

アノソフ流の手術と 8 の字結び目の例外手術 (野田健夫氏(東邦大学)との共同研究)

中江 康晴 (秋田大学大学院理工学研究科)*

概要

3 次元多様体の典型的なアノソフ流である測地流と懸垂流に対し, その測地流に種数 1 バーコフ切断を構成できれば, ある懸垂流と手術同値であると言える. 8 の字結び目の 1, 2, 3 手術によって得られるザイフェルト多様体における測地流が, 8 の字結び目の種数 1 曲面束から得られる懸垂流と手術同値であることを示すため, これらザイフェルト多様体に種数 1 バーコフ切断を構成する手法について概説する。

1 Introduction

3 次元多様体のフローであって, 各点でフローに横断的な拡大と縮小する方向を持つものをアノソフ流という. 典型的なアノソフ流は, トーラス上の位相同型写像から誘導される懸垂流と, 定負曲率曲面または双曲軌道体の単位接束における測地流である. これら懸垂流と測地流は, 全ての閉軌道が多様体上で稠密である推移的なアノソフ流である. 二つの多様体のそれぞれのアノソフ流が位相同値であるとは, 多様体から多様体への位相同型写像で, アノソフ流の軌道を軌道に写すものがあるときを言う. 懸垂流や測地流の閉軌道を多様体内的な結び目とみなして, その閉軌道に沿ったデーン手術を考えることで, Goodman [13], Fried [10], Handel-Thurston [14] らなどにより, アノソフ流の手術が 1980 年代に研究され, 懸垂流や測地流と位相同値ではないアノソフ流が構成された. Goodman と Fried によるアノソフ流の手術によって移り合うアノソフ流を, 手術同値なアノソフ流と言う.

アノソフ流に対し, はめ込まれた曲面であって, 内部がアノソフ流に横断的で, 境界が閉軌道または閉軌道への n 重被覆になっており, 全ての軌道と有限時間で交わるものを, Birkhoff 切断と呼ぶ. Birkhoff 切断にはアノソフ流によって曲面の自己同相写像が誘導され, これを return map と呼ぶ. Fried は 1983 年の論文 [10] において, 全ての推移的アノソフ流は Birkhoff 切断を持つことを示した. これに関連して同じ論文において Fried は「全ての推移的アノソフ流は, 懸垂流と手術同値か」という問題を提起した. これは, 「全ての推移的アノソフ流は, 種数 1 の Birkhoff 切断を持つか」という問題に言い換えられる.

測地流に対して, Birkhoff [2], Fried [10], Ghys [11], Brunella [3], Hashiguchi [15] らにより種数 1 の Birkhoff 切断が構成されてきた. これらの種数 1 の Birkhoff 切断により手術同値となる懸垂流はさらに, Minakawa [19][20], Dehornoy-Shannon [6] の定理により, 8 の字結び目の曲面束のモノドロミー写像と共に役な写像による懸垂流と手術同値である

* e-mail: nakae@math.akita-u.ac.jp

本研究は科研費(課題番号:19K03460)の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 37D20, 57R30, 57K30

キーワード : Anosov flow, Birkhoff section, figure-8 knot, exceptional surgery

ことがわかる. これらの構成された種数 1 の Birkhoff 切断は境界成分が 2 個以上であるが, 2015 年に Dehornoy により, 特異点が 3 個または 4 個の種数 0 の双曲軌道体上の単位接束における測地流に対し, 種数 1 で境界成分が 1 個である Birkhoff 切断が構成された [5]. 特にこの論文において, 特異点の指数が (2, 3, 7) である軌道体に対して構成された Birkhoff 切断は, 8 の字結び目の曲面束のモノドロミー写像と等しい return map を持つものとなっている.

8 の字結び目の 1-デーン手術で得られるザイフェルト多様体は指数 (2, 3, 7) の軌道体の単位接束であるため, この Birkhoff 切断が構成された測地流は, 8 の字結び目補空間における懸垂流の手術によって得られることがわかる. 同様にして, 8 の字結び目の 2-デーン手術では指数 (2, 4, 5) の軌道体の単位接束, 3 デーン手術では指数 (3, 3, 4) の軌道体の単位接束が得られることが知られているため, これら軌道体の単位接束の測地流に対して, 種数 1 で境界成分が 1 個であり, return map が 8 の字結び目の曲面束のモノドロミー写像と一致するものが構成されることが期待される. 実際, Dehornoy は 2024 年にこのような Birkhoff 切断を構成した [7]. 同様の構成を 2024 年に共同研究者の野田健夫氏との研究によって独立に得ていたが, Dehornoy によって先に論文として発表された.

これら Birkhoff 切断の構成において, Birkhoff 切断の境界の閉軌道となる測地線を見つけることが重要であるが, これを具体的に見つける研究を, 8 の字結び目のデーン手術における Kirby-Rolfsen 計算やモンテシノストリックを用いることで, 我々の共同研究において行なっている. これは Dehornoy の論文では用いられていない手法であり, また return map の具体的な計算についても, Dehornoy の論文とは異なるものになっている.

このようなアノソフ流の閉軌道に沿った手術が研究されてきた経緯と, その延長上にある 8 の字結び目に沿ったデーン手術との関連性について, 本講演で概説する.

2 Anosov flow and surgery on Anosov flows

局所的に双曲的な振る舞いをする 3 次元多様体上のフローをアノソフ流と呼ぶ. そのアノソフ流の閉軌道を 3 次元多様体内の結び目と見た時に, その閉軌道に沿ってデーン手術を行うことで, 新たな多様体と, その多様体上のアノソフ流を得ることができる. この章では, アノソフ流の定義と, 推移的アノソフ流の典型である測地流と懸垂流について述べたのち, アノソフ流の閉軌道に沿った手術の手法と, 関連する定理と結果について述べる.

