n の多面体錐分割 $\Gamma^*(f)$ の細分 Σ で, 各 n 次元多面体錐が \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} 基底から生成されるものを取る. このような多面体錐分割を**非特異扇**という.

例 1.2. $f = x^3 + y^2$ のときニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$, 双対ニュートン図形 $\Gamma^*(f)$, 双対ニュートン図形の非特異細分の例 Σ を図で示す.



注意 1.3. ここで扇とは, 次の性質を満たす有限個の多面体錐の集まり Σ である.

- $\sigma \in \Sigma$ として τ が σ の面ならば $\tau \in \Sigma$
- $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ ならば $\sigma \cap \sigma'$ は σ の面である.

上で定義した双対ニュートン図形 $\Gamma^*(f)$ はこの意味で扇になる. Σ の各元が単体的であるとき Σ を単体扇という. 2次元の扇は自動的に単体扇であるが3次元以上では単体的でない扇も存在する, 非特異扇は単体扇であるが, 非特異でない単体扇も存在する.

$\Sigma(k)$ で Σ の k 次元錐のなす集合を, $\sigma \in \Sigma$ に対し, $\sigma(k)$ で σ の k 次元面のなす集合を表す.

定義 1.4 (トーリック多様体). 非特異扇 (Σ, β) に対して, 乗法群の準同型写像

$$\pi^* : (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n, (z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \longmapsto \left(\prod_{\tau \in \Sigma(1)} z_\tau^{a_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n},$$

$\mathbf{a}^\tau = (a_1^\tau, \dots, a_n^\tau)$, を考え, その核を G で表す. すなわち $G = \text{Ker } \pi^*$.

$$(1.5) \quad U_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(n)} U_\sigma, U_\sigma = \left\{ (u_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)} : \prod_{\tau \notin \sigma(1)} u_\tau \neq 0 \right\}.$$

とおくと, G の元 $(z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \in G$ は次式で U_Σ に作用している.

$$(1.6) \quad (z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} : U_\Sigma \longrightarrow U_\Sigma, (u_\tau)_{\tau \in \sigma(1)} \longmapsto (z_\tau u_\tau)_{\tau \in \sigma(1)},$$

この作用は U_σ を保つことに注意しておく. このとき**トーリック多様体** M を次で定める.

$$(1.7) \quad M = U_\Sigma / G = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(n)} M_\sigma, \quad M_\sigma = U_\sigma / G.$$

$\sigma \in \Sigma(n)$ に対し

$$(1.8) \quad V_\sigma = \{ (v_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \in U_\sigma : v_\tau = 1, \tau \notin \sigma(1) \}$$

と置くと, V_σ は自明に \mathbb{C}^n と同型であり, 自然な写像

$$V_\sigma \subset U_\sigma \rightarrow M_\sigma$$

は同型である. この写像は M のチャートを与える.

定義 1.9 (トーリック改変). 非特異扇 Σ の $\mathbf{a}^\tau, \tau \in \Sigma(1)$, の成分はすべて非負であると仮定する. このとき次の可換図式を満たすような自然な写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ が定義される.

$$(1.10) \quad \begin{array}{ccc} U_\Sigma \supset (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} & \xrightarrow{\pi^*} & (\mathbb{C}^*)^n \\ \downarrow /G & & \cap \\ M & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

この π をトーリック改変という。 M のチャート V_σ 上では π は次のように表示される。

$$\pi|_{V_\sigma}((v_\tau)_{\tau \in \sigma(1)}) = \left(\prod_{\tau \in \sigma(1)} v_\tau^{a_\tau^i} \right)_{i=1, \dots, n}.$$

ここでのトーリック多様体の構成は Cox によるものである。

定理 1.11. 非特異扇 Σ が \mathbb{R}_\geq^n の細分であるとき、 $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ は固有写像である、

定義 1.12. f がニュートン非退化とは、 $\Gamma_+(f)$ の任意のコンパクト面 γ に対し次が成立するときを言う。

$$\Sigma(f_\gamma) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$$

ここで $f_\gamma = \sum_{\nu \in \gamma} c_\nu \mathbf{x}^\nu$ で $\Sigma(f_\gamma)$ はその特異点集合である。

定理 1.13. 多項式 f がニュートン非退化ならば、 $\Gamma_+(f)$ から構成されるトーリック改変が f の特異点解消を与える。

ここで f の特異点解消とは、複素解析的な固有改変 $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ で M の各点の近傍で次を満たす座標が取れるときをいう。

f の π による引き戻し $f \circ \pi$ がその座標で単項式で表される。

特異点解消が具体的に与えられれば、特異点の位相の記述は組み合わせの問題に帰着される。実際、Khovanski ([4]) はそれがどのように可能かも説明している。

2 混合ニュートン図形

\mathbb{C}^n の座標 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ をとり、その複素共役を $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ で表す。多重指数 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{\boldsymbol{\nu}} = (\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\mathbf{x}^\boldsymbol{\nu} = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}, \quad \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\boldsymbol{\nu}}} = \bar{x}_1^{\bar{\nu}_1} \cdots \bar{x}_n^{\bar{\nu}_n}$$

とおき、 $\mathbf{x}^\boldsymbol{\nu} \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\boldsymbol{\nu}}}$ を考える。 $\boldsymbol{\nu}, \bar{\boldsymbol{\nu}}$ の成分がすべて非負整数のとき、これを混合単項式と呼ぶ。負の成分も許せば混合ローラン単項式と呼び、半整数のときは混合ローラン半単項式とよぶ。

混合単項式 $\mathbf{x}^\boldsymbol{\nu} \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\boldsymbol{\nu}}}$ の複素数係数の 1 次結合

$$(2.1) \quad f = \sum_{\boldsymbol{\nu}, \bar{\boldsymbol{\nu}}} c_{\boldsymbol{\nu}, \bar{\boldsymbol{\nu}}} \mathbf{x}^\boldsymbol{\nu} \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\boldsymbol{\nu}}}, \quad c_{\boldsymbol{\nu}, \bar{\boldsymbol{\nu}}} \in \mathbb{C},$$

を混合多項式という。混合多項式 f は写像

$$f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}),$$

を定めるが, その特異点集合 $\Sigma(f)$ は次の様に表される.

$$\Sigma(f) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \text{rank} \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_n}(\mathbf{x}) & f_{\bar{x}_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{\bar{x}_n}(\mathbf{x}) \\ \bar{f}_{x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \bar{f}_{x_n}(\mathbf{x}) & \bar{f}_{\bar{x}_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \bar{f}_{\bar{x}_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} < 2 \right\}$$

例 2.2. 混合単項式 $x^\nu \bar{x}^{\bar{\nu}}$, $\nu \neq \bar{\nu}$, の定める写像

$$f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \longmapsto x^\nu \bar{x}^{\bar{\nu}},$$

の $(\mathbb{C}^*)^n$ への制限 $f|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ は沈め込みである. すなわち $\Sigma(f) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$.

\mathbb{R}^n の部分集合 γ に対し f_γ を次で定める.

$$(2.3) \quad f_\gamma := \sum_{\nu + \bar{\nu} \in \gamma} c_{\nu, \bar{\nu}} x^\nu \bar{x}^{\bar{\nu}}, \quad c_{\nu, \bar{\nu}} \in \mathbb{C}.$$

さて f の絶対ニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$ を次で定義する.

$$\Gamma_+(f) = \{ \nu + \bar{\nu} + \mathbb{R}_{\geq}^n : c_{\nu, \bar{\nu}} \neq 0 \} \text{ の凸包}$$

定義 2.4. f が非退化とは, $\Gamma_+(f)$ のコンパクト面 γ に対して次が成り立つときを言う.

$$\Sigma(f_\gamma) \cap f_\gamma^{-1}(0) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$$

ニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$ のコンパクトな面 γ に対し次で定義される $\text{LE}(f_\gamma)$ を考える.

$$\text{LE}(f_\gamma) = \{ \nu - \bar{\nu} : c_{\nu, \bar{\nu}} \neq 0, \nu + \bar{\nu} \in \gamma \} \text{ の凸包}$$

これらをすべて集めたデータ

$$(\Gamma_+(f); \text{LE}(f_\gamma), \gamma \text{ は } \Gamma_+(f) \text{ のコンパクト面})$$

を混合多項式の混合ニュートン図形と呼ぶことにする.

定義 2.5 (混合擬斉次多項式). 混合多項式 (2.1) が混合擬斉次であるとは, 次を満たす \mathbf{a} , \mathbf{b} と l, m が存在するときを言う.

$$c_{\nu, \bar{\nu}} \neq 0 \implies \langle \mathbf{a}, \nu + \bar{\nu} \rangle = l, \quad \langle \mathbf{b}, \nu - \bar{\nu} \rangle = m.$$

混合多項式 f が混合擬斉次ならば $\dim \text{LE}(f) < n$ となる.

混合多項式 f が混合擬斉次で、上の記号の下で $m \neq 0$ であれば、次が成り立つ。

$$\Sigma(f) \subset f^{-1}(0)$$

$m = 0$ のときは一般にはこの包含関係は成り立たない。

岡 ([6], [8]) は混合多項式 f のトーリック改変による特異点解消を議論している。具体的には $\tau \in \Sigma(1)$ に対し $f_{\gamma(\mathbf{a}^\tau)}$ を混合擬斉次としてその重み $\mathbf{a}^\tau, \mathbf{b}^\tau$, が一致するときに議論している。

3 混合トーリック改変

定義 3.1 (混合扇). 単体的扇 Σ と写像

$$\beta : \Sigma(1) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n, \quad \tau \longmapsto (\mathbf{a}^\tau, \mathbf{b}^\tau) \quad \begin{cases} \mathbf{a}^\tau = (a_1^\tau, \dots, a_n^\tau) \\ \mathbf{b}^\tau = (b_1^\tau, \dots, b_n^\tau) \end{cases}$$

の組 (Σ, β) が混合扇であるとは次を満たすときを言う。

- (i) \mathbf{a}^τ は $\tau \in \Sigma(1)$ の最も短い (整数係数の) 生成元
- (ii) 任意の $\sigma \in \Sigma(n)$ に対し $\{\mathbf{b}^\tau : \tau \in \sigma(1)\}$ は \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} 基底

注意 3.2. $\mathbf{a}^\tau = \mathbf{b}^\tau, \tau \in \Sigma(1)$, のときは、ここで定義した混合扇は通常の特異扇である。

定義 3.3 (混合トーリック多様体). 混合扇 (Σ, β) に対して、乗法群の準同型

$$\pi^* : (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n, \quad (z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \longmapsto \left(\prod_{\tau \in \Sigma(1)} |z_\tau|^{a_i^\tau} \left(\frac{z_\tau}{|z_\tau|} \right)^{b_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n},$$

を考え、その核を G で表す。 U_Σ を (1.5) を定義し G の元 $(z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)}$ を (1.6) で U_Σ に作用させる。このとき混合トーリック多様体 M を (1.7) で定める。 (1.8) で V_σ を定めると、写像の合成 $V_\sigma \subset U_\sigma \rightarrow M_\sigma$ は同相写像で、この写像は M のチャートを与える。

ここで構成した混合トーリック多様体は、[3] で導入された位相的トーリック多様体の特別な場合である。

定義 3.4 (混合トーリック改変). 混合扇 (Σ, β) に対し $\mathbf{a}^\tau, \tau \in \Sigma(1)$, の成分はすべて非負であるとし、次の条件を仮定する。

$$(3.5) \quad a_i^\tau = 0 \implies b_i^\tau = 0 \quad (\forall \tau \in \Sigma(1), i = 1, \dots, n).$$

このとき可換図式 (1.10) を満たすような自然な写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ が定義される. この π を混合トーリック改変という. M のチャート V_σ 上では π は次のように表示される.

$$(3.6) \quad \pi|_{V_\sigma}((v_\tau)_{\tau \in \sigma(1)}) = \left(\prod_{\tau \in \sigma(1)} |v_\tau|^{a_i^\tau} \left(\frac{v_\tau}{|v_\tau|} \right)^{b_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n}.$$

定理 3.7. 混合扇 (Σ, β) が次の性質を満たせば, 混合トーリック多様体 M は実代数的多様体である.

$$(3.8) \quad \mathbf{a}^\tau \equiv \mathbf{b}^\tau, \quad \forall \tau \in \Sigma(1).$$

定理 3.9. 単体扇 Σ が \mathbb{R}_{\geq}^n の細分であるとし, 条件 (3.5) を仮定する. このとき混合トーリック改変 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ は固有写像である. さらに, 条件 (3.8) を満たせば, 写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ は実代数的写像である.

定義 3.10 (混合ニュートン非退化性). 混合多項式 f が混合ニュートン非退化とは, $\Gamma_+(f)$ の任意のコンパクト面 γ について次の条件が成り立つときを言う.

- $\Sigma(f_\gamma) \cap f_\gamma^{-1}(0) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$.
- f_γ は混合重み付き多項式.

定理 3.11 ([2]). 混合多項式 f が混合ニュートン非退化ならば, $\Gamma_+(f)$ の細分として得られる単体扇 Σ と, 次の条件を満たす混合扇から構成される混合トーリック改変が f の特異点解消類似物を与える.

$$\text{任意の } \tau \in \Sigma(1) \text{ に対し } \text{LE}(f_{\gamma(\mathbf{a}^\tau)}) \subset \{\boldsymbol{\nu} : \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}^\tau \rangle = m_\tau\}, \quad m_\tau \in \mathbb{Z}.$$

ここで f の特異点解消類似物とは, グラフが半代数的集合である固有改変 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ で, M の各点の近傍 \mathcal{U} で次を満たす同相写像 $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ でそのグラフが半代数的集合であるようなものが取れるときをいう. X を $\pi^{-1}(\{f = 0\}) \setminus \Sigma(\pi)$ の閉包とすると,

$X \cap \mathcal{U}$ は \mathbb{C}^n の座標での単項式の零点集合の ϕ による引き戻しで表される.

4 ゼータ関数

位相空間 Y の変換 $h : Y \rightarrow Y$ に対し, ゼータ関数 $\zeta_h(t)$ を次で定める.

$$\zeta_h(t) = \prod_{i \geq 0} \Delta_i(h)^{(-1)^i} \Delta_i(h) = \det\{1 - th_* : H_i(Y) \rightarrow H_i(Y)\},$$

ただし $H_i(Y)$ は閉台をもつ \mathbb{C} 係数鎖複体の i 次ホモロジーを表す. これは [1] での定義と若干異なった定義であり, [1] でのゼータ関数の逆数をとったものになっている.

A'Campo ([1]) はミルナー束のモノドロミー変換のゼータ関数に対して次の公式を示した.

$$\zeta(t) = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{\chi(S_m)}.$$

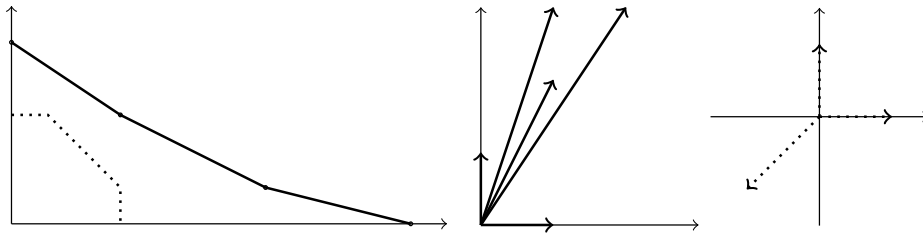
ただし S_m は次で定まる集合である.

$$S_m = \{x \in \pi^{-1}(0) : f \circ \pi \text{ は } s \text{ 中心の適当な座標系 } (z_1, \dots, z_m) \text{ で } z_1^m \text{ と表される.}\}$$

証明は位相的なので, 混合多項式がミルナー束構造を持ち, 混合トーリック改変によって特異点解消類似物が与えられるときは, 同様のゼータ関数の公式を得ることができる.

5 例

例 5.1. $f = x_2^4 \bar{x}_2 + x_1^2 \bar{x}_1 x_2^3 + x_1^5 \bar{x}_1^2 x_2 + x_1^7 \bar{x}_1^4$. 下図 (左) に $\Gamma_+(f)$ を太線で $\text{LE}_\gamma(f)$ を破線で示す. 下の (5.2), (5.3) に示すデータで定まる混合扇を考える. この混合扇のデータは下図 (中, 右) に図示されている.



$$(5.2) \quad (\mathbf{a}^0 \ \mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \mathbf{a}^3 \ \mathbf{a}^4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5.3) \quad (\mathbf{b}^0 \ \mathbf{b}^1 \ \mathbf{b}^2 \ \mathbf{b}^3 \ \mathbf{b}^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

対応する次数 $\ell = (\ell_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)}$, $m = (m_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)}$ は次で与えられる.

$$\ell = (0 \ 15 \ 9 \ 11 \ 0), \quad m = (0 \ 3 \ -4 \ 3 \ 0).$$

$r_i = |u_i|$, $e_i = u_i/|u_i|$, $i = 0, 1, \dots, 4$, と置くと $\tilde{\pi}_{\Sigma, \beta} : U_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^2$ は

$$\begin{aligned} |x_1| &= r_0 r_1^2 r_2 r_3, & \frac{x_1}{|x_1|} &= e_0 e_2^{-1} e_3, \\ |x_2| &= r_1^3 r_2^2 r_3^4 r_4, & \frac{x_2}{|x_2|} &= e_1 e_2^{-1} e_4, \end{aligned}$$

で表される. $\pi^* f = r_1^{15} r_2^9 r_3^{11} e_1^3 e_2^{-4} e_3^3 \tilde{f}$ と書くと

$$\tilde{f} = r_2 r_3^9 r_4^5 e_2 e_3^{-3} e_4^3 + r_0^3 r_3^4 r_4^3 e_0 e_3^{-2} e_4^3 + r_0^7 r_1^2 r_4 e_0^3 e_1^{-2} e_4 + r_0^{11} r_1^7 r_2^2 e_0^3 e_1^{-3} e_2.$$

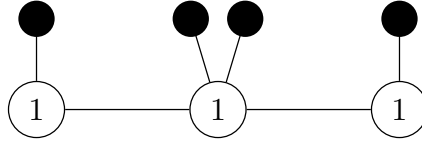
$V_\sigma, \sigma \in \Sigma(2)$, における f の “狭変換” f' は次のようになる.

| f_γ | $f'_\gamma _{V_\sigma}$ |
|---|---|
| $x_2^3(x_2\bar{x}_2 + x_1^2\bar{x}_1)$ | $1 + r_0^3 e_0$ on $V_{\sigma_{0,1}}$ $r_2 e_2 + 1$ on $V_{\sigma_{1,2}}$ |
| $x_1^2 \bar{x}_1 x_2 (x_2^2 + x_1^3 \bar{x}_1)$ | $1 + r_1^2 e_1^{-2}$ on $V_{\sigma_{1,2}}$ $r_3^4 e_3^{-2} + 1$ on $V_{\sigma_{2,3}}$ |
| $x_1^5 \bar{x}_1^2 (x_2 + x_1^2 \bar{x}_1^2)$ | $1 + r_2^2 e_2$ on $V_{\sigma_{2,3}}$ $r_4 e_4 + 1$ on $V_{\sigma_{3,4}}$ |

ただし $\sigma_{i,j} = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j \rangle_{\mathbb{R}_{\geq}}$, ベクトル $\mathbf{a}^i, i = 1, 2, 3$, に対応する例外集合を E_i とかくと

$$\#(Z \cap E_1) = 1, \quad \#(Z \cap E_2) = 2, \quad \#(Z \cap E_3) = 1.$$

$-\mathbf{b}^1 = \mathbf{b}^0 + \mathbf{b}^2, -\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^3, -\mathbf{b}^3 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^4$ なので, 特異点解消の双対グラフは次のようになる.



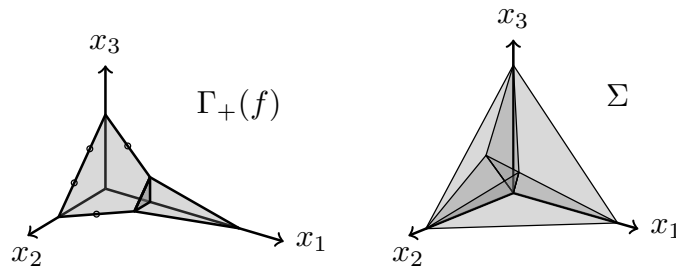
$\chi(S_4) = -2$ かつ $\chi(S_3) = 0$ なのでゼータ関数は $\zeta(t) = (1 - t^4)^{-2}$ で与えられる.

例 5.4. $f = x_1^4 \bar{x}_1^2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^3 + x_3^3$. 次で定まる単体扇 Σ を考える.

$$\Sigma(1) = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^5\}, \quad (\mathbf{a}^i)_{i=1, \dots, 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma(3) = \{\sigma_{1,2,4}, \sigma_{1,3,4}, \sigma_{2,4,5}, \sigma_{3,4,5}, \sigma_{2,3,5}\}.$$

ただし $\sigma_{i,j,k} = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq}}$.



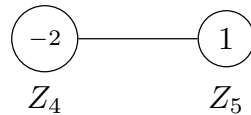
次のデータで決まる混合扇 (Σ, β) をとり, 混合トーリック改変を構成する.

$$(\mathbf{b}^i)_{i=1,\dots,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f の“狭変換”の零点集合を Z で表し, ベクトル \mathbf{a}^i に対応する例外集合と Z との共通部分を Z_i で表す.

$$3b^1 + 2b^2 + 2b^3 + b^5 = 2b^4, \quad -b^2 - b^3 + b^4 = -b^5,$$

なので, Z 内での交点数を計算すると $Z_4 \cdot Z_4 = -2$ かつ $Z_5 \cdot Z_5 = 1$ がわかる. Z 内の例外集合の双対グラフは次のようになる.



参考文献

- [1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie, Comment. Math. Helvetici 50 (1975), 233–248.
- [2] T. Fukui, Singularities of mixed polynomials with Newton polyhedrons, preprint.
- [3] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, Topological toric manifolds, Mosc. Math. J. 13 (2013), 57–98.
- [4] A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and toroidal varieties, Functional Analysis and its Applications 11 (1978), 289–296.
- [5] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies 61, Princeton University Press. London: Oxford University Press, 1969.
- [6] M. Oka, Non-degenerate mixed functions, Kodai Math. J. 33 (2010), 1–62.
- [7] M. Oka, Mixed functions of strongly polar weighted homogeneous face type, Singularities in Geometry and Topology 2011, Advanced Study in Pure Math. 66, 173–202, 2015.
- [8] 岡睦雄, 複素および混合超曲面特異点入門, 丸善出版 2018.
- [9] A. Pichon and J. Seade, Fibred multilinks and singularities $f\bar{g}$, Math. Ann. 342 (2008), no.3, 487–514.

カンドルホモロジーに反映される 結び目補空間の構造について

井上 歩 (津田塾大学)*

1 はじめに

カンドルは結び目理論と非常に相性が良い代数系である。これまで講演者は、カンドルおよびそのホモロジーと結び目が備える幾何との関係性に興味を抱き、研究を進めてきた。本講演では、特に「カンドルホモロジー」と「結び目補空間」をキーワードとして、今までに得られた成果を抜粋して簡単に紹介したい。なお一部の成果は、北見工業大学の蒲谷祐一氏との共同研究により得られたものである。

2 準備

まず最初に、カンドルについて基本事項を確認しておく。詳細については、例えば [6] を参照されたい。なお本講演では、すべての結び目は 3 次元球面 S^3 内にあり、向き付けられているものとする。

カンドルとは、集合 X とその上に定義された二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組であり、次の公理を満たすものである。

(Q1) 任意の $a \in X$ に対して、 $a * a = a$ 。

(Q2) 任意の $a \in X$ に対して、写像 $*a : X \rightarrow X (\bullet \mapsto \bullet * a)$ は全単射。

(Q3) 任意の $a, b, c \in X$ に対して、 $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ 。

カンドルに対しても、適切に準同型などが定義される。カンドル X に対し、次の表示で与えられる群 G_X を、 X の**付随群**と呼ぶ。

$$G_X = \langle X \mid \{(a * b)^{-1} b^{-1} a b \mid a, b \in X\} \rangle.$$

今後のため、カンドル X の要素は付随群 G_X の生成元でもあることを強調しておく。

X をカンドルとし、 D を結び目の図式とする。 D の各弧に対して、 X の要素を割り当てることを考える。この割り当ては、 D の各交点において図 1 左の条件を満たすとき、 D の X **彩色**と呼ばれる。ここで図中 $a, b, a * b$ は、対応する弧に割り当てられた X の要素を表している。 D には X 彩色が施されているとし、 Y を付随群 G_X が右から作用する集合とする。 D の各領域に対して、さらに Y の要素を割り当てることを考える。この割り当ては、 D の各弧の周辺において図 1 右の条件を満たすとき、 D の Y **彩色**と

* 〒187-0025 東京都小平市津田町 2-1-1 津田塾大学学芸学部数学科

e-mail: ayminoue@tsuda.ac.jp

本研究は科学研究費補助金（課題番号：25K07014）の助成を受けたものである。

呼ばれる．ここで図中 r, ra は，対応する領域に割り当てられた Y の要素を表す．特に X 彩色と Y 彩色の組を， D の (X, Y) **彩色** という．詳細は割愛するが，同値な結び目を表す図式の (X, Y) 彩色全体の集合の間には，自然な全単射が存在する．よって， D の (X, Y) 彩色の総数は，結び目に不変量を与える（これを (X, Y) 彩色数という）．以降， (X, Y) 彩色によって弧（および領域）に割り当てられた X （および Y ）の要素を，その弧（および領域）の**色**と呼ぶ．

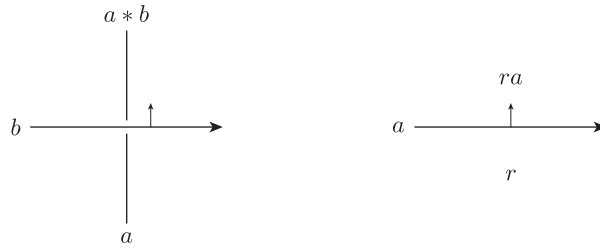


図1 X 彩色の条件（左）と Y 彩色の条件（右）

カンドル X と付随群 G_X が右から作用する集合 Y の組に対しては，次のようにしてホモロジーが定義される．正の整数 n に対して， $C_n^R(X)_Y$ を $Y \times X^n$ が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする．また， $C_0^R(X)_Y$ を Y が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする．このとき，写像 $\partial_n : C_n^R(X)_Y \rightarrow C_{n-1}^R(X)_Y$ を

$$\begin{aligned} \partial_n(r; a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (r; a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (-1)^i (ra_i; a_1 * a_i, \dots, a_{i-1} * a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

と定めると， $(C_n^R(X)_Y, \partial_n)$ は鎖複体となる．図2に示すように， $C_n^R(X)_Y$ の生成元は適切に向き付け・ラベル付けられた n 次元立方体と同一視できる．この意味において， ∂_n はその境界を読み取る写像に他ならない．さらに， $C_n^R(X)_Y$ の部分加群 $C_n^D(X)_Y$ を次のように定義する．

$$C_n^D(X)_Y = \begin{cases} \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(r; a_1, a_2, \dots, a_n) \in Y \times X^n \mid a_i = a_{i+1} \text{ for some } i\} & (n \geq 2), \\ 0 & (n = 0, 1). \end{cases}$$

このとき， $\partial_n(C_n^D(X)_Y) \subset C_{n-1}^D(X)_Y$ が成り立つので， $(C_n^D(X)_Y, \partial_n)$ は $(C_n^R(X)_Y, \partial_n)$ の部分鎖複体となる．よって，商 $C_n^Q(X)_Y = C_n^R(X)_Y / C_n^D(X)_Y$ を考えれば，鎖複体 $(C_n^Q(X)_Y, \partial_n)$ が得られる．この鎖複体から定まる (コ) ホモロジー群を**カンドル (コ) ホモロジー群**と呼ぶ． $C_n^Q(X)_Y$ の生成元は，場合によって幾つかの面が退化した，向き付け・ラベル付けられた n 次元立方体と同一視できる．

(X, Y) 彩色が施された結び目図式 D の (D が描かれている2次元球面 S^2 上での) 双対グラフを考えると，その各領域は D の交点を丁度ひとつ含む四角形である．そこで

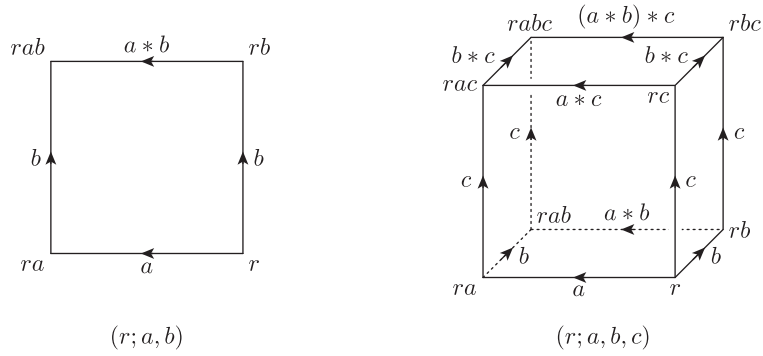


図 2 $C_n^R(X)_Y$ の生成元の図式的な理解

図 3 の要領で、交わる D の弧の向き (が定める法ベクトル) と色から四角形の辺に向きとラベルを、交わる D の領域の色から四角形の頂点にラベルを与えることで、 D の各交点に対して $C_2^Q(X)_Y$ の要素を定めることができる。構成より、 D のすべての交点についてこれらの要素を足し合わせたものは、2次元サイクルとなる。詳細は割愛するが、前述の自然な全単射で対応する同値な結び目を表す図式の (X, Y) 彩色が定める 2次元サイクルは互いにホモログである。よって、2次元コサイクルをひとつ選び、 D のすべての (X, Y) 彩色についてそれらが定める 2次元サイクルをこの 2次元コサイクルで評価した値を集めて得られる多重集合は、また結び目に不変量を与える (これをカンドルコサイクル不変量という)。

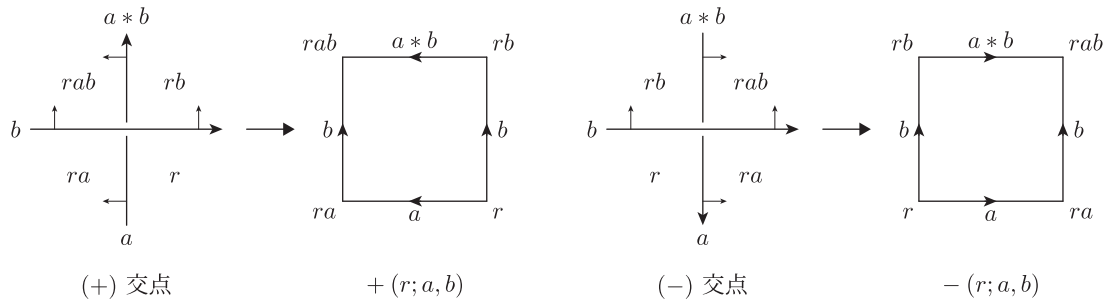


図 3 (X, Y) 彩色が施された結び目図式の交点に対応する $C_2^Q(X)_Y$ の要素

3 カンドルホモロジーと結び目補空間の理想四面体分割

本節では、カンドルホモロジーと結び目補空間の理想四面体分割との関係を紹介する。本節の内容は、北見工業大学の蒲谷祐一氏との共同研究 [4] によって得られたものである。

まず、カンドル X に対して、新たなホモロジーを導入する。非負整数 n に対して、 $B_n^\Delta(X)$ を X^{n+1} が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする。写像 $\partial_n : B_n^\Delta(X) \rightarrow B_{n-1}^\Delta(X)$ を

$$\partial_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

と定めると、 $(B_n^\Delta(X), \partial_n)$ は非輪状な鎖複体になる。 $B_n^\Delta(X)$ の生成元は、頂点に X の

要素が割り当てられた n 次元単体と同一視できる. この意味において, ∂_n はその境界を読み取る写像に他ならない. $B_n^\Delta(X)$ には次のように付随群 G_X が右から作用するので, この作用による $B_n^\Delta(X)$ の商を $C_n^\Delta(X)$ とする.

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) a = (a_0 * a, a_1 * a, \dots, a_n * a) \quad (a \in X).$$

鎖複体 $(C_n^\Delta(X), \partial_n)$ から定まる (コ) ホモロジー群を, **単体的カンドル (コ) ホモロジー群** と呼ぶ.

X には次のように付随群 G_X が右から作用するから, 鎖複体 $(C_n^Q(X)_X, \partial_n)$ を考えることができる.

$$ab = a * b \quad (a, b \in X).$$

この鎖複体について, 次の主張が成立する.

定理 3.1 ([4]). 具体的な鎖写像 $\varphi_n : C_n^Q(X)_X \rightarrow C_{n+1}^\Delta(X)$ が構成できる.

一般の場合は割愛するが, $n = 2$ の場合, この鎖写像は任意の $p \in X$ に対して次の式で与えられる.

$$\varphi_2(r; a, b) = + (p, r, a, b) - (p, r * a, a, b) - (p, r * b, a * b, b) + (p, (r * a) * b, a * b, b).$$

鎖写像 φ_2 を図式的に表すと, 図 4 のようになる. ここで図中, 同じパターンおよび (黒以外の) 同じ色で塗られた面および辺は, それぞれ貼り合わせることができる. よって, (X, X) 彩色された結び目 K の図式の各交点に対応する $C_2^Q(X)_X$ の要素の φ_2 による像は, 図 5 右のように「 $S^3 \setminus K$ の『各交点に対応する部分』を 4 つの理想四面体によって分割したものに『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解することができる. これら 4 つの理想四面体は交点の隣接関係に従って適切に貼り合うから, (X, X) 彩色が定める 2 次元サイクルの φ_2 による像は「 $S^3 \setminus K$ の理想四面体分割に『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解できる. 詳細は割愛するが, 蒲谷氏と講演者は, この枠組みを用いて次を示している.

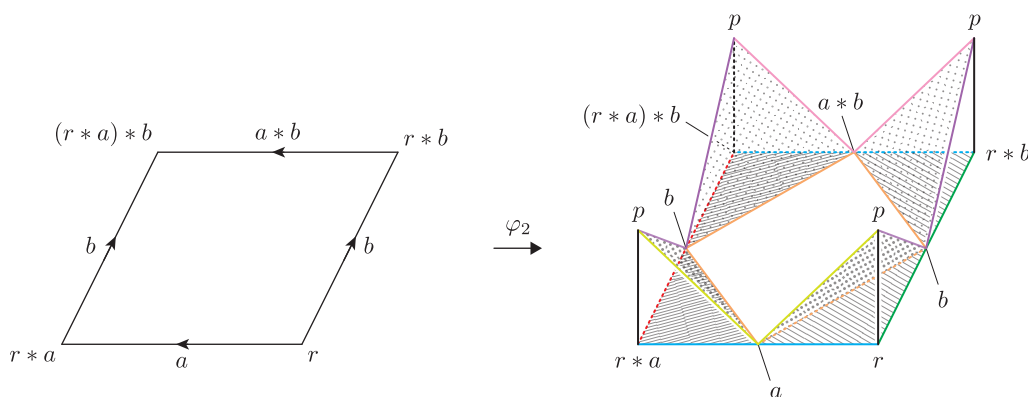


図 4 鎖写像 φ_2 の図式的な理解

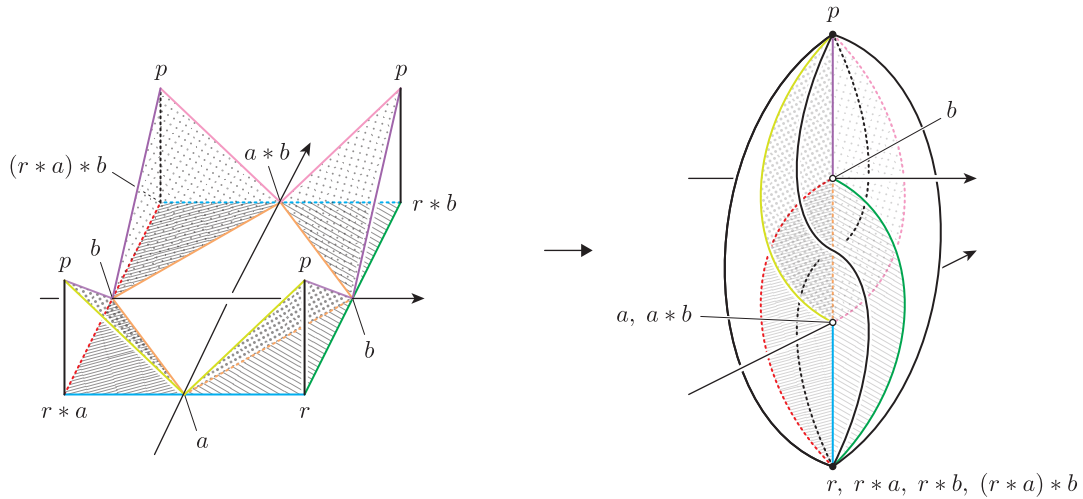


図5 各交点に対応する4つの理想四面体

定理 3.2 ([4]). $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の放物的元全体がなすカンドル \mathcal{P} には、次の性質を満たす、具体的な2次元コサイクル evol が定まる. K を結び目とし、 $G(K)$ をその補空間の基本群とする. このとき、 $G(K)$ の放物的な $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現に対応する K の図式の $(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ 彩色を考えると、この彩色が定める2次元サイクルを evol で評価することによって、表現の複素体積が組み合わせ的に計算できる.

4 カンドルホモロジーとザイフェルト曲面の理想三角形分割

本節では、カンドルホモロジーと(境界を含まない)ザイフェルト曲面の理想三角形分割との関係を紹介する. そのためにまず、群対のホモロジーを紹介する(群対に対しては大別して2種類のホモロジーが定義されるが、本講演では Adamson/Hochschild の流儀 [1, 3] に従う).

G を群として、 H をその部分群とする. 非負整数 n に対して、 $B_n(G/H)$ を $(G/H)^{n+1}$ が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする. このとき、写像 $\partial_n : B_n(G/H) \rightarrow B_{n-1}(G/H)$ を

$$\partial_n(g_0H, g_1H, \dots, g_nH) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0H, \dots, g_{i-1}H, g_{i+1}H, \dots, g_nH)$$

と定めると、 $(B_n(G/H), \partial_n)$ は非輪状な鎖複体になる. $B_n(G/H)$ の生成元は、頂点に G/H の要素が割り当てられた n 次元単体と同一視できる. この意味において、 ∂_n はその境界を読み取る写像に他ならない. $B_n(G/H)$ には次のように G が左から作用するので、この作用による $B_n(G/H)$ の商を $C_n(G/H)$ とする.

$$g(g_0H, g_1H, \dots, g_nH) = (gg_0H, gg_1H, \dots, gg_nH) \quad (g \in G).$$

鎖複体 $(C_n(G/H), \partial_n)$ から定まる (コ) ホモロジー群を、**群対の (コ) ホモロジー群** と呼ぶ.

