Modular vector fields in non-commutative geometry and loop operations

谷口 東曜　(東大数理・JSPS 特別研究員 DC1)*

1 Introduction

Σ を向きの入った滑らかな実 2 次元閉多様体とし, $\mathfrak{g}(\Sigma)$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間であって Σ 上の閉曲線の自由ホモトピー類を基底に持つものとする. Goldman は, [Gol86] において $\mathfrak{g}(\Sigma)$ に Lie 代数の構造を定めた. この Goldman Lie 代数の括弧積は, 2 つの曲線の交点での手術をもとにしているが, その定義は基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma)$ の表現の空間の Poisson 構造を位相的に抽出したものになっている. 具体的には, $n \geq 1$ として, Σ が連結かつ閉曲面の場合に affine scheme

$$X = \mathrm{Hom}_{\mathrm{grp}}(\pi, \mathrm{GL}(n)) /\!\!/ \mathrm{GL}(n)$$

を考えると, X にはシンプレクティック構造が入り, その上の関数環 $\mathcal{O}(X)$ への自然な写像

$$\mathfrak{g}(\Sigma) \to \mathcal{O}(X) \colon [x] \mapsto ([\rho] \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(x)))$$

が Lie 代数の準同型となるように Goldman Lie 代数の括弧積が定まっている. 括弧積の定義自体は任意の有向曲面に対して容易に適用でき, このような曲線のなす演算をループ演算という. Σ が境界を持つ場合には, Fock と Rosly [FR99] により X 上に Poisson 構造が入ることが分かっている.

ここで, 自由ループの空間 $\mathfrak{g}(\Sigma)$ は群環 $\mathbb{R}\pi$ 上の **trace space**

$$|\mathbb{R}\pi| := \mathrm{HH}_0(\mathbb{R}\pi) \cong \mathbb{R}\pi/[\mathbb{R}\pi, \mathbb{R}\pi]$$

と同一視でき, 上の写像による対応のもとで非可換幾何版の関数空間だと思える. ここで HH_0 は 0 次の Hochschild ホモロジーを表し, これは任意の環について定まる. 標題にある非可換幾何とは, 非可換な環に対して上のような (微分) 幾何の類似を考えることとする. 上の例をさらに観察すると, Goldman Lie 代数は「本当の幾何」X 上のシンプレクティック構造に対応する, 非可換版のシンプレクティック構造であると思える. 本稿では (コ) ホモロジーそのものよりもコサイクル, つまり derivations とその一般化を多く扱う.

Van den Bergh は, [vdB08] において非可換幾何版の (Poisson) bivector を double bracket という名前で導入した. 簡単のため体 $\mathbb{K}$ 上で考えることにすると, double bracket とは一般の $\mathbb{K}$ 代数 A 上の線型写像

$$\Pi \colon A \otimes A \to A \otimes A$$

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: `toyo(at)ms.u-tokyo.ac.jp`

であって, 適切な Leibniz 則を満たすものである．$A = \mathbb{K}\pi$ の場合は, この上に double bracket κ を基点付き曲線の交差を用いて定めることができ, Goldman 括弧積を自然に誘導する．どちらについてもすぐ後で詳しく述べる．

著者の論文 [Tan25] の目的は, 非可換幾何におけるモジュラーベクトル場を導入することである．Poisson 多様体 P とその上の体積形式 α, が与えられると, ベクトル場 $\mathbf{m}_\alpha$ が合成

$$\mathbf{m}_\alpha \colon C^\infty(P) \xrightarrow{\mathrm{Ham}} \mathrm{Der}(C^\infty(P)) \xrightarrow{\mathrm{div}_\alpha} C^\infty(P)$$

として定まる．ここで Ham は P の Poisson 構造から定まる Hamiltonian flow であり, div_α は α に関する発散写像である．以下では, まずこれら 2 つの写像の非可換幾何版を紹介し, それが曲面の場合 ($A = \mathbb{K}\pi$) に, Turaev が考えた別のループ演算 (と等価な演算) に一致することをみる．

2 Double Bracket と発散写像

以降 $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし, A を $\mathbb{K}$ 上の (単位的) 結合代数とする．まずは bivector の類似物から考える．Van den Bergh が [vdB08] において導入した double bracket を土台とするが, ここでは [AKKN23] で扱われているように少し条件を緩めたものを採用する．

まず, テンソル積 $A \otimes A$ には次のようにして可換な 2 つの両側 A 加群の構造が入る．任意の元 $a, b, x, y \in A$ について, outer structure と呼ばれる作用を

$$a \cdot (x \otimes y) \cdot b = ax \otimes yb$$

で定め, inner structure と呼ばれる作用は

$$a * (x \otimes y) * b = xb \otimes ay$$

で定める．

定義 2.1. A 上の **double bracket** とは $\mathbb{K}$-線型写像 $\Pi \colon A \otimes A \to A \otimes A$ であって

$$\Pi(a, bc) = \Pi(a, b) \cdot c + b \cdot \Pi(a, c)$$
$$\Pi(ab, c) = \Pi(a, c) * b + a * \Pi(b, c)$$