2.1 Anosov flow and typical examples

M を閉 3 次元多様体, Φ_t を M 上の非特異で滑らかなフローとする. Φ_t がアノソフ流であるとは, 接ベクトル束 TM の $D\Phi_t$ で不变となる連続な分解 $TM = TX \oplus E^s \oplus E^u$ と定数 $C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$ が存在して, 以下を満たすときを言う.

- (1) $\dim TX = 1$ かつ TX は Φ_t に接する
- (2) $\|D\Phi_t(v)\| \leq C\lambda^t\|v\|$ for $\forall v \in E^s$, $\forall t > 0$,
- (3) $\|D\Phi_{-t}(v)\| \leq C\lambda^t\|v\|$ for $\forall v \in E^u$, $\forall t > 0$,

アノソフ流 Φ_t により部分ベクトル束 $TX \oplus E^s$ と $TX \oplus E^u$ が定まるが, これは完全可積分となる [1]. よって, これら接平面場によって二つの余次元 1 葉層構造 \mathcal{F}^s と \mathcal{F}^u が定まり, \mathcal{F}^s を安定葉層構造, \mathcal{F}^u を不安定葉層構造と呼ぶ. \mathcal{F}^s と \mathcal{F}^u が横断的に向き付け可

能であるとき Φ_t は向き付け可能であるといい, その横断方向の向きが定まっているとき, Φ_t は向き付けられているという.

アノソフ流 Φ_t の閉軌道が M で稠密であるとき, Φ_t は推移的であると呼ぶ. これは, 安定葉層構造 \mathcal{F}^s のすべての葉が M で稠密であること, また不安定葉層構造 \mathcal{F}^u のすべての葉が M で稠密であることと同値である. 推移的アノソフ流の典型例は以下の定負曲率曲面上または双曲軌道体上の測地流と, トーラス上の自己位相同型から誘導される懸垂流である. これら測地流や懸垂流はリーブルの作用から得られるものになっている. そのように得られるアノソフ流を代数的アノソフ流と呼ぶ.

例 1 (測地流 geodesic flow) S を定負曲率曲面または双曲軌道体とし, T^1S を S 上の単位接束とする. $x \in S$ と $v \in T_x S$, $\|v\| = 1$ を用いて, M の点を $(x, v) \in T^1S$ と表す. $(x, v) \in T^1S$ に対し, S 上の測地線 $\gamma_{x,v}$ を $\gamma_{x,v}(0) = x$, $\gamma'_{x,v}(0) = v$ を満たすものとする. この時, T^1S 上のフロー ϕ_t で $\phi_t(x, v) = (\gamma_{x,v}(t), \gamma'_{x,v}(t))$ を満たすものを, S 上の測地流 (geodesic flow) と呼ぶ.

例 2 (懸垂流 suspension flow) 2 次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と T^2 上の微分同相写像 $f : T^2 \rightarrow T^2$ に対し, f が行列 $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ から誘導される線型写像 $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ から得られる写像とする. $M = T^2 \times [0, 1]/(x, 1) \sim (f(x), 0)$ 上で, $[0, 1]$ 方向の微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ によるベクトル場から得られるフロー ϕ_t を懸垂流 (suspension flow) と呼び, $|\text{tr } A| > 2$ のとき, ϕ_t はアノソフ流になる.

2.2 Surgery on Anosov flows

3 次元多様体 M 上のアノソフ流 Φ_t に対し, Φ_t の閉軌道を結び目とみなしてデーン手術を考えることができる. このデーン手術では自由に手術スロープを取れるわけではなく, デーン手術により得られる多様体に誘導されるフローがまたアノソフ流になるために, スロープの取り方に制限が付く. このようなアノソフ流の手術は, 1980 年代に Goodman [13], Fried [10], Handel-Thurston [14] など, 懸垂流や測地流から, 懸垂流や測地流を含む代数的アノソフ流に位相同値とならないアノソフ流を作り出す手法として研究された. これらのうち, 特に Fried によるアノソフ流の手術の定義について, 以下に述べる.

Fried の手術

Φ_t を閉 3 次元多様体 M 上のアノソフ流, γ を Φ_t の閉軌道とする. $W^s(\gamma)$ と $W^u(\gamma)$ を, Φ_t の \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^u の葉であって γ を含むものとする. この $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$ は開いたアニュラスかメビウスの帯になる. M を γ に沿って blowing-up したものを M^* とする. すなわち, 各点 $x \in \gamma$ を, 円周 $(T_x M / T_x \gamma \setminus \{0\}) / \mathbb{R}_{>0} \cong S^1$ に取り替えたものとする. すると, M^* の内部は $M \setminus \gamma$ に位相同型であり, ∂M^* はトーラス T_γ となる. この操作により M^* に誘導されるフローを Φ_t^* とする. T_γ 上には Φ_t^* の閉軌道が 4 本あり, 2 本は attractive であり, もう 2 本は repelling である (図 1 参照).