再び G を群として、 H をその部分群とする。さらに ρ を G の自己同型写像で、条件 $\rho|_H = \text{id}_H$ を満たすものとする。このとき、右剰余集合 $H \backslash G$ は、次の二項演算によりカンドルとなる。

$$Ha * Hb = H\rho(ab^{-1})b.$$

慣例に従って、このカンドルを (G, H, ρ) と表すことにする。また、 $\rho(ab^{-1})b$ を $a * b$ と略記する（このとき $Ha * Hb = Ha * b$ である）。

任意のカンドル X の付随群 G_X は、無限巡回群 \mathbb{Z} に対して、次のように右から作用する。

$$ra = r + 1 \quad (r \in \mathbb{Z}, a \in X).$$

よって、鎖複体 $(C_n^Q(X)_{\mathbb{Z}}, \partial_n)$ を考えることができる。特に $X = (G, H, \rho)$ であるときは、次の主張が成立する。

定理 4.1. 具体的な鎖写像 $\psi_n : C_n^Q(X)_{\mathbb{Z}} \rightarrow C_n(G/H)$ が構成できる。

一般の場合は割愛するが、 $n = 2$ の場合、この鎖写像は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \psi_2(r; Ha, Hb) = \\ - (H, (\rho^{-r}(a))^{-1}H, (\rho^{-r}(b))^{-1}H) + (H, (\rho^{-(r+1)}(a * b))^{-1}H, (\rho^{-(r+1)}(b))^{-1}H). \end{aligned}$$

鎖写像 ψ_2 を図式的に表すと、図 6 のようになる。ここで図中、赤い辺は貼り合わせることができる。よって、 (X, \mathbb{Z}) 彩色された結び目 K の図式 D の各交点に対応する $C_2^Q(X)_{\mathbb{Z}}$ の要素の ψ_2 による像は、図 7 右のように「図式 D から定まる K の標準的ザイフェルト曲面 S の『各交点に対応する部分』を 2 つの理想三角形によって分割したものに『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解することができる。これら 2 つの理想三角形は交点の隣接関係に従って適切に貼り合うから、 (X, \mathbb{Z}) 彩色が定める 2 次元サイクルの ψ_2 による像は「 S の理想三角形分割に『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解できる。

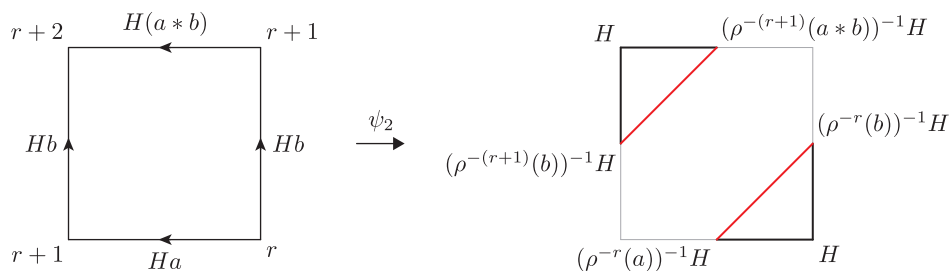


図 6 鎖写像 ψ_2 の図式的な理解

詳細は割愛するが、 K の（標準的とは限らない）任意のザイフェルト曲面 S に対しても適切に K の図式 D を選べば、 D の (X, \mathbb{Z}) 彩色から S の理想三角形分割を得ることができる。この仕組みを活用すれば K の種数やファイバー性を議論できるのではないかと考え、目下、研究を進めている。

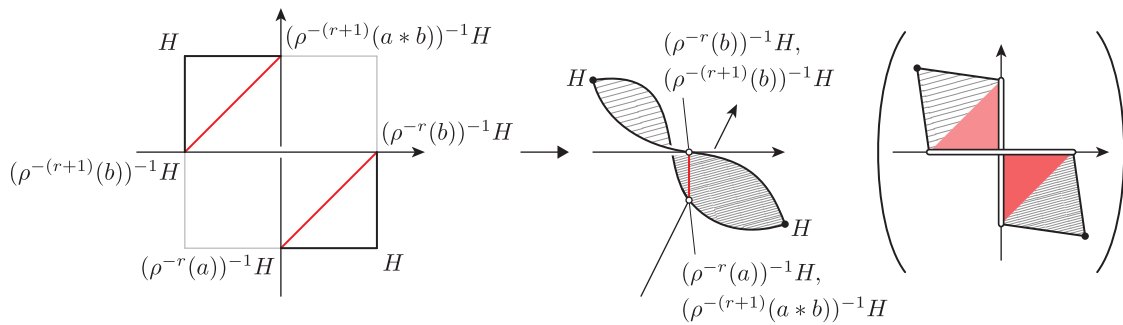


図7 各交点に対応する2つの理想三角形(状況を理解しやすいように、括弧内には、赤い辺および理想頂点に幅を与えたものも描いておいた)

5 おわりに

ここまでカンドルホモロジーと結び目補空間の構造との関係性に着目してきたが、定理 3.1, 4.1 で与えた鎖写像は、具体的なカンドルにコサイクルを与えるためにも利用できる。最後に、簡単ではあるが、そのような成果を紹介する。

北見工業大学の蒲谷祐一氏は、定理 3.1 を活用して、ある条件を満たすカンドル X に対して鎖複体 $(C_n^Q(X)_X, \partial_n)$ から群の鎖複体への(次元をひとつ上げる)鎖写像を構成した [5]。(特に $n = 2$ の場合、この鎖写像による (X, X) 彩色が定める 2 次元サイクルの像は「結び目を分岐集合とする S^3 の巡回分岐被覆空間の四面体分割に『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解できる。) この鎖写像によって引き戻すことにより、群のコサイクルからカンドルのコサイクルを構成することができる。特に「望月 3 コサイクル [2, 7]」という業界では有名な 3 次元コサイクルも、この方法により群のコサイクルから再構成できることを蒲谷氏は示している。

東京科学大学の野坂武史氏は、蒲谷氏とは別の方法で定理 3.1 を応用して、ある条件を満たすカンドル X に対して鎖複体 $(C_n^Q(X)_{\{1 \text{ pt.}\}}, \partial_n)$ から群の鎖複体への(次元を保つ)鎖写像を構成した [9]。この鎖写像によって引き戻すことにより、やはり群のコサイクルからカンドルのコサイクルを構成することができる。例えば、京都大学数理解析研究所の望月拓郎氏があるカンドルの族に対して与えた全てのコサイクル [8] (望月 3 コサイクルはそのひとつ)も、この方法により群のコサイクルから再構成できることを野坂氏は示している。

講演者も、定理 4.1 を活用して、結び目の研究に有益と思われるカンドルのコサイクルを幾つか構成している。しかし、その紹介は別の機会に譲りたい。

参考文献

- [1] I. T. Adamson, *Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2** (1954), 66–76.
- [2] S. Asami and S. Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-space*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 2, 285–296.

- [3] G. Hochschild, *Relative homological algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 246–269.
- [4] A. Inoue and Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, Geom. Dedicata **171** (2014), 265–292.
- [5] Y. Kabaya, *Cyclic branched coverings of knots and quandle homology*, Pacific J. Math. **259** (2012), no. 2, 315–347.
- [6] 鎌田 聖一, 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ 16, 丸善出版, 2012.
- [7] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), no. 3, 287–330.
- [8] T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles $\mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$* , Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 183–205.
- [9] T. Nosaka, *On third homologies of groups and of quandles via the Dijkgraaf-Witten invariant and Inoue-Kabaya map*, Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), no. 5, 2655–2691.

4次元多様体のシャドウと不変量

直江 央寛 (東京科学大学)*

序章

シャドウとは, 4次元多様体に埋め込まれた2次元の多面体で然るべき条件を満たすものであり, 3次元および4次元多様体の組み合わせ的な表示を与える. シャドウは3次元多様体や絡み目の量子不変量の研究を目的として Turaev により導入されたが [33, 34], 後に Costantino により量子トポロジー以外の分野へのいくつかの応用が提案された [5, 9, 10]. 特に, [6] において Costantino はシャドウを用いてシャドウ複雑度と呼ばれる3次元多様体および4次元多様体の不変量を定義した. これはシャドウの持つ特別な頂点(真頂点という)の個数の最小値として定義される非負整数値の不変量であり, 4次元の場合には本質的に多様体の微分構造に依存する量であることが知られている [19]. 本稿では, この4次元多様体のシャドウ複雑度に焦点を当て,

- シャドウ複雑度を用いた4次元多様体の分類問題
- シャドウ複雑度と4次元多様体の他の不変量との比較

という2つの問題について, 筆者の結果を中心に解説する.

1 準備

すべての多様体はコンパクト, 連結, 滑らか, 向き付けられているものとする. また, \cong で微分同相を表すこととする. 単体分割可能な位相空間対 $A \subset B$ に対して, A の B における正則近傍を $\text{Nbd}(A; B)$ と表記する. 閉 n 次元多様体 W と整数 k に対し, kW という記号によって, $k > 0$ のとき W の k 個のコピーの連結和, $k = 0$ のとき n 次元球面 S^n , $k < 0$ のとき W の向きを反転させた多様体の $|k|$ 個のコピーの連結和を表すものとする. M が境界付き n 次元多様体の場合も, kM を境界連結和を表す記法として同様に解釈する. ただし, $k = 0$ のときは n 次元球体 B^n を表すものとする.

1.1 単純多面体

ここではまず単純多面体とシャドウに関して概説する. X を連結, コンパクトな位相空間とする. 各点 $x \in X$ の正則近傍 $\text{Nbd}(x; X)$ が図1の(i)-(iv)のいずれかと同相であるとき, X を**単純多面体** (simple polyhedron) という. (iii)型の点を**真頂点** (true vertex) という. (ii)型および(iii)型の点全体の集合を X の**特異集合** (singular set) といい, $S(X)$

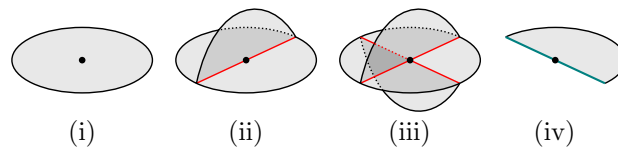


図1 単純多面体の局所モデル.

*〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京科学大学 理学院 数学系

e-mail: naoe@math.titech.ac.jp

本研究は科研費(課題番号:20K14316, 25K17248)の助成を受けたものである。

で表す. この特異集合 $S(X)$ は円周または 4 価グラフらの非交和である. $S(X)$ から真頂点を除いた集合の各連結成分を**三重線** (triple line) といい, $X \setminus S(X)$ の各連結成分を**領域** (region) という. 直ちに分かるように, 各領域はあるコンパクトな曲面からいくつかの点 (0 個も許す) を除いたものと同相である. 領域すべてが開円板であるような単純多面体は**特殊** (special) であるといい, 特にこのとき X を**特殊多面体** (special polyhedron) という. (iv) 型の点全体の集合を X の**境界** (boundary) といい, ∂X と書く. 境界が空である場合は, X は**閉** (closed) であるという.

例 1.1. (1) 任意のコンパクトな曲面は, それ自身が唯 1 つの領域であるような単純多面体である.

(2) 2次元円板 D, D' に対し, はめ込み $i: \partial D' \rightarrow \text{Int}D$ を考える. ただし, 多重点は横断的な二重点のみであるとする. このとき, $D \cup_i D'$ は単純多面体である. この境界は ∂D , 特異集合は $i(\partial D')$, 真頂点は i の二重点である.

1.2 4次元多様体のシャドウ

定義 1.2. M を境界付き 4次元多様体とする. M に局所平坦^{*1}かつ $X \cap \partial M = \partial X$ を満たすよう埋め込まれた単純多面体 X が存在し, M が X に縮約する^{*2}とき, X を M の**シャドウ** (shadow) という.

例 1.3. (1) コンパクトな曲面を底空間とする円板束に対し, その切断は全空間である境界付き 4次元多様体のシャドウと見なせる.

(2) 4次元球体の境界内の結び目 K に沿った 2-ハンドルの接着により得られる境界付き 4次元多様体 M を考える. K の 2次元円板 D への正則射影に対し, 例 1.1 (2) の方法で得られる単純多面体は M のシャドウとして M に埋め込める.

(3) 任意の 4次元 2-ハンドル体^{*3}はシャドウを許容する.

序章で述べたように, シャドウは量子不変量の研究を目的として Turaev により導入された [33, 34]. 本稿ではシャドウを用いた量子不変量の研究について詳しく触れないが, これらの研究については例えば [2, 3, 7, 8, 13, 30, 32] などを参照してほしい.

4次元多様体に埋め込まれた閉曲面は, その法束の Euler 数によって埋め込みの情報が記述される. 一般のシャドウの埋め込みを記述するために, この考えを拡張した**グリーム** (gleam) と呼ばれる概念がある. 具体的には, 各領域に対する半整数の割り振りとして与えられる. 詳しくは [34, 4] を参照のこと. グリームを備えた単純多面体 (X, \mathfrak{gl}) を**グリーム付き多面体** (shadowed polyhedron) という. 混乱がない場合は (X, \mathfrak{gl}) は単に X と表記する.

定理 1.4 (Turaev [34]). グリーム付き多面体 X に対し, X をシャドウとするような境界付き 4次元多様体を微分同相による違いを除き唯 1 つ指定する写像が存在する.

この定理において, グリーム付き多面体から境界付き 4次元多様体への対応を **Turaev の再構成** (Turaev reconstruction) という. グリーム付き多面体 X に対して Turaev の

^{*1} 各 $x \in X$ に対し, 滑らかに埋め込まれた 3次元球体 $B \subset M$ が存在し, $\text{Nbd}(x; X) \subset B$ であるとき, X は M 内で**局所平坦** (locally-flat) であるという.

^{*2} 縮約 (collapse) とは, 本来単体的複体に対する用語である. ここでは, M の微分構造に対応する三角形分割の縮約を考えている.

^{*3} 指数が高々 k までのハンドルらへの分解を持つ境界付き n 次元多様体を **n 次元 k -ハンドル体** という.

再構成によって得られる境界付き 4 次元多様体を M_X と表記する. これも, 本来であれば $M_{(X, \text{gl})}$ と表記すべきであるが, 混乱がない場合はしばしば略す.

例 1.5. 閉曲面 X にグリームとして整数 n を備え, グリーム付き多面体としたとき, 対応する境界付き 4 次元多様体 M_X は, X 上の円板束で Euler 数が n であるものである.

グリーム付き多面体 X に対して, ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し M_X の境界の 3 次元多様体が $k(S^1 \times S^2)$ と同相であったとき, $k(S^1 \times B^3)$ を M_X の境界に沿って接着することで閉 4 次元多様体 W が得られる. このとき, X は W のシャドウと呼ばれる. グリームを用いずに述べれば, 次のような定義になる.

定義 1.6. 閉 4 次元多様体 W に局所平坦に埋め込まれた単純多面体 X に対し, ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し, $W \setminus \text{IntNbd}(X; W)$ が $k(S^1 \times B^3)$ と微分同相であったとき, X を W のシャドウ (shadow) という.

定理 1.7 (Turaev [34]). 任意の閉 4 次元多様体はシャドウを許容する.

閉 4 次元多様体 W とそのシャドウ X があったとき, その埋め込みから X のグリーム gl も定まる. Turaev の再構成と Laudénbach, Poénaru の結果 [17] により, グリーム付き多面体は閉 4 次元多様体の表示として機能する.

2 4 次元多様体のシャドウ複雑度

定義 2.1. X は単純多面体, W はシャドウを許容する 4 次元多様体とする.

- (1) X が有する真頂点の個数を $c(X)$ と書き, X の**複雑度** (complexity) という.
- (2) W の**シャドウ複雑度** $\text{sc}(W)$ (shadow-complexity) を W のすべてのシャドウの複雑度の最小値として定義する.
- (3) W の**特殊シャドウ複雑度** $\text{sc}^{\text{sp}}(W)$ (special shadow-complexity) を W のすべての特殊シャドウの複雑度の最小値として定義する.

定理 1.7 により, シャドウ複雑度と特殊シャドウ複雑度は閉 4 次元多様体の非負整数値の不変量である. また, 定義より任意の閉 4 次元多様体 W に対して $\text{sc}(W) \leq \text{sc}^{\text{sp}}(W)$ という関係が成り立つ. これらの概念は Costantino により導入された [6].

2.1 特殊シャドウ複雑度に関する分類

定理 2.2 (Costantino [6]). W を閉 4 次元多様体とする.

- (1) $\text{sc}^{\text{sp}}(W) = 0$ であることの必要十分条件は, W が S^4 , $\pm\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $S^2 \times S^2$, $\pm 2\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ のいずれかと微分同相であることである.
- (2) $\text{sc}^{\text{sp}}(W) = 1$ であるような W は存在しない.

この定理の証明の概要は以下の通りである. X を $c(X) = 0$ (または $c(X) = 1$) の特殊多面体として, その上の任意のグリームを考え M_X を構成する. このとき, ある $k \geq 0$ が存在し M_X の境界 ∂M_X が $k(S^1 \times S^2)$ と微分同相であれば, 3-, 4-ハンドルの接着により閉 4 次元多様体を得られる. この方法で得られる閉 4 次元多様体らを分類すれば十分である. しかし実際には, ∂M_X が $k(S^1 \times S^2)$ と微分同相になるという条件は非常に大きな制約であり, この条件の特定が証明の主要部となる.

特殊シャドウ複雑度が 2 以上の場合については, 次の結果がある.

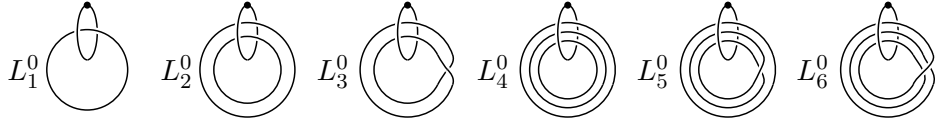


図2 $S^1 \times S^2 \subset S^1 \times S^3$ 内の絡み目 L_1^0, \dots, L_6^0 .

定理 2.3 (直江 [26]). 任意の正整数 k に対し, $\text{sc}^{\text{sp}}(k(S^1 \times S^3)) = k + 1$.

この事実と定理 2.2 と合わせて, sc^{sp} は 1 を除く 0 以上の整数全体への全射であることが分かる. なお, 本稿執筆時点で, 特殊シャドウ複雑度が 2 である閉 4 次元多様体はすべて決定されていない. また, 特殊シャドウ複雑度が 3 以上の場合で, その値が具体的に決定されている 4 次元多様体は定理 2.3 の他に知られていない.

Martelli は境界付き 4 次元多様体 $k(S^1 \times B^3)$ の境界の絡み目を固定した際, その絡み目に沿って (適切な枠で) 2-ハンドルを接着し, さらに 3-, 4-ハンドルを接着し得られるような閉 4 次元多様体は微分同相による違いを除き高々有限個であることを示した [18]. この結果から直ちに次が従う.

定理 2.4 (Costantino [6]). 任意の非負整数 n に対し, $\text{sc}^{\text{sp}}(W) \leq n$ となる閉 4 次元多様体 W は微分同相による違いを除き高々有限個である.

なお, シャドウ複雑度 sc については定理 2.4 のような有限性は成り立たない.

2.2 シャドウ複雑度 0 の閉 4 次元多様体

ここでは, Martelli [19] のシャドウ複雑度 0 の閉 4 次元多様体に関する結果を紹介する.

境界が $S^1 \times S^2$ の非交和であるような境界付き 4 次元多様体を**ブロック**という. ブロックの集合 \mathcal{S} に対し, \mathcal{S} に属するブロックらのコピーを境界同士で貼り合わせて得られる閉 4 次元多様体を \mathcal{S} で生成される**グラフ多様体**という.

各 $i \in \{1, \dots, 6\}$ に対し, L_i^0 を図 2 に示す $S^1 \times S^2 \subset S^1 \times S^3$ 内の絡み目とし, $M_i^0 := (S^1 \times S^3) \setminus \nu(L_i^0)$ とおく. さらに,

$$\mathcal{S}_0 = \{S^2 \times D^2, S^2 \times P, M_1^0, \dots, M_6^0\}$$

とする. ただし, P はパンツ (S^2 から開円板を 3 つ取り除いて得られる曲面) である.

定理 2.5 (Martelli [19]). W を閉 4 次元多様体とする. このとき, $\text{sc}(W) = 0$ であることの必要十分条件は, \mathcal{S}_0 で生成されるあるグラフ多様体 W' とある整数 k が存在し $W \cong W' \# k\mathbb{C}P^2$ であることである.

さらに, Martelli は $\text{sc}(W) = 0$ かつ基本群が有限であるような閉 4 次元多様体 W もすべて決定しており, 特に単連結の場合は $S^2 \times S^2, \mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}$ らの任意有限個のコピーの連結和と微分同相であることを示している. なお, $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ と同相だが微分同相でないような 4 次元多様体の存在はよく知られており (例えば, ごく一部だが [1, 29, 31]), そういった多様体らはすべてシャドウ複雑度が 1 以上ということになる. このことから, シャドウ複雑度は本質的に 4 次元多様体の微分構造に依存した量であることが分かる.

2.3 (連結) シャドウ複雑度 1 の閉 4 次元多様体

次に考えるべきは $\text{sc}(W) = 1$ であるような閉 4 次元多様体の分類である. Martelli の定理 2.5 の類似として安直に次が期待できるであろう.

予想 2.6. W を閉 4 次元多様体とする. このとき, $\text{sc}(W) \leq 1$ であることの必要十分条件は, \mathcal{S}_0 を含むあるブロックの集合 \mathcal{S} で生成されるあるグラフ多様体 W' とある整数 k が存在し $W \cong W' \# k\mathbb{C}P^2$ であることである.

これを証明しようとする, いくつかの技術的な難しさに気付く. その 1 つが連結和に関する問題である. \mathcal{S}_0 により生成されるグラフ多様体全体の集合は, 実は連結和で閉じている. 一方, シャドウ複雑度は連結和に関して劣加法的に振る舞う. つまり, $\text{sc}(W) = \text{sc}(W') = 1$ なる (\mathcal{S} で生成される) グラフ多様体 W, W' に対し, $W \# W'$ もまた (\mathcal{S} で生成される) グラフ多様体だが $\text{sc}(W \# W') = 2$ となる可能性がある. この問題を回避するために, [15] において次が導入された.

定義 2.7. X は単純多面体, W はシャドウを許容する 4 次元多様体とする.

- (1) X の特異集合の各連結成分に含まれる真頂点の個数の最大値を $c^*(X)$ と書き, X の**連結複雑度** (connected complexity) という.
- (2) W の**連結シャドウ複雑度** $\text{sc}^*(W)$ (connected shadow-complexity) を W のすべてのシャドウの連結複雑度の最小値として定義する.

定義から $0 \leq \text{sc}^*(W) \leq \text{sc}(W)$ が直ぐに分かる. また, $\text{sc}^*(W) = 0$ と $\text{sc}(W) = 0$ は同値である. さらに, 閉 4 次元多様体 W, W' に対し, $\text{sc}^*(W \# W') \leq \max\{\text{sc}^*(W), \text{sc}^*(W')\}$ が成り立ち, グラフ多様体を扱う上で都合が良い.

$\text{sc}^*(W) \leq \text{sc}(W)$ であることから, sc^* は sc より粗い不変量になっているが, 次の定理により, sc^* は確かに“複雑さ”を測る指標であると言える.

定理 2.8 (古宇田-Martelli-直江 [15]). 任意の整数 n に対し, $\text{sc}^*(W) \geq n$ を満たす閉 4 次元多様体 W が存在する.

この定理の証明には, 任意の有限表示群が 4 次元多様体の基本群として実現できると, Freedman による群の幅 [11] という概念が用いられている.

今一度, 定理 2.5 を思い出す. この定理に現れる \mathcal{S}_0 の各ブロックは, 実は $c(X) = 0$ であるような単純多面体 X を分解して得られる“多面体の基本パーツ”らに由来している. そこで, 唯 1 つの真頂点を持つ特異集合の近傍に対応する“多面体の基本パーツ”を考えると, さらに 11 種類追加で現れる. これらに対応するブロック M_1^1, \dots, M_{11}^1 は, それぞれ図 3 に示される $2(S^1 \times S^2) \subset 2(S^1 \times S^3)$ 内の絡み目 L_i^1 ($i \in \{1, \dots, 11\}$) の管状近傍の補空間 $M_i^1 = 2(S^1 \times S^3) \setminus \nu(L_i^1)$ として定まる. ここで,

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \sqcup \{M_1^1, \dots, M_{11}^1, (\mathbb{R}P^3 \times S^1) \setminus \nu(\mathbb{R}P^1 \times \{\text{pt.}\})\}$$

とする.

定理 2.9 (古宇田-Martelli-直江 [15]). W を閉 4 次元多様体とする. このとき, $\text{sc}^*(W) \leq 1$ であることの必要十分条件は, \mathcal{S}_1 で生成されるあるグラフ多様体 W' とある整数 k が存在し $W \cong W' \# k\mathbb{C}P^2$ であることである.

\mathcal{S}_1 で生成されるグラフ多様体は, ほとんど 2-ハンドル体のダブルであるが, $\mathbb{R}P^3 \times S^1$ は実はそうではない (このことから, 実は $\text{sc}^*(\mathbb{R}P^3 \times S^1) = \text{sc}(\mathbb{R}P^3 \times S^1) = 1$ であることも分かる). \mathcal{S}_1 は, \mathcal{S}_0 のブロック, 多面体に由来する 11 個のブロックの他に $(\mathbb{R}P^3 \times S^1) \setminus \nu(\mathbb{R}P^1 \times \{\text{pt.}\})$ という例外的なブロックが必要であり, これを見つける点に定理 2.9 の難しさがある. また, 4 次元多様体のブロックへの分解を見つけるため, 論文

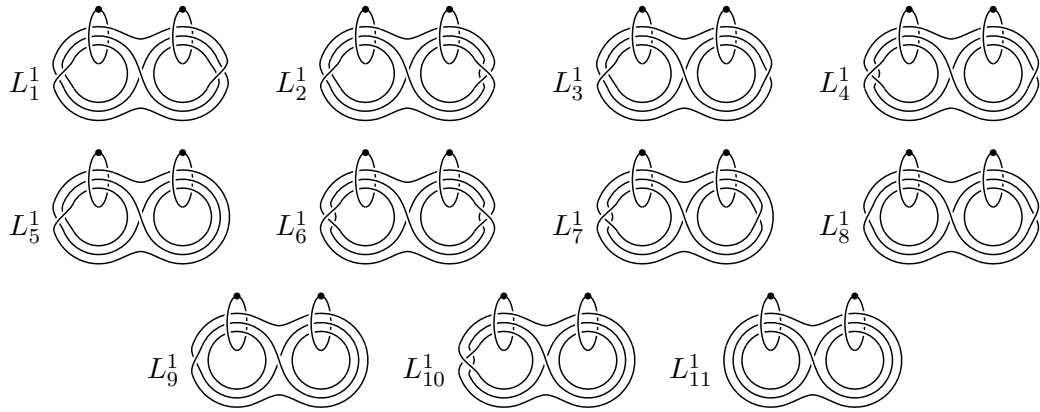


図3 $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2) \subset (S^1 \times S^3) \# (S^1 \times S^3)$ 内の絡み目 L_1^1, \dots, L_{11}^1 .

では 11 種類の絡み目 L_1^1, \dots, L_{11}^1 の例外的手術^{*4} の分類を行っている. この定理をさらに $sc^*(W) \leq 2$ の場合に拡張しようと考えた場合, 同様に絡み目の例外的手術の分類が必要となるが, 追加で考えるべき絡み目は 170 種類^{*5} に上る. ちなみに, S_1 で生成されるグラフ多様体には, 例えば次のような閉 4 次元多様体は現れない;

- 交差形式が $mE_8 \oplus n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ($m \neq 0$) であるもの;
- 符号数が 0 で, ダブルでないもの;
- 非球面的 (aspherical) であるもの.

したがって, 例えば K3 曲面, 4 次元トーラス T^4 , 双曲 4 次元多様体などの (連結) シャドウ複雑度は少なくとも 2 以上であり, これらを決定することは興味深い問題として残されている.

3 シャドウ複雑度と他の不変量との比較

この章の初めに, まず 3 次元多様体のシャドウ複雑度に関して簡単に紹介しておきたい. 閉 3 次元多様体 N に対し, $\partial M \cong N$ となるような境界付き 4 次元多様体 M がシャドウ X を許容するとき, この X を N のシャドウという. この定義のもと, 3 次元多様体に対しても同様にシャドウ複雑度が定義される. Costantino と Thurston は 3 次元多様体のシャドウ複雑度が双曲構造や安定写像と密接な関係を持つことを見出し [10], これによりシャドウ複雑度の幾何的な解釈が進んだ (石川, 古宇田 [14] も参照してほしい). 具体的には, ある正の定数 C, C' が存在し, 任意の 3 次元多様体 N に対し,

$$C\|N\| \leq sc(N) \leq C'\|N\|^2$$

が成り立つことが示された. ここで, $\|N\|$ は N の単体的体積である. このことから, 3 次元多様体 N のシャドウ複雑度が 0 であることと N がグラフ多様体であることが同値であることも分かる. また, これらの事実を用いて, 境界付き 4 次元多様体のシャドウ複雑度の評価も行われている [24, 25].

さて, 本章の主題はシャドウ複雑度と 4 次元多様体の他の不変量との関係についてであ

^{*4}Costantino-Thurston [10] の結果により, これらの絡み目は $2(S^1 \times S^2)$ 内の絡み目として双曲的である.

^{*5}[16] で真頂点の個数が 2 の特殊多面体がすべてリストアップされている. それらがちょうど 170 個ある.

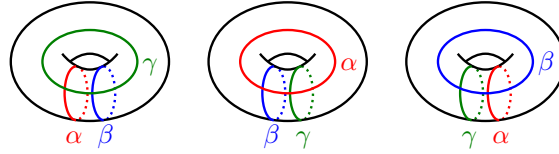


図4 安定化に用いる S^4 の種数1のトライセクション図式.

る. 筆者の知る限り, このような観点での研究は [27] に先立つものは見当たらない. ここでは, 直江-小川 [27] により得られた, 4次元多様体のシャドウ複雑度とトライセクション種数の関係について解説する.

3.1 トライセクション

定義 3.1. W を閉4次元多様体とする. ある整数 $g, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 次を満たすような W の分解 $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ が存在したとする;

- 各 $i \in \{1, 2, 3\}$ に対し, $W_i \cong k_i(S^1 \times B^3)$;
- 各 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対し, $i \neq j$ ならば $W_i \cap W_j \cong g(S^1 \times B^2)$;
- $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cong g(S^1 \times S^1)$ (すなわち, 種数 g の有向閉曲面).

このような分解 \mathcal{T} を W の**トライセクション** (trisection) という. また, 曲面 $\Sigma = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ を**中心曲面** (central surface) といい, その種数 $g(\mathcal{T}) = g$ を \mathcal{T} の**種数** (genus) という.

トライセクションは Gay と Kirby によって導入された. 彼らは, 4次元多様体 W から \mathbb{R}^2 へのある種の可微分写像の特異点の変形を介し, 次の定理を示している.

定理 3.2 (Gay, Kirby [12]). 任意の閉4次元多様体はトライセクションを許容する.

次に, トライセクション図式を紹介する. 中心曲面 Σ は, $\partial(W_1 \cap W_2) = \partial(W_2 \cap W_3) = \partial(W_3 \cap W_1)$ とも見なせる. $W_1 \cap W_2, W_2 \cap W_3, W_3 \cap W_1$ はそれぞれ種数 g の3次元1-ハンドル体であるため, 各々が完備メリディアン円板系を持つ. その境界を Σ に描き込んだものが**トライセクション図式** (trisection diagram) である. トライセクション図式は閉4次元多様体を微分同相の違いを除き一意的に復元し, 4次元多様体の表示として機能する.

トライセクション図式に対し, 図4のいずれかの図式との連結和を取るといった操作を**安定化** (stabilization) と呼ぶ. この安定化は, トライセクションの種数を1つ増やしつつ, 対応する4次元多様体の微分同相類を変えない操作になっている [12, 21]. また, 安定化の逆操作を**非安定化** (destabilization) という.

3.2 トライセクション種数

定義 3.3. 閉4次元多様体 W のトライセクションの種数の最小値を $g(W)$ と書き, W の**トライセクション種数** (trisection genus) という.

$g(S^4) = 0, g(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = g(\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) = g(S^1 \times S^3) = 1$ であり, $g \leq 1$ の閉4次元多様体はこれらに限ることは容易に分かる. $g = 2$ の場合は, Meier と Zupan によって分類が行われ, $S^2 \times S^2$ あるいは $g = 1$ の閉4次元多様体2つの連結和のみであることが証明された [22]. $g \geq 3$ の場合の分類は完了していないが, Meier によって次が予想されている.

予想 3.4 (Maier [20]). $g(W) = 3$ であるような閉 4 次元多様体 W は, $g \leq 2$ の閉 4 次元多様体らの連結和で得られるものの他に, L_p または L'_p ($p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) に限る.

ただし, L_p, L'_p はそれぞれレンズ空間 $L(p, 1)$ のスパン多様体, 捻れスパン多様体である. p が偶数の場合は $L_p \not\cong L'_p$ であり, p が奇数の場合は $L_p \cong L'_p$ である [28].

3.3 ハンドル分解から得られるトライセクション

閉 4 次元多様体 W のハンドル分解からトライセクションを構成することができる. 簡単のため, ハンドル分解は, 0-ハンドルと 4-ハンドルをちょうど 1 つずつ有し, 各ハンドルは自身よりも指数が低いハンドルらの境界に接着されているものとする. ここで, H_{01} として 0-,1-ハンドルらの和集合, H_2 として 2-ハンドルらの和集合, H_{34} として 3-,4-ハンドルらの和集合を表すことにする. また, $L \subset \partial H_{01}$ を 2-ハンドルの接着円周からなる絡み目とし, τ を L の解消トンネル^{*6}とする. このとき,

$$\begin{aligned} W_1 &= H_{01} \setminus \text{IntNbd}(L \cup \tau; W), \\ W_2 &= H_2 \cup \text{Nbd}(L \cup \tau; W), \\ W_3 &= H_{34} \setminus \text{IntNbd}(L \cup \tau; W) \end{aligned}$$

と定義すると, これらは W のトライセクションを与える [23]. このときの中心曲面は, $\partial \text{Nbd}(L \cup \tau; \partial H_{01})$ と同一視できる. また, 2-ハンドルの枠の情報からトライセクション図式を具体的に描くこともできる.

3.4 加重シャドウ複雑度

単純多面体 X の複雑度 $c(X)$ は, その真頂点の個数として定義されていた. つまり, 謂わば $c(X)$ とは “特異集合の複雑さ” である. 一方で, [27] では “領域の複雑さ” も考慮に入れた加重複雑度 $c_r(X)$ が導入された.

定義 3.5. 実数 $r \geq 0$ を固定する.

- (1) 単純多面体 X に対し, X が閉曲面でないときは

$$c_r(X) = c(X) + \sum_{R:\text{領域}} r(1 - \chi(R)).$$

とし, X が 2 次元球面 S^2 に同相であるときは $c_r(X) = 0$ として X の r -加重複雑度 $c_r(X)$ (r -weighted complexity) を定義する.

- (2) 閉 4 次元多様体 W の r -加重シャドウ複雑度 $sc_r(W)$ (r -weighted shadow-complexity) を W のすべてのシャドウの r -加重複雑度の最小値として定義する.

注意 3.6. (1) S^2 以外の閉曲面は閉 4 次元多様体のシャドウになり得ないため, それらに対しては加重複雑度を定義していない.

- (2) X が閉曲面でない場合, 領域 R 内に適切に弧をいくつか取ると, これに沿って R を切り開くことで円板が得られる. このような弧の成分数はちょうど $1 - \chi(R)$ である. そのような弧らの和集合を X の切断系という.

^{*6} 閉 3 次元多様体 N と, 絡み目 $L \subset N$ に対し, L の解消トンネル τ とは, L に端点を置く線分らの N への埋め込みであり, $\text{Nbd}(L \cup \tau; N)$ と $N \setminus \text{IntNbd}(L \cup \tau; N)$ が N の Heegaard 分解を与えるものである.

$sc_r(W)$ は閉 4 次元多様体の不変量であり, $\{m + rn \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ に値を取る. この新たな不変量と, シャドウ複雑度, 特殊シャドウ複雑度, 連結シャドウ複雑度の比較は次の通りである.

命題 3.7 (直江-小川 [27]). W を閉 4 次元多様体とし, 実数 r, r' を $0 < r < r'$ とする.

- (1) $sc^*(W) \leq sc(W) \leq sc_r(W) \leq sc_{r'}(W) \leq sc^{sp}(W)$.
- (2) $sc(W) = sc_0(W)$.
- (3) $r \geq 2$ のとき, $sc_r(W) = sc^{sp}(W)$.

また, sc_r は定理 2.4 と同様の有限性をもつ. つまり, 任意の実数 $r > 0, a \geq 0$ に対し, $sc_r \leq a$ となる閉 4 次元多様体全体は微分同相による違いを除き高々有限個である.

3.5 トライセクション種数の評価

第 3.3 節で説明した方法を応用し, シャドウからトライセクション \mathcal{T} を構成することができる. まず, X を閉 4 次元多様体 W のシャドウ, T を $S(X)$ の極大木とし, Γ を X の切断系とする. これらから, W のハンドル分解が 1 つ指定できる. この分解における 2-ハンドルの接着円周を L_2 とすると, $S(X) \setminus T$ の各連結成分に対し 2 本, Γ の各連結成分に対し 1 本のトンネルを用意することで L_2 の解消トンネル τ を与えることができる. T は $S(X)$ の極大木であるため, $S(X) \setminus T$ の連結成分数は $\text{rank} \pi_1(S(X)) = c(X) + 1$ に等しい. 一方で, Γ の成分数は $\sum_{R:\text{領域}} (1 - \chi(R))$ に等しい. 以上より, このときの解消トンネル τ の成分数は

$$\begin{aligned} 2(c(X) + 1) + \sum_{R:\text{領域}} (1 - \chi(R)) &= 2 + 2 \left(c(X) + \frac{1}{2} \sum_{R:\text{領域}} (1 - \chi(R)) \right) \\ &= 2 + 2c_{1/2}(X) \end{aligned}$$

となる. さらに, このときのトライセクション \mathcal{T} の種数は, 簡単な計算から τ の成分数に 1 を加えたものであることが分かるため,

$$g(W) \leq 3 + 2c_{1/2}(W)$$

が得られる. ここから, シャドウの領域の形状に関する場合分けを行い, トライセクションの非安定化が必ず 1 度は行えることが示せる. 命題 3.11 と合わせて次が得られる.

定理 3.8 (直江-小川 [27]). 任意の実数 $r \geq \frac{1}{2}$ と任意の閉 4 次元多様体 W に対して, $g(W) \leq 2 + 2sc_r(W)$ が成り立つ.

3.6 計算例と最良性

k を 1 以上の整数として, 以下のように単純多面体 X_k を定義する. $k = 1$ のときは, $X_1 = S^2$. $k \geq 2$ のとき, S^2 に $k - 1$ 個の互いに交わらない単純閉曲線の族 C_1, \dots, C_{k-1} をとる. ただし, $S^2 \setminus (C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{k-1})$ は 2 つの円板と $k - 2$ 個のアニュラスに分かれるものとする. ここで, 各 $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ に対し, 円板 D_i の境界が C_i に一致するように S^2 に D_i を貼り付ける. こうして得られる単純多面体 $S^2 \cup (D_1 \cup \dots \cup D_{k-1})$ を X_k とする. 図 5 を見よ. このとき, 簡単な計算により $c_{1/2} = \max\{0, \frac{k-2}{2}\}$ であることが分かる.

整数 $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ を $2k_1 + k_2 + k_3 = k$ となるよう選ぶ. このとき, 単純多面体 X_k は $k_1(S^2 \times S^2) \# k_2 \mathbb{C}P^2 \# k_3 \overline{\mathbb{C}P^2}$ にシャドウとして埋め込むことができる. さらに, これにより次が成り立つ.

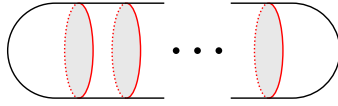


図5 単純多面体 X_k .

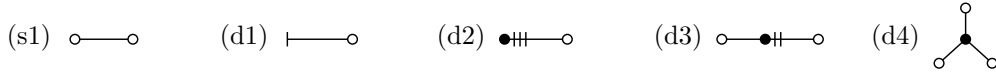


図6 $c_{1/2} = 0$ の単純多面体のエンコードグラフ.

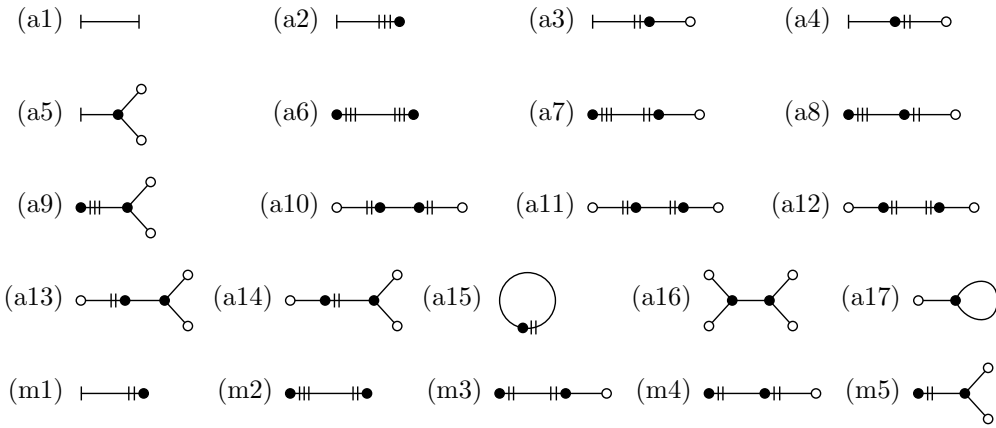


図7 $c_{1/2} = \frac{1}{2}$ の単純多面体のエンコードグラフ.

命題 3.9. $sc_{1/2}(k_1(S^2 \times S^2) \# k_2 \mathbb{C}P^2 \# k_3 \overline{\mathbb{C}P^2}) = \max \left\{ 0, \frac{2k_1 + k_2 + k_3 - 2}{2} \right\}$

注意 3.10. (1) $k\mathbb{C}P^2$ のシャドウ X_k を考えれば, $0 \leq r < \frac{1}{2}$ に対しても $sc_r(k\mathbb{C}P^2) \leq \max \{0, (k-2)r\}$ であることが分かる. 一方で, $g(k\mathbb{C}P^2) = k$ であるため, $k\mathbb{C}P^2$ は $k \geq 3$, $0 \leq r < \frac{1}{2}$ に対して $g(W) > 2 + 2sc_r(W)$ である. すなわち, 定理 3.8 の不等式が成り立つための r は $\frac{1}{2}$ 以上である必要がある.