を任意の $a, b, c \in A$ について満たすものである．

重要な例として, 2 次元トポロジーに現れるループの演算から定まる double bracket κ を紹介する．これは Massuyeau–Turaev [MT14] と河澄–久野 [KK15] によって独立に導入されたものである．Σ を連結でコンパクトな有向曲面とし, 境界は空でないものとする．基点 $*$ を境界 $\partial\Sigma$ 上に取り, 基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ 上の群環 $A = \mathbb{K}\pi$ を考える．正の向きの短い弧 $\nu \colon [0, 1] \to \partial\Sigma$ を $\nu(1) = *$ となるように取って, $\nu(0) = \bullet$ とおく．これを用いて

$\pi_1(\Sigma, \bullet)$ は $\pi_1(\Sigma, *)$ と同一視する．一般の位置にある閉曲線であって, 基点を $\bullet$ にもつ α と, 基点を $*$ にもつ β に対して

$$\kappa(\alpha, \beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \mathrm{sign}(\alpha, \beta; p) \beta_{*p} \alpha_{p\bullet} \nu \otimes \nu^{-1} \alpha_{\bullet p} \beta_{p*} ,$$

と定める．ここで $\mathrm{sign}(\alpha, \beta; p) \in \{\pm 1\}$ は Σ の向きに関する局所交点数であり, β_{*p} は $*$ から p まで β に沿って進む曲線である．他も同様である．

ここでは Poisson bivector の満たすべき Jacobi 恒等式の類似物の定義は割愛する．一般の double bracket に対しての扱いは [vdB08] を, κ の場合の計算は [MT14] を参照されたい．

定義 2.2. A 上の **double deriavtion** とは $\mathbb{K}$-線型写像 $\theta \colon A \to A \otimes A$ であって

$$\theta(ab) = \theta(a) \cdot b + a \cdot \theta(b)$$

を任意の $a, b \in A$ について満たすものである．A 上の double derivation 全体の集合を $\mathrm{DDer}(A)$ とする．

Double bracket Π が与えられると, 1 つ目の条件式により $\Pi(a, \cdot)$ は double deriavtion である．そこで

$$\Pi \colon A \to \mathrm{DDer}(A) : a \mapsto \Pi(a, \cdot) ,$$

と (記号を濫用して) 書くことする．これは通常の Poisson 幾何では Hamiltonian flow に対応するものである．

次に発散写像について考える．上で述べたように, Poisson 多様体 P 上の発散写像は体積形式 α を選ぶごとに

$$\mathrm{div}_\alpha \colon \Gamma(TP) \to C^\infty(P), \quad \mathrm{div}_\alpha(\xi)\alpha = L_\xi(\alpha) \in \Omega^{\mathrm{top}}(P)$$

で特徴付けられる．ここで L_ξ はベクトル場 ξ による Lie 微分である．ここで, 体積形式 α を選ぶことは, 階数 1 のベクトル束 $\wedge^{\mathrm{top}} T^*P$ 上の平坦接続 ∇ であって $\nabla(\alpha) = 0$ で指定されるものと等価であり, ファイバーごとのトレース Tr を用いて

$$\mathrm{div}_\alpha(\xi) = \mathrm{Tr}(L_\xi - \nabla_\xi) \tag{1}$$

が成り立つ．

以上の観察のもとで, 非可換幾何の枠組みでも発散写像を導入しよう．$A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ を A の普遍包絡代数とする．(ここで述べるような流儀の) 非可換幾何の一般論は [Gin05] を参照されたい．

定義 2.3.