トーラス T_γ 上に, ロンジチュードとして Φ_t^* の閉軌道をとり, メリディアンとして点 $x \in \gamma$ を blowing-up した S^1 をとる. T_γ 上の単純閉曲線 α を, Φ_t^* に横断的で, 閉軌道と 4 回交わるものとして取ると, α は $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ によるスロープ $1/n$ の単純閉曲線とみなせる. T_γ 上の円周による 1 次元葉層構造 \mathcal{C}_α を, Φ_t^* に横断的で α に平行な円周族として取る. この \mathcal{C}_α の各葉を 1 点にする M^* の blowing-down を M^α とすると, M^α は γ に沿つ

て $1/n$ デーン手術で得られる閉 3 次元多様体に等しい。この blowing-down によって M^α 上に Φ_t^* から得られるフロー Φ_t^α はアノソフ流になる [10]。

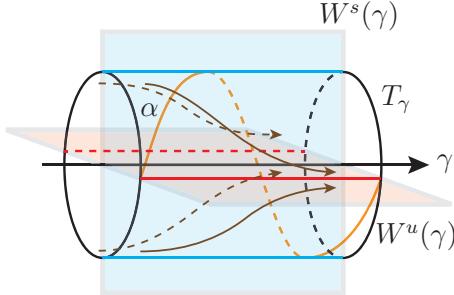


図 1 Fried's surgery

閉 3 次元多様体 M 上の余次元 1 葉層構造 \mathcal{F} を M の普遍被覆空間 \tilde{M} へ持ち上げた $\tilde{\mathcal{F}}$ を考え、 \mathcal{F} の葉空間 (leaf space) $\mathcal{T} = \tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}}$ を $\tilde{\mathcal{F}}$ の葉を 1 点にした空間として定める。 \mathcal{T} が実数全体の集合 \mathbb{R} と位相同型であるとき、 \mathcal{F} は \mathbb{R} -covered であるという。さらに、アノソフ流 Φ_t の安定葉層構造 \mathcal{F}^s と不安定葉層構造 \mathcal{F}^u が \mathbb{R} -covered であるとき、 Φ_t が \mathbb{R} -covered であるという。

推移的アノソフ流の典型例である測地流と懸垂流は \mathbb{R} -covered である。測地流と懸垂流の閉軌道に対するアノソフ流の手術に関する重要な定理の一つは、以下の Fenley によるものである。

定理 3 (Fenley [8, Theorem D]) Φ_t を 3 次元多様体 M の向き付けられた測地流またはアノソフ流となる懸垂流とする。向きが揃っている Φ_t の閉軌道による手術で得られるアノソフ流は、また \mathbb{R} -covered になる。

葉層構造 \mathcal{F} が \mathbb{R} -covered であるとき、普遍被覆空間 \tilde{M} の被覆変換から得られる基本群 $\pi_1(M)$ の葉空間 \mathbb{R} への作用は非自明かつ向きを保つ。このような作用があるとき、 $\pi_1(M)$ は左順序付け可能となることが知られている。ここで、群が左順序付け可能であるとは、群に全順序があり、その全順序が任意の元の左からの積で保たれるときをいう。

3 次元球面内の 8 の字結び目 K は種数 1 の曲面束結び目であり、その曲面束のモノドロミー写像の行列 $M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は $\text{tr } M_0 = 3$ であるので、補空間にアノソフ流を誘導する。このことと Fenley の定理を用いると、任意の整数 n に対し、 K に沿った n -デーン手術をして得られる多様体 $K(n)$ は左順序付け可能な基本群をもつことがわかる。

このようなアノソフ流の閉軌道に対する手術と定理 3 による \mathbb{R} -covered 葉層構造の存在を用いることで、市原一裕氏（日本大学文理学部）との共同研究により、レンズ空間内の種数 1 曲面束結び目に対して、以下の定理を得た。

定理 4 (Ichihara-N [17, Theorem 4.3]) K をレンズ空間 $L(\alpha, \beta)$ 内の種数 1 曲面束結び目とする。レンズ空間 $L(\alpha, \beta)$ と K のモノドロミー写像の行列 ϕ_\sharp が $GL_2(\mathbb{Z})$ で (1) または (2) の条件を満たす行列と共に役であるとき、基本群 $\pi_1(K(n))$ は左順序付け可能である。

- (1) $\alpha > 0$ に対し, $L(\alpha, \beta) = L(\alpha, 1)$ かつ $\phi_{\sharp} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる.
- (2) $L(\alpha, \beta)$ は整数 $p, q > 0$ に対し $\alpha = 2pq + p + q + 1, \beta = 2q + 1$ を満たし, $\phi_{\sharp} = \begin{pmatrix} 2pq + p - q & 2pq + 3p - q - 1 \\ 2q + 1 & 2q + 3 \end{pmatrix}$ となる.

3 Birkhoff section

多様体 M 上のアノソフ流 Φ_t と N 上のアノソフ流 Ψ_t が位相同値 (topologically equivalent) であるとは, 位相同型 $h : M \rightarrow N$ で Φ_t の軌道を Ψ_t の軌道に向きを保って写すものがあるときをいう. この h は時間パラメータ t は保たなくても良い. これに対し, Φ_t と Ψ_t が手術同値 (almost equivalent) であるとは, Φ_t の閉軌道の集合 $\Gamma = \{\gamma_i\}$ と同じ本数の Ψ_t の閉軌道の集合 $\Gamma' = \{\gamma'_i\}$ があって, $M \setminus \Gamma$ と $N \setminus \Gamma'$ において Φ_t と Ψ_t が位相同値になるときをいう.

測地流と懸垂流は位相同値になることはないが, 手術同値となる測地流と懸垂流があることが知られており, これは以下で定義する Birkhoff 切断を用いることで考えることができる.

定義 5 (Birkhoff [2], Fried [9]) 3 次元多様体 M のフロー Φ_t に対し, 以下を満たす M 内の曲面 S を Φ_t の Birkhoff 切断 (Birkhoff section) という.

- (1) $\text{Int } S$ は埋め込まれた曲面で Φ_t に横断的である
- (2) 境界 ∂S は M にはめ込まれて, Φ_t の閉軌道の被覆になる
- (3) S は有限時間で Φ_t の全ての軌道と交わる. すなわち, ある $T > 0$ が存在して, 任意の $x \in M$ に対し $\Phi_t(x) \in S$ となるような $0 \leq t \leq T$ が存在する.