(2) $p = 2 + 2q$ を満たす任意の $(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $g(W) = p$, $q = sc_{1/2}(W)$ を満たす閉 4 次元多様体 W が存在する. なお, g は 0 以上の整数, $sc_{1/2}$ は 0 以上の半整数すべてに値を取りうることに注意する. とくに, 命題 3.9 の多様体はすべてこの性質を満たす.

以上の意味で, 定理 3.8 の不等式 $g(W) \leq 2 + 2sc_{1/2}(W)$ は最良であると言える.

3.7 加重シャドウ複雑度が低い閉 4 次元多様体の分類

最後に, 定理 3.8 と注意 3.10 を踏まえ, $r = \frac{1}{2}$ の状況に着目し, 加重シャドウ複雑度に関する閉 4 次元多様体の分類問題を考える.

図 6, 図 7 にそれぞれ $\frac{1}{2}$ -加重複雑度が 0 の単純多面体, $\frac{1}{2}$ -加重複雑度が $\frac{1}{2}$ の単純多面体を示した. なお, これらは**エンコードグラフ**^{*7}と呼ばれる [19] で導入された方法で単純

^{*7} 単純多面体を単純閉曲線らに沿っていくつかの基本的なピースに分解し, その各ピースに対して頂点を用意し, 単純閉曲線で貼り合うピースに対応する頂点同士を辺で結ぶことで得られるグラフである. 各頂点はピースを特定させるため描き分けを行っている.

多面体を表している。これらの単純多面体 X にグリームを任意に与え、Turaev の再構成により境界付き 4 次元多様体 M_X を構成し、その境界が $k(S^1 \times S^2)$ となるような場合を特定する。さらに、4 次元多様体を Kirby 図式で表し Kirby 計算を行うことで、4 次元多様体を絞り込み次が得られた。

定理 3.11 (直江-小川 [27]). W を閉 4 次元多様体とする。

- (1) $sc_{1/2}(W) = 0$ であることの必要十分条件は、 W が S^4 , $\pm\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $S^2 \times S^2$, $\pm 2\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ のいずれかと微分同相であることである。
- (2) $sc_{1/2}(W) = \frac{1}{2}$ であることの必要十分条件は、 W が $\pm 3\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $\pm 2\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, $S^1 \times S^3$, $\pm\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# (S^1 \times S^3)$, L_2 , L'_2 または L_3 のいずれかと微分同相であることである。

注意 3.12. $sc_{1/2} = 0$ の閉 4 次元多様体は $sc^{sp} = 0$ のものらと同じである (cf. 定理 2.2).

参考文献

- [1] A. Akhmedov and B. D. Park, *Exotic smooth structures on small 4-manifolds*, Invent. Math. **173** (2008), no. 1, 209–223.
- [2] U. Burri, *For a fixed Turaev shadow Jones-Vassiliev invariants depend polynomially on the gleams*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), no. 1, 110–127.
- [3] A. Carrega and B. Martelli, *Shadows, ribbon surfaces, and quantum invariants*, Quantum Topol. **8** (2017), no. 2, 249–294.
- [4] F. Costantino, *Shadows and branched shadows of 3 and 4-manifolds*. Scuola Normale Superiore, Edizioni della Normale, Pisa, Italy, 2005.
- [5] F. Costantino, *Stein domains and branched shadows of 4-manifolds*, Geom. Dedicata **121** (2006), 89–111.
- [6] F. Costantino, *Complexity of 4-manifolds*, Exp. Math. **15** (2006), no. 2, 237–249.
- [7] F. Costantino, *6j-symbols, hyperbolic structures and the volume conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 1831–1854.
- [8] F. Costantino, *Coloured Jones invariants of links and the volume conjecture*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 1, 1–15.
- [9] F. Costantino, *Branched shadows and complex structures on 4-manifolds*, J. Knot Theory Ramif. **17** (2008), no. 11, 1429–1454.
- [10] F. Costantino and D. Thurston, *3-manifolds efficiently bound 4-manifolds*, J. Topol. **1** (2008), no. 3, 703–745.
- [11] M. H. Freedman, *Group width*, Math. Res. Lett. **18** (2011), no. 3, p. 433–436.
- [12] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
- [13] M. N. Goussarov, *Interdependent modifications of links and invariants of finite degree*, Topology **37** (1998), no. 3, 595–602.
- [14] M. Ishikawa and Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of 3-manifolds*, Math. Ann. **367** (2017), no. 3-4, 1819–1863.
- [15] Y. Koda, B. Martelli and H. Naoe, *Four-manifolds with shadow-complexity one*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **31** (2022), no. 4, 1111–1212.
- [16] Y. Koda and H. Naoe, *Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary*, Algebr.

Geom. Topol. **20** (2020), no. 7, 3707–3731

- [17] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.
- [18] B. Martelli, *Links, two-handles, and four-manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2005**, no. 58, 3595–3623.
- [19] B. Martelli, *Four-manifolds with shadow-complexity zero*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2011**, no. 6, 1268–1351.
- [20] J. Meier, *Trisections and spun four-manifolds*, Math. Res. Lett. **25** (2018), no. 5, 1497–1524.
- [21] J. Meier, T. Schirmer and A. Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no.11, 4983–4997.
- [22] J. Meier and A. Zupan, *Genus-two trisections are standard*, Geom. Topol. **21** (2017), no. 3, 1583–1630.
- [23] J. Meier and A. Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115** (2018), no. 43, 10880–10886.
- [24] H. Naoe, *Mazur manifolds and corks with small shadow complexities*, Osaka J. Math. **55** (2018), no. 3, 479–498.
- [25] H. Naoe, *Corks with large shadow-complexity and exotic 4-manifolds*, Experiment. Math. **30** (2021), no. 2, 157–171.
- [26] H. Naoe, *The special shadow-complexity of $\#_k(S^1 \times S^3)$* , J. Knot Theory Ramifications, **34** (2025), no. 5, 2550014.
- [27] H. Naoe and M. Ogawa, *Shadow-complexity and trisection genus*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) (in press).
- [28] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifolds with effective torus actions. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279–317.
- [29] J. Park, A. I. Stipsicz, and Z. Szabó, *An exotic smooth structure on $\mathbb{C}P^2 \# 5\overline{\mathbb{C}P^2}$* , Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 5–6, 701–712.
- [30] A. N. Shumakovitch, *Shadow formula for the Vassiliev invariant of degree two*, Topology **36** (1997), no. 2, 449–469.
- [31] A. Stipsicz and Z. Szabó, *An exotic smooth structure on $\mathbb{C}P^2 \# 6\overline{\mathbb{C}P^2}$* , Geom. Topol. **9** (2005), 813–832.
- [32] D. P. Thurston, *The algebra of knotted trivalent graphs and Turaev’s shadow world*, in *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, 337–362, Geom. Topol. Monogr., 4, Geom. Topol. Publ., Coventry.
- [33] V. G. Turaev, *Shadow links and face models of statistical mechanics*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 1, 35–74.
- [34] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

平面被覆予想, その誕生から未来まで

根上 生也 (横浜国立大学)*

2025 年 8 月 5 日

概 要

平面に埋め込み可能な有限被覆を持つ連結グラフは射影平面に埋め込み可能であるという予想は“平面被覆予想”と呼ばれ, 位相幾何学的グラフ理論における未解決難問の1つとして認知されている。本稿では, その始まりから現在に至るまでの概要を解説するとともに, 未来に向けた展望を述べる。

1 事の始まり

1986 年のこと, 私が博士の学位を取得した翌年のことだった。その学位論文 [20] では, 論文 [19] で提唱したグラフの埋め込みの“一意性”と“忠実性”という概念とグラフの連結性の関係について探究した。ある意味で研究が一区切りついたので, 何か新しいことをしたいと考えて思い至ったのが次の予想である。

平面被覆予想 (Negami [23], 1988) 連結グラフ G が平面的な有限被覆を持てば, G は射影平面に埋め込み可能であろう。

文献上は予想の公開は 1988 年となるが, 私がこの予想に思い至ってはその 2 年前で, その証明のスキームの原型にあたるアイデアを論文 [21] の中で示している。

その当時, いわゆる“Thurston のレクチャーノート”[42] が国内に出回っており, 私は特にその 13 章に書かれていた“軌道体 (orbifold)”に興味を持った。その一方で, 同じ頃に Gross-Tucker 著の“Topological Graph Theory”[8] が出版された。私はそれを入手してざっと目を通したが, Ringel の“Map Color Theorem”[37] の中で開発された方法を紹介しているだけのように思えた。

後述するように, [8] ではトポロジーにおける被覆空間の概念をグラフに限定して, “ボルテージ・グラフ”という組合せ的な表現を与えている。そういう表現を与えるところで終わらずに, その表現を使って明らかになる“現象”を示すべきだと私は考えた。そういう思いとともに, Thurston のレクチャーノートが教えてくれた軌道体の考え方と私が独自に探究していたグラフの埋め込みの忠実性の概念を融合させて, 次の定理を得た。

定理 1 (Negami [23]) 連結グラフ G が平面的な有限正則被覆を持てば, G は射影平面に埋め込み可能である。

* e-mail: negami-seiya-vj@ynu.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 05C10, 57M10, 57M15

キーワード: 位相幾何学的グラフ理論, 被覆グラフ, 被覆空間, 平面被覆予想

冒頭の予想と比較すると、その違いは「正則」があるかないかだけである。つまり、上の定理は、群作用のある被覆に限定すれば、予想が正しいことを意味している。また、被覆が有限のものに限定されていることも重要である。なぜなら、無限被覆も許してしまえば、どんなグラフでも平面的な被覆を持ってしまうからだ。たとえば、普遍被覆を考えればよい。サイクルを含むどんなグラフの普遍被覆も無限の木になり、それは平面に埋め込み可能、つまり平面的である。しかし、射影平面に埋め込み不可能なグラフはいくらでも存在するので、「有限」を削除してしまうと、予想は成立しない。というよりも、面白味を欠いてしまうだろう。

2 被覆グラフの組合せ的表現

本稿で扱っているグラフの“被覆”は代数的トポロジーでいうところの被覆空間のグラフ版に他ならない。一般的な被覆空間は基底の空間（被覆される空間） X と局所位相同型な位相空間 \tilde{X} のことである。つまり、全射 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ があり、それを介して対応する点どうしの適当な近傍が位相同型になっている。グラフの場合に限定すると、各点 x の近傍の形状はその点から何本の線分が出ているかで決まってしまうので、以下のような組合せ的な定義が可能となる。

一般に、**グラフ** G とは、頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ からなる構造であり、各辺 $e = uv \in E(G)$ は2つの頂点 $u, v \in V(G)$ を結ぶ線分になっている。頂点 $v \in V(G)$ に接続している辺の本数（ループの場合は2と数える）をその頂点の**次数**と呼び、 $\deg v$ で表す。以下で述べる諸概念は、ループや多重辺がある場合にも整合するように定義できるが、記号が煩雑になるだけなので、そういうものがない**単純グラフ**の場合に限定して記述し、ループや多重辺のある場合には適宜解釈してもらうこととする。

このような前提のもとで、頂点 $v \in V(G)$ と辺で結ばれている頂点の集合を $N(v)$ で表すと、 $|N(v)| = \deg v$ となり、頂点 v の“近傍”の形状は $\deg v$ の値で決まる。ちなみに、グラフ理論の用語では、 $N(v)$ を v の**近傍**と呼ぶ。この理解のもとで解釈すれば、以下の組合せ的な定義がトポロジーにおける“被覆空間”と同様の概念を定義していることがわかるだろう。

2つの（有限）グラフ G と \tilde{G} を考える。そのいずれも**連結**であるとする。つまり、そのグラフ内のどの2頂点の間も辺をたどっていける道があるとする。その頂点集合間の全射 $p: V(\tilde{G}) \rightarrow V(G)$ で、対応する頂点の近傍の間の1対1対応を誘導するものが存在するとき、 \tilde{G} を G の**被覆グラフ**、または単に**被覆**といい、 p をその**射影**と呼ぶ。この射影は辺集合間の対応も自然に誘導するので、それも併せて $p: \tilde{G} \rightarrow G$ と書く。（図3参照）

特に、 G の被覆 \tilde{G} に対して群 Γ の作用があり、 $p(u) = p(v)$ であることと $\gamma(u) = v$ となる元 $\gamma \in \Gamma$ が存在することが同値となるとき、 \tilde{G} を G の**正則被覆**といい、群 Γ をその**被覆変換群**と呼ぶ。そのような群作用のある被覆グラフを構成する組合せ的な方法として、“ボルテージ・グラフ”というものがある。

まず、 G の各辺に群 Γ の元を割り当てる写像 $\sigma: E(G) \rightarrow \Gamma$ (ボルテージ割り当て) を与える。ただし、 $e = uv$ を有向辺と考えたときに、 $\sigma(vu) = \sigma(uv)^{-1}$ であるとする。このとき、 (G, σ) をボルテージ・グラフと言う。そこで、直積 $V(G) \times \Gamma$ を頂点集合とし、各辺 $uv \in E(G)$ に対して、 (u, γ) と $(v, \gamma \cdot \sigma(uv))$ を結ぶ辺を追加することで得られるグラフ G^σ は、群 Γ を被覆変換群とする G の正則被覆になっている。

一方、群作用を前提としない n 重被覆を構成するには、 n 次対称群 S_n を利用する。まず、各辺に S_n の元を割り当てる任意の写像を $\rho: E(G) \rightarrow S_n$ とし、被覆の頂点集合として $V(G) \times \{1, \dots, n\}$ を考え、各辺 uv に対して、 (u, k) と $(v, \rho(k))$ を結ぶ辺を追加する。このようにして構成されたグラフ G_ρ は G の被覆グラフになっている。この場合、 ρ は置換ボルテージ割り当てと呼ばれる。

Gross-Tucker の本 [8] では、任意の被覆グラフが上のようにして構成できることを述べているが、私にはそれはほぼ明らかな事実のように思えた。その一方で、代数的トポロジーの教科書 [40] に書かれている被覆空間の理論はとても高尚なもののように感じた。だからといって、それは平面被覆予想を解決してくれるものではない。

大事なことは、グラフの平面性はホモトピー不変ではないという事実である。代数的トポロジーにおける被覆空間の理論では、位相空間の被覆空間はその基本群の部分群の共役類と 1 対 1 に対応して存在することが示されている。しかし、1 次元ベッチ数が等しいグラフはすべてホモトピー同値である。つまり、グラフが平面的であれ、非平面的であれ、ループのブーケとホモトピー同値になってしまう。つまり、ホモトピーの目で見ているだけでは、平面被覆予想は解決できないということである。

3 埋め込みの忠実性

思い返せば、学部時代に Ringel の “Map Color Theorem” [37] と出会ったことがすべての始まりだった。その本には、上で述べたボルテージ・グラフのアイデアを使って、完全グラフ K_n (n 個の頂点があり、そのすべての組が辺で結ばれているグラフ) の閉曲面への埋め込み (辺の交差なく、グラフを閉曲面に描くこと) を構成する方法が示されていた。簡単にいうと、それは小さなグラフの埋め込みから、被覆グラフの考え方を使得、大きなグラフの埋め込みを構成するというものだった。それを知った私は、グラフを閉曲面に埋め込む問題を考えるようになった。

「地図色分け定理」と同様に、その当時の研究は目的のグラフを適当な閉曲面に埋め込むことができるかどうか議論されているものばかりだった。そこで私は、これからは「埋め込むことができるかどうか」ではなく、「どのように埋め込めるか」と問うべきだと考えた。たとえば、Whitney [43, 44] では、3-連結 (2 頂点を除去しても非連結にならない) 平面的グラフは球面に一意的に埋め込み可能であることが示されている。

Whitney の論文では、今日のマトロイド理論のもとになっているような議論が展開されており、当時の私には少々難解に思えた。そこで、自力でその証明を試みたところ、埋

め込みの一意性を証明するだけならそれほど難しい議論をする必要はないことがわかった。さらに、その証明は埋め込みの一意性だけではなく、私が後に定義した“忠実性”の証明にもなっていることを理解した。

グラフ G の閉曲面 F^2 への埋め込みを G からの連続写像として捉えて $f: G \rightarrow F^2$ と表すことにする。このとき、 G の任意の自己同型写像 $\sigma: G \rightarrow G$ に対して、閉曲面上の自己同相写像 $h: F^2 \rightarrow F^2$ が存在し、 $h \circ f = f \circ \sigma$ となるとき、 $f: G \rightarrow F^2$ は**忠実**であるといい、 G がそのような埋め込みを持つとき、 G は F^2 に**忠実に埋め込み可能**であるという。つまり、忠実な埋め込みは、グラフ自身が持っている対称性を忠実に実現するようにグラフを閉曲面に埋め込んでいる。

そこで、グラフ G の平面的な正則被覆 \tilde{G} を考えてみよう。まず、 \tilde{G} は正則被覆なので、 \tilde{G} は被覆変換群 Γ を持つ。特に \tilde{G} が 3-連結ならば、 \tilde{G} は球面 S^2 に忠実に埋め込み可能なので、群 Γ は S^2 に作用し、 \tilde{G} はその作用のもとで不変になっている。これは、 \tilde{G}/Γ が S^2/Γ として得られる楕円的 2-軌道体の中に埋め込まれていることを意味している。

Thurston の講義録 [42] の 13 章が教えてくれたように、その楕円的 2-軌道体の基礎となる曲面は球面、射影平面、円板のいずれかと位相同型である。特に、球面や円板に埋め込み可能なグラフは射影平面にも埋め込み可能なので、上述の $G = \tilde{G}/\Gamma$ が射影平面に埋め込み可能であることが結論できる。これが定理 1 の証明の基本的なアイデアである。一般には \tilde{G} が 3-連結になる保証がないので、少々テクニカルな議論も必要である。

4 グラフ・マイナー

論文 [23] では、定理 1 の証明を与え、平面被覆予想（「1-2- ∞ 予想」とも言う）を提起した後に、以下のような予想解決の道筋が示されている。

グラフ G が平面被覆予想の反例ならば、 G は平面的有限被覆を持つが、射影平面には埋め込み可能ではない。そのような反例グラフの中で包含関係に関して最小のものを G とすると、 G 自身は射影平面には埋め込み不可能であるが、任意の辺 $e \in E(G)$ を除去して得られるグラフ $G - e$ は射影平面に埋め込み可能になる。

一般に、閉曲面 S に埋め込み不可能ではあるが、その任意の部分グラフが S に埋め込み可能であるグラフを S に対する**既約グラフ**という。たとえば、球面に対する既約グラフは次数 2 の頂点を無視すれば、 K_5 と $K_{3,3}$ のみであることが **Kuratowski の定理**として知られている。それと同様に、論文 [2, 7] には射影平面に対する既約グラフはちょうど 103 個存在することが示されている。

もし平面被覆予想の反例があれば、その最小反例は射影平面に対する既約グラフになっている。その既約グラフのうち 3 個は非連結なので、反例となる候補はその 3 個を除くちょうど 100 個のグラフの中に隠れていることになる。逆に言うと、その 100 個のグラフが予想の反例にならないことを示せば、予想が正しいことになる。これで問題が有限の問題になったかに思えた。

それからしばらくして、アメリカの数学者 Mike Fellows からメールが届いた。といっても、当時は現在のように電子メールが利用できたわけではないので、紙にタイプされた手紙である。そして、その手紙には、Fellows が博士論文 [5] の中で平面的被覆と類似する“平面的エミュレーター”（後述）を研究しており、彼の同級生の Dan Archdeacon [2] が射影平面に対する既約グラフがそれまでに知られていた 103 個になることを証明したと書かれていた。私はこの“共時性”に驚いた。

私たちはその後も手紙のやり取りをして議論を交わした。そして、その過程でアメリカを中心とするグラフ理論の研究者の中で“グラフ・マイナー”という考え方が動きだしていることを知った。その考え方に従って射影平面に対する既約グラフを分類すると、連結なものは 32 個になる。有限とはいえ 100 個では途方に暮れるが、32 個なら考える気にはなれそうだ。さらに、その 32 個は 11 個のグループに分類され、そのグループの親玉にあたるグラフを攻略すれば十分であることを知った。

そして、Fellows [6] はその親玉の 1 つである $K_{3,5}$ が予想の反例にならないことを示したが、Archdeacon [4] と私 [24] は独立に 8 個の親玉を攻略した。そして、 $K_{4,4} - e$ と $K_{1,2,2,2}$ と呼ばれる親玉が残り、“恐怖の 2 つ (terrible two)” と呼ばれるようになった。ちなみに、英語圏で“terrible two”といえば手に負えない 2 歳児のことだそうだ。

退治すべき親玉があと 2 つだと思うと予想の解決も近いように感じられたが、私たちの研究はここで行き詰っていた。ところが、20 世紀も終わりに近づいたときにチェコ人の Petr Hliněný [9] という新星が登場した。彼は平面的な被覆グラフのある場所に配置した電荷を周辺に放電し、その流れを追跡するという巧妙な方法で、 $K_{4,4} - e$ が予想の反例にならないことを証明した。

これで退治すべき親玉が $K_{1,2,2,2}$ (図 1) のみとなったが、 $K_{1,2,2,2}$ を除けば予想が成立するというわけではない。あくまで、この親玉を退治すれば、それと連動して、その背後に隠れている無限個の小物たちも自動的に次々と退治されてしまうという意味である。

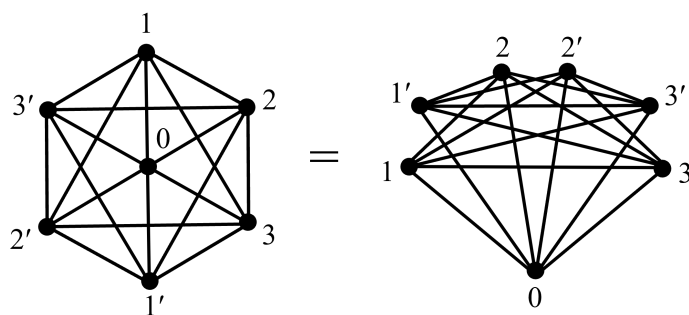


図 1 $K_{1,2,2,2}$

しかし、その後に Hliněný は博士課程の指導教官である Robin Thomas とともに、それを除けば予想が成立するという 16 個のグラフを特定した [10, 12, 13]。もちろん、それらが予想の反例だと言っているわけではない。厳密には、次数 3 の頂点を平面的グラフ

で置き換えるという変形を許すので、“有限個の反例”とは言えないが、その変形は本質的な差異を生み出さない。ここまでの経緯は [14] の中でも語られている。

グラフ理論ではグラフの局所的な変形を考えることが多い。その代表的な変形操作は辺の**除去**と**縮約**である。前者は単に 1 本の辺を取り除くことであり、後者は両端点を一致させるまで辺を縮めていく操作である。グラフ G から辺の除去と縮約を繰り返してグラフ H が得られるとき、 H は G の**マイナー**であるといい、 $H \leq_m G$ と書く。このマイナーの関係によりグラフ全体が半順序集合になることは明かだろう。

このマイナーという言葉を使うと、私が修士論文の中で証明した定理 [17, 18] は、3-連結グラフ G が車輪グラフ以外の 3-連結グラフ H をマイナーとして持つための必要十分条件は、 G が H から辺の追加と 3-**頂点分割**と呼ばれる変形を繰り返して得られることであると述べられる。その後、この定理は“Negami’s Splitter Theorem”と呼ばれるようになり、グラフ・マイナーの理論の先駆的な仕事として認知されている。

グラフ・マイナーの理論の中で最も重要なものは、Neil Robertson と Paul D. Seymour が証明した次の定理である。この定理の出典を 1 つの論文としているが、それまでに公表された膨大な量の議論の末に証明されたもので、**Wagner 予想**として知られていた予想を解決したものになっている。

定理 2 (グラフ・マイナー定理 [38]) マイナーを取る操作で閉じているグラフの族に対する極小の禁止マイナーは有限個である。

たとえば、平面的な被覆を持つグラフ全体はマイナーを取る操作で閉じた族になっている。したがって、平面的な被覆を持たないグラフの中でマイナー関係で極小なものは有限個しかない。つまり、平面被覆予想はその有限個が上述した 32 個と一致するかどうかを問うている。特に、 $K_{1,2,2,2}$ がその有限個のうちの 1 つなのかどうかを確定することが問題になっているのである。

5 部分的な解決

ここまでに述べたことはほぼ 20 世紀中に起こったことであり、私が予想を提唱した頃に考えていたスキームで展開された議論であった。その後を示された予想を支持する事例を列挙しておこう。当然のことながら、予想の不成立を示唆する事例は存在しない。

以下ではグラフ G が平面的被覆 $p: \tilde{G} \rightarrow G$ を持つと仮定する。まず、時系列に沿って、その平面的被覆もしくは射影に関する条件を紹介する。その条件が満たされれば、基底グラフ G が射影平面的になることが証明されている。

- **群作用を伴う被覆である** (Negami [23], 1988)

これは被覆が正則の場合なので、定理 1 のとおりである。特に、2 重被覆は正則被覆なので、それが平面的ならば、基底グラフは射影平面的になる [21]。近年の成果と組み合わせると、ある程度の大きさの群作用があれば同様の事実が証明できる。

- **射影が奇数重になっている** (Archdeacon-Richter [3], 1990)
より正確には、非平面的グラフの平面的被覆は偶数重であることが示されている。つまり、奇数重の被覆が平面的になるならば、 G 自体が平面的になる。
- **いくつかの 2 重被覆を合成したものになっている** (Negami [27], 2000)
射影平面的グラフによる 2 重被覆を持たば、基底グラフが射影平面的であるという事実が本質的であり、それを繰り返し適用することで証明できる。実は、恩師・本間龍雄先生の“Dehn の補題”の証明にインスパイアされてこれを思いついた。
- **10 重以下の被覆になっている** (Ota [36, 41], 2000+)
 $K_{1,2,2,2}$ の 12 重平面的被覆に想定される局所構造を分類し、四色問題の解法として利用された放電法を模した手法によって矛盾を導くことで証明されている。
- **極大平面的になっている** (Negami, 2000+)
これは被覆グラフが球面の三角形分割になっていることと同値である。その三角形分割をもとに球面のオイラー数を計算することで、被覆が 2 重または 6 重であることが容易にわかる。1 つ前の結果から 6 重の場合は排除できる。
- **2 重被覆を経由する** (Negami [29], 2003)
そのような $2n$ 重被覆は $(n, 2)$ -**合成的**であるという。 $K_{1,2,2,2}$ の 2 重被覆が平面的被覆を持たないことが示すことで、この事実が証明されている。3 つ前の事実はこの事実から容易に導かれる。
- **2 重射影平面的被覆になっている** (Negami-Suzuki [30, 31], 2003)
これは、2-連結非平面的もしくは 3-連結なグラフの 2 重射影平面的被覆が平面的になるという事実による。つまり、 \tilde{G} は 2 重平面的被覆である。
- **二部グラフになっている** (Negami [32], 2012+)
古くは \tilde{G} が 2 重平面的被覆であり、**二部グラフ** (2 色で色分けできる) ならば、 G はどの領域も偶角形になるように射影平面に埋め込み可能であることが示されていた [25, 26]。論文 [22] で導入された**標準二部グラフ被覆** $B(G)$ と 2 つ前の事実を利用することで、 \tilde{G} が 2 重でなくてもよいことがわかる。
- **14 重未満になっている** (Annor-Nikolayevsky-Payne [1], 2023+)
第 35 回位相幾何学的グラフ理論研究集会-TGT35 において、Annor がこの事実をアナウンスした。彼らは Archdeacon [4] が注目した $K_{1,2,2,2}$ が含む K_4 の平面的被覆の構造に着目して、最小反例における“innermost”な構造を分類する手法を示している。同様の面倒な議論を繰り返すことで、記録更新をする余地がある。

基底グラフに条件を課した形の研究はあまり見られないが、あえてまとめると次のようになる。基底グラフ G が以下の条件を満たし、さらに平面的な被覆グラフ \tilde{G} を持つならば、 G が射影平面的であることが結論できる。

- **3-正則グラフになっている** (Negami-Watanabe [28], 2002)
それはどの頂点の次数も 3 になっているグラフのことである。そのようなグラフが反例候補の中にあるかどうかを確認すれば、この事実が容易に証明できる。頂点の次数が 4 以下という条件に置き換えても、同様の議論ができるだろう。
- **特定された 16 種類以外のグラフになっている** (Hlineny-Thomas [13], 2004)
 $K_{1,2,2,2}$ から Y - Δ 変形によって生成されるグラフをマイナーに持つグラフを精査して、予想の反例にならないと結論できるものを排除した結果、16 種類のグラフが残っている。現時点で最強の結果である。

グラフの被覆の定義では、射影 $p: \tilde{G} \rightarrow G$ が対応する頂点の近傍間の全単射 (1 対 1 対応) を誘導するとしているが、この“全単射”の部分“全射”に置き換えて定義されるものをグラフの**分岐被覆**と呼ぶことにする。また、 \tilde{G} 上の群作用に伴って生じる分岐被覆を**正則な分岐被覆**と呼ぶ。すると、被覆の場合と同様の命題が成立する。

定理 3 (Kitakubo [16]) 連結グラフ G が平面的な有限正則分岐被覆を持てば、 G は射影平面に埋め込み可能である。

Mike Fellows [6] は情報科学的な文脈の中で、グラフの分岐被覆と同等の概念を定義して、グラフの**エミュレーター**と呼んだ。そして、北久保の定理を知ってかどうかは定かではないが、平面被覆予想と同じように、平面的なエミュレーターを持つグラフは射影平面的だろうと予想した。しかし、Rieck-Yamashita [39] が $K_{1,2,2,2}$ の平面的な分岐被覆を発見したことで、Fellows の予想は否定されている。

平面被覆予想の発展形として、他の閉曲面に埋め込み可能なグラフを考えてはどうかと思う人もいるかもしれない。たとえば、論文 [11] ではそのようなことが議論されているが、個人的にはあまり意味のないことのように思う。米国のシアトルで開催された“Graph Structure Theory 1991”で Huneke [15] が平面被覆予想を紹介したときにもそういう一般化に関する質問が出ていたが、私はあえて関わらなかった。というのも、私は平面被覆予想を提唱した当初から、そこに“現象の違い”を直観していたからだ。

球面は射影平面の普遍被覆でありコンパクトだが、球面と射影平面以外の閉曲面の普遍被覆は \mathbb{R}^2 と位相同型であり、コンパクトではない。また、球面に埋め込み可能なグラフは射影平面にも埋め込み可能だが、トーラスに埋め込み可能でもクラインの壺に埋め込み不可能なグラフがあるし、その逆のグラフもある。

6 ローテーション・コンパティブルな平面的被覆

ここまでの展開は、“ラスボス”である $K_{1,2,2,2}$ をいかに退治するか、もしくは、いかに回避するかに注力した話だった。残念ながら最終的な攻略方法が見つげきれず、40 年近くが過ぎてしまった。そこで、初心に戻り、攻略の方向性を変えてみようと考えて、以下のような試み [35] を行った。

一般に、グラフの被覆 $p: \tilde{G} \rightarrow G$ はその基本群の部分群 $H < \pi_1(G)$ (正しくは、その共役類) に対応して存在するので、それを添え字として付けて、 $p_H: \tilde{G}_H \rightarrow G$ と表すことにする。その被覆グラフ \tilde{G}_H が球面 S^2 に埋め込み可能であると仮定する。図2の中央部分はその状況を表している。もし H が $\pi_1(G)$ の正規部分群ならば、群 $\pi_1(G)/H$ が \tilde{G}_H に作用する。さらに、 \tilde{G}_H が3-連結ならば、それは S^2 に忠実に埋め込まれているので、群 $\pi_1(G)/H$ が S^2 にも作用し、その作用で割って得られる楕円的軌道体 O^2 (右下) に G が埋め込まれることになる。

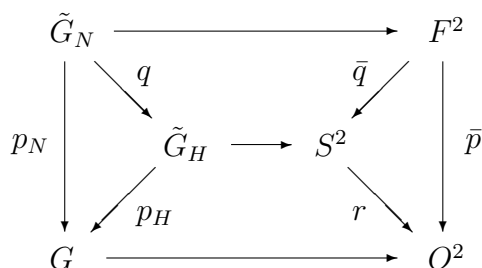


図2 証明のスキーム (論文 [33] より転用)

これが定理1の証明の基本的なスキームだった。しかし、 H が正規部分群でない場合にはこのスキームはそのままでは動かない。そこで、 G の正則被覆 $p_N: \tilde{G}_N \rightarrow G$ で、その射影 p_N が \tilde{G}_H を経由するものを考える。つまり、射影 $q: \tilde{G}_N \rightarrow \tilde{G}_H$ が存在し、 $p_N = p_H \circ q$ となる。そのような正則被覆が存在することは論文 [33] で示されており、それは H を含む最小の正規部分 $N \triangleleft \pi_1(G)$ に対応している。しかし、 \tilde{G}_N が球面 S^2 に埋め込まれているわけではない。

そこで、 \tilde{G}_N が埋め込み可能な閉曲面 F^2 で、商群 $\Gamma = \pi_1(G)/N$ が作用するものを作りたい。それができれば、軌道体 $O^2 = F^2/\Gamma$ の中に G を埋め込めることになる。また、トポロジー的な考察により、射影 $\bar{p}: F^2 \rightarrow O^2$ が S^2 を経由することがわかり、 O^2 は楕円的軌道体になるので、 D^2, S^2, P^2 のいずれかと位相同型になる。これは G が射影平面的であることを意味している...

「めでたしめでたし」と言いたいところだが、上の議論にはある重大なことが隠されている。それは F^2 が期待どおりに構成できるのかという問題である。 S^2 上に埋め込まれた \tilde{G}_H の領域(面)は2-胞体なので、そのコピーまたは中心を分岐点とする分岐被覆(これも2-胞体である)を \tilde{G}_N に貼り付けていけば、閉曲面 F^2 自体は作ることができる。しかし、そうして構成した F^2 に群 Γ が期待どおりに作用するかどうかは一般には保証できない。もちろん、 F^2 に埋め込まれた \tilde{G}_N の部分には Γ は作用するが、その作用を F^2 全体に拡張できるかどうかは自明ではない。

実際、群 Γ の \tilde{G}_N への作用が F^2 に拡張可能となるためには、次の条件が満たされなければならない。その詳細は後述する。

補題 4 (Negami [35]) 上述の群 Γ の作用が F^2 に拡張するための必要十分条件は、球面上の \tilde{G}_H がローテーション・コンパティブルに埋め込まれていることである。

連結グラフ G の平面的被覆 \tilde{G}_H が球面 S^2 に埋め込まれているとする。その S^2 上に1つの向きを定め、“時計回り”と呼ぶ。一般に、そのように向きが定められた S^2 に埋め込まれたグラフの各頂点 v に対して、その隣接点の並びを時計回りに読んで得られる円順列を v のまわりのローテーションという。基底グラフ G の頂点 $v \in V(G)$ に射影される \tilde{G}_H の頂点のまわりのローテーションは自然に $N(v)$ 上の円順列を誘導するので、ローテーションどうしを比較することができる。

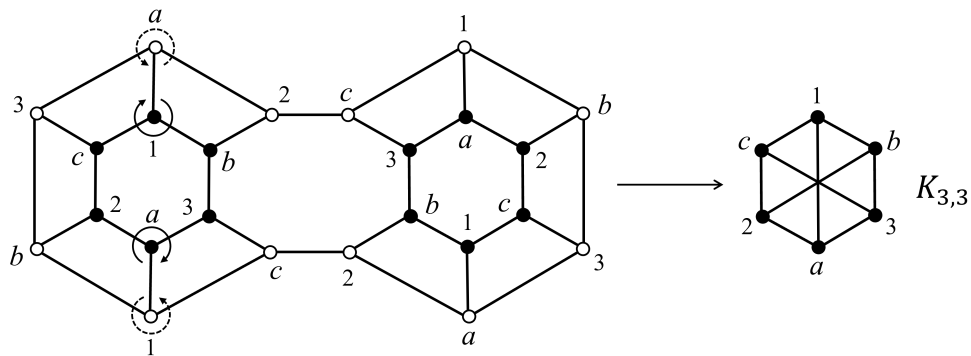


図3 ローテーション・コンパティブルな $K_{3,3}$ の平面的被覆

図3は2つの独立点集合 $\{1, 2, 3\}$ と $\{a, b, c\}$ を持つ完全二部グラフ $K_{3,3}$ の4重平面的被覆の S^2 への埋め込みを示している。球面 S^2 上には通常の意味で“時計回り”が定められており、同じラベルの頂点は共通の頂点に射影される。たとえば、ラベル a が付された4つの頂点は $K_{3,3}$ の頂点 a に射影される。そして、黒い a のまわりでローテーションを読むと (123) であり、白い a のまわりではその逆の (321) になっている。他のラベルについても同様であり、この $K_{3,3}$ の4重平面的被覆は次の条件を満たしている。

条件 1: 同じ頂点 $v \in V(G)$ に射影される頂点のまわりのローテーションは共通であるか、その逆になっている。

次に、辺の両端に注目してみよう。たとえば、辺 $1b$ に射影される辺にはその両端が黒黒になっているものがある。これはその両端の頂点に誘導されているローテーションが同じ向き（同調）であることを意味している。 $1b$ の他の辺についても、その両端は黒黒または白白であり、すべて同調である。一方、辺 $1a$ に射影される辺の両端は黒白になっており、すべて非同調である。したがって、図3の平面的被覆は次の条件を満たしている。

条件 2: 基底グラフ G の同一の辺に射影される辺の両端のローテーションはすべて同調であるか、すべて非同調になっている。

球面に埋め込まれた平面的被覆 \tilde{G}_H に対して条件 1 および条件 2 が成り立つとき、その埋め込みはローテーション・コンパティブルであるという。次の定理は補題 4 より直ちにわかる。

定理 5 (Negami [35]) 連結グラフ G の平面的被覆が球面にローテーション・コンパティブルに埋め込み可能ならば、 G は射影平面的である。

特に、平面的被覆 \tilde{G}_H が 3-連結な正則被覆ならば、 $\tilde{G}_H = \tilde{G}_N$ となり、それはローテーション・コンパティブルである。また、論文 [35] では、同じ頂点に射影される頂点どうしの距離がある程度大きいと、ローテーション・コンパティブルになることも証明されている。その応用として、平面的被覆 \tilde{G} を平面に埋め込んだときに、個々の領域の境界がある程度短い閉路になっていれば、 G が射影平面的になることも示されている。

しかし、ローテーション・コンパティブルでない平面的被覆の埋め込みはいくらでも構成することができる。だとしても、適当な変形操作によって、それらをローテーション・コンパティブルなものに修正できるのではないだろうか？また、ローテーション・コンパティブルに埋め込み可能な平面的被覆を持つという性質はマイナーに関して閉じている [35]。そうならば、まずは非平面的のグラフがマイナーとして含んでいる K_5 や $K_{3,3}$ の平面的被覆について調べてみるべきだろう。

7 有限被覆全体を考える

私はここ近年、連結グラフ G の有限被覆全体 $\tilde{C}(G)$ が作る“束”について考察している。2つの被覆 $p_i : \tilde{G}_i \rightarrow G$ に対して、被覆射影 $q : \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_1$ が存在し、 $p_2 = p_1 \circ q$ となるときに $G_1 \leq G_2$ と定義すれば、 $\tilde{C}(G)$ がこの“ \leq ”を順序とする半順序集合になることは明らかだろう。基底グラフ G はその半順序集合の中の最小元であるが、 $\tilde{C}(G)$ は有限被覆のみを含んでおり、普遍被覆を含まないので、最大限は存在しない。

さらに、2つの被覆に対する上限 $\tilde{G}_1 \vee \tilde{G}_2$ と下限 $\tilde{G}_1 \wedge \tilde{G}_2$ が存在することもほぼ明らかかな気がするが、私はそれらを具体的に構成する組合せ的な方法を明らかにした。それを利用して、いろいろな実験や考察ができるようになる。

たとえば、与えられた平面的被覆 \tilde{G} は 2 重被覆を経由するのだろうか？もしそれが確認できれば、5 節で述べたことから、基底グラフ G が射影平面的であることが結論できる。そして、それを確認するには、2 重被覆 D_1, D_2, \dots を生成して、 $\tilde{G} \vee D_i = \tilde{G}$ が成立するかどうかを試せばよい ([34] 参照)。しかし、残念ながら、私は 2 重被覆を経由しない $K_{3,3}$ の 4 重平面的被覆を見つけてしまった。

他にも被覆グラフが作る束 $\tilde{C}(G)$ の構造を利用して平面被覆予想に挑戦する方法があるかもしれないが、それは未来に属する事柄です。

平面被覆予想を創出した当初より親しくしていただき、海外への扉を開いてくれた故 Dan Archdeacon 氏 (1954–2015) に本稿を捧ぐ—

参考文献

- [1] D.Y.B. Annor, Y. Nikolayevsky and M.S. Payne, $K_{1,2,2,2}$ has no n -fold planar cover graph for $n < 14$, arXiv:2311.01672v2 [math.CO] 10 Sep. 2024
- [2] D. Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, *J. Graph Theory* **5** (1981), 243–246.
- [3] D. Archdeacon and R.B. Richter, On the parity of planar covers, *J. Graph Theory* **14** (1990), 199–204.
- [4] D. Archdeacon, Two graphs without planar covers, *J. Graph Theory* **41** (2002), 318–326.
- [5] M. Fellows, “Encoding graphs in graphs”, Ph.D. Dissertation, University of California, San Diego, 1985.
- [6] M. Fellows, Planar emulators and planar covers, manuscript, 1989.
- [7] H.H. Glover, J.P. Huneke and C.S. Wang, 103 graphs that are irreducible for the projective plane, *J. Comb. Theory, Ser. B* **27** (1979), 332–370.
- [8] J.L. Gross and T.W. Tucker, “Topological Graph Theory”, John Wiley & Sons, 1987.
- [9] P. Hliněný, $K_{4,4} - e$ has no finite planar cover, *J. Graph Theory* **27** (1998), 51–60.
- [10] P. Hliněný, “Planar covers of Graphs: Negami’s conjecture”, Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Technology, 1999
- [11] P. Hliněný, A note on possible extensions of Negami’s conjecture, *J. Graph Theory* **32** (1999), 234–240.
- [12] P. Hliněný, Another two graphs with no planar covers, *J. Graph Theory* **37** (2001), No. 4, 227–242.
- [13] P. Hliněný and R. Thomas, On possible counterexamples to Negami’s planar cover conjecture, *J. Graph Theory* **46** (2004), 183–206.
- [14] P. Hliněný, 20 Years of Negami’s Planar Cover Conjecture, *Graph & Combin.* **26** (2010), 525–536.
- [15] J.P. Huneke, A conjecture in topological graph theory, “Graph Structure Theory”, edited by N. Robertson and P. Seymour, *Contemporary Math.* **147** (1993), 363–379.
- [16] S. Kitakubo, Planar branched coverings of graphs, *Yokohama Math. J.* **38** (1991), 113–120.
- [17] S. Negami, “A characterization of 3-connected graphs containing a given graph and its applications”, Master thesis, Tokyo Institute of Technology, 1981.
- [18] S. Negami, A characterization of 3-connected graphs containing a given graph, *J. Combin. Theory, Ser. B* **32** (1982), 69–74.
- [19] S. Negami, Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, *Discrete Math.* **44** (1983), 161–180.
- [20] S. Negami, “Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces”, Doctor Thesis, Tokyo Institute of Technology 1985.
- [21] S. Negami, Enumeration of projective-planar embeddings of graphs, *Discrete Math.* **62** (1986), 299–306.
- [22] S. Negami, The virtual k -factorability of graphs, *J. Graph Theory* **11** (1987), 359–365.
- [23] S. Negami, The spherical genus and virtually planar graphs, *Discrete Math.* **70** (1988),

159–168.