- **非可換 1-形式**の空間 $\Omega^1 A$ は, 両側 A 加群として記号 $da\,(a \in A)$ で生成され, 関係式
$$d(\lambda a + \lambda' a') = \lambda da + \lambda' da', \quad d(aa') = da\, a' + a da'$$
を各 $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, $a, a' \in A$ について課すものとする．すると, double derivation $\theta \in \mathrm{DDer}(A)$ は両側 A 加群の写像 $i_\theta \colon \Omega^1 A \to A \otimes A$ と等価であり, それらの関係は $i_\theta(da) = \theta(a)$ で与えられる．
- Double derivation $\theta \in \mathrm{DDer}(A)$ による $\Omega^1 A$ 上の **Lie 微分** L_θ は
$$L_\theta(adb) = \theta(a)' \otimes \theta(a)'' db + ad\theta(b)' \otimes \theta(b)'' + a\theta(b)' \otimes d\theta(b)''$$
で定まる．ここで Sweedler の記法 $\theta(a) = \theta(a)' \otimes \theta(a)''$ を用いた．上の式の右辺は $(\Omega^1 A \otimes A) \oplus (A \otimes \Omega^1 A)$ に値をもつ．
- 両側 A 加群 E 上の**接続**とは $\mathbb{K}$-線型写像
$$\nabla \colon E \to \Omega^1 A \otimes_A E \oplus E \otimes_A \Omega^1 A$$
であって Leibniz 則
$$\nabla(aeb) = da \otimes eb + a\nabla(e)b + ae \otimes db$$
を任意の $a, b \in A$ と $e \in E$ について満たすものである．
- E 上の接続 ∇ と double derivation θ が与えられたとき, 写像 ∇_θ を合成
$$\begin{aligned}\nabla_\theta \colon E &\xrightarrow{\nabla} \Omega^1 A \otimes_A E \oplus E \otimes_A \Omega^1 A \\ &\xrightarrow{i_\theta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes i_\theta} (A \otimes A) \otimes_A E \oplus E \otimes_A (A \otimes A) \cong (A \otimes E) \oplus (E \otimes A)\end{aligned}$$
で定める．とくに $E = \Omega^1 A$ の場合は, ∇_θ と L_θ の定義域, 値域はそれぞれ同じものである．

さて, 式 (1) を再現するにはトレースをとる写像が必要であるが, それはより一般的な形で定義することができる．

定義 2.4. B を一般の $\mathbb{K}$-結合代数とし, E を左 B 加群, W を両側 B 加群とする．また, E は B 上有限生成かつ射影的とする[*1]．このとき, **トレース** Tr は合成
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \colon \mathrm{Hom}_B(E, W \otimes_B E) \cong E^* \otimes_B W \otimes_B E &\to |W| := \mathrm{HH}_0(B, W) \cong W/[B, W] \\ \varepsilon \otimes w \otimes e &\mapsto \varepsilon(e)w\end{aligned}$$
で定まる．ここで $E^* = \mathrm{Hom}_B(E, B)$ は E の双対であり, これは右 B 加群である．

[*1] この条件は E が完全, つまり有限生成射影加群による有限長の分解を持つことに緩められる．

これを $B = A^e$, $E = \Omega^1 A$, $W = (A \otimes A \otimes A^{\mathrm{op}}) \oplus (A \otimes A^{\mathrm{op}} \oplus A^{\mathrm{op}})$ として適用する. 標準的な同一視

$$(A \otimes E) \oplus (E \otimes A) \cong W \otimes_B E$$

があることに注意する.

定義 2.5. $\Omega^1 A$ 上の接続 ∇ に伴う **triple divergence** を

$$\begin{aligned} \mathrm{TDiv}^\nabla \colon \mathrm{DDer}(A) &\to |W| \cong A \otimes |A| \oplus |A| \otimes A \\ \theta &\mapsto \mathrm{Tr}(L_\theta - \nabla_\theta) \end{aligned}$$

で定める.

これを double bracket Π と合わせると, 合成

$$\phi_{\Pi,\nabla} \colon A \xrightarrow{\Pi} \mathrm{DDer}(A) \xrightarrow{\mathrm{TDiv}^\nabla} A \otimes |A| \oplus |A| \otimes A$$

を得て, これがモジュラーベクトル場の類似物である.

3 Turaev の演算 μ

ここでは, Turaev が [Tur79] で導入したループの演算 (と等価な演算) μ を紹介する. 曲面 Σ と基点 $\bullet, *$ は上のとおりとし, Σ 上の framing (すなわち特異点を持たないベクトル場) fr を 1 つ固定する. 定義は [AKKN23] にならった.

定義 3.1. $\mathbb{K}$-線型写像 $\mu_r \colon \mathbb{K}\pi \to |\mathbb{K}\pi| \otimes \mathbb{K}\pi$ を次で定める. 基点を $*$ にもつ, 一般の位置にある閉曲線 $\alpha \in \pi$ について, その端点を弧 ν に沿ってずらすことで $\bullet$ から $*$ への道とし, monogons をいくつか挿入して fr についての回転数 $\mathrm{rot}^{\mathsf{fr}}(\alpha)$ が $-1/2$ となるようにする. そこで

$$\mu_r(\alpha) = \sum_{p \in \mathrm{Self}(\alpha)} \mathrm{sign}(p; \alpha_{\mathrm{first}}, \alpha_{\mathrm{second}}) |\alpha_{pp}| \otimes \alpha_{\bullet p *}$$

と定める. ここで $\mathrm{Self}(\alpha)$ は α の自己交差点の集合であり, α_{first} は α の p を 1 回目に通るときの速度ベクトルである. α_{second} も同様に定める.