推移的アノソフ流と Birkhoff 切断に関して, Fried による以下の定理が重要である.

定理 6 (Fried [10, Theorem 2]) 閉 3 次元多様体 M の全ての推移的アノソフ流に対して, Birkhoff 切断が存在する.

推移的アノソフ流 Φ_t の Birkhoff 切断 S に対し, 閉軌道 ∂S をそれぞれ 1 点にした曲面を \hat{S} とする. Φ_t により定まる return map $f : S \rightarrow S$ から, 擬アノソフ写像 $\hat{f} : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$ が得られる. もしこの Birkhoff 切断の種数が 1 ならば, \hat{f} はトーラス上の位相同型として得られる. すなわち, 推移的アノソフ流 Φ_t に対し種数 1 の Birkhoff 切断が存在すると, Φ_t はある懸垂流と手術同値であることがわかる.

実際, Fried は Birkhoff の構成 [2] を応用し, 種数 2 の曲面の単位接束の測地流に対し, 種数 1 で境界成分が 12 個の Birkhoff 切断を構成した [10]. また, Ghys は種数 g の曲面の単位接束の測地流に対し, 種数 1 で境界成分が $4g + 4$ 個の Birkhoff 切断を構成した [11]. さらに, Brunella による異なる方法による種数 1 の Birkhoff 切断の構成 [3] がなされ, Hashiguchi による構成 [15] や, Hashiguchi, Minakawa らによる双曲軌道体上の測地流に対する構成 [16] がなされている.

このように, 定負曲率曲面や双曲軌道体の単位接束の測地流に対する種数 1 の Birkhoff 切断が構成され, ある行列 A で表されるトーラス上の写像 f_A によって得られる懸垂流と

手術同値であることがわかる. さらに, 2004 年のトポロジーシンポジウムの皆川宏之氏の講演アブストラクト [19] と 2013 年の国際研究集会「Geometry and Foliations 2013」の講演アブストラクト [20] で以下の定理 7 と証明の概略が述べられ, 2019 年に Dehornoy と Shannon によるプレプリント [6] で証明がなされている.

定理 7 (Minakawa [19, Theorem 5.6], [20, Theorem 3.1], Dehornoy-Shannon[6, Theorem B1]) 任意の $\text{tr } A \geq 4$ である $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し, $\text{tr } B < \text{tr } A$ となる $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ で, A によって誘導される懸垂流と, B によって誘導される懸垂流が手術同値となるものが存在する.

ここで, $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ が $\text{tr } B = 3$ ならば M_0 と共になることに注意すると, 定理 7 により, 行列 $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ によって得られる懸垂流と, 8 の字結び目による曲面束のモノドロミー写像を表す行列 M_0 によって得られる懸垂流が, 有限回の手術により手術同値であることがわかる.

また Dehornoy と Shannon により, 双曲軌道体の単位接束の測地流は種数 1 の Birkhoff 切断を持つことが証明されている [6, Theorem C2]. 上記をまとめると, 定理は以下のように述べることができる.

定理 8 (Dehornoy-Shannon[6, Theorem A]) アノソフ流である懸垂流と測地流で向き付け可能であるもの全ては, 行列 M_0 から得られる懸垂流と手術同値である.

ここまで見て来た測地流に対する種数 1 の Birkhoff 切断の構成は, いずれも境界成分が複数あるものであった. Dehornoy は 2015 年に, 特異点が 3 個または 4 個の種数 0 の軌道体上の測地流に対して, 種数 1 で境界成分が 1 個の Birkhoff 切断を具体的に構成した [5]. そのうち, 特に特異点が 3 個の場合については, 以下のものになる.

定理 9 (Dehornoy[5, Proposition C の一部])

(a) $1/2 + 1/q + 1/r < 1$ となる $q \leq r$ による双曲軌道体 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,q,r}$ の単位接束 $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,q,r}$ 上の測地流 $\Phi_{2,q,r}$ は種数 1 の Birkhoff 切断を持ち, その return map は以下の行列で表される写像と共に役である.

$$\begin{cases} X^{r-6}Y & \text{for } q = 3 \\ X^{q-4}YX^{r-4}Y & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) $1/p + 1/q + 1/r < 1$, $p, q, r > 2$ に対して, $\Phi_{p,q,r}$ は種数 1 の Birkhoff 切断を 2 つ持ち, その return map は $X^{p-3}YX^{q-3}YX^{r-3}Y$ と $X^{p-3}YX^{r-3}YX^{q-3}Y$ である.

ここで, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

上記の定理 9 (a)において, $q = 3$, $r = 7$ とすると return map を表す行列 XY は M_0 に等しくなる. すなわち, $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,3,7}$ 上の測地流 $\Phi_{2,3,7}$ は 8 の字結び目の曲面束が誘導する懸垂流の手術で得られることがわかる. 実際, 8 の字結び目 K に沿った ± 1 -デーン手術で得られる多様体は, 指数 $(2, 3, 7)$ の特異ファイバーを持つ球面を底空間とするザイフェルト多様体であり, この単位接束 $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,3,7}$ に等しい [25, Chapter 4], [4, Section 5.7].

さらに, 8 の字結び目 K の 2-デーン手術で得られる多様体は $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,4,5}$ に等しく, 3-デーン手術で得られる多様体は $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{3,3,4}$ に等しい. よって, 種数 1 の Birkhoff 切断であって, 境界成分が 1 個であり, かつ return map が行列 M_0 で表されるものが, $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{2,4,5}$ と $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{3,3,4}$ に存在することが期待される. 実際, Dehornoy は 2024 年に以下を示した [7].