- [24] S. Negami, Graphs which have no finite planar covering, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* **16** (1988), 377–384.
- [25] S. Negami, Projective-planar graphs with even duals, *J. Graph Theory* **16** (1992), 287–295.
- [26] S. Negami, Projective-planar graphs with even duals II, “Graph Structure Theory”, edited by N. Robertson and P. Seymour, *Contemporary Math.* **147** (1993), 363–379.
- [27] S. Negami, Tower construction of planar coverings of graphs, Information and Communication Studies of the Faculty of Information and Communication, Bunkyo University, **25** (2000), 25–29.
- [28] S. Negami and T. Watanabe, Planar cover conjecture for 3-regular graphs, *J. Fac. Edu. Hum. Sci. IV*, Yokohama National University, **4** (2002), 73–76.
- [29] S. Negami, Composite planar coverings of graphs, *Discrete Math.* **268** (2003), 207–216.
- [30] S. Negami and Y. Suzuki, Projective-planar double coverings of 3-connected graphs, *Yokohama Math. J.* **50** (2003), 87–95.
- [31] S. Negami, Projective-planar double coverings of graphs, *Europ. J. Combin.* **26** (2005), 325–338.
- [32] S. Negami, Bipartite planar coverings and even embeddings of graphs on the projective plane, submitted (2012).
- [33] S. Negami and I. Sato, Note on graph coverings with voltage assignments, *Yokohama Math. J.* **68** (2022), 109–126. <https://doi.org/10.18880/0002000034>
- [34] S. Negami, Composite coverings of graphs and cryptography, *Yokohama Math. J.* **70** (2024), 183–197. <https://doi.org/10.18880/0002001753>
- [35] S. Negami, Another approach to Planar Cover Conjecture focusing on rotation systems, *J. Math. Soc. Japan* **76** (2023), 975–996. <https://doi.org/10.2969/jmsj/90769076>
- [36] K. Ota, $K_{1,2,2,2}$ has no 10-fold planar covering, presented in “Japan Mathematical Society, fall conference 2001”, Kyushu University, Japan (2001), in Japanese.
- [37] G. Ringel, “Map Color Theorem”, Grundlehren Math. Wiss., **209**, Springer-Verlag, 1974.
- [38] N. Robertson and P. Seymour, Graph Minors. XX. Wagner’s conjecture, *J. Combin. Theory, Ser. B* **92** (2) (2004), 325–357, doi:10.1016/j.jctb.2004.08.001
- [39] Y. Rieck and Y. Yamashita, Finite planar emulators for $K_{4,5} - 4K_2$ and $K_{1,2,2,2}$ and Fellows’ conjecture, *Europ. J. Comb.* **31** (2010), No. 3, 903–907.
- [40] E.H. Spanier, “Algebraic Topology”, New York, McGraw-Hill, 1966.
- [41] N. Takahashi, On finite planar coverings of $K_{1,2,2,2}$ (in Japanese), Master thesis, Keio University, 2001.
- [42] W. Thurston, “Geometry and topology of three-manifolds”, electronic version, Mathematical Sciences Research Institute, <http://library.msri.org/nonmsri/gt3m/>
- [43] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.*, **54** (1932), 150–168.
- [44] H. Whitney, A set of topological invariants for graphs, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 231–235.

アノソフ流の手術と 8 の字結び目の例外手術 (野田健夫氏(東邦大学)との共同研究)

中江 康晴 (秋田大学大学院理工学研究科)*

概 要

3次元多様体の典型的なアノソフ流である測地流と懸垂流に対し、その測地流に種数 1 バーコフ切断を構成できれば、ある懸垂流と手術同値であると言える。8 の字結び目の 1, 2, 3 手術によって得られるザイフェルト多様体における測地流が、8 の字結び目の種数 1 曲面束から得られる懸垂流と手術同値であることを示すため、これらザイフェルト多様体に種数 1 バーコフ切断を構成する手法について概説する。

1 Introduction

3次元多様体のフローであって、各点でフローに横断的な拡大と縮小する方向を持つものをアノソフ流という。典型的なアノソフ流は、トラス上の位相同型写像から誘導される懸垂流と、定負曲率曲面または双曲軌道体の単位接束における測地流である。これら懸垂流と測地流は、全ての閉軌道が多様体上で稠密である推移的なアノソフ流である。二つの多様体のそれぞれのアノソフ流が位相同値であるとは、多様体から多様体への位相同型写像で、アノソフ流の軌道を軌道に写すものがあるときを言う。懸垂流や測地流の閉軌道を多様体内の結び目とみなして、その閉軌道に沿ったデー手術を考えることで、Goodman [13], Fried [10], Handel-Thurston [14] らなどにより、アノソフ流の手術が 1980 年代に研究され、懸垂流や測地流と位相同値ではないアノソフ流が構成された。Goodman と Fried によるアノソフ流の手術によって移り合うアノソフ流を、手術同値なアノソフ流と言う。

アノソフ流に対し、はめ込まれた曲面であって、内部がアノソフ流に横断的で、境界が閉軌道または閉軌道への n 重被覆になっており、全ての軌道と有限時間で交わるものを、Birkhoff 切断と呼ぶ。Birkhoff 切断にはアノソフ流によって曲面の自己同相写像が誘導され、これを return map と呼ぶ。Fried は 1983 年の論文 [10] において、全ての推移的なアノソフ流は Birkhoff 切断を持つことを示した。これに関連して同じ論文において Fried は「全ての推移的なアノソフ流は、懸垂流と手術同値か」という問題を提起した。これは、「全ての推移的なアノソフ流は、種数 1 の Birkhoff 切断を持つか」という問題に言い換えられる。

測地流に対して、Birkhoff [2], Fried [10], Ghys [11], Brunella [3], Hashiguchi [15] らにより種数 1 の Birkhoff 切断が構成されてきた。これらの種数 1 の Birkhoff 切断により手術同値となる懸垂流はさらに、Minakawa [19][20], Dehornoy-Shannon [6] の定理により、8 の字結び目の曲面束のモノドロミー写像と共役な写像による懸垂流と手術同値である

* e-mail: nakae@math.akita-u.ac.jp

本研究は科研費(課題番号:19K03460)の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 37D20, 57R30, 57K30

キーワード: Anosov flow, Birkhoff section, figure-8 knot, exceptional surgery

ことがわかる. これらの構成された種数 1 の Birkhoff 切断は境界成分が 2 個以上であるが, 2015 年に Dehornoy により, 特異点が 3 個または 4 個の種数 0 の双曲軌道体上の単位接束における測地流に対し, 種数 1 で境界成分が 1 個である Birkhoff 切断が構成された [5]. 特にこの論文において, 特異点の指数が $(2, 3, 7)$ である軌道体に対して構成された Birkhoff 切断は, 8 の字結び目の曲面束のモノドロミー写像と等しい return map を持つものとなっている.

8 の字結び目の 1-デーン手術で得られるザイフェルト多様体は指数 $(2, 3, 7)$ の軌道体の単位接束であるため, この Birkhoff 切断が構成された測地流は, 8 の字結び目補空間における懸垂流の手術によって得られることがわかる. 同様にして, 8 の字結び目の 2-デーン手術では指数 $(2, 4, 5)$ の軌道体の単位接束, 3 デーン手術では指数 $(3, 3, 4)$ の軌道体の単位接束が得られることが知られているため, これら軌道体の単位接束の測地流に対して, 種数 1 で境界成分が 1 個であり, return map が 8 の字結び目の曲面束のモノドロミー写像と一致するものが構成されることが期待される. 実際, Dehornoy は 2024 年にこのような Birkhoff 切断を構成した [7]. 同様の構成を 2024 年に共同研究者の野田健夫氏との研究によって独立に得ていたが, Dehornoy によって先に論文として発表された.

これら Birkhoff 切断の構成において, Birkhoff 切断の境界の閉軌道となる測地線を見つけることが重要であるが, これを具体的に見つける研究を, 8 の字結び目のデーン手術における Kirby-Rolfsen 計算やモンテシノストリックを用いることで, 我々の共同研究において行なっている. これは Dehornoy の論文では用いられていない手法であり, また return map の具体的な計算についても, Dehornoy の論文とは異なるものになっている.

このようなアノソフ流の閉軌道に沿った手術が研究されて来た経緯と, その延長上にある 8 の字結び目に沿ったデーン手術との関連性について, 本講演で概説する.

2 Anosov flow and surgery on Anosov flows

局所的に双曲的な振る舞いをする 3 次元多様体上のフローをアノソフ流と呼ぶ. そのアノソフ流の閉軌道を 3 次元多様体内の結び目と見た時に, その閉軌道に沿ってデーン手術を行うことで, 新たな多様体と, その多様体上のアノソフ流を得ることができる. この章では, アノソフ流の定義と, 推移的アノソフ流の典型である測地流と懸垂流について述べたのち, アノソフ流の閉軌道に沿った手術の手法と, 関連する定理と結果について述べる.

2.1 Anosov flow and typical examples

M を閉 3 次元多様体, Φ_t を M 上の非特異で滑らかなフローとする. Φ_t がアノソフ流であるとは, 接ベクトル束 TM の $D\Phi_t$ で不変となる連続な分解 $TM = TX \oplus E^s \oplus E^u$ と定数 $C \geq 1, 0 < \lambda < 1$ が存在して, 以下を満たすときを言う.

- (1) $\dim TX = 1$ かつ TX は Φ_t に接する
- (2) $\|D\Phi_t(v)\| \leq C\lambda^t\|v\|$ for $\forall v \in E^s, \forall t > 0$,
- (3) $\|D\Phi_{-t}(v)\| \leq C\lambda^t\|v\|$ for $\forall v \in E^u, \forall t > 0$,

アノソフ流 Φ_t により部分ベクトル束 $TX \oplus E^s$ と $TX \oplus E^u$ が定まるが, これは完全可積分となる [1]. よって, これら接平面場によって二つの余次元 1 葉層構造 \mathcal{F}^s と \mathcal{F}^u が定まり, \mathcal{F}^s を安定葉層構造, \mathcal{F}^u を不安定葉層構造と呼ぶ. \mathcal{F}^s と \mathcal{F}^u が横断的に向き付け可

能であるとき Φ_t は向き付け可能であるといい、その横断方向の向きが定まっているとき、 Φ_t は向き付けられているという。

アノソフ流 Φ_t の閉軌道が M で稠密であるとき、 Φ_t は推移的であると呼ぶ。これは、安定葉層構造 \mathcal{F}^s のすべての葉が M で稠密であること、また不安定葉層構造 \mathcal{F}^u のすべての葉が M で稠密であることと同値である。推移的アノソフ流の典型例は以下の定負曲率曲面上または双曲軌道体上の測地流と、トーラス上の自己位相同型から誘導される懸垂流である。これら測地流や懸垂流はリー群の作用から得られるものになっている。そのように得られるアノソフ流を代数的アノソフ流と呼ぶ。

例 1 (測地流 geodesic flow) S を定負曲率曲面または双曲軌道体とし、 T^1S を S 上の単位接束とする。 $x \in S$ と $v \in T_xS$, $\|v\| = 1$ を用いて、 M の点を $(x, v) \in T^1S$ と表す。 $(x, v) \in T^1S$ に対し、 S 上の測地線 $\gamma_{x,v}$ を $\gamma_{x,v}(0) = x$, $\gamma'_{x,v}(0) = v$ を満たすものとする。この時、 T^1S 上のフロー ϕ_t で $\phi_t(x, v) = (\gamma_{x,v}(t), \gamma'_{x,v}(t))$ を満たすものを、 S 上の測地流 (geodesic flow) と呼ぶ。

例 2 (懸垂流 suspension flow) 2次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と T^2 上の微分同相写像 $f : T^2 \rightarrow T^2$ に対し、 f が行列 $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ から誘導される線型写像 $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ から得られる写像とする。 $M = T^2 \times [0, 1]/(x, 1) \sim (f(x), 0)$ 上で、 $[0, 1]$ 方向の微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ によるベクトル場から得られるフロー ϕ_t を懸垂流 (suspension flow) と呼び、 $|\text{tr } A| > 2$ のとき、 ϕ_t はアノソフ流になる。

2.2 Surgery on Anosov flows

3次元多様体 M 上のアノソフ流 Φ_t に対し、 Φ_t の閉軌道を結び目とみなしてデーン手術を考えることができる。このデーン手術では自由に手術スロープを取れるわけではなく、デーン手術により得られる多様体に誘導されるフローがまたアノソフ流になるために、スロープの取り方に制限が付く。このようなアノソフ流の手術は、1980年代に Goodman [13], Fried [10], Handel-Thurston [14] など、懸垂流や測地流から、懸垂流や測地流を含む代数的アノソフ流に位相同値とならないアノソフ流を作り出す手法として研究された。これらのうち、特に Fried によるアノソフ流の手術の定義について、以下に述べる。

Fried の手術

Φ_t を閉 3次元多様体 M 上のアノソフ流、 γ を Φ_t の閉軌道とする。 $W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$ を、 Φ_t の \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^u の葉であって γ を含むものとする。この $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$ は開いたアニュラスかメビウスの帯になる。 M を γ に沿って blowing-up したものを M^* とする。すなわち、各点 $x \in \gamma$ を、円周 $(T_xM/T_x\gamma \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \cong S^1$ に取り替えたものとする。すると、 M^* の内部は $M \setminus \gamma$ に位相同型であり、 ∂M^* はトーラス T_γ となる。この操作により M^* に誘導されるフローを Φ_t^* とする。 T_γ 上には Φ_t^* の閉軌道が 4 本あり、2 本は attractive であり、もう 2 本は repelling である (図 1 参照)。

トーラス T_γ 上に、ロンジチュードとして Φ_t^* の閉軌道を取り、メリディアンとして点 $x \in \gamma$ を blowing-up した S^1 をとる。 T_γ 上の単純閉曲線 α を、 Φ_t^* に横断的で、閉軌道と 4 回交わるものとして取ると、 α は $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ によるスロープ $1/n$ の単純閉曲線とみなせる。 T_γ 上の円周による 1次元葉層構造 \mathcal{C}_α を、 Φ_t^* に横断的で α に平行な円周族として取る。この \mathcal{C}_α の各葉を 1 点にする M^* の blowing-down を M^α とすると、 M^α は γ に沿っ

て $1/n$ デーン手術で得られる閉 3 次元多様体に等しい. この blowing-down によって M^α 上に Φ_t^* から得られるフロー Φ_t^α はアノソフ流になる [10].

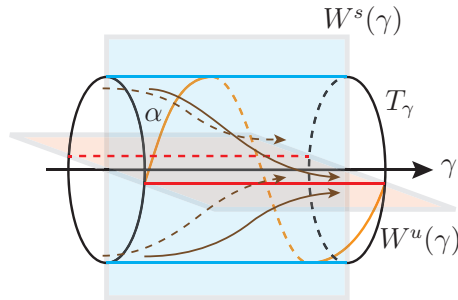


図 1 Fried's surgery

閉 3 次元多様体 M 上の余次元 1 葉層構造 \mathcal{F} を M の普遍被覆空間 \tilde{M} へ持ち上げた $\tilde{\mathcal{F}}$ を考え, \mathcal{F} の葉空間 (leaf space) $\mathcal{T} = \tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}}$ を $\tilde{\mathcal{F}}$ の葉を 1 点にした空間として定める. \mathcal{T} が実数全体の集合 \mathbb{R} と位相同型であるとき, \mathcal{F} は \mathbb{R} -covered であるという. さらに, アノソフ流 Φ_t の安定葉層構造 \mathcal{F}^s と不安定葉層構造 \mathcal{F}^u が \mathbb{R} -covered であるとき, Φ_t が \mathbb{R} -covered であるという.

推移的アノソフ流の典型例である測地流と懸垂流は \mathbb{R} -covered である. 測地流と懸垂流の閉軌道に対するアノソフ流の手術に関連する重要な定理の一つは, 以下の Fenley によるものである.

定理 3 (Fenley [8, Theorem D]) Φ_t を 3 次元多様体 M の向き付けられた測地流またはアノソフ流となる懸垂流とする. 向きが揃っている Φ_t の閉軌道による手術で得られるアノソフ流は, また \mathbb{R} -covered になる.

葉層構造 \mathcal{F} が \mathbb{R} -covered であるとき, 普遍被覆空間 \tilde{M} の被覆変換から得られる基本群 $\pi_1(M)$ の葉空間 \mathbb{R} への作用は非自明かつ向きを保つ. このような作用があるとき, $\pi_1(M)$ は左順序付け可能となることが知られている. ここで, 群が左順序付け可能であるとは, 群に全順序があり, その全順序が任意の元の左からの積で保たれるときをいう.

3 次元球面内の 8 の字結び目 K は種数 1 の曲面束結び目であり, その曲面束のモノドロミー写像の行列 $M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は $\text{tr } M_0 = 3$ であるので, 補空間にアノソフ流を誘導する. このことと Fenley の定理を用いると, 任意の整数 n に対し, K に沿った n -デーン手術をして得られる多様体 $K(n)$ は左順序付け可能な基本群をもつことがわかる.

このようなアノソフ流の閉軌道に対する手術と定理 3 による \mathbb{R} -covered 葉層構造の存在を用いることで, 市原一裕氏 (日本大学文理学部) との共同研究により, レンズ空間内の種数 1 曲面束結び目に対して, 以下の定理を得た.

定理 4 (Ichihara-N [17, Theorem 4.3]) K をレンズ空間 $L(\alpha, \beta)$ 内の種数 1 曲面束結び目とする. レンズ空間 $L(\alpha, \beta)$ と K のモノドロミー写像の行列 ϕ_{\sharp} が $GL_2(\mathbb{Z})$ で (1) または (2) の条件を満たす行列と共役であるとき, 基本群 $\pi_1(K(n))$ は左順序付け可能である.

- (1) $\alpha > 0$ に対し, $L(\alpha, \beta) = L(\alpha, 1)$ かつ $\phi_{\sharp} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる.
- (2) $L(\alpha, \beta)$ は整数 $p, q > 0$ に対し $\alpha = 2pq + p + q + 1$, $\beta = 2q + 1$ を満たし,
 $\phi_{\sharp} = \begin{pmatrix} 2pq + p - q & 2pq + 3p - q - 1 \\ 2q + 1 & 2q + 3 \end{pmatrix}$ となる.

3 Birkhoff section

多様体 M 上のアノソフ流 Φ_t と N 上のアノソフ流 Ψ_t が位相同値 (topologically equivalent) であるとは, 位相同型 $h : M \rightarrow N$ で Φ_t の軌道を Ψ_t の軌道に向きを保って写すものがあるときをいう. この h は時間パラメータ t は保たなくても良い. これに対し, Φ_t と Ψ_t が手術同値 (almost equivalent) であるとは, Φ_t の閉軌道の集合 $\Gamma = \{\gamma_i\}$ と同じ本数の Ψ_t の閉軌道の集合 $\Gamma' = \{\gamma'_i\}$ があって, $M \setminus \Gamma$ と $N \setminus \Gamma'$ において Φ_t と Ψ_t が位相同値になるときをいう.

測地流と懸垂流は位相同値になることはないが, 手術同値となる測地流と懸垂流があることが知られており, これは以下で定義する Birkhoff 切断を用いることで考えることができる.

定義 5 (Birkhoff [2], Fried [9]) 3次元多様体 M のフロー Φ_t に対し, 以下を満たす M 内の曲面 S を Φ_t の Birkhoff 切断 (Birkhoff section) という.

- (1) $\text{Int } S$ は埋め込まれた曲面で Φ_t に横断的である
- (2) 境界 ∂S は M にはめ込まれて, Φ_t の閉軌道の被覆になる
- (3) S は有限時間で Φ_t の全ての軌道と交わる. すなわち, ある $T > 0$ が存在して, 任意の $x \in M$ に対し $\Phi_t(x) \in S$ となるような $0 \leq t \leq T$ が存在する.

推移的アノソフ流と Birkhoff 切断に関して, Fried による以下の定理が重要である.

定理 6 (Fried [10, Theorem 2]) 閉 3次元多様体 M の全ての推移的アノソフ流に対して, Birkhoff 切断が存在する.

推移的アノソフ流 Φ_t の Birkhoff 切断 S に対し, 閉軌道 ∂S をそれぞれ 1 点にした曲面を \hat{S} とする. Φ_t により定まる return map $f : S \rightarrow S$ から, 擬アノソフ写像 $\hat{f} : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$ が得られる. もしこの Birkhoff 切断の種数が 1 ならば, \hat{f} はトーラス上の位相同型として得られる. すなわち, 推移的アノソフ流 Φ_t に対し種数 1 の Birkhoff 切断が存在すると, Φ_t はある懸垂流と手術同値であることがわかる.

実際, Fried は Birkhoff の構成 [2] を応用し, 種数 2 の曲面の単位接束の測地流に対し, 種数 1 で境界成分が 12 個の Birkhoff 切断を構成した [10]. また, Ghys は種数 g の曲面の単位接束の測地流に対し, 種数 1 で境界成分が $4g + 4$ 個の Birkhoff 切断を構成した [11]. さらに, Brunella による異なる方法による種数 1 の Birkhoff 切断の構成 [3] がなされ, Hashiguchi による構成 [15] や, Hashiguchi, Minakawa らによる双曲軌道体上の測地流に対する構成 [16] がなされている.

このように, 定負曲率曲面や双曲軌道体の単位接束の測地流に対する種数 1 の Birkhoff 切断が構成され, ある行列 A で表されるトーラス上の写像 f_A によって得られる懸垂流と

手術同値であることがわかる. さらに, 2004 年のトポロジーシンポジウムの皆川宏之氏の講演アブストラクト [19] と 2013 年の国際研究集会「Geometry and Foliations 2013」の講演アブストラクト [20] で以下の定理 7 と証明の概略が述べられ, 2019 年に Dehornoy と Shannon によるプレプリント [6] で証明がなされている.

定理 7 (Minakawa [19, Theorem 5.6], [20, Theorem 3.1], Dehornoy-Shannon [6, Theorem B1]) 任意の $\text{tr } A \geq 4$ である $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し, $\text{tr } B < \text{tr } A$ となる $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ で, A によって誘導される懸垂流と, B によって誘導される懸垂流が手術同値となるものが存在する.

ここで, $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ が $\text{tr } B = 3$ ならば M_0 と共役になることに注意すると, 定理 7 により, 行列 $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ によって得られる懸垂流と, 8 の字結び目による曲面束のモノドロミー写像を表す行列 M_0 によって得られる懸垂流が, 有限回の手術により手術同値であることがわかる.

また Dehornoy と Shannon により, 双曲軌道体の単位接束の測地流は種数 1 の Birkhoff 切断を持つことが証明されている [6, Theorem C2]. 上記をまとめると, 定理は以下のように述べることができる.

定理 8 (Dehornoy-Shannon [6, Theorem A]) アノソフ流である懸垂流と測地流で向き付け可能であるもの全ては, 行列 M_0 から得られる懸垂流と手術同値である.

ここまで見て来た測地流に対する種数 1 の Birkhoff 切断の構成は, いずれも境界成分が複数あるものであった. Dehornoy は 2015 年に, 特異点が 3 個または 4 個の種数 0 の軌道体上の測地流に対して, 種数 1 で境界成分が 1 個の Birkhoff 切断を具体的に構成した [5]. そのうち, 特に特異点が 3 個の場合については, 以下のものになる.

定理 9 (Dehornoy [5, Proposition C の一部])

(a) $1/2 + 1/q + 1/r < 1$ となる $q \leq r$ による双曲軌道体 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,q,r}$ の単位接束 $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,q,r}$ 上の測地流 $\Phi_{2,q,r}$ は種数 1 の Birkhoff 切断を持ち, その return map は以下の行列で表される写像と共役である.

$$\begin{cases} X^{r-6}Y & \text{for } q = 3 \\ X^{q-4}YX^{r-4}Y & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) $1/p + 1/q + 1/r < 1$, $p, q, r > 2$ に対して, $\Phi_{p,q,r}$ は種数 1 の Birkhoff 切断を 2 つ持ち, その return map は $X^{p-3}YX^{q-3}YX^{r-3}Y$ と $X^{p-3}YX^{r-3}YX^{q-3}Y$ である.

ここで, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

上記の定理 9 (a) において, $q = 3$, $r = 7$ とすると return map を表す行列 XY は M_0 に等しくなる. すなわち, $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,3,7}$ 上の測地流 $\Phi_{2,3,7}$ は 8 の字結び目の曲面束が誘導する懸垂流の手術で得られることがわかる. 実際, 8 の字結び目 K に沿った ± 1 -デーモン手術で得られる多様体は, 指数 $(2, 3, 7)$ の特異ファイバーを持つ球面を底空間とするザイフェルト多様体であり, この単位接束 $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,3,7}$ に等しい [25, Chapter 4], [4, Section 5.7].

さらに, 8 の字結び目 K の 2-デー手術で得られる多様体は $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,4,5}$ に等しく, 3-デー手術で得られる多様体は $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{3,3,4}$ に等しい. よって, 種数 1 の Birkhoff 切断であって, 境界成分が 1 個であり, かつ return map が行列 M_0 で表されるものが, $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,4,5}$ と $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{3,3,4}$ に存在することが期待される. 実際, Dehornoy は 2024 年に以下を示した [7].

定理 10 (Dehornoy[7, Proposition 1 の一部]) $(p, q, r) = (2, 4, 5), (3, 3, 4)$ に対し, $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{p,q,r}$ 上の測地流 $\Phi_{p,q,r}$ は, 種数 1 で境界成分が 1 個となる Birkhoff 切断で, return map が M_0 で表される写像と等しくなるものをもつ.

定理 10 は, 双曲軌道体 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{p,q,r}$ 上に閉測地線を上手く取り, それに合わせて Brunella による種数 1 の Birkhoff 切断の構成 [3] や, 2015 年の Dehornoy の論文 [5] の section 3 における構成の手法を適用することにより Birkhoff 切断を構成している. 定理 10 と同様の結果を野田健夫氏との共同研究で得ていたが, Dehornoy によって先にプレプリントとして発表され, また出版予定とのことである. これらの Dehornoy による Birkhoff 切断の構成は我々の共同研究で構成したものとはほぼ同様であるが, 構成の際に必要な Birkhoff 切断の境界となる閉測地線をどのように得たかについては, Dehornoy の論文では書かれていない. 我々の共同研究では, 8 の字結び目の手術で得られるザイフェルト多様体上に, モンテシノストリックの手法をたどることで, Birkhoff 切断の境界となる閉測地線が 8 の字結び目の行き先として得られることを示している. この閉測地線を見つける過程と, その閉測地線を境界に持つような Birkhoff 切断の構成について, 次章で解説する.

4 Exceptional surgery on figure-8 knot and genus one Birkhoff section

以降, K を S^3 内の 8 の字結び目とする. K は種数 1 の曲面束結び目であり, その曲面束のモノドロミー写像は行列 M_0 で表される一つ穴あきトーラス T 上の自己同相写像である. n を整数とし, K に沿った n -デー手術で得られる閉 3 次元多様体を $K(n)$ で表すことにする. K の管状近傍を $N(K)$ と表したとき, $K(n)$ は $S^3 \setminus \text{int } N(K)$ にソリッドトーラス $V = D^2 \times S^1$ を貼り合わせたものである.

いま, $K(n)$ 内の Birkhoff 切断 S であって, return map が M_0 から誘導されるものを見つきたいので, K のザイフェルト曲面 \hat{S} が $K(n)$ において写った先が S であると考えれば, 少なくとも Birkhoff 切断 S の境界は, 貼り合わせるトーラス境界 $\partial N(K)$ の $K(n)$ における行き先にあると考えることができる. この $\partial N(K)$ が $K(n)$ の中でどの位置にあるかを, Kirby-Rolfsen 計算とモンテシノストリックを使って見つける方法を, 以下で述べる. Kirby-Rolfsen 計算については [24, Chapter 9.H] を, モンテシノストリックについては [21] を参照のこと. また両者について 8 の字結び目のザイフェルト手術については茂手木 [22] を参照のこと.

以下, ポアンカレ円盤 \mathbb{H}^2 を三角群 $\Gamma_{p,q,r}$ で割って得られる, 指数 (p, q, r) を持つ軌道体 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{p,q,r}$ を $\Sigma_{p,q,r}$ で表すことにする.

4.1 1-surgery:(2,3,7)-orbifold

Kirby-Rolfsen 計算を用いると, $K(1)$ は三葉結び目 $T_{2,3}$ の (-1) -デーン手術 $T_{2,3}(-1)$ と等しくなる (図 2, [22, p.185, 図 11.1] 参照). S^3 を二つのソリッドトーラス V_1, V_2 に分け, 三葉結び目 $T_{2,3}$ が $\partial V_1 = \partial V_2$ 上にあると見れば, $T_{2,3}(-1)$ は V_1, V_2 の芯線が指数 2, 3 の特異ファイバー, デーン手術で貼り付けたソリッドトーラスの芯線が指数 7 の特異ファイバーと見なすことができ, 底空間が S^2 であるザイフェルト多様体 $S^2(2, 3, 7)$ になる [23].

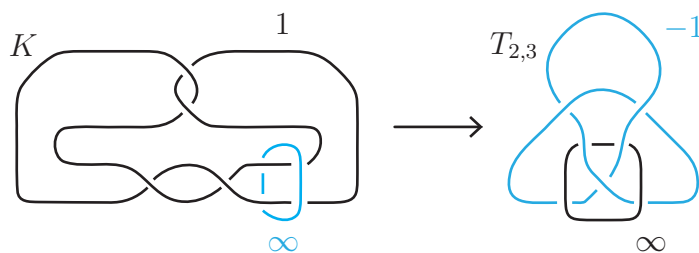


図 2 $K(1) \cong T_{2,3}(-1)$

$T_{2,3}(-1)$ における K の行き先をソリッドトーラス V_1 の中で見てみると, $T_{2,3}$ に 8 の字で絡む形をしている (図 3 中段). これを $S^2(2, 3, 7)$ の底空間である軌道体 $\Sigma_{2,3,7}$ へ射影すると, 指数 2 の尖点を通り, 指数 3 と 7 の間を通る曲線になることがわかる (図 3 右).

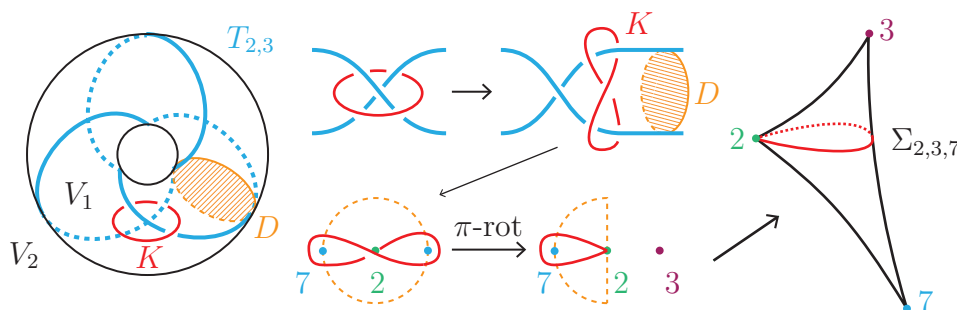


図 3 $T_{2,3}(-1)$ の特異ファイバーと底空間

実際, この $\Sigma_{2,3,7}$ における K の行き先となっている測地線は, Dehornoy [5] の Proposition C で用いられている測地線と一致している. この測地線に対し, Brunella の Birkhoff 切断の取り方と同様に, この測地線と反対向きの測地線を結ぶような $T^1\Sigma_{2,3,7}$ 内の円環を用いることで, 求める Birkhoff 切断を構成することができる.

4.2 2-surgery:(2,4,5)-orbifold

$K(2)$ がザイフェルト多様体 $S^2(2, 4, 5)$ と位相同型であることは, 以下のようにモンテシノストリックを用いて理解することができる. モンテシノストリックを使うため, S^3 中の K と, K を K に写す π 回転による S^3 の自己同相写像の軸となる自明な結び目 \tilde{O} を用意する (図 4 上段, [22, p.187, 図 11.2] 参照). この自己同相写像で割って得られる S^3 の自明な結び目 O と, K の像 κ に対し, 図 4 中段のように (-2) -タングル手術をする

ことで得られた絡み目 L は図 4 下段のようなモンテシノス絡み目 $M(1/2, -1/4, -1/5)$ になる. L の 2 重分岐被覆がザイフェルト多様体 $S^2(2, 4, 5)$ となることから, $K(2)$ が $S^2(2, 4, 5)$ に位相同型であることがわかる.

この過程において, κ の L との相対的な位置を調べることにより, 図 4 下段のように, $S^2(2, 4, 5)$ の底空間 $\Sigma_{2,4,5}$ において K に対応している測地線を見つけることができる.

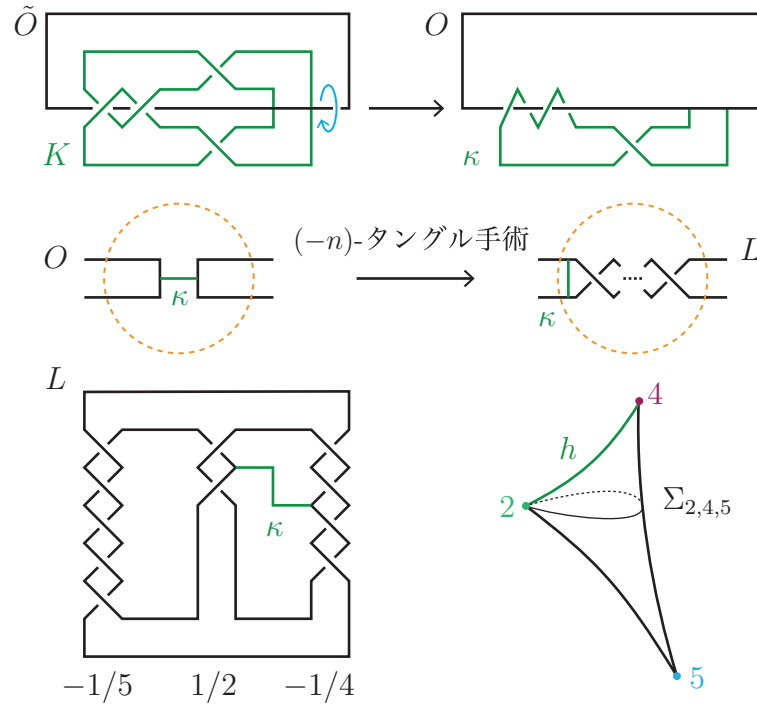


図 4 $K(2)$ を作るモンテシノス絡み目と K の行き先

この $\Sigma_{2,4,5}$ 上で見つけた測地線を h とする. h をポアンカレ円盤 \mathbb{H}^2 ヘリフトしたものを H とし, H に向きを一つ定めておく. この H に対し, $T^1\mathbb{H}^2$ 内の二つの曲面 \tilde{S}_0^+ と \tilde{S}_0^- を以下のように定める (図 5).

$$\begin{aligned}\tilde{S}_0^+ &= \{(x, v_\theta) \in T^1\mathbb{H}^2 \mid x \in H, v_\theta \in T_x^1\mathbb{H}^2, \theta_{v_x} \leq \theta \leq \theta_{-v_x}\} \\ \tilde{S}_0^- &= \{(x, v_\theta) \in T^1\mathbb{H}^2 \mid x \in H, v_\theta \in T_x^1\mathbb{H}^2, \theta_{-v_x} \leq \theta \leq \theta_{v_x}\}\end{aligned}$$

ここで, θ_{v_x} を x における H の接方向の角度, θ_{-v_x} を H の逆向きの測地線 $-H$ の接方向の角度とする. 射影 $p: T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\Sigma_{2,4,5}$ による像を $S_0^+ = p(\tilde{S}_0^+)$, $S_0^- = p(\tilde{S}_0^-)$ とすると, 特異ファイバーにおける同一視で $S_0^+ \cup S_0^-$ ははめ込みになる. これを Fried の論文 [10] のようにアノソフ流の向きに合わせて交差を解消すると, 種数 1 の Birkhoff 切断が得られ, return map が M_0 で導かれる自己同相写像に等しくなることが確かめられる.

4.3 3-surgery:(3,3,4)-orbifold

$K(3)$ がザイフェルト多様体 $S^2(3, 3, 4)$ と位相同型になることも, $K(2)$ の時と同様にモンテシノストリックを用いることで理解できる. $K(2)$ の場合と同様の記号を用いると, (-3) -タングル手術で得られる結び目 L と κ の位置関係は図 6 左のようになり, これを用

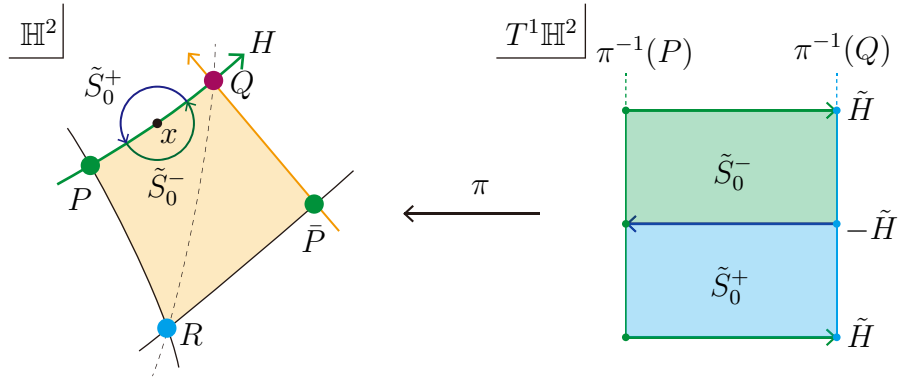


図5 $T^1\mathbb{H}^2$ 内の \tilde{S}_0^+ と \tilde{S}_0^-

いて $S^2(3, 3, 4)$ の底空間を軌道体 $\Sigma_{3,3,4}$ とみなしたときの、射影による像は図6右のように得られる. この測地線を γ とする.