また, $\mathbb{K}$-線型写像 $\mu_l \colon \mathbb{K}\pi \to \mathbb{K}\pi \otimes |\mathbb{K}\pi|$ を次で定める. 基点を $*$ にもつ, 一般の位置にある閉曲線 $\alpha \in \pi$ について, その端点を弧 ν に沿ってずらすことで $\bullet$ から $*$ への道とし, monogons をいくつか挿入して fr についての回転数 $\mathrm{rot}^{\mathsf{fr}}(\alpha)$ が今度は $1/2$ となるようにする. そこで

$$\mu_l(\alpha) = - \sum_{p \in \mathrm{Self}(\alpha)} \mathrm{sign}(p; \alpha_{\mathrm{first}}, \alpha_{\mathrm{second}}) \alpha_{* p \bullet} \otimes |\alpha_{pp}|$$

と定める. 最後に $\mu = \mu_r + \mu_l \colon \mathbb{K}\pi \to (|\mathbb{K}\pi| \otimes \mathbb{K}\pi) \oplus (\mathbb{K}\pi \otimes |\mathbb{K}\pi|)$ とおく.

さて, 前節の構成を $A = \mathbb{K}\pi$ の場合に適用すると $\phi_{\Pi,\nabla}$ がどのような写像になるか考えよう．その前に, $\Omega^1 A$ が定義 2.4 の仮定を満たすことを確かめる必要がある．上の曲面 Σ について基本群 π は有限生成自由群であることに注意する.

補題 3.2. 上の曲面 Σ について, 両側 A 加群 $\Omega^1 A$ は有限生成かつ自由である．とくに, π の自由生成系 $\mathcal{C} = \{\gamma_i\}_{1\le i\le r}$ をとるごとに, 集合 $\{d\gamma_i\}_{1\le i\le r}$ は $\Omega^1 A$ の A^e 加群としての基底である.

上の補題を用いて, $\mathcal{C}$ に付随する接続 $\nabla_{\mathcal{C}}$ を, 各 i について

$$\nabla_{\mathcal{C}}(d\gamma_i\,\gamma_i^{-1}) = 0$$

で定める．このようなものは Leibniz 則により一意に定まる．すると, 主結果は以下のように述べられる.

定理 3.3 ([Tan25])**.** 単純閉曲線からなる自由生成系 $\mathcal{C}$ を適切にとり, framing fr を各 $c \in \mathcal{C}$ について $\mathrm{rot}^{\mathsf{fr}}(c) = 0$ となるものとする．このとき, $\phi_{\kappa,\nabla_{\mathcal{C}}} = \mu$ が成り立つ.

証明は, 自由生成系 $\mathcal{C}$ 上での値が等しいことと, 同じ形の (Leibniz 則に似た) 乗法性を満たすことを確認する.

発散写像 (あるいは自己準同型のトレース) は, 「自分が自分に作用することで計算される値」である．一方で μ は自分を自己交差で切る演算であり, 上の定理はこの点において μ と発散写像を関連づけていると解釈できる.

謝辞. 本研究集会にお呼びくださいました世話人の佐藤先生には, この場をお借りして感謝申し上げます.

参考文献

[AKKN23] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, Version 3. 2023. `arXiv:1804.09566v3`.

[FR99] V. V. Fock and A. A. Rosly. Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r-matrix. *American Mathematical Society Translations*, 191(2):67–86, 1999. `arXiv:math/9802054`.

[Gin05] Victor Ginzburg. Lectures on noncommutative geometry. 2005. `arXiv:math/0506603`.

[Gol86] William M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Inventiones mathematicae*, 85(2):263–302, 1986. `doi:10.1007/BF01389091`.

[KK15] Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno. Intersection of curves on surfaces and their applications to mapping class groups. *Annales de l'Institut Fourier*, 65(6):2711–2762,

2015. arXiv:1112.3841, doi:10.5802/aif.3001.

[MT14] Gwenael Massuyeau and Vladimir Turaev. Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces. *International Mathematics Research Notices*, 2014:1:1–64, 2014. arXiv:1205.4898v3.

[Tan25] Toyo Taniguchi. Modular vector fields in non-commutative geometry. *Journal of Geometry and Physics*, 216:105565, 2025. arXiv:2410.24064, doi:10.1016/j.geomphys.2025.105565.

[Tur79] Vladimir G. Turaev. Intersections of loops in two-dimensional manifolds. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 35(2):229–250, 1979. doi:10.1070/sm1979v035n02abeh001471.

[vdB08] Michel van den Bergh. Double Poisson algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(11):5711–5769, 2008. arXiv:math/0410528.