定理 10 (Dehornoy[7, Proposition 1 の一部]) $(p, q, r) = (2, 4, 5), (3, 3, 4)$ に対し, $T^1\mathbb{H}^2/\Gamma_{p,q,r}$ 上の測地流 $\Phi_{p,q,r}$ は, 種数 1 で境界成分が 1 個となる Birkhoff 切断で, return map が M_0 で表される写像と等しくなるものをもつ.

定理 10 は, 双曲軌道体 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{p,q,r}$ 上に閉測地線を上手く取り, それに合わせて Brunella による種数 1 の Birkhoff 切断の構成 [3] や, 2015 年の Dehornoy の論文 [5] の section 3 における構成の手法を適用することにより Birkhoff 切断を構成している. 定理 10 と同様の結果を野田健夫氏との共同研究で得ていたが, Dehornoy によって先にプレプリントとして発表され, また出版予定とのことである. これらの Dehornoy による Birkhoff 切断の構成は我々の共同研究で構成したものとほぼ同様であるが, 構成の際に必要となる Birkhoff 切断の境界となる閉測地線をどのように得たかについては, Dehornoy の論文では書かれていません. 我々の共同研究では, 8 の字結び目の手術で得られるザイフェルト多様体上に, モンテシノストリックの手法をたどることで, Birkhoff 切断の境界となる閉測地線が 8 の字結び目の行き先として得られることを示している. この閉測地線を見つける過程と, その閉測地線を境界に持つような Birkhoff 切断の構成について, 次章で解説する.

4 Exceptional surgery on figure-8 knot and genus one Birkhoff section

以降, K を S^3 内の 8 の字結び目とする. K は種数 1 の曲面束結び目であり, その曲面束のモノドロミー写像は行列 M_0 で表される一つ穴あきトーラス T 上の自己同相写像である. n を整数とし, K に沿った n -デーン手術で得られる閉 3 次元多様体を $K(n)$ で表すこととする. K の管状近傍を $N(K)$ と表したとき, $K(n)$ は $S^3 \setminus \text{int } N(K)$ にソリッドトーラス $V = D^2 \times S^1$ を貼り合わせたものである.

いま, $K(n)$ 内の Birkhoff 切断 S であって, return map が M_0 から誘導されるものを見つけたいので, K のザイフェルト曲面 \hat{S} が $K(n)$ において写った先が S であると考えれば, 少なくとも Birkhoff 切断 S の境界は, 貼り合わせるトーラス境界 $\partial N(K)$ の $K(n)$ における行き先にあると考えることができる. この $\partial N(K)$ が $K(n)$ の中でどの位置にあるかを, Kirby-Rolfsen 計算とモンテシノストリックを使って見つける方法を, 以下で述べる. Kirby-Rolfsen 計算については [24, Chapter 9.H] を, モンテシノストリックについては [21] を参照のこと. また両者についてと 8 の字結び目のザイフェルト手術については茂手木 [22] を参照のこと.

以下, ポアンカレ円盤 \mathbb{H}^2 を三角群 $\Gamma_{p,q,r}$ で割って得られる, 指数 (p, q, r) を持つ軌道体 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{p,q,r}$ を $\Sigma_{p,q,r}$ で表することにする.

4.1 1-surgery:(2,3,7)-orbifold

Kirby-Rolfsen 計算を用いると, $K(1)$ は三葉結び目 $T_{2,3}$ の (-1) -デーン手術 $T_{2,3}(-1)$ と等しくなる (図 2, [22, p.185, 図 11.1] 参照). S^3 を二つのソリッドトーラス V_1, V_2 に分け, 三葉結び目 $T_{2,3}$ が $\partial V_1 = \partial V_2$ 上にあると見れば, $T_{2,3}(-1)$ は V_1, V_2 の芯線が指數 2, 3 の特異ファイバー, デーン手術で貼り付けたソリッドトーラスの芯線が指數 7 の特異ファイバーと見なすことができて, 底空間が S^2 であるザイフェルト多様体 $S^2(2,3,7)$ になる [23].

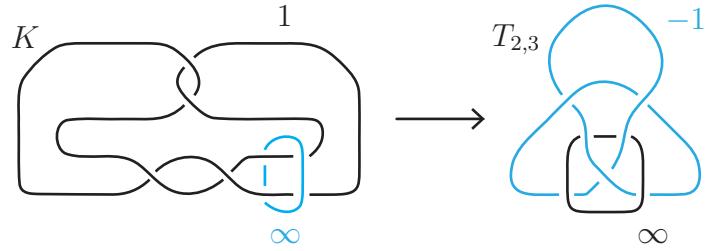


図 2 $K(1) \cong T_{2,3}(-1)$

$T_{2,3}(-1)$ における K の行き先をソリッドトーラス V_1 の中で見てみると, $T_{2,3}$ に 8 の字で絡む形をしている (図 3 中段). これを $S^2(2,3,7)$ の底空間である軌道体 $\Sigma_{2,3,7}$ へ射影すると, 指数 2 の尖点を通り, 指数 3 と 7 の間を通る曲線になることがわかる (図 3 右).