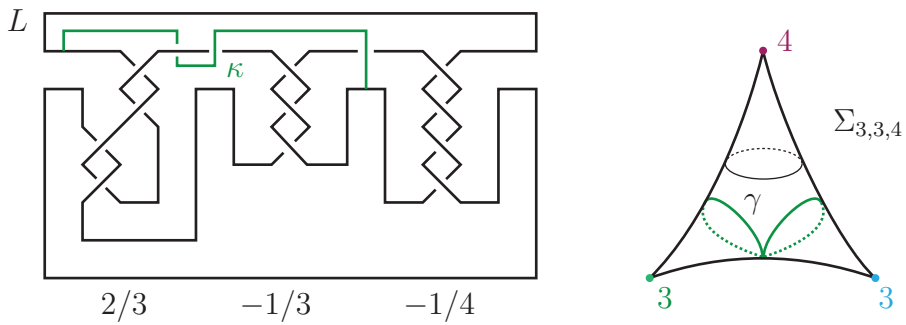


図6 $K(3)$ を作るモンテシノス結び目 L と $\kappa, \Sigma_{3,3,4}$ の測地線 γ

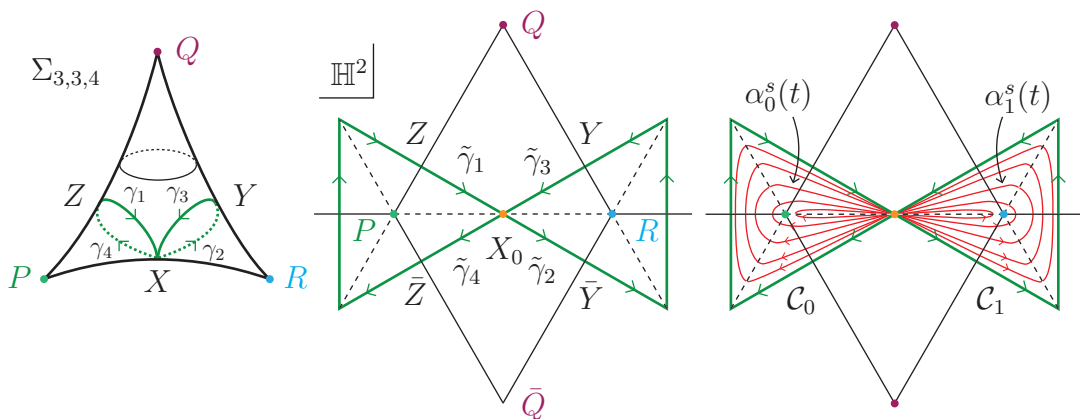


図7 $\Sigma_{3,3,4}$ の γ と C_0, C_1

この $\gamma \subset \Sigma_{3,3,4}$ の \mathbb{H}^2 への持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とする. \mathbb{H}^2 上で $\tilde{\gamma}$ で囲まれる二つの領域に、1次元特異葉層構造 C_0, C_1 をそれぞれ図7右のように構成する. C_i の葉を曲線

$\alpha_i^s(t), (s, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$ と表し, これらを用いて作られる $T^1\mathbb{H}^2$ 内の曲面 \tilde{F}_i を以下のような閉包として定める.

$$\tilde{F}_i = \text{cl} \left\{ (x, v) \in T^1\mathbb{H}^2 \mid x = \alpha_i^s(t), v = \frac{d\alpha_i^s(t)/dt}{\|d\alpha_i^s(t)/dt\|}, (s, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \right\}$$

射影 $p: T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\Sigma_{3,3,4}$ による像を $F_i = p(\tilde{F}_i)$ とすると, $F = F_0 \cup F_1$ は特異ファイバーにおける同一視と交差の解消により, 境界が γ を 3 回通る一つの曲面になる. また, オイラー数の計算から種数 1 であることがわかる. さらに, F の内部で全ての軌道が横断的に交わり, return map が M_0 で誘導される自己同相写像に等しくなる Birkhoff 切断であることがわかる.

5 Problem

K に沿った 4-デー手術で得られる多様体 $K(4)$ は, 次のようなグラフ多様体となることが知られている [25]. M_1 をクラインの壺上の I 束, M_2 を三葉結び目 $T_{2,3}$ の外部空間とすると, それぞれ底空間が円盤 D^2 であるザイフェルト多様体 $M_1 = D^2(2, 2)$, $M_2 = D^2(2, 3)$ となる. これらにより, $K(4)$ は $T = \partial M_1 = \partial M_2$ を本質的トーラスに持つグラフ多様体 $K(4) = M_1 \cup_T M_2$ となる. 定理 3 により, $K(4)$ には推移的な \mathbb{R} -covered アノソフ流があるので, このアノソフ流についても種数 1 で境界成分が 1 個の Birkhoff 切断を構成できる可能性がある. しかし $K(4)$ はグラフ多様体であり, M_2 には Ghys の構成 [12] により $T^1\mathbb{H}^2$ の測地流から得られるアノソフ流があるが, いままでの構成と同様の方法では, M_1 と M_2 に跨るような形で Birkhoff 切断を構成できず, これを解決することが課題である.

今回構成した Birkhoff 切断は, 種数 1 で境界成分が 1 個のものであった. 任意の推移的アノソフ流に対して, 境界成分が 2 個の Birkhoff 切断が構成できることを Tsang が示している [26]. また, skewed \mathbb{R} -covered アノソフ流に対しては, 境界成分が 1 個の Birkhoff 切断が存在することを Marty が示している [18]. これらに種数に対する条件を加えて, 境界成分が 1 個または 2 個のまま, 種数 1 の Birkhoff 切断が構成できるためのアノソフ流の条件や, または種数の下限を得ることも問題として考えられる.

8 の字結び目 K の外部空間には, K を周期 1 の閉軌道とみなす時, 周期 2 やそれ以上の閉軌道が存在する. 周期 2 の軌道に対する手術で得られる多様体に対する, 種数 1 で境界成分が 1 個, return map が M_0 となる Birkhoff 切断の構成は Dehornoy の論文 [7] で行われてる. これをさらに, 周期 3 以上の閉軌道に対して同様の Birkhoff 切断を得られるかも問題として考えられる.

参考文献

- [1] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **90** (1967). Translated from the Russian by S. Feder American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969 iv+235 pp.
- [2] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), no. 2, 199–300.

- [3] M. Brunella, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **3** (1994), no. 3, 335–344.
- [4] D. Cooper, C.D. Hodgson, S.P. Kerckhoff, *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, With a postface by Sadayoshi Kojima, MSJ Mem., **5**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. x+170 pp.
- [5] P. Dehornoy, *Genus-one Birkhoff sections for geodesic flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **35**(2015), no.6, 1795–1813.
- [6] P. Dehornoy, M. Shannon, *Almost equivalence of algebraic Anosov flows*, arXiv:1910.08457, 2019,
- [7] P. Dehornoy, *The cat-bat map, the figure-eight knot, and the five orbifolds*, arXiv:2409.06543, 2024,
- [8] S. R. Fenley, *Anosov flows in 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), no. 1, 79–115.
- [9] D. Fried, *The geometry of cross sections to flows*, Topology **21** (1982), no. 4, 353–371.
- [10] D. Fried, *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*, Topology **22** (1983), no. 3, 299–303.
- [11] É. Ghys, *Sur l’invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 59–76.
- [12] É. Ghys, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 247–277, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007
- [13] S. Goodman, *Dehn surgery on Anosov flows*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), 300–307, Lecture Notes in Math., 1007, Springer, Berlin, 1983.
- [14] M. Handel, W.P. Thurston, *Anosov flows on new three manifolds*, Invent. Math. **59** (1980), no. 2, 95–103.
- [15] N. Hashiguchi, *PL-representations of Anosov foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 4, 937–965.
- [16] N. Hashiguchi, H. Minakawa, *Genus one Birkhoff sections for the geodesic flows of hyperbolic 2-orbifolds*, Geometry, dynamics, and foliations 2013, 367–386, Adv. Stud. Pure Math., **72**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017
- [17] K. Ichihara, Y. Nakae, *Integral left-orderable surgeries on genus one fibered knots*, J. Knot Theory Ramifications **30**(2021), no.4, Paper No. 2150018, 16 pp.
- [18] T. Marty, *Skewed Anosov flows are orbit equivalent to Reeb-Anosov flows in dimension 3*, arXiv:2301.00842, 2023.
- [19] 皆川宏之, *3次元多様体上のアノソフ流のバーコフ切断について*, 第51回トポロジーシンポジウム講演集, 2004.
- [20] H. Minakawa, *Genus one Birkhoff sections for suspension Anosov flows*, “Geometry and Foliations 2013”, Komaba, Tokyo, Japan, abstract of talk, 2013, https://tsuboiweb.matrix.jp/faculty-html-gf2013/abstract_files/gf2013_137-140.pdf
- [21] J. M. Montesinos, *Surgery on links and double branched covers of S^3* , Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox), pp. 227–259, Ann. of Math. Stud., No. 84, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975
- [22] 茂手木公彦, *Dehn Surgery – Introduction to 3-Dimensional Topology*, 共立出版, 2022.
- [23] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math. **38** (1971), 737–745.

- [24] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, **7**. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [25] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, <https://library.slmath.org/nonmsri/gt3m/>
- [26] C. C. Tsang, *Constructing Birkhoff sections for pseudo-Anosov flows with controlled complexity*, Ergodic Theory Dynam. Systems **44** (2024), no. 8, 2308–2360.

エマージェント組紐と柏原-ヴェルニュ方程式

久野 雄介 (津田塾大学)

1 はじめに

以下では、非可換ベキ級数やリー級数に関する方程式がいくつか登場する。それぞれの方程式は、あるトポロジカルな対象から定まる代数構造の形式性を実現するための条件として捉えられる。2010年頃に、ドリinfeldの結合子方程式と柏原-ヴェルニュ方程式の密接な関係が明らかにされた ([3, 1])。本講演では、両者の中間に位置する方程式を導入した研究の現状 ([18, 11]) を報告する。この方程式のトポロジカルな背景がエマージェント組紐である。なお、同様のアイデアに基づく研究が [2, 10, 22, 24] でなされている。

2 形式性 (formality) と expansion

ここでの形式性 (formality) という用語は有理ホモトピー論での使われ方 ([27]) から来ていて、大まかには、ある構造がその近似から回復可能なことを意味する。もとの構造を回復するときに用いられるのが expansion である。組紐など、様々な“結び目”の普遍的な有限型不変量は、しばしば適切な設定における expansion として定式化される ([9])。

標数 0 の体 \mathbb{K} 上で考える。 V をフィルター付き代数構造とする。*1 すなわち、 V はベクトル空間で、いくつかの演算と下降フィルトレーション $V = \mathcal{F}_0 V \supset \mathcal{F}_1 V \supset \mathcal{F}_2 V \supset \dots$ を持ち、全ての演算はフィルトレーションと適合しているとする。*2 このとき、自然に V の随伴次数商 $\text{gr } V$ が定義される。これは、次数付きベクトル空間

$$\text{gr } V := \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k V / \mathcal{F}_{k+1} V$$

に V の演算から自然に誘導される演算を与えたものである。 $\text{gr } V$ はもとの代数構造 V の近似と考えられる。極めて自然な問題として、近似の精度を問うこと、すなわち V と $\text{gr } V$ の代数構造の比較がある。より適切なのは、 V を完備化、すなわち射影的極限

$$\widehat{V} := \varprojlim_k V / \mathcal{F}_k V$$

に置き換えることである。 V の演算は \widehat{V} の演算に自然に拡張する。

問. \widehat{V} と $\text{gr } V$ はフィルター付き代数構造として同型か? *3

本研究は科研費 (課題番号:23K03121, 24K00520) の助成を受けたものである。

*1 念頭にあるのは、ホップ代数、リー代数、リー双代数など。また、ここは一つのベクトル空間 V 上の演算を想定した記述だが、より一般的に (線形) 圏やオペラッドでも良い。実際に、後ではそうした状況も考える。

*2 例えば V が双線型な二項演算 $\Phi : V \times V \rightarrow V$ を持つとして、 Φ が $\{\mathcal{F}_k V\}_k$ と適合するとは、ある $d \in \mathbb{Z}$ が存在して任意の $u \in \mathcal{F}_k V, v \in \mathcal{F}_l V$ に対して $\Phi(u, v) \in \mathcal{F}_{k+l+d}$ が成り立つことである。

*3 ここで $\text{gr } V$ のフィルトレーションは、 $\mathcal{F}_k(\text{gr } V) = \{\text{次数 } k-1 \text{ 以下の成分が全て } 0\}$ 。

フィルター付き代数構造の同型 $\theta : \widehat{V} \rightarrow \text{gr } V$ は随伴次数商の間の写像を誘導する:

$$\text{gr } \theta : \text{gr } V = \text{gr } \widehat{V} \rightarrow \text{gr}(\text{gr } V) = \text{gr } V.$$

$\text{gr } \theta = \text{id}$ となる様な同型 θ が存在するとき, 代数構造 V は形式性を持つという. また, この様な θ を V の expansion と呼ぶ.

expansion という言葉を用いたが, これはまさに 1 変数関数のテイラー展開

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

と同じことをしている (ただし, 収束の問題は考えない). この場合, $V = \{0 \text{ のまわりの解析関数芽 } \}$ であり, $\mathcal{F}_k V = \{f \mid f^{(0)}(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$ とする. テイラー展開の結果は座標の取り方に依存していることに注意する.

V が形式性を持つとき, V の expansion 全体の集合には $\text{gr } V$ と \widehat{V} の自己同型が合成によって自然に作用し, bi-torsor 構造ができる:

$$\text{IAut}(\text{gr } V) \curvearrowright \{V \text{ の expansion}\} \curvearrowleft \text{IAut}(\widehat{V}). \quad (1)$$

ここで, 記号 $\text{IAut}(\widehat{V})$ の I は $\text{gr } \varphi = \text{id}$ となる自己同型 φ のみ考えていることを意味する. 二つの群作用は可換で, ともに自由かつ推移的である.

例. 任意の群 G に対して, 群環 $V = \mathbb{K}G$ はホップ代数の構造を持つ. ^{*4} また, V は添加イデアル I のべきによるフィルトレーション $\{I^k\}_k$ を持つ. V がホップ代数として形式的であるかどうかを問題にしよう. このとき, 群 G は filtered-formal とも呼ばれる ([26]).

- (i) G が階数 n の自由群 F_n のとき. $\text{gr } V = \text{gr } \mathbb{K}F_n$ は文字 x_1, \dots, x_n の生成する (完備) 自由結合代数 $\text{ass}_n = \mathbb{K}\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle\rangle$ と同型になる. ^{*5} より明示的には, F_n の基底 $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ を固定すると, $x_i = (\gamma_i - 1) \bmod I^2$ と読むことにより, 同型

$$\text{gr } \mathbb{K}F_n \cong \text{ass}_n$$

が成り立つ. いま $\theta_{\text{exp}}(x_i) = e^{x_i} = \sum_{k \geq 0} x_i^k / k!$ とおくと, これは完備ホップ代数の同型 $\theta_{\text{exp}} : \widehat{\mathbb{K}F_n} \rightarrow \text{ass}_n \cong \text{gr } \mathbb{K}F_n$ に拡張し, $\text{gr } \theta_{\text{exp}} = \text{id}$ である. (この同型は基底 $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ の取り方に依存している.) よって $\mathbb{K}F_n$ はホップ代数として形式的である.

- (ii) G が純組紐群 P_n のとき. $\text{gr } V = \text{gr } \mathbb{K}P_n$ はドリソフェルト-河野 リー代数 dk_n ([12, 17]) の普遍包絡環と同型になる. ここで, dk_n は生成元 $t_{ij} = t_{ji}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) と次の関係式によって定義される次数付きリー代数である:

$$\begin{cases} \text{可換関係式: } [t_{ij}, t_{kl}] = 0 & (\#\{i, j, k, l\} = 4 \text{ のとき}) \\ \text{4 項関係式: } [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 & (\#\{i, j, k\} = 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

^{*4} 余積, 対合, 添加写像はそれぞれ $\Delta(x) = x \otimes x$, $\iota(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(x) = 1$ ($x \in G$) で定まる.

^{*5} ass_n のホップ代数の構造は $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, $\iota(x_i) = -x_i$, $\varepsilon(x_i) = 0$ で定まる.

生成元 t_{ij} は次数 1 を持ち, 下図左の様な水平コードに対応している:

$$t_{ij} = \left| \begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i & j & n \end{array} \right|, \quad \tau_{ij} = \left| \begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & i & j & n \end{array} \right|$$

同型 $\text{gr } \mathbb{K}P_n = U(\text{dk}_n)$ は, 上図右の様な純組紐を $\tau_{ij} \in P_n$ として $t_{ij} = (\tau_{ij} - 1) \pmod{I^2}$ と読んで得られる. $\mathbb{K}P_n$ はホップ代数として形式的である ([17]).

代数構造 V の expansion を求めるには, V の各演算 Φ に対して, 方程式 $\text{gr } \Phi \circ \theta = \theta \circ \Phi$ を $\text{gr } V$ の中で解くことになる. このためには V の “有限表示” がしばしば役に立つ.

3 ドリinfeld 結合子 (Drinfeld associator)

(ドリinfeld) 結合子 [12] はある条件を満たす非可換べき級数 $\Phi = \Phi(x, y) \in \text{ass}_2$ である. その全体は次の様な bi-torsor 構造を持っている:

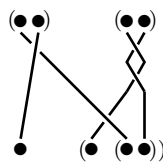
$$\text{GRT}_1 \curvearrowright \{ \text{ドリinfeld 結合子} \} \curvearrowleft \text{GT}_1. \quad (2)$$

ここで, GRT_1 と GT_1 はグロタンディーク-タイヒミュラー群 ([12]) と呼ばれる群である.

結合子によって, 結び目のコンセピッチ不変量が組み合わせ的に再構成される (例えば [23] 参照). そのアイデアは, 結び目を基本ブロックの積み重ねとして表すことにある:

$$\sigma = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \quad \alpha = \begin{array}{c} | \quad / \\ | \quad \backslash \end{array}, \quad \begin{array}{c} \backslash \quad / \\ \backslash \quad / \end{array}, \quad \cap, \quad \cup$$

結合子のトポロジカルな側面, 特に組紐との関係は原論文 [12] にも言及されている. バーナタン [8] は括弧付き組紐の圏 \mathbf{PaB} の expansion として結合子を捉えた. \mathbf{PaB} の射は次の様な「組紐 + 端点の括弧付け」の線形結合で表される.



圏 \mathbf{PaB} は紐の二重化などの演算を備えている. マックレーンのコヒーレンス定理 [20] と組紐群のアルティン表示 [7] から, \mathbf{PaB} の “有限表示” が得られる ([15] も参照):

$$\mathbf{PaB} = \langle \sigma, \alpha \mid \text{局所性, 五角関係式, (二種類の) 六角関係式} \mid \text{種々の演算} \rangle.$$

ここで, 五角関係式と六角関係式は次の様な括弧付き組紐の等式である:

PaB の随伴次数商は括弧付き水平コード図のなす圏 **PaCD** となる. **PaCD** の射はある n に対する $U(\mathbf{dk}_n)$ の元に括弧付き置換のデータを付与したものである.

定理 ([8]). ドリinfeld結合子 Φ に対して

$$Z(\sigma) = \left(\exp(\frac{1}{2}t_{12}), \times \right), \quad Z(\alpha) = \left(\Phi(t_{12}, t_{23}), \left| \begin{array}{l} / \\ / \end{array} \right. \right)$$

とおくことで **PaB** の expansion $Z : \mathbf{PaB} \rightarrow \mathbf{PaCD}$ が得られる. この対応により, $\{\mathbf{PaB} \text{ の expansion}\} = \{\text{ドリinfeld結合子}\}$ と同一視される. 更に, **PaB** に対する bi-torsor の図式 (1) は図式 (2) と同一視される.

結合子 Φ は群的 (group-like), すなわち $\Delta\Phi = \Phi \otimes \Phi$ をみたし, $\Phi = \exp(\frac{1}{24}[x, y] + \text{高次の項})$ という形をしていて, 更に **PaB** の五角関係式と六角関係式に対応する方程式をみたく. 五角方程式は $U(\mathbf{dk}_4)$ における次の等式である:

$$\text{(Pent)} \quad \Phi(t_{12}, t_{23})\Phi(t_{1(23)}, t_{(23)4})\Phi(t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{(12)3}, t_{34})\Phi(t_{12}, t_{2(34)}).$$

ただし $t_{1(23)} = t_{12} + t_{13}$, etc. また, 六角方程式は $U(\mathbf{dk}_3)$ における等式である. 古庄 [13] により, 結合子に対する六角方程式は実は五角方程式の帰結であることが示されている.

4 柏原-ヴェルニュ方程式

文字 x_1, \dots, x_n の生成する完備自由リー代数を lie_n とする. 別の言葉では, lie_n は完備ホップ代数 ass_n の原始的部分であり, 自然に $\text{lie}_n \subset \text{ass}_n$ となる. 特に $n = 2$ のとき, x_1, x_2 のかわりに x, y とかく.

柏原-ヴェルニュ問題 [16] は, もとは有限次元リー代数に対して定式化された, リー理論における問題であった. アレクシーブとトロシアン [3] は, これを自由リー代数の自己同型群の 1-コサイクルを用いて再定式化した. リー代数 lie_2 の自己同型 F が tangential であるとは, $F(x) = \exp(\text{ad}_u)(x)$, $F(y) = \exp(\text{ad}_v)(y)$ (ただし $u, v \in \text{lie}_2$) となることをいう. lie_2 の tangential な自己同型全体のなす群を \mathbf{tAut}_2 とかく. $F \in \mathbf{tAut}_2$ に対する次の方程式を柏原-ヴェルニュ方程式という:

$$\text{(KV1)} \quad F(\log e^x e^y) = x + y.$$

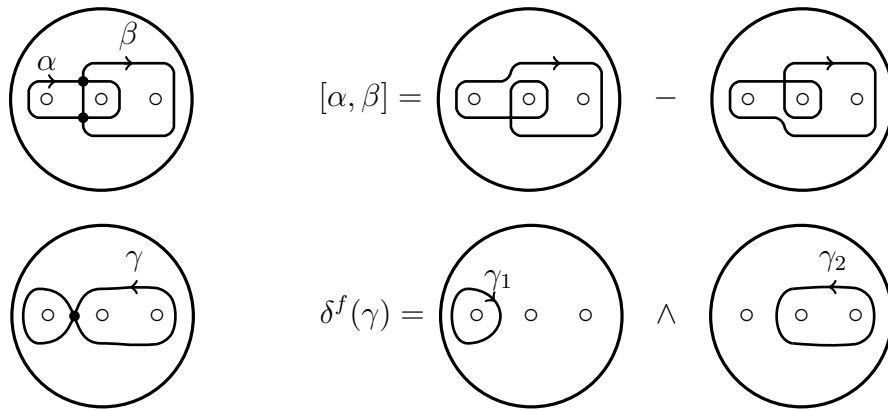
$$\text{(KV2)} \quad \text{ある 1 変数ベキ級数 } f(s) \text{ が存在して } j(F) = f(x + y) - f(x) - f(y) \text{ をみたく.}$$

ここで, (KV1) において $\log e^x e^y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$ は BCH 級数であり, (KV2) において j は文字 x, y の巡回語が張る空間を係数とする群 \mathbf{tAut}_2 上のある 1-コサイクルである. 柏原-ヴェルニュ方程式の解は存在し, その全体は次の様な bi-torsor 構造を持つ:

$$\text{KRV}_2 \curvearrowright \{ \text{柏原-ヴェルニュ方程式の解} \} \curvearrowleft \text{KV}_2.$$

柏原-ヴェルニュ方程式の解には, トポロジカルな解釈が少なくとも二つ存在する. 一つは 4次元トポロジーにおけるもので, バーナタンとダンチョ [9] によって与えられた. こ

これは、ウェルデッド・フォーム wTF° と呼ばれるサーキット代数 (wheeled prop と言っても同じ) の expansion としての解釈である。 wTF° は図式的な生成元と関係式によって定義されるが、チューブ写像 ([25]) を拡張する形で、各生成元は \mathbb{R}^4 内の (特異点を持つ) 曲面としての解釈を持つ。 もう一つは 2次元トポロジーにおけるもので、アレクシーブ-河澄-久野-ネフ [4, 5, 6] により与えられている。 向き付けられた曲面を固定し、その上の自由ループのホモトピー類全体のなす集合を $\hat{\pi}$ とする。 ベクトル空間 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ にはループの交叉や自己交叉によりリー双代数 $(\mathbb{K}\hat{\pi}, [\cdot, \cdot], \delta^f)$ の構造が定まる (下図参照)。 これをゴールドマン-トゥラエフ リー双代数 [14, 28] という。 *6



$\mathbb{K}\hat{\pi}$ は曲面の基本群 π の群環 $\mathbb{K}\pi$ の商ベクトル空間であり、自然なフィルトレーションを持つ。 リー双代数 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ の随伴次数商は、曲面の 1次元ホモロジー群の次元を n とするとき、文字 x_1, \dots, x_n の巡回語の張る空間上のリー双代数構造として具体的に記述される。

曲面が 2点穴空き円板のとき、 π は階数 2 の自由群である。 $F \in \text{tAut}_2$ に対して、 $\theta_F := F \circ \theta_{\text{exp}}$ は $\mathbb{K}\pi$ の Hopf 代数としての expansion となる。 ここで、 θ_{exp} は 2節の例 (i) のものである。 (適切に π の基底をとる。) θ_F はフィルター付きベクトル空間の同型

$$|\theta_F| : \widehat{\mathbb{K}\hat{\pi}} \rightarrow \text{gr } \mathbb{K}\hat{\pi} \quad (3)$$

を誘導する。 $|\theta_F|$ がリー双代数の射となるとき、 θ_F をゴールドマン-トゥラエフ (GT) expansion と呼ぶことにしよう。

定理 ([4, 5]). F が柏原-ヴェルニュ方程式の解であるとき、 θ_F はゴールドマン-トゥラエフ expansion となる。 さらに、この対応により、次の同一視が成り立つ:

$$\{ \text{2点穴空き円板の GT expansion} \} / \text{共役} = \{ \text{柏原-ヴェルニュ方程式の解} \}.$$

*6 トウラエフ [28] の与えたりー余括弧積には定数ループ分の不定性があり、この補正のためには曲面上にフレミングを取る ([4, 6]). 従って、 $\mathbb{K}\hat{\pi}$ にリー余括弧積を定めるときは、曲面は境界成分を持つと仮定する。

5 ドリinfeld結合子と柏原-ヴェルニュ方程式

2010年頃に、次の明示的な単射の存在が示された ([3, 1]): *7

$$\{\text{ドリinfeld結合子}\} \hookrightarrow \{\text{柏原-ヴェルニュ方程式の解}\}.$$

bi-torsor 構造と適合する群の単射準同型 $\text{GRT}_1 \hookrightarrow \text{KRV}_2$ および $\text{GT}_1 \hookrightarrow \text{KV}_2$ も明示的に構成されている. ここでは簡潔さのため、これらの群準同型の無限小版のみを記述する. 群 GRT_1 と KRV_2 のリー代数 grt_1 と krv_2 は、それぞれ、グロタンディーク-タイヒミュラーリー代数、柏原-ヴェルニュリー代数と呼ばれ、次の様に五角方程式 (Pent) と柏原-ヴェルニュ方程式 (KV1), (KV2) を線形化した方程式の解空間である:

$$\begin{aligned} \text{grt}_1 &= \{\psi \in \text{lie}_2 \mid \psi \text{ は方程式 (LPent) の解}\}, \\ \text{krv}_2 &= \{(a, b) \in \text{lie}_2^{\oplus 2} \mid (a, b) \text{ は方程式 (LKV1), (LKV2) の解}\}. \end{aligned}$$

$$\text{(LPent)} \quad \psi(t_{12}, t_{23}) + \psi(t_{1(23)}, t_{(23)4}) + \psi(t_{23}, t_{34}) = \psi(t_{(12)3}, t_{34}) + \psi(t_{12}, t_{2(34)}).$$

$$\text{(LKV1)} \quad [x, a] + [y, b] = 0.$$

(LKV2) ある $f(s) \in \mathbb{K}[[s]]$ が存在して、 x, y の巡回語の張る空間の中で次が成立する.

$$(\partial_x a)x + (\partial_y b)y = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

ただし、 ∂_x, ∂_y は自由リー代数上のある種の“偏微分作用素”である. *8

grt_1 のリー括弧積は伊原括弧積と呼ばれるもので、 krv_2 は lie_2 の tangential な導分としてのリー括弧積を備えている.

定理 ([3]). 次は次数付きリー代数の埋め込みである:

$$\nu : \text{grt}_1 \hookrightarrow \text{krv}_2, \quad \psi(x, y) \mapsto (\psi(-x-y, x), \psi(-x-y, y)). \quad (4)$$

これらのリー代数の構造について次の予想がある. 特に、予想 (ii) の成立は、基本的に全ての柏原-ヴェルニュ方程式の解が結合子から得られることを意味する.

予想. (i) (ドリinfeld-ヴェルニュ) $\text{grt}_1 \cong \text{lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots)$.

(ii) (アレクシーブ-トロシアン) $\text{krv}_2 = \mathbb{K}t \oplus \nu(\text{grt}_1)$. ここで t は次数 1 のある元.

6 混合組紐 (mixed braids) とエマージェント組紐 (emergent braids)

ここからは、[18, 11] の内容を紹介する. 結合子の定義方程式、特に五角方程式を弱めたものを考察する. Φ を結合子とする. dk_3 における 4 項関係式 $[t_{12} + t_{13}, t_{23}] = 0$ より、 $\Phi(t_{12}, t_{23}) = \Phi(-t_{13} - t_{23}, t_{23})$ となる. そこで、五角方程式 (Pent) の両辺は t_{12} を含まな

*7 特に、この単射の存在が、柏原-ヴェルニュ方程式の解の存在の別証明になっている.

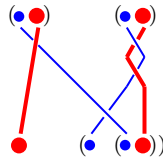
*8 次の等式で定まる: 任意の $a \in \text{lie}_2$ を ass_2 の元とみて $a = (\partial_x a)x + (\partial_y a)y$ と一意的にかく.

い形に書ける. すなわち, $dk_{2,2}$ を $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$ の生成する dk_4 の部分 Lie 代数とするとき, 五角方程式は $U(dk_{2,2})$ における等式とみなせる. 次の様に紐に色を付けてみる:

(5)

これは $D^2 \setminus \{2 \text{ 点}\}$ における 2 本の括弧付き組紐の等式として解釈できる.

この様なものをもう少し組織的に考えるため, 括弧付き混合組紐の圏 **PaMB** を導入する. 対象は, 赤い点 \bullet と青い点 \bullet の括弧付き語とする. 射は, 赤と青に色付けされた組紐で, 端点の色が始域, 終域と適合していて, 青い紐を忘れると自明な括弧付き組紐になっている様なものの線形結合とする. 例えば, 以下は $\bullet(\bullet(\bullet\bullet))$ から $(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$ への射を表す.



赤い紐同士は絡むことはなく, それらの相対位置も変わらないが, 青い紐は自由に動いて良い. 圏 **PaMB** の基本ブロックは次のものになる: *9

$$\sigma_{ps}^+ = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array}, \quad \sigma_{ps}^- = \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array}, \quad \alpha_{pps} = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array}, \quad \alpha_{psp} = \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array}, \quad \alpha_{spp} = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array}.$$

一方で, 次の様な射は **PaMB** には含まれていない:

$$\text{禁止: } \sigma_{pp} = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array}, \quad \alpha_{ppp} = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array}.$$

PaMB は紐の追加と削除, 二重化, 赤い紐を青い紐に変える演算を備えている. 例えば,

$$\sigma_{ps}^+ = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{1 本目を二重化}} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array}, \quad \alpha_{pps} = \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{2 本目を青に}} \alpha_{pss} = \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{blue} \\ \hline \end{array}.$$

PaMB にも五角関係式や六角関係式があるが, **PaB** と比べて種類が増える. 例えば,

定理 ([11]). 圏 **PaMB** は次の有限表示を持つ:

$$\mathbf{PaMB} = \langle \sigma_{ps}^\pm, \alpha_{pps}, \alpha_{psp}, \alpha_{spp} \mid \text{局所性, 五角関係式, 六角関係式} \mid \text{種々の演算} \rangle.$$

*9 p は pole, s は strand を意味する.

これは、**PaB** の有限表示の類似である。証明のポイントは、マックレーンのコヒーレンス定理の二色版を示すことと、[19] に倣った混合組紐の重群の表示にある。

PaMB の随伴次数商を **PaMCD** とかく。これは、**PaB** に対する **PaCD** と同様に、水平コード図の元に括弧付き置換のデータを付与したものとして記述される。コード図の空間の定義をきちんと述べておく。

定義. 次数付き Lie 代数 $\mathfrak{dk}_{m,n}$ を以下の表示で定義する：生成元は次数 1 の元 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$), $c_{ij} = c_{ji}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) で、これらを次の様に $m+n$ 本の紐上のドリinfeld-河野 リー代数 \mathfrak{dk}_{m+n} の生成元とみなす：

$$a_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} | & & | & | & | & & | \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & & i & m & 1 & & j & & n \end{array} \\ , \quad c_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} | & & | & | & | & & | \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & & m & 1 & i & & j & & n \end{array} \end{array} .$$

関係式は、これら生成元が \mathfrak{dk}_{m+n} においてみたす可換関係式や 4 項関係式の全てとする。例えば、 $[a_{11}, a_{22}] = 0$, $[a_{11}, c_{23}] = 0$, $[a_{11} + a_{12}, c_{12}] = 0$ など。

PaMB の形式性の問題が生じる。これを解くには、生成元 $\sigma_{ps}^{\pm}, \alpha_{pps}, \alpha_{psp}, \alpha_{spp}$ に対する値を関係式と矛盾しない様に定められれば良い。 $Z(\sigma_{ps}^{\pm}) = \left(\exp(\frac{\pm 1}{2} t_{12}), \text{X} \right)$ となることがすぐ分かる。そこで、決めなければならないのは三つの値

$$\Phi_{pps} = Z(\alpha_{pps}), \quad \Phi_{psp} = Z(\alpha_{psp}), \quad \Phi_{spp} = Z(\alpha_{spp})$$

である。結合子 Φ を一つとり、赤い紐を青い紐に変える演算を施してこれらの三つの値を決めれば **PaMB** の expansion が一つ得られる。**PaMB** の全ての expansion がこの方法で得られるかはまだ分かっていない。

次に、方程式を考える空間のサイズを小さくして、より扱いやすいものを得られるかと問うてみる。それには、 $D^2 \setminus \{ m \text{ 点} \}$ における n 本の組紐に対してバシリエフ型フィルトレーションを考える。青い紐同士の間を二重点を

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & = & \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \end{array} \end{array}$$

と定める。そして

$$\mathbf{PaMB}^{/2} := \mathbf{PaMB} / (\text{X} \text{X})$$

とおく。この圏の射を表す組紐をエマージェント組紐と呼ぶ。

当然ながら、 $\mathbf{PaMB}^{/1} := \mathbf{PaMB} / \text{X}$ においては青い紐同士の結び目の現象は検知できない。見えるものは $D^2 \setminus \{ m \text{ 点} \}$ 内の路のホモトピー類である。次の商 $\mathbf{PaMB}^{/2}$ は結び目の現象が起き始める段階と見做せる。これを踏まえてエマージェント (emergent) という用語がつけられている。

圏 $\mathbf{PaMB}^{/2}$ の随伴次数商は **PaMCD** の商となる。対応するコード図の空間では、青い紐の間のコードが 2 本以上あったら 0 とすることになる。

定義. c_{ij} たちの生成する $dk_{m,n}$ のリーイデアルを c とおき, $edk_{m,n} := dk_{m,n}/[c, c]$ とおく.

例. $edk_{2,2} \cong \text{lie}_2 \oplus \text{lie}_2 \oplus \text{ass}_2[-1]$ となる. この同型は, 右辺の $(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ に対して $u(a_{11}, a_{21}) + v(a_{12}, a_{22}) + \text{ad}_{w(a_{12}, a_{22})}(c_{12})$ を対応させることで得られる.

一般に $edk_{m,n}$ は次数付きベクトル空間として n 個の lie_m と $\binom{n}{2}$ 個の $\text{ass}_m[-1]$ の直和に同型である. (“ $[-1]$ ” は次数 (-1) シフトを表す.) リー括弧積も具体的に記述される.

7 エマージェント五角方程式と柏原-ヴェルニュ方程式

当面の目標は, エマージェント版結合子, すなわち $\text{PaMB}^{/2}$ の expansion から柏原-ヴェルニュ方程式の解を得ることである. それが可能なことは [10] の結果からも期待される. この目標に向けて, [18] では expansion の定義方程式の内一つの線形化を, ある技術的な仮定のもとに考察した. 具体的には, $\text{PaMB}^{/2}$ の五角関係式の一つである (5) から得られる方程式である. 特にその線形化は $edk_{2,2}$ における方程式になり, 整理すると $\varphi \in \text{lie}_2 \cong \text{edk}_{2,1}$ に対する次の方程式になる:

$$(ELP) \quad \begin{cases} \varphi(y, 0) - \varphi(x + y, 0) = 0, \\ (\partial_y \varphi)(x, y) + (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0) - R(\varphi) = 0. \end{cases}$$

但し, 写像 $R : \text{lie}_2 \rightarrow \text{ass}_2$ は次で定まる: $R(x) = R(y) = 0$ かつ任意の $a, b \in \text{lie}_2$ に対し

$$R([a, b]) = [R(a), b] + [a, R(b)] \\ + (\partial_x b)x \iota(\partial_x a) - (\partial_x a)x \iota(\partial_x b) + (\partial_y b)y \iota(\partial_y a) - (\partial_y a)y \iota(\partial_y b).$$

定義. 次数付きベクトル空間 grt_1^{em} を以下で定める:

$$\text{grt}_1^{\text{em}} := \{\varphi \in \text{lie}_2 \mid \varphi \text{ は条件 (ELP) および (VS) をみたす}\}.$$

$$(VS) \quad [x, \varphi(y, x)] + [y, \varphi(x, y)] = 0.$$

構成から, $\psi = \psi(x, y) \in \text{grt}_1$ のとき $\varphi(x, y) = \psi(-x - y, y)$ は (ELP) をみたす. また, ドリinfeld [12] の結果から $\varphi(x, y)$ が (VS) を満たすことも良い. そこで,

$$\text{grt}_1 \hookrightarrow \text{grt}_1^{\text{em}}, \quad \psi(x, y) \mapsto \psi(-x - y, y).$$

次の結果は, 特に, アレクシーブ-トロシアン の埋め込み (4) の分解を与える.

定理 ([18]). (i) $\varphi \in \text{grt}_1^{\text{em}}$ に対し $\nu^{\text{em}}(\varphi) := (\varphi(y, x), \varphi(x, y)) \in \text{krv}_2$ となる.

(ii) 単射線形写像 $\nu^{\text{em}} : \text{grt}_1^{\text{em}} \rightarrow \text{krv}_2$ の像は krv_2 の対称部分 $\text{krv}_2^{\text{sym}} = \{(a, b) \in \text{krv}_2 \mid b(y, x) = a(x, y)\}$ の次数 2 以上の部分に一致する. 特に,

$$\text{krv}_2^{\text{sym}} = \mathbb{K}t \oplus \nu^{\text{em}}(\text{grt}_1^{\text{em}}).$$

注. (i) $\text{krv}_2^{\text{sym}}$ と krv_2 が一致するかどうかは知られていない (次数 17 までは一致).

- (ii) 次数 17 以下で, (ELP) の解空間は grt_1 と一致し, 特に (ELP) の解は (VS) をみたく.
- (iii) 定理の帰結として, grt_1^{em} が伊原括弧積で閉じていてリー代数の構造を持つことが分かる. 直接証明はまだない. また, 条件 (VS) を外した場合はまだ分からない.
- (iv) 条件 (VS) は技術的な仮定として置いた側面があるが, $\Phi_{\text{pps}}, \Phi_{\text{psp}}, \Phi_{\text{spp}}$ に対するある対称性の仮定をおくと, **PaMB** の六角方程式から導かれることが分かる.

以下, 主張 (i) の証明の概略, 特に方程式 (ELP) の使用箇所を説明する. ポイントは, (ELP) に現れる写像 R が 2 点穴空き円板のゴールドマン-トゥラエフ リー双代数の演算と関係することである. より詳しく, R はトゥラエフ余括弧積の基点付き版の随伴次数商の制限に一致する. この事実と, 柏原-ヴェルニュ方程式とゴールドマン-トゥラエフ リー双代数の関係 ([4, 5, 6]) を用いると次が示される:

補題. $\tilde{u} = (a, b) \in \text{lie}_2^{\oplus 2}$ は (LKV1) をみたく, ある $c \in \text{ass}_2$ が存在して $R(\tilde{u}(x)) = [x, c]$ かつ $R(\tilde{u}(y)) = [y, c]$ とする. このとき, \tilde{u} は (LKV2) をみたく, 特に $\tilde{u} \in \text{krv}_2$ となる.