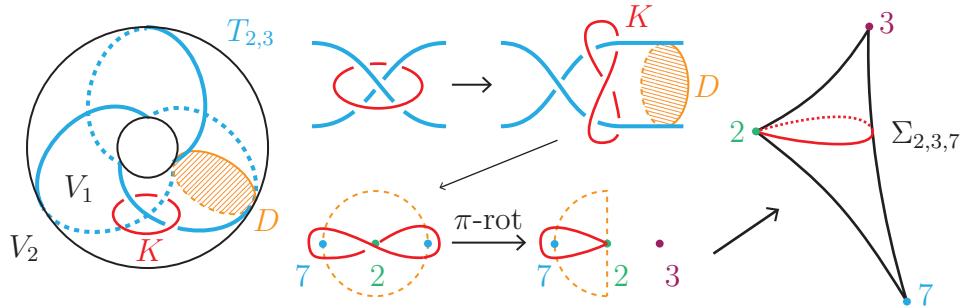


図 3 $T_{2,3}(-1)$ の特異ファイバーと底空間

実際, この $\Sigma_{2,3,7}$ における K の行き先となっている測地線は, Dehornoy [5] の Proposition C で用いられている測地線と一致している. この測地線に対し, Brunella の Birkhoff 切断の取り方と同様に, この測地線と反対向きの測地線を結ぶような $T^1\Sigma_{2,3,7}$ 内の円環を用いることで, 求める Birkhoff 切断を構成することができる.

4.2 2-surgery:(2,4,5)-orbifold

$K(2)$ がザイフェルト多様体 $S^2(2,4,5)$ と位相同型であることは, 以下のようにモンテシノストリックを用いて理解することができる. モンテシノストリックを使うため, S^3 の中の K と, K を K に写す π 回転による S^3 の自己同相写像の軸となる自明な結び目 \tilde{O} を用意する (図 4 上段, [22, p.187, 図 11.2 参照]). この自己同相写像で割って得られる S^3 の自明な結び目 O と, K の像 κ に対し, 図 4 中段のように (-2) -タンゲル手術をする

ここで得られた絡み目 L は図 4 下段のようなモンテシノス絡み目 $M(1/2, -1/4, -1/5)$ になる. L の 2 重分岐被覆がザイフェルト多様体 $S^2(2, 4, 5)$ となることから, $K(2)$ が $S^2(2, 4, 5)$ に位相同型であることがわかる.

この過程において, κ の L との相対的な位置を調べることにより, 図 4 下段のように, $S^2(2, 4, 5)$ の底空間 $\Sigma_{2,4,5}$ において K に対応している測地線を見つけることができる.

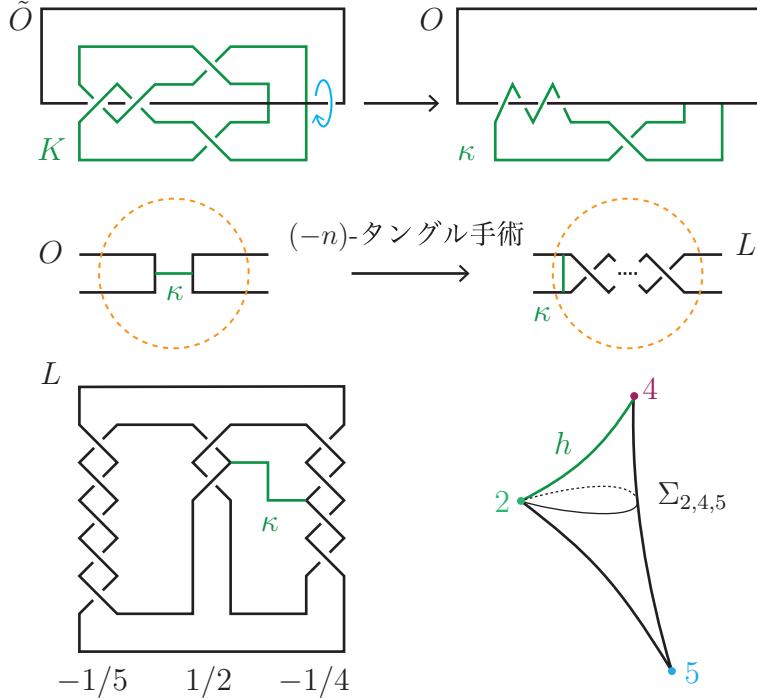


図 4 $K(2)$ を作るモンテシノス絡み目と K の行き先

この $\Sigma_{2,4,5}$ 上で見つけた測地線を h とする. h をポアンカレ円盤 \mathbb{H}^2 ヘリフトしたものを H とし, H に向きを一つ定めておく. この H に対し, $T^1\mathbb{H}^2$ 内の二つの曲面 \tilde{S}_0^+ と \tilde{S}_0^- を以下のように定める(図 5).

$$\begin{aligned}\tilde{S}_0^+ &= \{(x, v_\theta) \in T^1\mathbb{H}^2 \mid x \in H, v_\theta \in T_x^1\mathbb{H}^2, \theta_{v_x} \leq \theta \leq \theta_{-v_x}\} \\ \tilde{S}_0^- &= \{(x, v_\theta) \in T^1\mathbb{H}^2 \mid x \in H, v_\theta \in T_x^1\mathbb{H}^2, \theta_{-v_x} \leq \theta \leq \theta_{v_x}\}\end{aligned}$$

ここで, θ_{v_x} を x における H の接方向の角度, θ_{-v_x} を H の逆向きの測地線 $-H$ の接方向の角度とする. 射影 $p : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\Sigma_{2,4,5}$ による像を $S_0^+ = p(\tilde{S}_0^+)$, $S_0^- = p(\tilde{S}_0^-)$ とする. 特異ファイバーにおける同一視で $S_0^+ \cup S_0^-$ ははめ込みになる. これを Fried の論文 [10] のようにアノソフ流の向きに合わせて交差を解消すると, 種数 1 の Birkhoff 切断が得られ, return map が M_0 で導かれる自己同相写像に等しくなることが確かめられる.

4.3 3-surgery:(3,3,4)-orbifold

$K(3)$ がザイフェルト多様体 $S^2(3, 3, 4)$ と位相同型になることも, $K(2)$ の時と同様にモンテシノストリックを用いることで理解できる. $K(2)$ の場合と同様の記号を用いると, (-3) -タングル手術で得られる結び目 L と κ の位置関係は図 6 左のようになり, これを用

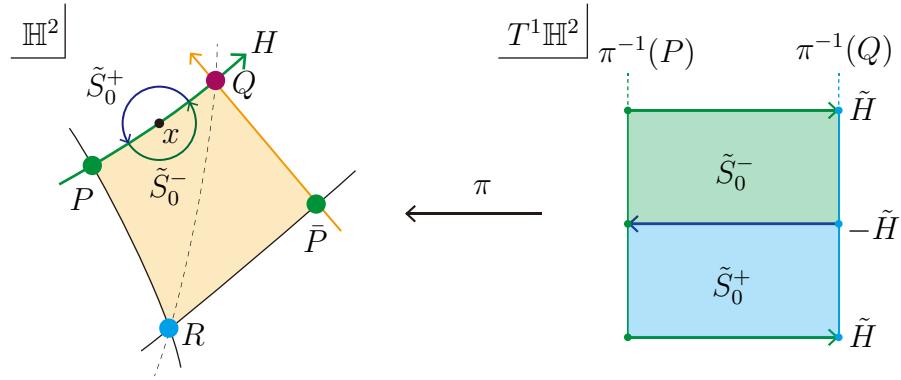


図 5 $T^1\mathbb{H}^2$ 内の \tilde{S}_0^+ と \tilde{S}_0^-

いて $S^2(3,3,4)$ の底空間を軌道体 $\Sigma_{3,3,4}$ とみなしたときの、射影による像は図 6 右のように得られる。この測地線を γ とする。

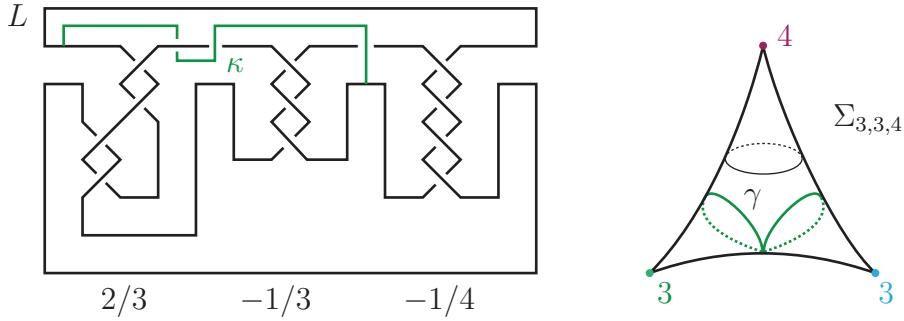


図 6 $K(3)$ を作るモンテシノス結び目 L と κ , $\Sigma_{3,3,4}$ の測地線 γ

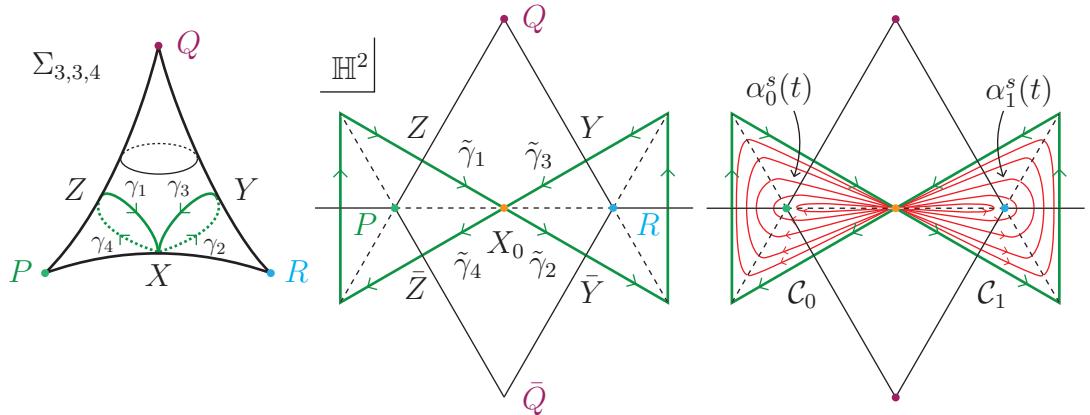


図 7 $\Sigma_{3,3,4}$ の γ と $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$

この $\gamma \subset \Sigma_{3,3,4}$ の \mathbb{H}^2 への持ち上げを $\tilde{\gamma}$ とする。 \mathbb{H}^2 上で $\tilde{\gamma}$ で囲まれる二つの領域に、1 次元特異葉層構造 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ をそれぞれ図 7 右のように構成する。 \mathcal{C}_i の葉を曲線

$\alpha_i^s(t), (s, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$ と表し, これらを用いて作られる $T^1\mathbb{H}^2$ 内の曲面 \tilde{F}_i を以下の
ような閉包として定める.

$$\tilde{F}_i = \text{cl} \left\{ (x, v) \in T^1\mathbb{H}^2 \mid x = \alpha_i^s(t), v = \frac{d\alpha_i^s(t)/dt}{\|d\alpha_i^s(t)/dt\|}, (s, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \right\}$$

射影 $p : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\Sigma_{3,3,4}$ による像を $F_i = p(\tilde{F}_i)$ とすると, $F = F_0 \cup F_1$ は特異ファイ
バーにおける同一視と交差の解消により, 境界が γ を 3 回通る一つの曲面になる. また,
オイラー数の計算から種数 1 であることがわかる. さらに, F の内部で全ての軌道が横断
的に交わり, return map が M_0 で誘導される自己同相写像に等しくなる Birkhoff 切断で
あることがわかる.