ただし, \tilde{u} は lie_2 に導分として次の様に作用している: $\tilde{u}(x) = [x, a], \tilde{u}(y) = [y, b]$.

定理 (i) の証明 $\varphi \in \text{grt}_1^{\text{em}}$ のとき, 条件 (VS) から $\nu^{\text{em}}(\varphi)$ は (LKV1) をみたく. $\nu^{\text{em}}(\varphi) \in \text{krv}_2$ を示すには, 補題の条件を確認すれば良い. 次の計算をする:

$$\begin{aligned} R(\nu^{\text{em}}(\varphi)y) &= R([y, \varphi(x, y)]) = [y, R(\varphi)] + (\partial_y \varphi)y - y \iota(\partial_y \varphi) \\ &= [y, R(\varphi) - \partial_y \varphi] \underset{\triangle}{=} [y, (\partial_y \varphi)(y, 0) - (\partial_y \varphi)(x + y, 0)] = [y, -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)]. \end{aligned}$$

ここで, \triangle において方程式 (ELP) を用いた. 同様の計算で, $R(\nu^{\text{em}}(\varphi)(x)) = [x, -(\partial_y \varphi)(y + x, 0)]$ がわかる. $c := -(\partial_y \varphi)(x + y, 0)$ とおけば良い. \square

参考文献

- [1] A. Alekseev, B. Enriquez, and C. Torossian, Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations, *Publications Mathématiques de L’IHÉS*, **112** (2010) 143–189.
- [2] A. Alekseev, F. Naef and M. Ren, Poisson brackets and coaction maps of regularized holonomies of the KZ equation, preprint, arXiv:2409.08894
- [3] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld’s associators, *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), no. 2, 415–463.
- [4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, *Adv. Math.* **326** (2018), 1–53.
- [5] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne, *Quantum Topol.* **11**, 657–689 (2020)
- [6] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, preprint, arXiv:1804.09566v3 (2023)
- [7] E. Artin: Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1925), 47–72.

- [8] D. Bar-Natan, On associators and the Grothendieck-Teichmüller group, I, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 2, 183–212.
- [9] D. Bar-Natan and Z. Dancso, Finite type invariants of w-knotted objects II: tangles, foams and the Kashiwara-Vergne problem, *Math. Ann.* **367** (2017), no. 3–4, 1517–1586. Correction published in *Math. Ann.* **389** (2024), no. 3, 3257–3259.
- [10] D. Bar-Natan, Z. Dancso, T. Hogan, J. Liu, and N. Scherich, Goldman-Turaev formality from the Kontsevich integral, in preparation.
- [11] D. Bar-Natan, Z. Dancso, T. Hogan, Y. Kuno, and D. Lin, Coherence for the groupoid of mixed braids, in preparation.
- [12] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991) no. 4, 829–860.
- [13] H. Furusho, Pentagon and hexagon equations, *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 1, 545–556.
- [14] W. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, *Invent. Math.* **85** (1986) no. 2, 262–302.
- [15] A. Joyal and R. Street, Braided tensor categories, *Adv. Math.* **102** (1993), no. 1, 20–78.
- [16] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff Formula and Invariant Hyperfunctions, *Invent. Math.* **47** (1978), no. 3, 249–272.
- [17] T. Kohno, Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures, *Invent. Math.* **82** (1985), no. 1, 57–75.
- [18] Y. Kuno, Emergent version of Drinfeld’s associator equations (with an appendix by Dror Bar-Natan), preprint, arXiv:2504.02549
- [19] S. Lambropoulou, Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manifolds, in: *Knots in Hellas ’98 (Delphi)*, *Ser. Knots Everything* **24**, 274–289 (2000).
- [20] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Second edition, Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [21] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev’s loop operations, *Quantum Topol.* **9** (2018), no. 1, 39–117.
- [22] F. Naef and R. Navarro Betancourt, A functorial approach to the Kashiwara-Vergne problem, in preparation.
- [23] T. Ohtsuki, *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything **29**, World Scientific Publishing Co. Inc. 2002.
- [24] M. Ren, A relation between Turaev coaction, Goncharov–Brown coaction and the reduced coaction Lie algebra, preprint, arXiv:2504.17416
- [25] S. Satoh, Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), no. 4, 531–542.
- [26] A. Suciuc and H. Wang, Taylor expansions of groups and filtered-formality, *Eur. J. Math.* **6** (2020), no. 3, 1073–1096.
- [27] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **47** (1977), 269–331.
- [28] V. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **24** (1991), no. 6, 635–704.

Recent research on singular decomposable continua

(特異な分解可能連続体に関する最近の研究)

島根大学総合理工学部 松橋英市

1 序章

コンパクト連結距離空間を連続体 (continuum) と呼ぶ。平たく言えば \mathbb{R}^n の中の連結な有界閉集合のことである (有限次元の場合に限っては)。連続体すべてが研究対象なわけで、その守備範囲は広い。連続体には分解可能連続体と分解不可能連続体の2種類があり、一般に後者のほうが前者に比べて複雑な構造を持ち、それゆえに興味深い話題を提供することが多い。では分解可能連続体のほうは常に簡単な性質を持っているかといえばそうでもない。たとえば後述するように Janiszewski 連続体のように全ての部分連続体が分解可能になるにもかかわらず弧 ($=\text{arc}$) 単位閉区間 $[0,1]$ と同相な空間) を含まないものが存在する (弧を含まないということは曲線, 直線問わずとにかく線を含まないということである)。連続体理論を研究するときいろいろな見地から研究するが、分解可能か不可能かということが研究テーマの重要な部分を占める研究をする場合は分解不可能連続体に関する研究が好まれるように私は感じる。それは上述のようにその複雑性ゆえに豊富な話題を提供するからであると思う。本講演では分解可能連続体についても分解不可能連続体に負けないような奇妙な話題があるということを中心に紹介していこうと思う。

2 特異な分解可能連続体の存在について

定義 2.1. X を連続体とする。 X が分解可能 (decomposable) であるとは真部分連続体 $A, B \subsetneq X$ が存在して $X = A \cup B$ をみたすときにいう。 X が分解可能ではないとき、 X を分解不可能 (indecomposable) であるという。

本講演は主に分解可能連続体に関するものであるが、話のついでに分解不可能連続体についても少し触れておく。

例えば、閉区間, 円周, 球面など簡単に思い浮かぶような連続体は全て分解可能である。もう少し複雑なものは $\sin \frac{1}{x}$ -continuum, さらに複雑なものとして Sierpinski gasket,

Menger sponge などがあるが、それらも分解可能である。少し考えただけでは分解不可能な連続体を思い浮かべることはかなり難しい。分解可能不可能連続体の例で構成が比較的簡単なものの例として、backethandle continuum や和田の湖などがある。簡単とはいっても無限回の操作を経て構成するので、直感的に分解不可能と判断するのは困難であると思う。さらに複雑な連続体として、部分連続体がすべて分解不可能となる遺传的分解不可能連続体 (**hereditarily indecomposable continuum**) がある。

X を連続体としたとき、 $C(X)$ で X に含まれる部分連続体すべてからなる空間を表し、(位相はハウスドルフ距離から導かれるものとする) これを X の超空間 (**hyperspace**) とよぶ。 $C(X)$ は連続体であることが知られている。

上述したように分解不可能連続体は思い浮かべること自体困難であるようなものなので、以下の定理は奇妙に思えるが、連続体理論の中では非常に有名な結果である。

定理 2.2. ((Bing [2]) $n \geq 2$ または $n = \infty$ とする。このとき、 $C(I^n)$ の中で遺传的分解不可能連続体全体からなる集合は稠密な G_δ -集合となる。

つまり位相的見地からみると、ほとんどすべての連続体は遺传的分解不可能なのである。

遺传的分解不可能とは真逆の次の定義を紹介する。

定義 2.3. 連続体 X の部分連続体がすべて分解可能であるとき、 X を遺传的分解可能連続体 (**hereditarily decomposable continuum**) とよぶ。

注意. 遺传的分解可能連続体の位相次元は必ず 1 次元であることが次の定理からわかる。

定理 2.4. (Bing [1]) $n \geq 2$ とする。すべての n 次元連続体は $(n - 1)$ 次元遺传的分解不可能連続体を含む。

遺传的に分解可能、そして 1 次元ということ考えるとあまり複雑な連続体は作れないような気がするが、Janiszewski は 1912 年、次のような特異な例を構成した。

例 1. (Janiszewski [11]) 遺传的分解可能、arc-like であり、さらに弧を含まない連続体が平面の中に存在する。

連続体 X が **arc-like** であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、全射連続写像 $f: X \rightarrow [0, 1]$ が存在し、 f のすべての逆像の直径が ε 未満であるような場合をいう。弧ではない arc-like continuum の例として $\sin \frac{1}{x}$ -continuum が挙げられる。Janiszewski が例 1 を提示した当時は、連続体に関する多くの基本的な性質がまだ明らかにされていない時代であった。そ

のような中で, Janiszewski は arc-like かつ遺伝的に分解可能という, 一見すると単純そうに見える性質を持ちながらも, 弧を一切含まないというきわめて複雑な性質を同時に併せ持っている例を提示したのである。

最初に紹介する我々の結果は, Janiszewski 連続体に関連するものである。そのために次の定義を導入する。

定義 2.5. X を連続体とする。

1. X が D -連続体であるとは, X の任意の互いに交わらない 1 点集合ではない 2 つの部分連続体 A, B に対して, 次の条件をみたす X の部分連続体 L が存在するときにいう :
 - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L$.
 - $A \setminus L \neq \emptyset$ または $B \setminus L$.
2. X が D^{**} -連続体であるとは, X の任意の互いに交わらない 1 点集合ではない 2 つの部分連続体 A, B に対して, 次の条件をみたす X の部分連続体 L が存在するときにいう :
 - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L$.
 - $A \setminus L \neq \emptyset$.
3. X が D^* -連続体であるとは, X の任意の互いに交わらない 1 点集合ではない 2 つの部分連続体 A, B に対して, 次の条件をみたす X の部分連続体 L が存在するときにいう :
 - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L$.
 - $A \setminus L \neq \emptyset$ かつ $B \setminus L$.

D -連続体を最初に導入したのは Lončar[14] である。弧状連結連続体は D^* -連続体であり, また, D -連続体は分解可能となる (前者は簡単に確認できるが後者は compositant を用いた証明が必要なのでここでは割愛する)。ということで, 連続体においては次の関係が成立する :

$$\text{弧状連結} \implies D^* \implies D^{**} \implies D \implies \text{分解可能}$$

例 2. (Espinoza-Matsushashi [4]) Arc-like かつ遺伝的に分解可能だが D -連続体を含まない連続体が存在する。

例 3. (Matsushashi-Oshima [15]) Arc-like かつ遺伝的に D だが, D^{**} -連続体を含まない連続体が存在する。

上の例で遺伝的 D とは部分連続体がすべて D 連続体になるようなものをいう (以下に出てくる遺伝的 D^{**} , 遺伝的弧状連結も同様である)。さて, 上の 2 つの例から次の問いは自然であろう :

問. Arc-like, 遺伝的 D^{**} で D^* -連続体を含まない連続体は存在するか?

この問いへの答えは次の結果より否定的なものとなる。

定理 2.6. (Matsubishi-Oshima [15]) X を連続体とする。このとき次は同値である。

1. X は arc-like D^{**} -continuum である。
2. X は弧である。

つまり, Arc-like 連続体の世界では, D -連続体では例 3 のようにおかしなことが起こるが, それよりもほんの少し強い性質を持つ D^{**} -連続体は弧になってしまうのである。また, この定理の系として次が得られる。

定理 2.7. (Matsubishi-Oshima [15]) X を連続体とする。このとき次は同値である。

1. X は遺伝的 D^{**} である。
2. X は遺伝的弧状連結である。

Arc-like, 遺伝的 D^{**} という条件を考えなければ以下のような例を構成できる。構成には射影極限を用いる。

例 4. ((Imamura-Matsubishi-Oshima [10])) 遺伝的分解可能な D^{**} -連続体で D^* -連続体を含まないものが存在する。

注意: 定義が煩雑になるので割愛するが, 実際は D^{**} -連続体より強い性質を持つ連続体で D^* -連続体を含まない連続体を構成できる (興味のある方は [16] を参照してください)。

図 1 は例 4 の目標の連続体を構成する際に射影極限を考える際の最初のステップ。

3 共通モデルについて

まず以下の有名な定理を紹介する。

定理 3.1. (Hausdorff-Alexandroff) 任意のコンパクト距離空間はカントール集合の連続像となっている。

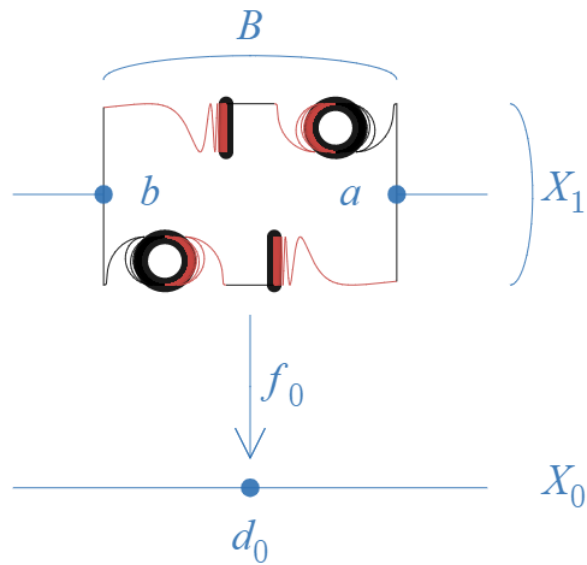


図1 X_0 , X_1 and f_0

([10, Theorem 5.4] の図より)

つまり、任意のコンパクト距離空間はカントール集合をうまくつぶした空間として得られることがわかる。この定理に対応して次のような問いを考えることは自然であろう。

問. 次のような連続体 X は存在するか？

すべての連続体が X の連続像となっている。

上記の問いでは、すべての連続体をその連続像として生み出せるような連続体 X の存在を問うているわけだが、以下の定理により、それよりずっと狭いクラスにすらそのような連続体 X は存在しない。

定理 3.2. (Warszkiewicz [20]) 任意の連続体 Z に対して、半開区間 $[0, 1)$ のコンパクト化 W_Z であって、次の条件を満たすものが存在する：

- 剰余 $W_Z \setminus [0, 1)$ は円周 S^1 に同相である。
- Z から W_Z への連続な全射は存在しない。

しかし一方局所連結連続体 (弧, 円周, n 次元立方体, Sierpinski gasket, Menger sponge, etc.) 全体に対しては次の定理が成り立つことも有名である。その定理の紹介の前に一つ定義を導入する。

定義 3.3. \mathcal{C} をある連続体のクラスとする。連続体 X が \mathcal{C} の共通モデル (common

model) であるとは、任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して C が X の連続像になっているときにいう。

定理 3.4. (Hahn-Mazurkiewicz) 単位閉区間は局所連結連続体全体からなるクラスの共通モデルとなっている。つまり、任意の局所連結連続体は単位閉区間の連続像となっている。

また、次の定理も有名である。

定理 3.5. (Fearnley[5], Lelek[12], Mioduszewski[18]) Pseudo arc (= arc-like 遺伝的分解不可能連続体) は arc-like 連続体全体からなるクラスの共通モデルとなっている。

そこで、どのような連続体のクラスならば共通モデルをもつか (またはもたないか) を調べることは自然であろう。

注意. 任意の連続体の可算列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を考えると、この列には必ず共通モデルが存在する。

定理 3.6. (Fukaishi-Matsushashi[6]) 任意の連続体 X に対して、以下を満たす連続体 Z が存在する：

- Z は分解不可能連続体であり、 X を部分連続体として含む。
- $r : Z \rightarrow X$ なる開なレトラクションが存在し、任意の $x \in X$ に対して、逆像 $r^{-1}(x)$ はカントール集合に同相である。
- X と同相な空間からなる可算族 $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ が存在して、 $Z = \text{Cl}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i)$ が成り立つ。

連続体 X に対して定理 3.6にあるような Z 全体からなる集合族を $\mathbb{I}\mathbb{C}_X$ とおく。定理 3.6で示したことは、 $\mathbb{I}\mathbb{C}_X$ は空ではないということである。これに関し、ごく最近、次の結果が得られた。

定理 3.7. (Matsushashi-Ortega [17]) 任意の連続体 X に対して $\mathbb{I}\mathbb{C}_X$ は共通モデルを持たない。

また、以下の結果より 2 章で紹介したような連続体のクラスにも共通モデルがない。

定理 3.8. D を次のいずれかの性質をもつ連続体のクラスとする：

- D -連続体を含まない遺伝的分解可能連続体、
- D^{**} -連続体を含まない遺伝的 D -連続体、

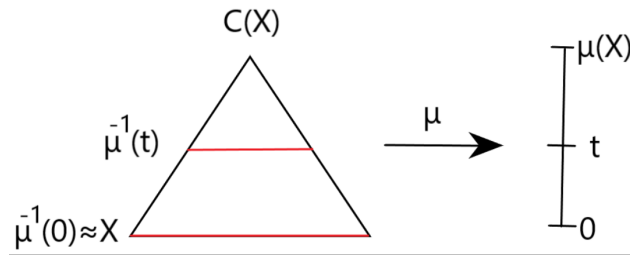


図2 $\mu^{-1}(t)$ は大きさ t の部分連続体からなる集合族

- D^* -連続体を含まない遺伝的分解可能な D^{**} -連続体.

このとき、 \mathcal{D} は共通モデルをもたない。つまり任意の連続体 X に対して、ある連続体 $D \in \mathcal{D}$ が存在し、 X から D への連続全射は存在しない。

4 Whitney Property, Whitney reversible property

定義 4.1. 連続体 X に対して、その部分連続体全体の集合を $C(X)$ とする。写像 $\mu : C(X) \rightarrow [0, \mu(X)]$ が **Whitney 写像** (Whitney map) と呼ばれるのは、次の二つの条件を満たすときである：

- 任意の部分連続体 $A, B \in C(X)$ に対して、 $A \subsetneq B$ ならば $\mu(A) < \mu(B)$ が成り立つ。
- 任意の点 $x \in X$ に対して、 $\mu(\{x\}) = 0$ が成り立つ。

定義 4.2. 位相的性質 P が **Whitney 性質** (Whitney property) であるとは、次の条件を満たすときをいう：連続体 X が性質 P をもつならば、 $C(X)$ 上の任意の Whitney 写像 μ と、任意の $t \in [0, \mu(X))$ に対して、 $\mu^{-1}(t)$ も性質 P をもつ。

定義 4.3. 位相的性質 P が **Whitney 可逆性質** (Whitney reversible property) であるとは、次が成り立つときをいう：任意の連続体 X に対し、 $C(X)$ 上の任意の Whitney 写像 μ と任意の $t \in (0, \mu(X))$ に対して、 $\mu^{-1}(t)$ が性質 P をもつならば、 X 自身も性質 P をもつ。

これらの性質に関する研究は連続体理論の中心的課題である。それらに関しては連続体の性質の数だけ問題になりえるので（そしてそのいずれもが明らかではない）、これま

で多くの研究がなされ、そして多くの未解決問題がある。たとえば分解可能性は Whitney の性質であるが Whitney の可逆性質ではないことが知られている。弧状連結性も同様である。詳しい情報は [8] にある。

定理 4.4. (Matsubishi-Oshima [15]) 連続体が D であること, D^{**} であること, D^* であることはすべて Whitney の性質である。

定理 4.5. (Illanes-Matsubishi-Oshima [9]) 連続体が D であること, D^{**} であること, D^* であることはすべて Whitney の可逆性質ではない。

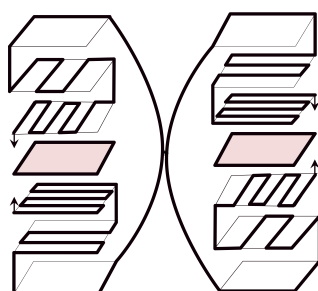


図3 D -連続体ではないが, 全ての正のホイットニーレベルが D^* -連続体となる

([9, Example 3.2] の図を改良したもの)

参考文献

- [1] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 267–273.
- [2] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1** (1951), 43–51.
- [3] B. Espinoza and E. Matsubishi, *Weakly Whitney preserving maps*, Topology Appl., **262** (2019), 90–108.
- [4] B. Espinoza and E. Matsubishi, *D -continua, D^* -continua and Wilder continua*, Topology Appl., **285** (2020), 25p.
- [5] L. Fearnley, *Characterizations of the continuous images of the pseudo-arc*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 380–399.
- [6] S. Fukaishi and E. Matsubishi, *Open retractions of indecomposable continua*, Colloq. Math. **148** (2017), no. 2, 191–194.

- [7] A. Illanes, *Countable closed set aposyndesis and hyperspaces*, Houston J. Math. **23** (1997), no.1, 57-64.
- [8] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [9] A. Illanes E. Matsushashi and Y. Oshima, *More on Whitney levels of some decomposable continua*, Topology Appl. **357** (2024), Paper No. 109068, 12 pp.
- [10] H. Imamura, E. Matsushashi and Y. Oshima, *Some theorems on decomposable continua*, Topology Appl., **343** (2024), 13p.
- [11] J. Janiszewski, *Über die Begriffe "Linie" und "Fläche"*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians II, Cambridge (1912), 126-128.
- [12] A. Lelek, *On weakly chainable continua*, Fund. Math. **51** (1962/63), 271–282.
- [13] H. Kato and E. Matsushashi, *On surjective Bing maps*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **52** (2004), no.3, 329-333.
- [14] I. Lončar, *D-continuum X admits a Whitney map for $C(X)$ if and only if it is metrizable*, Glas. Mat. Ser. III, **40**(60)(2005), 333-337.
- [15] E. Matsushashi and Y. Oshima, *Some decomposable continua and Whitney levels of their hyperspaces*, Topology Appl., **326** (2023), 9p.
- [16] E. Matsushashi, *Singular decomposable continua*, Topology Appl., **358** (2024), 16p.
- [17] E. Matsushashi and J.A.Ortega, *Open retractions of indecomposable continua, II*, submitted.
- [18] J. Mioduszewski, *A functional conception of snake-like continua*, Fund. Math. **51** (1962/63), 179–189.
- [19] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [20] Z. Waraszkiewicz, *Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre*, Fund. Math. **18** (1932), 118–137.

Parametrized topological complexity of spherical fibrations over spheres

箕輪 悠希 (京都大学理学研究科 数学・数理解析専攻 (D3))*

1 概説

ロボット工学の領域には経路計画とよばれる研究主題があり、おおむね次のような問題の解決を目標とする。

Question 1.1. 空間上の 2 点 A, B が与えられたとき、 A 地点から B 地点までの経路を返すプログラムを構成せよ。

これとは別に動作計画とよばれる研究主題があるが、根源的な問いはこれと同質である。たとえば「空間」として「ロボットアームの取りうる姿勢すべてのなす空間」を想定すれば、上の問題は「ロボットアームを初期姿勢から目標姿勢まで動作させるプログラムを構成せよ」と置換され、これは動作計画の基本的な問題となる。Farber [4] はこれを翻案し、おおむね次のような問題を提示した。

Question 1.2. 空間上の 2 点 A, B が与えられたとき、 A 地点から B 地点までの経路を返す**連続**プログラムは存在するか。ただし、ここでいう連続とは「初期・目標地点が微小に変化したときに微小変化した経路を返す」の意である。

ここで追加された連続性の仮定は、もとの問題を顧慮しても自然なものに思える。ところが、空間が可縮でないとき上のような連続プログラムは**存在しない**。それでも、いくつかの局所的な連続プログラムを組み合わせることで空間全体にわたる経路計画・動作計画のプログラムを構成することは可能である。Farber は、ここで必要となる局所的な連続プログラムの最小数が空間のホモトピー型によって決定されることを示し、空間の **topological complexity** (位相的複雑さ) というホモトピー不変量を定義した。

Topological complexity の研究は、多種多様な方針のもとで行われている。まず、**LS カテゴリー**とよばれるホモトピー不変量との類似性が注目される。LS カテゴリーは 20 世紀後半の代数トポロジーにおける主要な研究対象であり、さまざまな理論や手法が展開されてきた。これらの不変量は sectional category という (写像の) ホモトピー不変量に統合され、それを媒介して LS カテゴリーの研究手法を topological complexity に応用することが試みられてきた。さらに、空間の幾何学的な性質との関連も調べられている。たとえば実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の topological complexity は、そのはめ込み次元と関係している。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 理学研究科

e-mail: minowa.yuki.48z@st.kyoto-u.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 の支援を受けたものです。

一方で、Question 1.2 の変種に対応した様々な亜種も考案されている。というのも、実際の経路計画や動作計画では Question 1.2 よりも複雑な問題を取り扱うことが多い。たとえば 2 点 A, B のほかに中間地点を設定することもあれば、2 点 A, B が同一のときに自明な経路を返すようなプログラムを考えたり、ロボットアームの関節の可動性に制約を課することもある。本稿ではこれらの亜種についても言及し、とくに表題にもある **parametrized topological complexity** を詳細にみていく。

Topological complexity やその亜種の研究は、これらの方針が相補い連携することによって枝葉を広げてきた。本稿ではこの関連の様相を述べつつ、球面上の球面ファイブレーションの parametrized topological complexity に関する講演者 [13] の結果を紹介する。CW 複体のセル構造にもとづく LS カテゴリーの研究手法を parametrized topological complexity の決定に応用したものは本結果をおいてなく、この複合的な方針にもとづく研究のさらなる発展が期待できる。

以下、本稿では「空間」といえば（非退化な）基点つき空間を指すものとする。

2 Topological complexity

まず、概説で述べた topological complexity の説明を定式化するところから始めよう。弧状連結な位相空間 X の自由道空間を $X^I = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X\}$ とかく。

Definition 2.1. 空間 X の topological complexity は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、 $\text{TC}(X)$ と記述される。^{*1}

- 各 U_i 上で次のファイブレーション Π の（連続な）右逆写像をとることができるような、 X^2 の開被覆 U_0, \dots, U_k が存在する。

$$\Pi: X^I \rightarrow X^2, \quad \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)).$$

上のような開被覆が存在しないときは、 $\text{TC}(X) = \infty$ とする。

Topological complexity のもっとも基本的な性質として、次のようなものがある。

Proposition 2.2

1. 空間 X および Y がホモトピー同値のとき、 $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$ である。
2. 空間 X が可縮のとき、かつそのときに限り $\text{TC}(X) = 0$ である。

Sketch of the proof. 1. に関しては、 X^2 と Y^2 のホモトピー同値写像によって該当の開被覆を引き戻せばよい。2. に関しては、 Π の連続な右逆写像によって 1 点への変位レトラクションが構成される。逆も同様。 \square

^{*1} Farber [4] の原論文ではこれに 1 を加えた値を $\text{TC}(X)$ の定義としている。年代の古い論文はこれに倣っているため、参照の際は注意されたい。

Topological complexity の知られている空間の例をいくつか紹介する。この他にも閉曲面などの topological complexity が計算されている。

Example 2.3. 球面 S^n に対し、次が成立する。

$$\mathrm{TC}(S^n) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が奇数}) \\ 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

Example 2.4. [5, 6] Euclid 空間 \mathbb{R}^d 上の m 点配置空間

$$F(\mathbb{R}^d, m) := \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}^d, \ i \neq j \text{ ならば } x_i \neq x_j\}$$

に対し、次が成立する。

$$\mathrm{TC}(F(\mathbb{R}^d, m)) = \begin{cases} 2m - 2 & (d \text{ が奇数}) \\ 2m - 3 & (d \text{ が偶数}) \end{cases}$$

とくに $F(\mathbb{R}^d, 2) \simeq S^{d-1}$ であることに注意されたい。

Example 2.5. [6] 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の (Euclid 空間への) はめ込み次元を $\epsilon(n)$ とする。このとき、次が成立する。

$$\mathrm{TC}(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \epsilon(n) - 1 & (n = 1, 3, 7) \\ \epsilon(n) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

3 LS カテゴリー

LS カテゴリーは「閉多様体上の滑らかな実関数は、最小でいくつの臨界点をもつか」という問題に由来する不変量であり、次のように定義される。以下、 X の道空間を $\mathcal{P}X = \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = *_X\}$ とかく。

Definition 3.1. 空間 X の **LS カテゴリー** は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、 $\mathrm{cat}(X)$ と記述される。

- 各 U_i 上で次のファイブレーション ev_1 の右逆写像をとることができるような、 X の開被覆 U_0, \dots, U_k が存在する。

$$\mathrm{ev}_1: \mathcal{P}X \rightarrow X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

上のような開被覆が存在しないときは、 $\mathrm{cat}(X) = \infty$ とする。

Proposition 2.2 2. 同じような議論によって、上の定義は「各 $U_i \hookrightarrow X$ が零ホモトピックになるような X の開被覆 U_0, \dots, U_k が存在する最小の k 」と換言できる。LS カテゴリーの (ほぼ) 同値な定義のひとつとして、Whitehead によるものを次に挙げる。

Proposition 3.2 $T^m(X) := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid \text{ある } i \text{ に対して } x_i = *X\}$ とする。
 X が弧状連結な正規空間のとき、 $\text{cat}(X)$ は次の図式がホモトピー可換となる整数 k の最小値と一致する。

$$\begin{array}{ccc} & & T^{k+1}(X) \\ & \nearrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X^{k+1} \end{array}$$

ただし、 Δ は対角写像 $x \mapsto (x, \dots, x)$ である。

たとえば二つめの定義より、非自明な懸垂空間 ΣX に対し $\text{cat}(\Sigma X) = 1$ となることがわかる。^{*2} しかしながら空間が複雑になればなるほど、その LS カテゴリーを上での定義から直截に決定することは困難になる。そこで、さまざまな評価手法が編み出されてきた。

Definition 3.3. 空間 X の弱カテゴリーは合成写像 $X \xrightarrow{\Delta} X^{k+1} \rightarrow X^{k+1}/T^{k+1}(X)$ が零ホモトピックになる整数 k の最小値であり、 $\text{wcat}(X)$ と記述される。上のような整数が存在しないときは、 $\text{wcat}(X) = \infty$ とする。

可換環上の代数 A およびそのイデアル I に対し、冪零度 $\text{nil}(I)$ は $I^{k+1} = 0$ となる最小の整数 k として定義される。たとえば $\text{nil}(H^*(X; R))$ は「 $u_1 u_2 \cdots u_k \neq 0$ となるような非零元 $u_1, u_2, \dots, u_k \in H^{\geq 1}(X; R)$ が存在する最大の k 」と換言できる。^{*3}

Proposition 3.4 空間 X および可換環 R に対し、次が成立する。

$$\text{nil}(H^*(X; R)) \leq \text{wcat}(X) \leq \text{cat}(X).$$

とはいうものの、実は $\text{wcat}(X)$ の決定もそこまで容易ではない。後ほど紹介するが、 X が CW 複体の場合はセル構造を用いて $\text{wcat}(X)$ を評価することが可能である。

最後に、LS カテゴリーによる topological complexity の“評価”を確認しよう。

Proposition 3.5 空間 X に対し、 $\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq 2 \text{cat}(X)$ となる。

Sketch of the proof. 左の不等式は次の引き戻し図式から示される。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}X & \longrightarrow & X^I \\ \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow \Pi \\ X & \xrightarrow{x \mapsto (*, x)} & X^2 \end{array}$$

Π はファイブレーションであるため、 $U \hookrightarrow X^2$ が零ホモトピックならば U 上で Π の右逆写像をとることができる。よって右の不等式が従う。□

^{*2} 読者の演習問題とする。

^{*3} このことから、しばしば cup-length とよばれる。

4 Topological complexity の亜種たち

4.1 さまざまな亜種

概説でも述べたとおり、Question 1.2 の変形に対応した topological complexity の様々な亜種を定義することができる。たとえば、Rudyak [14] は「2 点 A, B のほかに中間地点が設定された」問題に対応する不変量 sequential topological complexity を定義した。また、岩瀬ら [11] は「2 点 A, B が同一のときに自明な経路を返すようなプログラム」に対応する不変量 monoidal topological complexity を定義した。本稿の主題からそれるため、これらの正確な定義は割愛する。^{*4}

一方で Cohen ら [3] は、topological complexity をファイブレーションに沿って拡張することで parametrized topological complexity を定義した。ファイバーが弧状連結なファイブレーション $p: X \rightarrow B$ に対し、ファイバーワイズ道空間 X_B^I およびファイバーワイズ積 X_B^2 を次のように定義する。

$$X_B^I = \{ \gamma: [0, 1] \rightarrow X \mid p \circ \gamma \text{ は恒等写像} \}$$

$$X_B^2 = \{ (x_1, x_2) \in X^2 \mid p(x_1) = p(x_2) \}$$

Definition 4.1. ファイブレーション $p: X \rightarrow B$ の parametrized topological complexity は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、 $\text{TC}[X \rightarrow B]$ と記述される。

- 各 U_i 上で次のファイブレーション Π の右逆写像をとることができるような、 X_B^2 の開被覆 U_0, \dots, U_k が存在する。

$$\Pi: X_B^I \rightarrow X_B^2, \quad \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \quad (1)$$

上のような開被覆が存在しないときは、 $\text{TC}[X \rightarrow B] = \infty$ とする。

自明なファイブレーション $X \rightarrow *$ に対し、 $\text{TC}[X \rightarrow *] = \text{TC}(X)$ となっていることに注意されたい。より一般に、次が成立する。

Proposition 4.2 $p: X \rightarrow B$ をファイブレーション、 F をそのファイバーとする。

1. $\text{TC}[X \rightarrow B] \geq \text{TC}(F)$ となる。
2. p が自明なファイブレーションのとき、 $\text{TC}[X \rightarrow B] = \text{TC}(F)$ となる。

Sketch of the proof. 次の図式は引き戻し図式である。

$$\begin{array}{ccc} F^I & \longrightarrow & X_B^I \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ F^2 & \longrightarrow & X_B^2 \end{array}$$

^{*4} これらの問題設定を手当たり次第に組み合わせて“新しい不変量”を提案し、初歩的な命題や計算例を添えて完結するような論文もないわけではない。

開被覆を最下行の写像で引き戻すことで 1. が証明される。2. も同様。 \square

Parametrized topological complexity は、経路や動作にかかる制約がファイブレーションで記述されるような問題設定に対応している。具体的な例をみていこう。

Example 4.3. [3, 7] 空間 \mathbb{R}^d に m 個の動かない障害物がランダムに配置され、さらに n 体のロボットの初期配置と目標配置とが与えられたとき、衝突を起こさずにロボットたちを初期配置から目標配置まで移動させるプログラムを考える。この問題設定は、次の Fadell-Neuwirth ファイブレーションとよばれる射影によって定式化される。

$$F(\mathbb{R}^d, m+n) \rightarrow F(\mathbb{R}^d, m), (x_1, \dots, x_m, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$$

このとき、次が成立する。

$$\mathrm{TC}[F(\mathbb{R}^d, m+n) \rightarrow F(\mathbb{R}^d, m)] = \begin{cases} 2n+m-1 & (d \text{ が奇数}) \\ 2n+m-2 & (d \text{ が偶数}) \end{cases}$$

Example 4.4. ここに空間 \mathbb{R}^{n+2} の原点から伸びて 1 個の関節をもち、関節部分の角度が直角に固定されているロボットアームがある。原点側の腕がランダムな位置に固定され、さらにもう 1 本の腕の初期配置と目標配置が与えられたとき、原点側の腕を軸とした回転によって初期配置から目標配置まで動作させるプログラムを考える。この問題設定は、単位接束 $T \rightarrow S^{n+1}$ によって定式化される。次が本稿における主結果である。

Theorem 4.5 [13] 単位接束 $S^n \rightarrow T \rightarrow S^{n+1}$ に対し、次が成立する。

$$\mathrm{TC}[T \rightarrow S^{n+1}] = \begin{cases} 1 & (n = 1, 5) \\ 2 & (n \text{ が偶数、または } n \equiv -1 \pmod{4}) \end{cases}$$

4.2 LS カテゴリーとの関連

Schwarz [15] はファイブレーションの種数 (genus) という不変量を定義した。今日この名称はあまり用いられず、専ら sectional category とよばれる。

Definition 4.6. 写像 $f: X \rightarrow Y$ の sectional category は次の条件をみたす整数 k の最小値であり、 $\mathrm{secat}(f)$ と記述される。

- 各 U_i 上で写像 f の右ホモトピー逆写像をとることができるような、 Y の開被覆 U_0, \dots, U_k が存在する。

上のような開被覆が存在しないときは、 $\mathrm{secat}(f) = \infty$ とする。

Sectional category は、次の意味においてホモトピー不変量である。

Lemma 4.7 下のホモトピー可換図式において、上下辺はホモトピー同値写像である。

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\sim} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{\sim} & Y_2 \end{array}$$

このとき $\text{secat}(f_1) = \text{secat}(f_2)$ となる。

この Lemma から次のようなことがわかり、LS カテゴリーと (parametrized) topological complexity との関連がみえてくる。

- $\text{cat}(X) = \text{secat}(\text{ev}_1: \mathcal{P}X \rightarrow X) = \text{secat}(*_X \hookrightarrow X)$.
- $\text{TC}[X \rightarrow B] = \text{secat}(\Pi: X_B^I \rightarrow X_B^2) = \text{secat}(\Delta: X \rightarrow X_B^2)$.

ただし対角写像 Δ は $\Delta(x) := (x, x)$, $x \in X$ で定義される。

さらなる関連をみていこう。Schwarz[15] は、コホモロジーを用いて $\text{secat}(f)$ の下からの評価を与えた。

Proposition 4.8 写像 $f: X \rightarrow Y$ および可換環 R に対し、次が成立する。

$$\text{secat}(f) \geq \text{nil}(\text{Ker}\{f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)\})$$

García-Calines ら [10] は特定の条件下で Proposition 3.4 と類似の結果を証明し、より強い (かもしれない) 下からの評価を与えた。

Proposition 4.9 [10, Theorem 21] $f: X \rightarrow Y$ を左ホモトピー逆写像をもつ写像とし、そのコファイバーを Z とする。このとき、次の不等式が成立する。

$$\text{nil}(\text{Ker}\{f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)\}) \leq \text{wcat}(Z) \leq \text{secat}(f).$$

ファイブレーション $p: X \rightarrow B$ に対し、第一成分の射影 $X_B^2 \rightarrow X$ は明らかに $\Delta: X \rightarrow X_B^2$ の左逆写像となる。したがって次を得る。

Corollary 4.10 ファイブレーション $p: X \rightarrow B$ に対し、次の不等式が成立する。

$$\text{nil}(\text{Ker}\{\Delta^*: H^*(X_B^2; R) \rightarrow H^*(X; R)\}) \leq \text{wcat}(W) \leq \text{TC}[X \rightarrow B]$$

ただし W は $\Delta: X \rightarrow X_B^2$ のコファイバーである。

とくに $B = *$ のとき、 $u, v \in H^*(X)$ に対して $\Delta^*(u \otimes v) = uv$ となる。^{*5}

Example 4.11. 自明なファイブレーション $S^n \rightarrow *$ を考える。 $H^n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 u をとると、 $a = u \otimes 1 - 1 \otimes u \in H^*((S^n)^2; \mathbb{Z})$ は $\text{Ker}\{\Delta^*: H^*((S^n)^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(S^n; \mathbb{Z})\}$

^{*5} このことから、 $\text{nil}(\text{Ker} \Delta^*)$ はしばしば zero-divisors cup-length とよばれる。

の生成元となり、次が成立する。

$$\text{nil}(\text{Ker}\{\Delta^*: H^*((S^n)^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(S^n; \mathbb{Z})\}) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が奇数}) \\ 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

これは $\text{TC}(S^n) = \text{TC}[S^n \rightarrow *]$ の十分な下限を与える。

一般のファイブレーションに関しても、Serre スペクトル系列を用いることにより冪零度が計算できる。とくに、 $R = \mathbb{Z}$ とすると単位接束 $S^n \rightarrow T \rightarrow S^{n+1}$ に関して

$$\text{TC}[T \rightarrow S^{n+1}] \geq \text{nil}(\text{Ker } \Delta^*) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が奇数}) \\ 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

を得る。一方で、[8, Theorem 5.2] より次が成立する。

$$\text{TC}[T \rightarrow S^{n+1}] \leq \begin{cases} 1 & (n = 1, 5) \\ 2 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これで Theorem 4.5 は $n \equiv -1 \pmod{4}$ の場合を除いて証明された。

5 複体 W のセル構造と弱カテゴリー

以降の章では $m \geq n$ をみたすファイブレーション $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{m+1}$ に注目し、対角写像 $\Delta: X \rightarrow X_{S^{m+1}}^2$ のコファイバー W の弱カテゴリーを計算していく。そのためにはまず、 W の CW 複体としてのセル構造を理解する必要がある。ホモトピー群の元 $\alpha \in \pi_m(S^n)$ に対し、Whitehead 積 $[\alpha, 1] \in \pi_{m+n-1}(S^n)$ が定義されたことを思い出そう。全空間 X および $X_{S^{m+1}}^2$ のセル構造を検討し、球面のホモトピー群の EHP 系列を考えることによって次の結果が得られる。

Theorem 5.1 [13, Corollaries 4.6, 4.10] n を 3 以上の奇数とし、 $n \leq m \leq 2n - 3$ とする。ファイブレーション $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{m+1}$ に対し、次が成立する。

1. コファイバー W は次の 4 セル複体として表される。

$$W \simeq W_{4n+2} \cup_{\lambda} e^{m+2n+2} \cup_{\phi} e^{m+4n+3}$$

ただし $W_{4n+2} = S^{2n+1} \cup_{[1_{S^{2n+1}}, 1_{S^{2n+1}}]} e^{4n+2}$ であり、上の 2 セルはいずれも W_{4n+2} に接着している。

2. W_{4n+2} は懸垂空間であり、 $\Sigma W_{4n+2} \simeq S^{2n+2} \vee S^{4n+3}$ となる。

Corollary 5.2 $1 \leq \text{wcat}(W) \leq \text{cat}(W) \leq 2$ となる。

Berstein および Hilton [2] の定義した crude Hopf invariant は、CW 複体のセル構造を用いて弱カテゴリーを評価する有力な手法である。 $\text{cat}(Z) = k$ をみたす空間 Z と $\Delta: Z \rightarrow Z^{k+1}$ の持ち上げ $\gamma: Z \rightarrow T^{k+1}(Z)$ に対し、接着写像 $\zeta \in \pi_p(Z)$ の crude Hopf

invariant は $\pi_{p+1}(Z^{k+1}/T^{k+1}(Z))$ の元 $\overline{H}_\gamma(\zeta)$ として定義される。 $\overline{H}_\gamma(\zeta)$ の値が γ の取り方によらず一意に定まるとき、 $\overline{H}(\zeta)$ と表記する。

Theorem 5.3 [2, Corollary 3.9] $\text{wcat}(Z \cup_\zeta e^{p+1}) = k + 1$ ならば、すべての持ち上げ γ に対して $\overline{H}_\gamma(\zeta) \neq 0$ となる。

一般に、上の主張の逆は成立しない。しかしながら、Theorem 5.1 で与えられた 4 セル複体 W に関しては主張の逆が部分的に成立する。James ら [12] の結果より、ファイブレーション $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{m+1}$ の全空間 X は 3 セル複体 $X \simeq S^n \cup_\beta e^{m+1} \cup e^{m+n+1}$ として表される。 η を $\pi_1^S \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元とする。

Theorem 5.4 n を 3 以上の奇数とし、 $n \leq m \leq 2n - 3$ とする。 $\Sigma(\eta \circ \beta) = 0$ をみたすファイブレーション $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{m+1}$ に対して $\overline{H}_\gamma(\lambda)$ は一意に定まり、次が成立する。

- $\overline{H}(\lambda) \neq 0$ ならば $\text{wcat}(W) = \text{wcat}(W_{m+2n+2}) = 2$ である。

球面束 $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{n+1}$ に対し、 $\beta \in \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ は束の Euler 類と同一視することができる。したがって、単位接束 $S^n \rightarrow T \rightarrow S^{n+1}$ は上の定理における $\Sigma(\eta \circ \beta) = 0$ の条件を満たす。次章では、この前提のもとで主結果の証明を完成させる。

6 主定理の証明 (概要)

Sketch of the proof of Theorem 4.5. まず $n = 3, 7$ の場合を証明する。

6.1 $n = 3, 7$ の場合

ファイブレーション $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{m+1}$ への $\alpha \in \pi_{m+n+1}(S^n)$ の“余作用”を考える。まず、全空間 X は図式

$$S^n \xleftarrow{p_2} S^m \times S^n \xrightarrow{\mu} S^n$$

のホモトピー押し出しとして記述される。ここで p_2 は第二成分への射影であり、 μ は $\mu|_{S^m} = \beta$ かつ $\mu|_{S^n} = 1$ をみたす写像である。右側の写像に α を余作用^{*6}させると、得られた図式のホモトピー押し出し $X(\alpha)$ によって新たなファイブレーション $S^n \rightarrow X(\alpha) \rightarrow S^{m+1}$ が構成される。

n を 3 以上の奇数とし、 $n \leq m \leq 2n - 3$ とする。この新たなファイブレーションに関して、対角写像のコファイバーは $W(\alpha) \simeq W_{4n+2} \cup_{\lambda(\alpha)} e^{m+2n+2} \cup_{\phi(\alpha)} e^{m+4n+3}$ と記述される。それぞれの接着写像の crude Hopf invariant を議論することで次が明らかになる。

$$\overline{H}(\lambda) = 0 \quad \text{かつ} \quad \overline{H}(\alpha) \neq 0 \in \pi_{m+n+1}(S^{2n}) \quad \text{のとき、} \quad \overline{H}(\lambda(\alpha)) \neq 0 \quad (2)$$

いま、ある複素ベクトル束の球面束 $X \rightarrow S^{n+1}$ と $\alpha \in \pi_{2n}(S^n)$ が存在し、 $T \rightarrow S^{n+1}$ は $X \rightarrow S^{n+1}$ を α だけ“余作用”させたものと見做せる。さらに $n = 3, 7$ では α は $\pi_{2n}(S^n)$

^{*6} 詳しくは [1, Section 4] などを参照のこと。

の生成元となることがわかり、したがって $\overline{H}(\alpha) \neq 0$ を満たす。一方で [8, Corollary 5.5] より $\text{TC}[X \rightarrow S^{n+1}] = 1$ となる。よって Theorem 5.4 と (2) から主定理が示される。

6.2 $n \geq 11$ の場合

実は、次のより強い主張が成立する。

Proposition 6.1 [13, Theorem 1.4(2)] $n \equiv -1 \pmod{4}$ かつ $n \geq 11$ とする。このとき、 $\beta \equiv 2 \pmod{4}$ となるようなすべてのファイブレーション $S^n \rightarrow X \rightarrow S^{n+1}$ に対し $\text{TC}[X \rightarrow S^{n+1}] = \text{wcat}(W) = 2$ となる。

上の命題は $\overline{H}(\lambda) \neq 0$ となること、および Theorem 5.4 より従う。前者の主張は、球面のホモトピー群の EHP 系列に関する Thomeier [16] の結果より示される。□

$n = 3, 7$ の場合に用いた“余作用”の手法によって、次のような定理を示すことができる。具体的には、自明束に $\overline{H}(\alpha) \neq 0$ なる元 α を“余作用”させればよい。

Theorem 6.2 [13, Corollary 1.3] $\text{TC}[X \rightarrow S^{m+1}] = 2$ を満たすファイブレーション $S^{2n+1} \rightarrow X \rightarrow S^{m+1}$ の存在するような整数 (m, n) の組は無限に存在する。

7 今後の課題

最後に、今後の課題をいくつか挙げる。

7.1 $\text{TC}[T \rightarrow S^{n+1}]$ の完全な決定

$n \geq 9$ かつ $n \equiv 1 \pmod{4}$ の場合、本稿の議論では $\text{TC}[T \rightarrow S^{n+1}]$ は決定されない。

Proposition 7.1 [13, Proposition 1.6] $n \geq 9$ かつ $n \equiv 1 \pmod{4}$ のとき、次の不等式が成立する。

$$\text{wcat}(W) = 1 \leq \text{TC}[T \rightarrow S^{m+1}] \leq 2$$

$n = 1, 5$ の場合から類推すると $\text{TC}[T \rightarrow S^{n+1}] = 1$ と予想される。しかしながら、これを証明するための上からの評価は今のところ与えられていない。^{*7}

7.2 Hopf invariant を用いた手法の拡張

本稿で述べた手法は、ファイバーが偶数次球面の場合や底空間が球面でない場合などに拡張できる。これらの場合において対角写像のコファイバー W はより複雑なセル構造をもち、crude Hopf invariant による $\text{wcat}(W)$ の計算はさらに困難になるが、本結果と同様の手法によって解決されるであろう。

Topological complexity やその亜種の研究に (crude) Hopf invariant を活用したもの

^{*7} 本稿では省略したが、topological complexity やその亜種を上から評価することは困難であり、多くの結果では構成的な評価が用いられている。その一因として、LS カテゴリーの強力な評価手法である cone-length が応用できないことが挙げられる。

しては、たとえば2セル複体の topological complexity に関する González ら [9] の結果などがあるが、さらなる発展の余地を残している。これらの不変量の核心を捉えるにはセル構造との関連を解明することが不可欠であり、Hopf invariant を用いた手法がさらに拡張されることが期待される。

参考文献

- [1] Arkowitz, M.: Introduction to homotopy theory, Universitext (Springer, New York, 2011), xiv+344 pp. [9](#)
- [2] Berstein, I. and Hilton, P. J.: Category and generalized Hopf invariants, Illinois J. Math. **4** (1960), 437 – 451. [8](#), [9](#)
- [3] Cohen, D. C., Farber, M. and Weinberger, S.: Topology of parametrized motion planning algorithms, SIAM J. Appl. Algebra Geom. **5** (2021), no. 2, 229 – 249. [5](#), [6](#)
- [4] Farber, M.: Topological complexity of motion planning, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), no.2, 211 – 221. [1](#), [2](#)
- [5] Farber, M. and Grant, M.: Topological complexity of configuration spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 5, 1841 – 1847. [3](#)
- [6] Farber, M., Tabachnikov, S. and Yuzvinsky, S.: Topological robotics: motion planning in projective spaces. Int. Math. Res. Not. (2003), no. 34, 1853 – 1870. [3](#)
- [7] Farber, M. and Weinberger, S.: Parametrized motion planning and topological complexity, Algorithmic Foundations of Robotics XV, Springer Proc. Adv. Robot. **25** (Springer, Cham, 2023), 1 – 17. [6](#)
- [8] Farber, M. and Weinberger, S.: Parametrized topological complexity of sphere bundles, Topol. Methods Nonlinear Anal. **61** (2023), no. 1, 161 – 177. [8](#), [10](#)
- [9] González, J., Grant, M. and Vandembroucq, L.: Hopf invariants for sectional category with applications to topological robotics, Q. J. Math. **70** (2019), no. 4, 1209 – 1252. [11](#)
- [10] García-Calines, J. M. and Vandembroucq, L.: Weak sectional category, J. Lond. Math. Soc. (2) **82** (2010), no. 3, 621 – 642. [7](#)
- [11] Iwase, N. and Sakai, M.: Topological complexity is a fibrewise L-S category, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 10 – 21. [5](#)
- [12] James, I. M. and Whitehead, J. H. C.: The homotopy theory of sphere bundles over spheres, I, Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), 196 – 218. [9](#)
- [13] Minowa, Y.: Parametrized topological complexity of spherical fibrations over spheres, Math. Z. **311**, 1 (2025). <https://doi.org/10.1007/s00209-025-03794-8> [2](#), [6](#), [8](#), [10](#)
- [14] Rudyak, Y. B.: On higher analogs of topological complexity, Topology Appl. **157** (2010), no. 5, 916 – 920. [5](#)
- [15] Švarc, A. S.: The genus of a fibered space, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **10** (1961), 217–272. [6](#), [7](#)
- [16] Thomeier, S.: Einige Ergebnisse über Homotopiegruppen von Sphären, Math. Ann. **164** (1966), 225 – 250. [10](#)

正方形杭問題とトポロジー/層理論

浅野 知紘 (京都大学)*

概要

本稿では正方形杭問題とトポロジー・シンプレクティック幾何との関連を概観し、最近の超局所層理論からの進展、特に講演者と池祐一氏による共同研究の成果 [AI25] について概説・報告する。*1

1 正方形杭問題

正方形杭問題 *2 とは、

問題 1.1 (正方形杭問題). ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 内のジョルダン曲線 *3 が任意に与えられたとき、その上の相異なる 4 点であって正方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

という問題である。この問題は Toeplitz によって 1911 年に提起されたが、今日においても未解決である。

初期の重要な結果として、Emch が区分的に解析的な曲線の広い範囲に対して証明し、1929 年に Schnirelmann が滑らかな曲線に対して同境理論を用いて証明している。また Emch の議論は後に Stromquist によって精密化され局所単調 (locally monotone) と呼ばれる曲線に一般化された。正方形杭問題に関する歴史や文献については、例えば [Mat14] を参照されたい。

本講演では正方形杭問題の長方形への一般化について考える。[abcd] で頂点がこの順に反時計回りに並んだ四角形を表すことにする *4。 $\theta \in (0, \pi)$ が与えられたとき、長方形 [abcd] であって、対角線 ac と対角線 bd の交点を e としたとき対角線のなす角度 $\angle aeb$ が θ となっているものを θ -長方形と呼ぶことにする。

問題 1.2 (長方形杭問題). ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 内のジョルダン曲線と角度のパラメータ $\theta \in (0, \pi)$ が任意に与えられたとき、ジョルダン曲線上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科

e-mail: [tasano\[at\]math.kyoto-u.ac.jp](mailto:tasano[at]math.kyoto-u.ac.jp)

本研究は科研費 (課題番号:24K16920) の助成を受けたものである。

キーワード: 正方形杭問題, シンプレクティック幾何, 超局所層理論

*1 実際の講演では、本稿よりも先行研究の紹介に重点を置いた。講演スライドは講演者の個人サイト (<https://sites.google.com/view/tomohiro-asano>) から入手可能である。

*2 英語圏では “square peg problem” もしくは “inscribed square problem” と呼ばれる。日本語では後者の直訳で内接正方形問題と呼ばれることも多い。しかし、内接という語が連想させる状態がこの問題の状況を必ずしも反映しないので、ここでは前者の直訳として、正方形杭問題という訳語をあてることにした。

*3 連続単射 $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像

*4 ここでは、頂点の順序が異なる四角形、例えば [abcd] と [bcda], は区別する。

注意 1.3. $\frac{\pi}{2}$ -長方形は正方形に他ならない. また, $[abcd]$ が θ -長方形であることと, $[bcda]$ が $(\pi - \theta)$ -長方形であることは同値である.

1977 年ごろの Vaughan による議論で, 任意のジョルダン曲線上に少なくとも一組, 長方形の 4 頂点をなす点たちをとれることが「向き付け不可能な閉曲面は 3 次元ユークリッド空間へ埋め込めない」といった基本的な事実の帰結として証明された. 対角線のなす角も指定したい場合には, 3 次元空間ではなく角度の 1 次元分のパラメータを増やして 4 次元空間への曲面の埋め込みやその (自己) 交差について調べる必要が出てくる. この方向での最初の結果は Hugelmeyer [Hug18] によるもので, 彼はヒーガードフレア理論由来する制約を用いて, $\theta = \frac{\pi}{3}$ でジョルダン曲線が滑らかな場合に存在証明を与えた^{*5}.

2 Greene と Lobb の先行研究

Greene と Lobb は [GL21] において, 長方形杭問題にシンプレクティック幾何が有効に見えることを見出し, この問題を滑らかなジョルダン曲線に対して肯定的に解決した. ここでは [GL23; GL24] の議論に従いながら, 彼らによる先行研究について触れる.

2.1 トーラスの埋め込み

まず, C 上の θ -長方形を見つける問題を別の問題に帰着しよう. 以下, 平面 \mathbb{R}^2 を複素平面 \mathbb{C} と同一視する. 4 つの相異なる複素数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して, 四角形 $[abcd]$ が θ -長方形をなすことは

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \\ c-a = e^{-\sqrt{-1}\theta}(d-b) \end{cases}$$

と同値である. ここで, $R_\theta: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

で表現される線形写像とすると, 上記の条件は $R_\theta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と書き直すことができる.

$z \in \mathbb{C}$ と $\theta \in (0, \pi)$ に対して, $R_\theta \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$ であるから, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の対角線 $\Delta_{\mathbb{C}}$ 上で R_θ は恒等写像であり, $\Delta_{\mathbb{C}}$ は退化した (4 点が等しい) 長方形に対応する. したがって, Jordan 閉曲線 $C \subset \mathbb{C}$ と $\theta \in (0, \pi)$ が与えられたとき, θ -長方形の存在を示す問題は, $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_{\mathbb{C}} \neq \emptyset$ を示す問題に言い換えられる.

2.2 正方形杭問題とシンプレクティック幾何

多様体 M に対して, その余接束 T^*M はシンプレクティック多様体と呼ばれる構造を持つ. M の局所座標を (x_1, \dots, x_n) として対応する余接座標を (ξ_1, \dots, ξ_n) とすれ

^{*5} 彼の結果は実際にはこれよりも強いが, ここでは述べやすい弱い形の結果を紹介した.

ば, $\omega_{T^*M} := \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$ は貼りあって T^*M 上の非退化閉 2 次形式を定める. 一般に $2n$ 次元多様体 N とその上の非退化閉 2 次形式 ω の組 (N, ω) をシンプレクティック多様体と呼ぶ. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (N, ω) が与えられたとき, はめ込み $i_L: L \rightarrow N$ がラグランジュはめ込みであるとは, $\dim L = n$ かつ $i_L^* \omega = 0$ となることをいう. さらに i_L が埋め込みの場合, i_L の像をラグランジュ部分多様体という. N 上に時間変化する C^∞ 級関数 $H = (H_s)_{s \in [0,1]}: N \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき, 時間変化するベクトル場 $X^H = (X_s^H)_{s \in [0,1]}$ が $\omega(X_s^H, -) = -dH_s$ ^{*6} によって定まる. X^H の積分によって定まるアイソトピーをハミルトニアニアイソトピーといい, 時刻を固定したときに得られる N の微分同相をハミルトン微分同相という. ハミルトン微分同相 φ は $\varphi^* \omega = \omega$ を満たす微分同相写像 (シンプレクティック微分同相) になる.

ここでは $\mathbb{C} \simeq T^*\mathbb{R}$ と \mathbb{R} の余接束と同一視して, 上のやり方でシンプレクティック多様体とみなす. ジョルダン曲線 C が滑らかであると仮定する. このとき, C は $T^*\mathbb{R}$ のラグランジュ部分多様体である. 一般にラグランジュ部分多様体の直積はまたラグランジュ部分多様体となるので, $C \times C$ は $T^*\mathbb{R}^2$ のラグランジュ部分多様体となる. さらに, $(R_\theta)_\theta$ は (時間変化しない) 関数 $H(z_1, z_2) = \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$ によって^{*7} 定義されるハミルトニアニアイソトピーなので, 各 θ に対して $R_\theta(C \times C)$ もラグランジュ部分多様体となる. したがって, $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ はふたつのラグランジュ部分多様体の交差となる.

次に, Δ_C の部分でラグランジュはめ込みとしての構造は保つように手術を行う. もし $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_C \neq \emptyset$ ならば, 手術後のラグランジュはめ込みはラグランジュ埋め込み (部分多様体) となる. このラグランジュはめ込みのマスロス数と呼ばれる不変量を計算すると 4 になるのだが, Polterovich と Viterbo のそれぞれ独立な 1990 年ごろの結果から \mathbb{C}^2 内のラグランジュ部分トーラスのマスロフ数は 2 でなくてはならないので, これは埋め込みになりえない.

その後 [GL24] において $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ のラグランジュ交差フレアーコホモロジーであって, 対角線 Δ_C の寄与を排除したバージョンが構成された. 彼らはこれに付随したスペクトル不変量の解析・評価を行うことで, 直径とそれが囲う領域の面積についての条件をみたく長さ有限^{*8} のジョルダン曲線に対して長方形杭問題を肯定的に解決した.

3 層について

層は局所と大域をつなぐ概念であり, 幾何学やそれ以外の分野で広い領域で有効に活用されている.

ここではまずベクトル空間に値をとる層の定義を見てみよう. その前にいくつか記法などを確認しておく.

^{*6} 文献によって符号が異なるので注意されたい.

^{*7} ここでは $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}^2$ の同一視のもと, \mathbb{C}^2 の座標で記述している.

^{*8} 折れ線近似の精度を良くしていくにしたがって, その長さがある有限の値に収束することをいう. 求長可能 (rectifiable) とも呼ばれる.

- 位相空間 X に対し, その開集合全体の集合を $\text{Open}(X)$ と書く. 包含によって半順序集合の構造をもち, 圏とみなせる. この圏のことも $\text{Open}(X)$ と書く.
- 圏 \mathcal{C} に対し, その反対圏を \mathcal{C}^{op} と書く.
- 以下, 係数体 \mathbf{k} を固定する. $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ で \mathbf{k} 上のベクトル空間と線形写像のなす圏とする.

定義 3.1. 前層とは関手 $F: \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbf{k}}$ のことである. また前層の間の射とは, 関手としての自然変換のことである.

即ち, X 上の前層 F は次のデータ

- (1) 開集合 $U \subset X$ に対する \mathbf{k} 上のベクトル空間 $F(U)$
- (2) 開集合の包含 $U \subset V \subset X$ に対する線形写像 $\rho_{UV}: F(V) \rightarrow F(U)$

からなり, これらは次の条件

- (i) 各開集合 $U \subset X$ について $\rho_{UU} = \text{id}_{F(U)}$ である.
- (ii) 各開集合の列 $U \subset V \subset W \subset X$ について, $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ である.

を満たす. また, $U \subset V \subset X$ および $s \in F(V)$ のとき, $\rho_{UV}(s)$ を $s|_U$ とも書く.

定義 3.2. 前層 F は次の条件 (降下 (descent) 条件) をみたすとき層とよばれる. 任意の開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $(U_{\alpha})_{\alpha \in I}$ について,

$$F(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in I} F(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} F(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

がイコライザ図式になることである. ここで右側の 2 つの射は $(s_{\alpha})_{\alpha \in I}$ に対し $(s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}})_{\alpha, \beta \in I}$ および $(s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}})_{\alpha, \beta \in I}$ を対応させる射である. また, 層の射とは, 前層としての射のことをいう.

これまで, ベクトル空間に値をとる層について述べたが, より一般に上述のような降下条件を定式化できる圏の対象たちは層の値として使うことができる. ここでは層の値として主にベクトル空間の複体の圏を用いる. 複体間の射の間には自然にホモトピーの概念があるが, これを尊重した前層や層の定義が可能である. 前層の定義において「各開集合の列 $U \subset V \subset W \subset X$ について, $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ である。」という条件があったが, この条件を課す代わりに ρ_{UW} と $\rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ の間の構造のホモトピーを指定して, 前層がもつ構造に含めるのである. また, より長い開集合の包含の列に付随して, さらに高次のホモトピーも構造として指定する. これによって前層が定義でき, それがさらに層であることを規定する降下条件も, より大きな図式

$$F(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in I} F(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} F(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta, \gamma \in I} F(U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}) \rightrightarrows \cdots$$

がホモトピー極限の図式になるといった形で述べ直される。この意味での層 *9 のなす圏 *10 を $\mathrm{Sh}(X)$ と書く。また、係数を別の圏 \mathcal{C} に取り換えた場合は $\mathrm{Sh}(X; \mathcal{C})$ などと書くことにする。

また、 $\mathrm{Sh}(X)$ は閉な対称モノイダル構造 \otimes をもち、対応する内部 Hom 関手を $\mathcal{H}om(-, -)$ と書く。さらに、 $f: X \rightarrow Y$ が局所コンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像のとき、関手 $f_*, f_!: \mathrm{Sh}(X) \rightarrow \mathrm{Sh}(Y)$, $f^*, f^!: \mathrm{Sh}(Y) \rightarrow \mathrm{Sh}(X)$ が定義され、随伴 $f^* \dashv f_*$ と $f_! \dashv f^!$ が成立する。これら 6 つの関手とそれらの間の自然変換のなす枠組みは six-functor formalism とよばれる。

4 超局所層理論

超局所層理論は層の超局所的な性質を調べる分野である。ここで超局所とは「方向込みの局所性」・「余接束における局所性」を意味する。この理論は Kashiwara–Schapira [KS90] によって 1980 年代から 1990 年頃に確立・整備されたが、その後 2006 年から 08 年頃の Nadler–Zaslow と Tamarkin の先駆的な仕事を皮切りにシンプレクティック幾何への応用が活発になった。

ここでは、超局所層理論とそのシンプレクティック幾何への応用において重要な概念を紹介したい。

4.1 層のマイクロ台と $\mu\mathrm{hom}$

X を可微分多様体として、 $F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対しマイクロ台とよばれる閉集合 $\mathrm{SS}(F) \subset T^*X$ が定義される。

定義 4.1. 任意の開集合 $U \subset T^*X$ について、 $\mathrm{SS}(F) \cap U = \emptyset$ であることと次の条件が同値になるように閉集合 $\mathrm{SS}(F) \subset T^*X$ が定義される。

$x_0 \in X$ と C^∞ 級関数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ であって $d\varphi(x_0) \in U$ を満たす任意の組に対し、 $V = \{x \in X \mid \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$ とし、 B は x_0 の開近傍をわたるとしたとき、制限写像が誘導する

$$\mathrm{colim}_{x \in B} F(V \cup B) \rightarrow F(V)$$

が擬同型になる。

これは雑に述べれば、 V をその境界の x_0 において $d\varphi(x_0)$ が指定する方向にわずかに広げたときに、 V 上の関数について (コホモロジーのレベルでの) $d\varphi(x_0)$ 方向への解析接続の存在と一意性の成立を意味する。すなわち、 $\mathrm{SS}(F)$ はこれが成り立たない方向の全体

^{*9} これは homotopy sheaf とか ∞ -sheaf と呼ばれることも多いが、ここでは単に層 (sheaf) とよぶ。

^{*10} 正確には無限圏である。この無限圏のホモトピー圏は、(X が多様体などのよい位相空間の場合は、) 古典的な導来圏と自然に圏同値になる。古典的な導来圏においては極限・余極限のふるまいがよくないという不満点がある。ホモトピーの情報を忘れる前の圏でホモトピー極限・ホモトピー余極限を考える必要がある状況が今回の応用においても発生する。

であり、層のある種の特異性を表す。また、 $SS(F)$ は錐状、即ち $\mathbb{R}_{>0}$ によるスカラー倍の作用で保たれる。さらに、次の基本的な性質が成り立つ。

補題 4.2. 多様体上の層 $F, G, H \in \text{Sh}(X)$ に対して、そのマイクロ台は次を満たす。

- (1) $SS(F[1]) = SS(F)$.
- (2) $F \rightarrow G \rightarrow H$ が $\text{Sh}(X)$ における (コ) ファイバー列のとき、
 $SS(G) \subset SS(F) \cup SS(H)$.

補題 4.3 (超局所 Morse の補題). 層 $F \in \text{Sh}(X)$ および C^∞ 級関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ であって $a < b$ をみたすものが与えられている。これらが次の条件

- (i) f は $\text{Supp}(F)$ 上で固有である
- (ii) 任意の $x \in f^{-1}([a, b])$ について、 $df(x) \notin SS(F)$

をみたすとき、制限射 $F(f^{-1}((-\infty, b))) \rightarrow F(f^{-1}((-\infty, a)))$ は擬同型である。

この補題は Morse 理論において「値の特異値をまたがずに変化させる場合に劣位集合がホモトピー型を変えない」という主張の対応物である。一方、「特異値をまたぐ」つまり $df(x) \in SS(F)$ なる $x \in f^{-1}([a, b])$ における変化はマイクロ茎 (microstalk) や、それと密接にかかわる μhom とよばれる概念によって記述できる。「特異値をまたぐ」場合の主張の一つの具体的なバージョンが後述の補題 4.5 である。

定義 4.4. $F, G \in \text{Sh}(X)$ に対し、 $\mu\text{hom}(F, G) \in \text{Sh}(T^*X)$ が

$$\mu\text{hom}(F, G) := \mu_{\Delta_X} \mathcal{H}om(q_2^* F, q_1^! G)$$

によって定義される。ここで、 $q_1, q_2: X \times X \rightarrow X$ はそれぞれ射影、 $\Delta_X \subset X \times X$ は対角集合、 μ_{Δ_X} は超局所化関手である。

超局所化関手は特殊化関手と Fourier–Sato 変換の合成として定義されるが、これらの定義および解説は割愛する。一般に $\mu\text{hom}(F, G)$ の台はマイクロ台の共通部分 $SS(F) \cap SS(G)$ に含まれる。 μhom は超局所層理論における非常に重要な概念で、今回の応用においても大きな役割を果たしている。

4.2 Tamarkin 圏とフィルター付き複体の層

超局所層理論の幾何への応用のための大きな方針の一つに「幾何的な対象によい層を対応させ、その層を解析し、そこから幾何的な帰結を得る」というものがある。層のマイクロ台は常に錐状であった。錐状でない対象を層理論で扱うための Tamarkin によるアイデアは多様体 M ではなく $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層を考えるというものであった。写像 ρ を $\rho: \{(x, t; \xi, \tau) \in T^*(M \times \mathbb{R}_t) \mid \tau > 0\} \rightarrow T^*M; (x, t; \xi, \tau) \mapsto (x; \xi/\tau)$ によって定義する。任意の $A \subset T^*M$ に対し、その逆像 $\rho^{-1}(A)$ は錐状である。

$F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t)$ に対し, $\text{SS}^\bullet(F) \subset T^*M \times \mathbb{R}_t$ および $\text{MS}(F) \subset T^*M$ を,

$$\text{SS}^\bullet(F) := \text{SS}(F) \cap \{(x, t; \xi, 1)\}, \quad \text{MS}(F) := \overline{\rho(\text{SS}(F) \cap \{(x, t; \xi, 1)\})}$$

として定義する. ただし, ここで $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ の部分集合 $\{(x, t; \xi, 1)\}$ を M の 1-jet の空間 $T^*M \times \mathbb{R}_t$ と同一視している.

錐状とは限らない部分集合 $A \subset T^*M$ が与えられたとき M 上の層でなく, $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層であって $\text{MS}(F) \subset A$ になるもの (そのような層ひとつひとつだったり, そのような層の全体だったり) を調べることで A についての帰結が得られることがある.

ここから少し圏論的な準備を進める. 補題 4.2 より, $\text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \leq 0\}$ を満たす F たちのなす部分圏は安定部分圏になる. そのため, 安定圏としての商

$$\mathcal{T}(T^*M) := \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) / \{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \leq 0\}\}$$

を定義できる. この圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ は Tamarkin 圏とよばれる. $\text{MS}(F), \text{SS}^\bullet(F)$ は F を $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型でとりかえても同じ集合になるし, $\mu\text{hom}(F, G)$ を $\{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0\}$ に制限したものは $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型で不変である. また商関手 $\text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \rightarrow \mathcal{T}(T^*M)$ は右随伴と左随伴をもち, どちらも忠実充満である. 右随伴・左随伴どちらもその像は $\{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ に含まれるので, どちらかの随伴関手を用いて $\mathcal{T}(T^*M)$ を圏 $\{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ の部分圏とみなすことができる.

M が一点 pt のときを考えよう. また, このときの圏 $\mathcal{T}(T^*\text{pt})$ を \mathcal{T} と略記する.

$$\mathcal{T} = \text{Sh}(\mathbb{R}_t) / \{F \in \text{Sh}(\mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(t; \tau) \mid \tau \leq 0\}\}$$

であるが, \mathcal{T} は $\text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t) := \{F \in \text{Sh}(\mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(t; \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ の部分圏とみなすことができた.

ここでは, $\text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ とフィルター付き複体の圏についての関係を紹介する^{*11}. $F \in \text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ に対し, 補題 4.3 を用いて, $a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ のとき, $F((-\infty, b)) \rightarrow F((a, b))$ が擬同型であることが証明できる. そして, $F((-\infty, b))$ の形の開集合での値 (とそれらの間の制限写像) から, F 自体が復元される. $(F((-\infty, b)))_{b \in \mathbb{R}}$ は順序集合 \mathbb{R}^{op} から \mathbf{k} 上のベクトル空間の複体の圏への $(\infty-)$ 関手とみなせる. F は層だったのでその降下条件から, 射 $F((-\infty, b)) \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F((-\infty, b - \varepsilon))$ が任意の $b \in \mathbb{R}$ について擬同型になる.

ここでは, フィルター付き複体の定義として「 \mathbb{R} から \mathbf{k} 上のベクトル空間の複体の圏への $(\infty-)$ 関手」を採用する. すると $F \in \text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ に対し, $V_a := F((-\infty, -a))$ と定めることで, フィルター付き複体 V_\bullet が得られるし, 逆にフィルター付き複体 V_\bullet が $\text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ の対象に対応するための条件は「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $V_a \simeq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V_{a+\varepsilon}$ である」と述べ

^{*11} \mathcal{T} は $\text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ の商ともみなせるし, 部分ともみなせる. ここから \mathcal{T} とフィルター付き複体の圏の関係も記述できる. これについて明示的に書いてある文献の一例として [KSZ23] がある.

られる。しかし、このフィルター付き複体の定義に違和感を覚える読者も多いかもしれない。多くの場合、各 $a \leq b$ に付随した射が $V_a \rightarrow V_b$ が部分複体の包含になっていることと高次のホモトピーは自明になっていることを要請する場合が多い。しかし今考えているのは、フィルター付き複体のなす (無限) 導来圏であり、擬同型を同型にする状況で考えている。そこでは構造射 $V_a \rightarrow V_b$ たちが包含写像であるという条件は同型不変な概念ではない。また、ここでのフィルター付き複体を擬同型で取り換えて $V_a \rightarrow V_b$ たちが部分複体の包含になりさらに高次のホモトピーが全て自明になるようにもできる。そのため、今回の定義を採用しても導来圏を考える状況では直感に反するものにはならない。結論としては、圏 $\text{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ はフィルター付き複体のなす (導来) 圏の部分圏とみなせ、これにより \mathcal{T} もフィルター付き複体のなす (導来) 圏の部分圏とみなせる。

ここで、 $p_1, p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_t$ を各成分への射影とし $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_t$ を $s(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ と定める。 \mathcal{T} は $F, G \in \mathcal{T}$ に対し

$$F \star G := s_!(p_1^*F \otimes p_2^*G)$$

と定めることで閉な対称モノイダル構造をもつ。また、無限圏としての性質もよく、層の係数として採用した場合にも \mathcal{T} 係数版の six-functor formalism が機能する。そして自然な同一視 $\mathcal{T}(T^*M) \simeq \text{Sh}(M; \mathcal{T})$ が存在する。これによって $\mathcal{T}(T^*M)$ にも閉な対称モノイダル構造が定義できる。さらに $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ に対し、 \mathcal{T} -値の射の集合 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F, G) \in \mathcal{T}$ が定義される。これをフィルター付き複体とみなすと $(\text{Hom}(F, T_a G))_{a \in \mathbb{R}}$ が対応する^{*12}。この $a \in \mathbb{R}$ を動かしたときの構造の変化を μhom によって記述するのが次の補題である。

補題 4.5. $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ とし、 $\text{MS}(F)$ と $\text{MS}(G)$ はコンパクトであると仮定する^{*13}。このとき、次の (コ) ファイバー列が存在する

$$\text{colim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Hom}(F, T_{a-\varepsilon} G) \rightarrow \text{Hom}(F, T_a G) \rightarrow \mu\text{hom}(F, T_a G)(\{\tau > 0\}).$$

また、コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi: T^*M \rightarrow T^*M$ が与えられたとき、 φ は圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ にも作用する。記号の濫用だが、この圏への作用も φ で表す。すると、 $\text{MS}(\varphi F) = \varphi(\text{MS}(F))$ が成立する。

4.3 ラグランジュ部分多様体の層量子化

ラグランジュ部分多様体などのよい集合 $L \subset T^*M$ に対して、 $F_L \in \mathcal{T}(T^*M)$ を $\text{MS}(F_L) = L$ みたす “よい” 層^{*14} を構成することは重要な研究課題であり、今日までにいろいろな研究がなされている。この層 F_L は L の層量子化とよばれ、 L の性質をよく反映している。以前はフレアー理論でしかアプローチでなかった種類の問題に、今では層量

^{*12} T_a は \mathbb{R}_t 成分に a を足す写像が誘導する関手である。詳しくは後述。

^{*13} 実はさらに追加の仮定が必要だが、ここでは誤魔化す。後の応用では、この追加の仮定は自動的に満たされる。

^{*14} “よい” の意味については、ここでは詳しく述べない。

子化を用いることでも取り組めるようになってきている。また層量子化とフレアー理論や深谷圏との関連も年々明らかになってきている^{*15}。

例 4.6. C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ の外微分 $df: M \rightarrow T^*M$ の像 Γ_{df} は完全ラグランジュ部分多様体である。ここで閉集合 $Z_f \subset M \times \mathbb{R}_t$ を、 $Z_f := \{(x, t) \mid f(x) + t \geq 0\}$ とおけば、 \mathbf{k}_{Z_f} は Γ_{df} の層量子化である。ただしここで \mathbf{k}_{Z_f} は Z_f 上の階数 1 の定数層を包含写像で押し出して得られる $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層である。

コンパクト完全ラグランジュ部分多様体 $L \subset T^*M$ に対して、Guillermou と Viterbo によって独立に層量子化 F_L の構成法が知られている。

4.4 層の間の距離とその完備性

ここでは、Tamarkin 圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ 上のインターリービング距離 d_I について紹介する。

$a \in \mathbb{R}$ に対し、 $T_a: \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$ を $T_a(t) := t+a$ で定める。これは $T_{a*}: \text{Sh}(\mathbb{R}_t) \rightarrow \text{Sh}(\mathbb{R}_t)$ は $T_a: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を誘導する。また今後、記号の濫用だが $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ などの他の空間の t 方向のシフトやそれらが誘導する関手も T_a で表す。 \mathcal{T} の対象をフィルター付き複体 V_\bullet とみなした場合には、 T_a の作用は $(T_a V)_b := V_{a+b}$ として記述される。 \mathcal{T} 上の関手として、 $a_1 \leq a_2$ をみたす実数に対し、自然変換 $\tau_{a_1, a_2}: T_{a_1} \Rightarrow T_{a_2}$ が定まる。実際、フィルター付き複体に対しては $(T_{a_1} V)_b = V_{b+a_1} \rightarrow V_{b+a_2} = (T_{a_2} V)_b$ が自然に定まる。そして、 $\mathcal{T}(T^*M)$ に対しても関手 T_a や自然変換 τ_{a_1, a_2} が同様に定義される。

定義 4.7. (1) 組 (F, G) が (a, b) -interleaved であるとは、ある射 $\alpha: F \rightarrow T_a G$ および $\beta: G \rightarrow T_b F$ が存在して、 $T_a \beta \circ \alpha \simeq \tau_{0, a+b}(F)$ および $T_b \alpha \circ \beta \simeq \tau_{0, a+b}(G)$ をみたすこととする。

(2) $d_I(F, G) := \inf\{a + b \mid (F, G) \text{ は } (a, b)\text{-interleaved}\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ 。

この d_I は $\mathcal{T}(T^*M)$ の対象の間に距離^{*16} を定める。

ここで、 d_I の重要な性質を 2 つ紹介しておく。

命題 4.8. コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi: T^*M \rightarrow T^*M$ に対して、不等式 $d_I(F, \varphi F) \leq \|\varphi\|_{\text{Hof}}$ が成り立つ。ここで $\|\varphi\|_{\text{Hof}}$ は、 φ を時刻 1 の写像としてもつコンパクト台ハミルトニアンアイソトピーを生成する $H = (H_s)_{s \in [0, 1]}: T^*M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ すべてにわたった下限 $\inf_H \int_0^1 \left(\max_{p \in T^*M} H_s(p) - \min_{p \in T^*M} H_s(p) \right) ds$ によって定義される。

命題 4.9. d_I は完備である。即ち任意の Cauchy 列に収束先が存在する。

^{*15} 層量子化の概要については [Kuw23] を参照されたい。層量子化を含む超局所層理論のシンプレクティック幾何への応用については [Gui23] に多くの結果がある。

^{*16} 正確には拡張擬距離である。値が $+\infty$ になりうるし、 $d(F, G) = 0$ は F と G が同型であることを一般には導かない。一方で、追加の条件を課せば $d(F, G) = 0$ から F と G の同型を導けるようになる場合も多い。

5 主結果と証明の概略

5.1 主結果

ここで、我々の主結果を述べる。その前に、 $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を普遍被覆とし、 $\lambda = \xi dx \in \Omega^1(T^*\mathbb{R})$ としておく。

定義 5.1. 連続単射 $c: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容する^{*17} とは、滑らかな埋め込みの族 $(c_n: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R})$ が存在し、次の条件をみたすことをいう。

- (i) c_n は c に C^0 収束する。
- (ii) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $(c_n \circ e)^*\lambda$ の原始関数^{*18} とする。 $(f_n)_n$ はある連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に広義一様収束する。

また、この条件は $c: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}$ の S^1 のパラメータの取り換えで不変である。像であるジョルダン曲線 $c(S^1)$ についても連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを定義する。

定理 5.2 ([AI25]^{*19}). $C \subset T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容するとき、任意の $\theta \in (0, \pi)$ について、 C 上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在する。

この結果は、多くの先行研究の結果を包含し、正方形 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) の場合に限っても真に新しい。例えば、 C が長さ有限もしくは局所単調ならば、 C は連続ルジャンドルリフトを許容することから次が従う。

系 5.3. C が長さ有限もしくは局所単調のとき、任意の $\theta \in (0, \pi)$ について、 C 上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在する。

注意 5.4. 連続ルジャンドルリフトを許容しないジョルダン曲線も多く存在する。与えられたジョルダン曲線が連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを判定するのは一般には難しい。この条件の良い判定方法や特徴付けについては考察の余地が残されている。

5.2 層量子化の構成

以下、 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ とおき、スカラー倍により C が囲う有界開領域の面積は π であるとしてよい。まず滑らかな $C \subset T^*\mathbb{R}$ に対し、 $C \times C \subset T^*\mathbb{R}^2$ の層量子化 F_C ^{*20} を構成できる。より具体的には、まず C_0 は半径 1 の真円とし、 $C_0 \times C_0 \subset T^*\mathbb{R}^2$ の層量子化 F_{C_0} を具体的に構成する。これは明示的に書き出すことができ、ある種の一意性も証明できる。滑

^{*17} 一般的な用語ではなくここだけの呼称である。

^{*18} 原始関数には定数分の任意性があるが、この定数については都合のいいように選んでよい。

^{*19} Stéphane Guillermou 氏も同様の結果を独立に得ている。超局所層理論を用いる点・パーシステンス加群の変化する位置に注目する点は共通しているが、議論の詳細は我々のものとは異なる。

^{*20} $C \times C$ の層量子化であるので、 $F_{C \times C}$ と書く方が自然であるが、表記を短くするために F_C と書くことにした。

らかな Jordan 曲線 C に対しては, $T^*\mathbb{R}$ のハミルトン微分同相 φ であって $\varphi(C_0) = C$ なるものをもってから, $F_C := (\varphi \times \varphi)F_{C_0}$ とすればよい.

c が滑らかでない場合, 滑らかな写像の族 $(c_n: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R})_n$ であって c に C^0 収束するものをとる. ただし, $C_n = c_n(S^1)$ の囲む面積も π であるようにしておく. C_n らが Hofer 距離の意味で Cauchy 列になることを証明できる^{*21}. これと命題 4.8 から, F_{C_n} が層の距離に関して Cauchy 列になることが確認できる. 命題 4.9 の完備性により, 極限の対象が存在する^{*22}. これを F_C と書き $C \times C$ の層量子化とよぶことにする. これは $MS(F_C) = C \times C$ をみたく. 一方で, $SS^*(F_C)$ の決定は一般には難しいのだが, C が連続ルジャンドルリフトを許容するという仮定があると, 定義 5.1 の記号を用いて,

$$SS^*(F_C) = \{(c \circ e(s_1), c \circ e(s_2), -f(s_1) - f(s_2)) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\} \subset T^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t \quad (5.1)$$

であることを確認できる. このとき, 任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ について $SS^*(F_C) \cap T_a SS^*(F_C) = \emptyset$ が成り立っている.