5 Problem

K に沿った 4-デーン手術で得られる多様体 $K(4)$ は, 次のようなグラフ多様体となる
ことが知られている [25]. M_1 をクラインの壺上の I 束, M_2 を三葉結び目 $T_{2,3}$ の外
部空間とすると, それぞれ底空間が円盤 D^2 であるザイフェルト多様体 $M_1 = D^2(2, 2)$,
 $M_2 = D^2(2, 3)$ となる. これらにより, $K(4)$ は $T = \partial M_1 = \partial M_2$ を本質的トーラスに持
つグラフ多様体 $K(4) = M_1 \cup_T M_2$ となる. 定理 3 により, $K(4)$ には推移的な \mathbb{R} -covered
アノソフ流があるので, このアノソフ流についても種数 1 で境界成分が 1 個の Birkhoff
切断を構成できる可能性がある. しかし $K(4)$ はグラフ多様体であり, M_2 には Ghys の構
成 [12] により $T^1\mathbb{H}^2$ の測地流から得られるアノソフ流があるが, 今までの構成と同様の
方法では, M_1 と M_2 に跨るような形で Birkhoff 切断を構成できず, これを解決するこ
とが課題である.

今回構成した Birkhoff 切断は, 種数 1 で境界成分が 1 個のものであった. 任意の推移的
アノソフ流に対して, 境界成分が 2 個の Birkhoff 切断が構成できることを Tsang が示し
ている [26]. また, skewed \mathbb{R} -covered アノソフ流に対しては, 境界成分が 1 個の Birkhoff
切断が存在することを Marty が示している [18]. これらに種数に対する条件を加えて, 境
界成分が 1 個または 2 個のまま, 種数 1 の Birkhoff 切断が構成できるためのアノソフ流
の条件や, または種数の下限を得ることも問題として考えられる.

8 の字結び目 K の外部空間には, K を周期 1 の閉軌道とみなす時, 周期 2 やそれ以上の
閉軌道が存在する. 周期 2 の軌道に対する手術で得られる多様体に対する, 種数 1 で境界
成分が 1 個, return map が M_0 となる Birkhoff 切断の構成は Dehornoy の論文 [7] で行
われてる. これをさらに, 周期 3 以上の閉軌道に対して同様の Birkhoff 切断を得られるか
も問題として考えられる.

参考文献

- [1] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **90** (1967). Translated from the Russian by S. Feder American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969 iv+235 pp.
- [2] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), no. 2, 199–300.

- [3] M. Brunella, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **3** (1994), no. 3, 335–344.
- [4] D. Cooper, C. D. Hodgson, S. P. Kerckhoff, *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, With a postface by Sadayoshi Kojima, MSJ Mem., **5**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. x+170 pp.
- [5] P. Dehornoy, *Genus-one Birkhoff sections for geodesic flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **35**(2015), no.6, 1795–1813.
- [6] P. Dehornoy, M. Shannon, *Almost equivalence of algebraic Anosov flows*, arXiv:1910.08457, 2019,
- [7] P. Dehornoy, *The cat-bat map, the figure-eight knot, and the five orbifolds*, arXiv:2409.06543, 2024,
- [8] S. R. Fenley, *Anosov flows in 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), no. 1, 79–115.
- [9] D. Fried, *The geometry of cross sections to flows*, Topology **21** (1982), no. 4, 353–371.
- [10] D. Fried, *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*, Topology **22** (1983), no. 3, 299–303.
- [11] É. Ghys, *Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 59–76.
- [12] É. Ghys, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 247–277, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007
- [13] S. Goodman, *Dehn surgery on Anosov flows*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), 300–307, Lecture Notes in Math., 1007, Springer, Berlin, 1983.
- [14] M. Handel, W. P. Thurston, *Anosov flows on new three manifolds*, Invent. Math. **59** (1980), no. 2, 95–103.
- [15] N. Hashiguchi, *PL-representations of Anosov foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 4, 937–965.
- [16] N. Hashiguchi, H. Minakawa, *Genus one Birkhoff sections for the geodesic flows of hyperbolic 2-orbifolds*, Geometry, dynamics, and foliations 2013, 367–386, Adv. Stud. Pure Math., **72**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017
- [17] K. Ichihara, Y. Nakae, *Integral left-orderable surgeries on genus one fibered knots*, J. Knot Theory Ramifications **30**(2021), no.4, Paper No. 2150018, 16 pp.
- [18] T. Marty, *Skewed Anosov flows are orbit equivalent to Reeb-Anosov flows in dimension 3*, arXiv:2301.00842, 2023.
- [19] 皆川宏之, *3次元多様体上のアノソフ流のバーコフ切断について*, 第51回トポロジーシンポジウム講演集, 2004.
- [20] H. Minakawa, *Genus one Birkhoff sections for suspension Anosov flows*, “Geometry and Foliations 2013”, Komaba, Tokyo, Japan, abstract of talk, 2013, https://tsuboiweb.matrix.jp/faculty-html-gf2013/abstract_files/gf2013_137-140.pdf
- [21] J. M. Montesinos, *Surgery on links and double branched covers of S^3* , Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox), pp. 227–259, Ann. of Math. Stud., No. 84, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975
- [22] 茂手木公彦, *Dehn Surgery – Introduction to 3-Dimensional Topology*, 共立出版, 2022.
- [23] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math. **38** (1971), 737–745.

- [24] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, **7**. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [25] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, <https://library.slmath.org/nonmsri/gt3m/>
- [26] C. C. Tsang, *Constructing Birkhoff sections for pseudo-Anosov flows with controlled complexity*, Ergodic Theory Dynam. Systems **44** (2024), no. 8, 2308–2360.