5.3 パーシステンス構造の解析

\mathcal{T} -値の射の空間 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F_C, R_{\theta}F_C) \in \mathcal{T}$ はフィルター付き複体としては $(\text{Hom}(F_C, T_a R_{\theta}F_C))_{a \in \mathbb{R}}$ に対応する. このフィルター付き複体 $(\text{Hom}(F_C, T_a R_{\theta}F_C))_{a \in \mathbb{R}}$ は次数を決めてコホモロジーをとると通常の意味でのパーシステンス加群を与える. 証明の基本方針としては次のようになる.

- (A) パーシステンス加群の変化は交差 $(C \times C) \cap R_{\theta}(C \times C)$ の部分集合によって生じる.
- (B) しかし自明な交差 Δ_C の寄与によって生み出される変化を捉えても θ -長方形についての情報を得られないので, Δ_C が寄与できるパーシステンス加群の変化の位置に制約を与える.
- (C) Δ_C が寄与できない位置にパーシステンス加群の変化を見つける.

以下, これらのステップについて詳説はしないが, 簡単に状況を述べる.

(A) パーシステンス加群の変化は補題 4.5 によって μhom によって与えられる. $\mu\text{hom}(F, G)$ の台は $SS(F) \cap SS(G)$ に含まれた. そして $SS(F_C)$ の $SS(T_a R_{\theta}F_C)$ の ρ による像が, $C \times C$ および $R_{\theta}(C \times C)$ である. これらの事実から従う.

(B) 式 (5.1) と補題 4.5 から, Δ_C は π の倍数 $\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ における変化にしか寄与できないことが証明される.

(C) ある $a = a_{\theta} \in (0, \pi)$ においてパーシステンス加群の変化が生じることを示す. この議論が最も非自明な考察を含む. フィルトレーションのパラメータ a だけでなく θ を $[0, \pi]$ の範囲で動かすことが重要になる. この部分では C が連続ルジャンドルリフトを許

^{*21} 具体的にアイソトピーを構成する. ここでは円盤やアニュラスの間の双正則写像を構成の手掛かりにした.

^{*22} 実はこの極限は一意的である.

容することは仮定しなくてよい。一方で、 C の \mathbb{R}^2 の部分集合としてのルベーク測度が 0 であることは仮定する *23 *24.

6 今後の課題

6.1 より一般のジョルダン曲線について

一般のジョルダン曲線 C についても (ルベーク測度 0 ならば) ある $0 < a_\theta < \pi$ でパーシステンス加群に変化が生じることは証明することができた。この a_θ に対応する変化を生み出している $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ の交差が Δ_C の点ではないことが証明できればよい。 Δ_C の寄与は $\mathcal{F}_{a,\theta} := \mu\text{hom}(F_C, T_a R_\theta F_C)|_{\rho^{-1}(\Delta_C)}$ のコホモロジーとして定式化できる。

連続ルジャンドルリフトを許容するという仮定の下では、 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ の台が空集合であることが言えて、証明がうまくいった。仮定がないと、この台の評価がうまくいなくなる。しかしそれでも $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 である可能性はあり、それならば十分である。また、 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 でなくとも、その大域的なコホモロジーが 0 だけでなく十分である。いずれにせよ、層 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられればよさそうである。しかしながら現状では、 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられるまでには、 μhom に対する知見が足りていないように思われる。この種の滑らかでない対象に付随した層の μhom の解析・計算は、今回扱った杭問題以外の観点からも現在の超局所層理論における重要な課題である。

6.2 別の形の杭について

長方形以外の多角形に対しても、それと相似の図形の頂点を任意のジョルダン閉曲線上に見いだせるかという問題が考えられる。特別なジョルダン曲線として円があるので、円に内接する多角形のみが議論の対象となる。三角形については必ず存在することが初等的にわかり、5 以上の n について、内接 n 角形に対しては反例となる滑らかなジョルダン曲線 (楕円でよい) が存在することがわかる。残る内接四角形が問題になるのだが、滑らかなジョルダン曲線については [GL23] が肯定的に解決している。一方、等脚台形でない内接四角形に対して、滑らかでない曲線 (実は三角形でよい) であってそれと相似な図形の 4 頂点を選んでこれないものが存在することはそれ以前から知られている。

しかし、「任意の等脚台形と任意のジョルダン閉曲線上にその等脚台形と相似な図形の 4 頂点を選んでこれるか?」という問題に反例は見つかっていない。この問題を肯定的に解決する方向での層理論的なアプローチは可能であると思われる。しかし、長方形でない等脚台形の場合、ラグランジュ部分多様体の単調性という性質が失われるなど状況が悪く

23 この場合、コンパクト台で面積を保つ同相写像 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $C = \phi(C_0)$ なるものをとれる。ただしここで、 C_0 は半径 1 の真円である。実は、この同相写像 ϕ を並べた $\phi \times \phi$ も $\mathcal{T}(T^\mathbb{R}^2)$ に作用し、 $F_C \simeq (\phi \times \phi)F_{C_0}$ が成り立つ。すると、 F_C 関連の計算の一部を非常に具体的な層である F_{C_0} に対する計算に帰着でき、議論がうまくいく。

*24 ルベーク測度が正になるジョルダン曲線も多く存在するが、そのような曲線に対しては長方形杭問題はルベークの密度定理の簡単な系として肯定的に解決されている。

なっている。等脚台形の対角線が対角線の交点によってどのような比で内分されるかは、ラグランジュトーラスの有理性という性質に関わり、層量子化の構成のしやすさや性質にも影響する。よって、一部の等脚台形は比較的扱いやすく、扱いやすい等脚台形については類似の方針で何らかの具体的な帰結が得られるのではないかと思われる。しかし講演者は、いずれにせよ一般の等脚台形に関しては、今回の主結果に匹敵するほど強い主張には今回使われた手法を適用するだけでは到達できず、何か新しいアイデアが必要だと考えている。

参考文献

- [AI25] T. Asano and Y. Ike. *The rectifiable rectangular peg problem*. 2025. arXiv: 2412.21057 [math.SG].
- [GL21] J. E. Greene and A. Lobb. “The rectangular peg problem”. *Ann. of Math.* (2) 194.2 (2021), pp. 509–517.
- [GL23] J. E. Greene and A. Lobb. “Cyclic quadrilaterals and smooth Jordan curves”. *Invent. Math.* 234.3 (2023), pp. 931–935.
- [GL24] J. E. Greene and A. Lobb. *Floer homology and square pegs*. 2024. arXiv: 2404.05179 [math.SG].
- [Gui23] S. Guillermou. “Sheaves and symplectic geometry of cotangent bundles”. *Astérisque* 440 (2023), pp. x+274.
- [Hug18] C. Hugelmeyer. *Every smooth Jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to $\sqrt{3}$* . 2018. arXiv: 1803.07417 [math.MG].
- [KS90] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on manifolds*. Vol. 292. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. x+512.
- [KSZ23] C. Kuo, V. Shende, and B. Zhang. *On the Hochschild cohomology of Tamarkin categories*. 2023. arXiv: 2312.11447 [math.SG].
- [Kuw23] T. Kuwagaki. *An introduction to sheaf quantization*. 2023. arXiv: 2205.02661 [math.SG].
- [Mat14] B. Matschke. “A survey on the square peg problem”. *Notices Amer. Math. Soc.* 61.4 (2014), pp. 346–352.

低次元球面内の fibered knot の研究について

石川 昌治 (慶應義塾大学)*

1 序文

ここ数年、福田瑞季氏 (広島大学 WPI-SKCM²) と、branched twist spin と呼ばれる S^4 上の S^1 -作用で不変な 2 次元結び目の研究を進めている。 S^3 上の S^1 -作用で不変な結び目はトーラス結び目であり、branched twist spin は 2 次元結び目理論における、トーラス結び目に対応するクラスと言える。 Twist spun knot はこのクラスに含まれる。論文 [10] では、ある条件下で、 S^3 内の 2 つの結び目が同値でなければ、それらから構成される 2 つの branched twist spin も同値ではないことを示した (後述の定理 5.1)。

この研究のもともとの動機は複素変数の重み付き斉次多項式の特異点の研究から来るもので、将来的にはその方向に繋がれば良いと考えている。本稿はその動機が伝わることを目的として書いている。 §2 で Milnor 束および simple fibered knot の定義を述べた後、 §3 で fibered knot の次元を跨ぐ構成法として、cyclic suspension と twisting を紹介する。こういった次元を跨ぐ構成は低次元トポロジーの技術を高次元の研究に繋げる道具となるので、上手く利用したいところである。 §4 で球面上の S^1 -作用、特に branched twist spin を与える S^4 上の S^1 -作用について説明する。最後に、 §5 で主結果を紹介する。

本研究全般において、多くの方々にご助言を頂きました。この場を借りて、お礼申し上げます。また、本稿では先生方の名前の敬称は省略しています。ご容赦ください。

2 奇数次元球面内の simple fibered knot

2.1 複素孤立特異点の Milnor 束

$f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ を複素多項式写像とする。点 $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ におけるヤコビ行列の階数が 0 のとき、つまり

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}(a), \frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \right) = (0, 0, \dots, 0)$$

のとき、 a を f の特異点という。点 $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ が f の特異点であり、かつ、 a の近傍 U で f が $U \setminus \{a\}$ 上で非特異となるものが存在するとき、 a を f の孤立特異点という。以下、 f の点 a での特異点を (f, a) 、原点を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の球面を S_ε^{2n+1} と表す。

定理 2.1 (Milnor [23]). $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(0) = 0$ を満たす複素多項式写像とし、 $\varepsilon' > 0$ を正の実数とする。任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ に対して

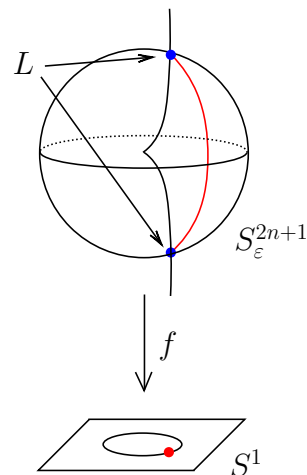
$$\phi := \frac{f}{|f|} : S_\varepsilon^{2n+1} \setminus f^{-1}(0) \rightarrow S^1$$

* 〒223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1
e-mail: ishikawa@keio.jp

が局所自明なファイバー束となる $\varepsilon' > 0$ が存在する。

$L = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ を特異点のリンクという。原点 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ が孤立特異点のとき、特異点のリンクは $2n + 1$ 次元球面 S_ε^{2n+1} に埋め込まれた滑らかな $2n - 1$ 次元の向き付け可能多様体となる。

例 2.2. $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$ のとき、特異点のリンク $\Sigma(a_0, a_1, \dots, a_n) := S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ を Brieskorn 多様体という。エキゾチック球面に関連することで有名である ([3])。



$t \in S^1$ に対し、 $F = \phi^{-1}(t)$ を f の Milnor fiber という。原点 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ が孤立特異点のとき、Milnor fiber F は $(n - 1)$ -connected であり、さらに有限個の S^n のブーケ (bouquet) とホモトピー同値である。

2.2 Simple fibered knot

S^{2n+1} に埋め込まれた $2n - 1$ 次元多様体 K が次の条件を満たすとき、 K を simple fibered knot という。

- (1) 局所自明束 $\phi: S^{2n+1} \setminus K \rightarrow S^1$ が存在する。
- (2) K の環状近傍 $N(K)$ と、 $N(K)$ から自明束 $K \times D^2$ への bundle equivalence α で、

$$\begin{array}{ccc} N(K) \setminus K & \xrightarrow{\alpha|_{N(K) \setminus K}} & D^2 \setminus \{0\} \\ & \searrow \phi|_{N(K) \setminus K} & \swarrow p \\ & & S^1 \end{array}$$

が可換となるものが存在する。ここで、 p は $(x, r) \in K \times (D^2 \setminus \{0\})$ を $r/|r|$ に移す射影である。

- (3) K を境界とする S^{2n+1} 内の $(n - 1)$ -connected な向き付け可能多様体 (Seifert surface) が存在する。

定理 2.3 (Durfee [4], 加藤 [19]). $n \geq 3$ とする。 S^{2n+1} 内の simple fibered knot が同値であることと、Seifert form が integral unimodular bilinear form として同値であることは必要十分である。

論文 [19] では simple spinnable structure と呼んでいる。この定理から分かるように、 $n \geq 3$ のときは、simple fibered knot の研究は Seifert form を使って進めることができ、代数的な問題に書き換わる。例えば、次の定理が成り立つ。

定理 2.4 (Lines [22]). $n \geq 3$ とする。 S^{2n+1} 内の simple fibered knot は自明な結び目から Hopf plumbing とその逆操作を繰り返すことで構成できる。

Hopf plumbing とは, simple fibered knot のファイバーに $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2$ の原点での特異点の Milnor fiber, あるいはその mirror image を貼り付ける操作である. 私の知る限りでは, この主張は $n = 1, 2$ のときは未解決である.

S^3 内の fibered link は結び目理論における重要な研究対象の一つであり, 多くのことが知られている. S^5 内の simple fibered knot については, 佐伯による一連の研究がある. 論文 [29] を参照.

3 Fibered knot の次元を跨ぐ構成

3.1 Cyclic suspension

複素多項式写像 $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ は $f(0) = 0$ を満たし, 原点に孤立特異点をもつとする. f および自然数 m に対し, $n+2$ 変数の複素多項式写像 $g: \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}$ を

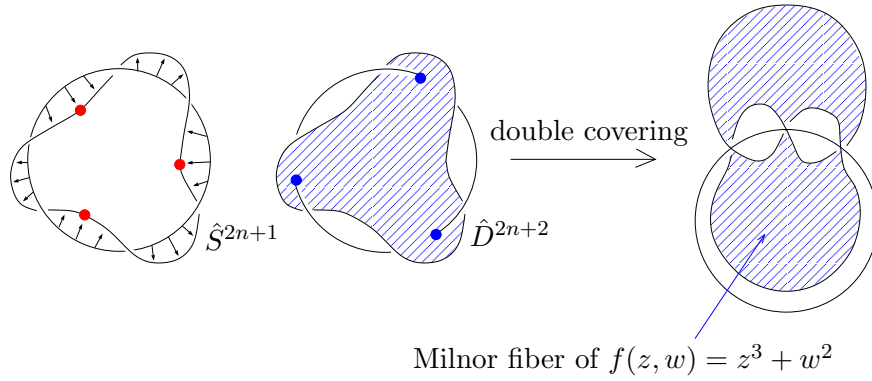
$$g(z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_0, z_1, \dots, z_n) + z_{n+1}^m$$

で定める. 特異点 $(g, 0)$ リンク L_g は $g(z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = 0$ と S_ε^{2n+3} との共通部分として得られる. この定義式を $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = -z_{n+1}^m$ と変形すると, L_g は S_ε^{2n+1} の, 特異点 $(f, 0)$ のリンク L_f に沿った m 重巡回分岐被覆であることが分かる. 例えば, Brieskorn 多様体 $\Sigma(a_0, a_1, a_2)$ は S^3 のトーラス結び目 $\Sigma(a_0, a_1)$ に沿った a_2 重巡回分岐被覆として得られる. $\Sigma(a_0, a_1, a_2)$ は特異点のリンクであり, S^5 に埋め込まれている. この S^5 の $\Sigma(a_0, a_1, a_2)$ に沿った a_3 重巡回分岐被覆として $\Sigma(a_0, a_1, a_2, a_3)$ が得られる. Kauffman の論文 [20] では, この関係を以下のように図示している.

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ & & \Sigma(a_0, a_1, a_2, a_3) \longrightarrow S^7 \\ & & \downarrow \\ \Sigma(a_0, a_1, a_2) & \longrightarrow & S^5 \\ & & \downarrow \\ \Sigma(a_0, a_1) & \longrightarrow & S^3 \end{array}$$

Kauffman は論文 [20] で, 特異点 $(f, 0)$ から特異点 $(g, 0)$ の Milnor fiber を構成している. 具体的には, S^{2n+1} は余次元 2 で S^{2n+3} に埋め込まれているので, その環状近傍 $N(S^{2n+1})$ は $S^{2n+1} \times D^2$ と同相である. S^{2n+1} 内の特異点 $(f, 0)$ のリンクは動かさずに, それ以外の点を $f/|f| = e^{i\theta}$ に従って $S^{2n+1} \times D^2$ 内で $(0, e^{i\theta})$ 方向に push して, S^{2n+3} に埋め込まれた球面 \hat{S}^{2n+1} を作る. この “push” に従って D^{2n+2} を変形したものを \hat{D}^{2n+2} とする. この \hat{D}^{2n+2} の S^{2n+1} に沿った m 重巡回分岐被覆として, $(g, 0)$ の Milnor fiber を得ることができる. 次頁の図は $n = 0$ のときの構成を図示している. 円板 \hat{D}^2 の 2 重被覆として, $z^3 + w^2$ の特異点の Milnor fiber が得られることが分かる.

複素多項式 $f(z_0, z_1, \dots, z_m)$ および $g(w_0, w_1, \dots, w_n)$ について, 多項式写像 $f: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ は $f(0) = g(0) = 0$ を満たし, 原点に孤立特異点をもつ



とする。この f と g に対し、 $n + m + 2$ 変数の複素多項式写像 $h : \mathbb{C}^{m+n+2} \rightarrow \mathbb{C}$ を

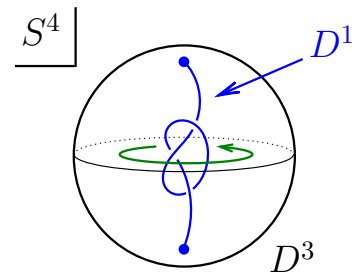
$$h(z_0, z_1, \dots, z_m, w_0, w_1, \dots, w_n) = f(z_0, z_1, \dots, z_m) + g(w_0, w_1, \dots, w_n)$$

で定義する。これは cyclic suspension の一般化であり、 f と g の Milnor fiber のホモロジーサイクルから h の Milnor fiber のホモロジーサイクルを読み取ることができるなど、次元を跨いで情報を引き継ぐことができる。Thom-Sebastiani 構成法と呼ばれる ([31, 26, 30])。

3.2 Twist-spinning

S^4 を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$ 内の単位球面として、 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f((x_1, x_2, x_3), z) = z$ で定義すると、Milnor 束と同様に、局所自明束

$$\phi := \frac{f}{|f|} : S^4 \setminus \{z = 0\} \rightarrow S^1$$

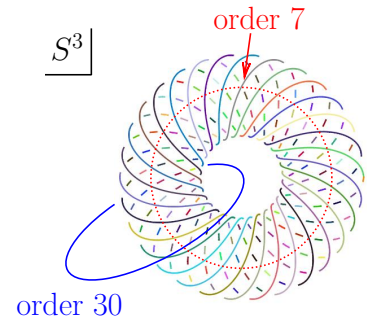


を得ることができる。ファイバーは 3 次元球体 D^3 である。右図のように S^4 内に D^3 を置き、境界である S^2 を固定したまま D^3 を S^4 内で一周させることで、局所自明束が構成される。ここで、図のように 3 次元球体 D^3 の北極と南極を結ぶ弧を描き、境界である S^2 を固定したまま D^3 を S^4 内で一周させる間に、北極と南極を固定したまま D^3 を赤道方向に k 回転させると、弧の軌道として S^4 に埋め込まれた S^2 を得ることができる。つまり、 S^4 内の 2 次元結び目が得られる。この構成は Zeeman の論文 [33] において導入されたもので、twist-spinning と呼ばれる。論文 [33] では S^4 内の twist-spinning だけではなく、一般の $n \geq 2$ に対して、 S^{n+2} 内の twist-spinning が導入されている。上の図の D^3 を S^3 に埋め込み、青い弧 D^1 の端点を D^3 の外側で繋いで S^3 内の結び目を作る。これを K とする。Twist-spinning による 2 次元結び目の構成は、結び目 K に対して、 K 上の 1 点を中心とする十分小さい開球体を取り除き、それに対して twist-spinning を行っているとみなすことができる。 K から twist-spinning により得られる結び目のことを K の twist spun knot と呼ぶ。

4 球面上の S^1 作用の研究

4.1 奇数次元球面上の pseudo-free S^1 -action

S^1 作用が固定点を持たず、かつ、例外軌道が孤立しているとき、その S^1 作用を pseudo-free S^1 -action という。 S^3 上の pseudo-free S^1 -action は Jacoby により分類されており、例外軌道の数は高々 2 つであることが知られている ([17])。この 2 という数字は S^3 を \mathbb{C}^2 の単位球面としたときの複素座標平面の数と一致する。実際、右図の例外軌道は S^3 と z_0 平面および z_1 平面の交わりに対応している。この考察から、 S^{2n+1} 上の pseudo-free S^1 -action の例外軌道の数は高々 $n+1$ 個であると“予想”できる。この予想に対し、Montgomery と Yang は論文 [25] において、 S^7 上の pseudo-free S^1 -action の例外軌道の数はいくらかでも大きくなることを示した。9 次元以上の奇数次元球面については、Petrie により同様の結果が示されている ([28])。 S^5 については未解決で、Montgomery と Yang はこれを問題として提起している。



Montgomery-Yang 問題 ([25], cf. Kollár [21, Conjecture 6]). S^5 上の pseudo-free S^1 -action の例外軌道の数は高々 3 つか？

例えば、 a, b, c を 2 以上の互いに素な自然数とし、 $(z_0, z_1, z_2) \in S^5 \subset \mathbb{C}^3$ に対して、 $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ の作用を $(\lambda^{bc} z_0, \lambda^{ca} z_1, \lambda^{ab} z_2)$ で定めると、これは 3 つの例外軌道をもつ pseudo-free S^1 -action となる ([21, Example 7]). Kollár は論文 [21] において代数的 Montgomery-Yang 問題を提起していて、論文 [16, 18] などで進展が得られている。

4.2 S^4 上の locally smooth S^1 -action

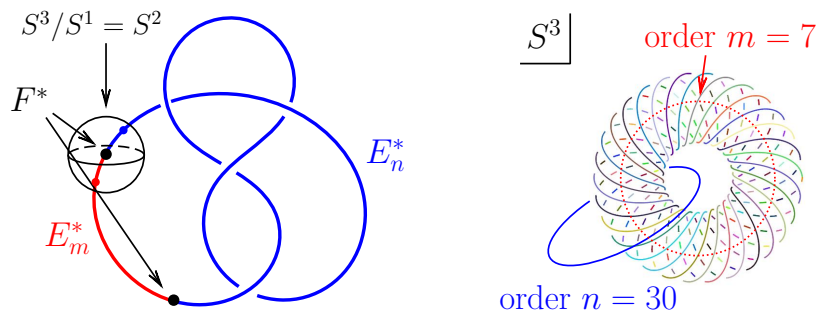
Twist-spinning は S^4 上の S^1 -action を自然に与える。つまり、twist spun knot は S^4 上の S^1 作用で不変な結び目とすることができる。他にも、Artin の論文 [1] にある spun knot (twist-spinning の k が 0 の場合) も S^4 上の S^1 作用で不変な結び目である。そこで、 S^1 -action により不変な 2 次元結び目は他にあるのだろうか、という問いを考える。

まず、 S^4 内の S^1 -action について調べる必要がある。 $G = S^1$ とおき、 G -action の $x \in S^4$ を通る軌道の slice を S , isotropy 群を G_x , 軌道の近傍を $G \times_{G_x} S$ とする。 G_x が S に orthogonal に作用するとき、 G の作用を locally smooth S^1 -action という。 Fintushel は論文 [5] において、 Montgomery と Yang の論文 [24] の結果を用いて、 4 次元ホモトピー球面上の locally smooth S^1 -action は orbit data により分類されることを示した。

定理 4.1 (Fintushel [5]). 4 次元ホモトピー球面上の locally smooth S^1 -action は (i) $\{D^3\}$, (ii) $\{S^3\}$, (iii) $\{S^3, m\}$, (iv) $\{(S^3, K), (m, n)\}$ の 4 通りに分類される。

Orbit data とは上の定理の (i)~(iv) のことで、 D^3 と S^3 は orbit space を表し、 m, n は自然数を表す。(iv) における m, n は互いに素とする。また、(iv) における K は S^3 内の結び目を表す。

Orbit data (iv) の場合について説明する。 S^4 のオイラー標数は 2 だから、 S^4 上の S^1 -action は固定点を 2 つ持つことになる。固定点集合が S^2 でもオイラー標数は 2 になるが、これは orbit data (i) の場合に該当する。作用は locally smooth なので、固定点の近傍において orthogonal であり、特に S^1 -action は固定点を中心とする十分小さい球面 S^3 を保つことになる。下の左図の 2 つの黒点は、固定点の orbit map による像を表している。 S^3 上に S^1 が作用しているので、その作用の軌道は右図のようであり、orbit space は左図のように S^2 になる。



Orbit data (iv) は、 S^3 上の S^1 -action が例外軌道を 2 つ持つ場合となる。2 つの例外軌道の order を m と n とする。 m と n は互いに素と仮定できる。例外軌道の orbit map による像は、左図の S^2 上の点となるので、それをそれぞれ赤点と青点で表している。

固定点の像を中心とする S^2 を例外軌道の像に沿って広げていくと赤点と青点の 1-parameter family が得られるが、その拡張は途中で止まることができないので、もう一方の固定点の像にたどり着くことになる。つまり、この固定点の像と固定点の像を繋ぐ 1-parameter family は S^3 内の結び目になる。別の言い方をすると、固定点と例外軌道の集合の orbit map による像 K は S^3 内の結び目となる。

X を 4 次元ホモトピー球面とし、 S^1 が locally smooth に作用しているとする。 F を固定点集合、 E_m を order m の例外軌道の和集合、 E_n を order n の例外軌道の和集合とする。 F, E_m, E_n は X の部分集合である。これらの orbit map による像をそれぞれ X^*, F^*, E_m^*, E_n^* とする。上の構成から、 $E_n \cup F$ は 4 次元ホモトピー球面 X 内の 2 次元結び目になることが分かる。この 2 次元結び目を $\tau_{m,n}(K)$ と書くことにする。

$X \setminus \text{Int } N(\tau_{m,n}(K))$ には S^1 が作用しているので、その軌道に沿ってモノドロミーベクトル場を構成することで、局所自明束 $X \setminus \text{Int } N(\tau_{m,n}(K)) \rightarrow S^1$ を得ることができる。ここで $\text{Int } N(\tau_{m,n}(K))$ は $\tau_{m,n}(K)$ の環状近傍 $N(\tau_{m,n}(K))$ の内部を表す。このときファイバーは、結び目 K に沿った S^3 の m 重巡回分岐被覆から開球体を除いたものと同相になる。モノドロミー h は、分岐被覆のシートを n 個ずらす周期 m の periodic map となる。補空間 $X \setminus \text{Int } N(\tau_{m,n}(K))$ の境界を環状近傍 $N(\tau_{m,n}(K)) \cong S^2 \times D^2$ で埋めること

で、ホモトピー球面 X が復元される。つまり、

$$X = \left((M_m(K) \setminus \text{開球体}) \times [0, 1] /_{(x,1) \sim (h(x),0)} \right) \cup \left(S^2 \times D^2 \right)$$

が成り立つ。Pao は論文 [27] において、以下を示した。

定理 4.2 (Pao [27]). 4次元ホモトピー球面 X は S^4 と微分同相である。

この定理により、 S^4 上の locally smooth S^1 -action は定理 4.1 の 4 種類の orbit data に分類されることが従う。

5 主結果の紹介

5.1 Branched twist spin の区別

前章で紹介した S^4 内の 2次元結び目 $\tau_{m,n}(K)$ を branched twist spin という。この名前は Hilman の著書 [14, §16.3] に書かれている。Orbit data (iii) は (iv) の $n = 1$ の場合に対応し、 $\tau_{m,1}(K)$ は K の m -twist spun knot になる。Branched twist spin を S^1 -action で不変な 2次元結び目として定式化するために、spun knot を $\tau_{0,1}(K)$ としておく。これは orbit data (i) に該当する。この定義により、4次元球面内の 2次元結び目 K が S^1 -action により不変であることと、 K が branched twist spin であることは同値ということになる。研究の目標は branched twist spin $\tau_{m,n}(K)$ の分類である。先行研究については福田の一連の研究 ([6, 7, 8, 9]) を参照。また、Hilman も論文 [15] を執筆している。

S^{n+2} 内の 2つの結び目 K_1 と K_2 に対し、微分同相写像 $(S^{n+2}, K_1) \rightarrow (S^{n+2}, K_2)$ が存在するとき、 K_1 と K_2 は同値であると定義する。今回の研究では、 m と n を固定した上で、 S^3 内の 2つの結び目 K_1 と K_2 に対し、 $\tau_{m,n}(K_1)$ と $\tau_{m,n}(K_2)$ が同値になるかについて考察した。次が主結果となる。

定理 5.1 (石川-福田 [10]). $m \geq 3$ とする。 S^3 内の結び目 K_1, K_2 は prime であり、トーラス結び目ではないとする。このとき、 K_1 と K_2 が同値であることと、 $\tau_{m,n}(K_1)$ と $\tau_{m,n}(K_2)$ が同値であることは、必要十分である。

Branched twist spin の構成から、 $\tau_{m,n}(K)$ と $\tau_{m,n-2m}(K)$ は Gluck full-twist ([12]) で移り合うため、それらが同値であることが分かる。また、 $m = 0$ のときは $\pi_1(S^4 \setminus \tau_{0,1}(K))$ と $\pi_1(S^3 \setminus K)$ が同型であることが知られており、結び目補空間予想の解決 ([13]) により、定理の主張が正しいことが従う。 $m = 1$ のときは $\tau_{1,1}(K)$ は自明な 2次元結び目になり、定理の主張は成り立たないことが分かる。 $m = 2$ のときはファイバーは S^3 内の結び目に沿った 2重分岐被覆から開球体を除いたものと同相になるが、結び目 K の補空間に入る幾何構造と 2重分岐被覆である 3次元多様体に入る幾何構造が hyperbolic から spherical に切り替わることがあり、技術的な理由で証明できていない。

証明では結び目 K の orbifold fundamental group を用いる。 n 次元 orbifold とは \mathbb{R}^n の $O(n)$ の有限部分群による商空間を局所近傍とする距離化可能空間のことであり、その

普遍被覆空間の Deck 変換群として orbifold fundamental group が定義される．証明では cyclic type と呼ばれる特別なクラスのみを利用する．この場合, orbifold fundamental group は

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m)) = \langle \pi_1(S^3 \setminus K) \mid \mu^m = 1 \rangle$$

と表される．ここで μ は結び目 K の meridian である．Branched twist spin $\tau_{m,n}(K)$ の補空間の基本群は

$$\pi_1(S^4 \setminus \tau_{m,n}(K)) \cong \langle x \in \pi_1(S^3 \setminus K), h \mid xh = hx, \mu^m h^\beta = 1 \rangle$$

と表すことができ, これを $\langle h \rangle$ で割ると $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ が得られる． h は S^1 -作用の regular orbit に対応する基本群の元である． $m \geq 3$ で, K_1 と K_2 が双曲結び目のとき, これらが同値でないならば, $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_2, m))$ が同型でないことが, 論文 [2] における m 重分岐被覆の双曲性についての定理および Mostow rigidity から従う． $m \geq 2$ で, K_1 と K_2 が satellite 結び目のとき, これらが同値でないならば, $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_2, m))$ が同型でないことが, 竹内の論文 [32] において知られている．他の組み合わせについても基本群の性質を比較することで, $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_2, m))$ が同型でないことを示すことができ, 主定理が従うことになる．

5.2 Twist spun knot of twist spun knot

2次元結び目をさらに twist-spinning することで, S^5 内の3次元のファイバー結び目を得ることができる．特に, twist spun knot の twist spinning を考えることで, 次の定理を示すことができる．

定理 5.2 (石川-福田 [11]). $m = \gcd(m_1, m_2)$ とする． K が自明な結び目か $m = 1$ ならば, $\tau_{m_2,1}(\tau_{m_1,1}(K))$ は S^5 内の自明な3次元結び目である．逆に, $m \geq 2$ でかつ $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の center が自明であれば, $\tau_{m_2,1}(\tau_{m_1,1}(K))$ は S^5 内の非自明な3次元結び目である．

$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の center が自明という条件は $\langle h \rangle$ で割るときの技術的な問題であり, 今のところ深い意味があるわけではない．前半の主張では Pao の定理 (定理 4.2) を使っており, そのままでは branched twist spin の twist-spinning に拡張できない要因の一つとなっている．後半の主張は定理 5.1 と同様の手法により証明される．定理 5.1 では2つの branched twist spin を区別していたが, 定理 5.2 の設定でも, orbifold fundamental group を用いて2つの twist spun knot of twist spun knot を区別することができる．

Twist spun knot の twist-spinning をさらに繰り返すことで S^n 内のファイバー結び目を得ることができる．その場合, twist-spinning の twist の回数の列を (m_1, m_2, \dots, m_N) とすると, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_N) \geq 3$ のときに同様の主張が成り立つ．

6 感想

重み付き斉次多項式の特異点の研究をより広い枠組みの中で進めようと思った場合、球面上の S^1 -作用の研究がその枠組みの候補となる。複素 3 変数の場合に限っても、 S^5 上の S^1 -作用の研究はまだ未開拓であり、その研究を低次元トポロジーの技術を使ってリジッドに進めるのは面白いと思う。定理 5.2 で紹介した twist spun knot of twist spun knot は安直な研究対象に見えるかもしれないが（実際、私もそう思っているが^{*1}）、幾何というより群による考察であることに弱さを感じつつも、 S^5 内の結び目の研究に orbifold fundamental group という低次元トポロジーの技術を組み込めたことは、良い進展だったと思っている。こういった研究が進み、3 変数の複素多項式写像の特異点のより深い理解が得られることを心の隅で期待している。

参考文献

- [1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R^4* , Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 174–177.
- [2] M. Boileau, J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, *Astérisque*, no. 272 (2001), 208 pp.
- [3] E. Brieskorn, *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, *Invent. Math.* **2** (1966), 1–14.
- [4] A.H. Durfee, *Fibered knots and algebraic singularities*, *Topology* **13** (1974), 47–59.
- [5] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, *Duke Math. J.* **43** (1976), no. 1, 63–70.
- [6] M. Fukuda, *Branched twist spins and knot determinants*, *Osaka. J. Math.* **54** (2017), 679–688.
- [7] M. Fukuda, *Irreducible $SL(2, \mathbb{C})$ -metabelian representations of branched twist spins*, *J. Knot Theory Ramifications* **28** (2019), no. 2, 1950007, 11 pp.
- [8] M. Fukuda, *Gluck twists along 2-knots with periodic monodromy*, arXiv:1811.05109 [math.GT]
- [9] M. Fukuda, *Representations of branched twist spins with a non-trivial center of order 2*, *Topology and its Application* **365**, 109284.
- [10] M. Fukuda, M. Ishikawa, *Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups*, *Revista Matemática Complutense* (2024).
- [11] M. Fukuda, M. Ishikawa, *Twist spun knots of twist spun knots of classical knots*, arXiv:2409.00650 [math.GT], to appear in *Dalat University Journal of Science*.
- [12] H. Gluck, *Embedding of two spheres in the four sphere*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **104** (1962), 308–333.
- [13] C.McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 2, 371–415.

^{*1}でも、cyclic suspension と twisting が同じ立ち位置だとすれば、twist spun knot of twist spun knot は Brieskorn 多様体と同じくらいの価値はあると言えなくもない。

- [14] J.A. Hillman, *Four-manifolds, geometries and knots*, Geometry & Topology Monographs, 5, Geometry & Topology Publications, Coventry, 2002, xiv+379 pp.
- [15] J.A. Hillman, *The groups of branched twist–spun knots*, arXiv:2305.00443 [math.GT]
- [16] D. Hwang, J. Keum, *Algebraic Montgomery–Yang problem: the non-cyclic case*, Math. Ann. **350** (2011), no. 3, 721–754.
- [17] R. Jacoby, *One-parameter transformation groups of the three-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 131–142.
- [18] W. Jo, J. Park, K. Park, *Algebraic Montgomery–Yang problem and smooth obstructions*, Trans. Amer. Math. Soc. **378** (2025), no. 4, 2969–3003.
- [19] M. Kato, *A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 454–463.
- [20] L.H. Kauffman, *Branched coverings, open books and knot periodicity*, Topology **13** (1974), 143–160.
- [21] J. Kollár, *Is there a topological Bogomolov–Miyaoka–Yau inequality?*, Pure Appl. Math. Q. **4** (2008), no. 2, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov. Part 1, 203–236.
- [22] D. Lines, *Stable plumbing for high odd-dimensional fibred knots*, Canad. Math. Bull. **30** (1987), no. 4, 429–435.
- [23] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Stud. 61, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. iii+122 pp.
- [24] D. Montgomery, C.T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension $n - 3$. I, II*, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517; **5** (1960), 206–211.
- [25] D. Montgomery, C.T. Yang, *Differentiable pseudo-free circle actions on homotopy seven spheres*, Proceedings of the Second Conference on Compact Transformation Groups (Univ. Massachusetts, Amherst, Mass., 1971), Part I, pp. 41–101, Lecture Notes in Math., Vol. 298, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [26] M. Oka, *On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology **12** (1973), 19–32.
- [27] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology, **17** (3) (1978), 291–296.
- [28] T. Petrie, *Equivariant quasi-equivalence, transversality and normal cobordism*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974), Vol. 1, pp. 537–541, Canadian Mathematical Congress, Montreal, QC, 1975.
- [29] O. Saeki, *Theory of fibered 3-knots in S^5 and its applications*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), no. 4, 691–756.
- [30] K. Sakamoto, *Milnor fiberings and their characteristic maps*, Manifolds – Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), pp. 145–150, Published for the Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1975.
- [31] M. Sebastiani, R. Thom, *Un résultat sur la monodromie*, Invent. Math. **13** (1971), 90–96.
- [32] Y. Takeuchi, *A classification of a class of 3-branchfolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **307** (1988), no. 2, 481–502.
- [33] E.C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.