

低次元球面内の fibered knot の研究について

石川 昌治 (慶應義塾大学)*

1 序文

ここ数年、福田瑞季氏（広島大学 WPI-SKCM²）と、branched twist spin と呼ばれる S^4 上の S^1 -作用で不变な 2 次元結び目の研究を進めている。 S^3 上の S^1 -作用で不变な結び目はトーラス結び目であり、branched twist spin は 2 次元結び目理論における、トーラス結び目に對応するクラスと言える。Twist spun knot はこのクラスに含まれる。論文 [10] では、ある条件下で、 S^3 内の 2 つの結び目が同値でなければ、それらから構成される 2 つの branched twist spin も同値ではないことを示した（後述の定理 5.1）。

この研究のもともとの動機は複素変数の重み付き斉次多項式の特異点の研究から来るもので、将来的にはその方向に繋げられれば良いと考えている。本稿はその動機が伝わることを目的として書いている。§2 で Milnor 束および simple fibered knot の定義を述べた後、§3 で fibered knot の次元を跨ぐ構成法として、cyclic suspension と twisting を紹介する。こういった次元を跨ぐ構成は低次元トポロジーの技術を高次元の研究に繋げる道具となるので、上手く利用したいところである。§4 で球面上の S^1 -作用、特に branched twist spin を与える S^4 上の S^1 -作用について説明する。最後に、§5 で主結果を紹介する。

本研究全般において、多くの方々にご助言を頂きました。この場を借りて、お礼申し上げます。また、本稿では先生方の名前の敬称は省略しています。ご容赦ください。

2 奇数次元球面内の simple fibered knot

2.1 複素孤立特異点の Milnor 束

$f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ を複素多項式写像とする。点 $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ におけるヤコビ行列の階数が 0 のとき、つまり

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}(a), \frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \right) = (0, 0, \dots, 0)$$

のとき、 a を f の特異点という。点 $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ が f の特異点であり、かつ、 a の近傍 U で f が $U \setminus \{a\}$ 上で非特異となるものが存在するとき、 a を f の孤立特異点という。以下、 f の点 a での特異点を (f, a) 、原点を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の球面を S_ε^{2n+1} と表す。

定理 2.1 (Milnor [23]). $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(0) = 0$ を満たす複素多項式写像とし、 $\varepsilon' > 0$ を正の実数とする。任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ に対して

$$\phi := \frac{f}{|f|} : S_\varepsilon^{2n+1} \setminus f^{-1}(0) \rightarrow S^1$$

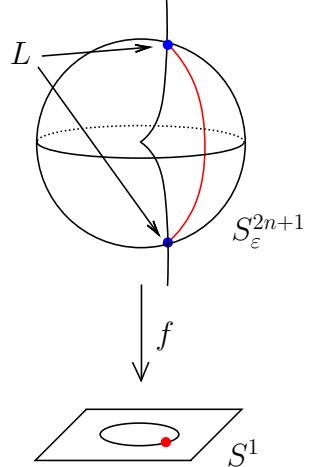
* 〒223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1
e-mail: ishikawa@keio.jp

が局所自明なファイバー束となる $\varepsilon' > 0$ が存在する.

$L = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ を特異点のリンクという. 原点 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ が孤立特異点のとき, 特異点のリンクは $2n+1$ 次元球面 S_ε^{2n+1} に埋め込まれた滑らかな $2n-1$ 次元の向き付け可能多様体となる.

例 2.2. $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$ のとき, 特異点のリンク $\Sigma(a_0, a_1, \dots, a_n) := S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ を Brieskorn 多様体という. エキゾチック球面に関連することで有名である ([3]).

$t \in S^1$ に対し, $F = \phi^{-1}(t)$ を f の Milnor fiber という. 原点 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ が孤立特異点のとき, Milnor fiber F は $(n-1)$ -connected であり, さらに有限個の S^n のブーケ (bouquet) とホモトピー同値である.



2.2 Simple fibered knot

S^{2n+1} に埋め込まれた $2n-1$ 次元多様体 K が次の条件を満たすとき, K を simple fibered knot という.

- (1) 局所自明束 $\phi : S^{2n+1} \setminus K \rightarrow S^1$ が存在する.
- (2) K の環状近傍 $N(K)$ と, $N(K)$ から自明束 $K \times D^2$ への bundle equivalence α で,

$$\begin{array}{ccc} N(K) \setminus K & \xrightarrow{\alpha|_{N(K) \setminus K}} & D^2 \setminus \{0\} \\ & \searrow \phi|_{N(K) \setminus K} & \swarrow p \\ & S^1 & \end{array}$$

が可換となるものが存在する. ここで, p は $(x, r) \in K \times (D^2 \setminus \{0\})$ を $r/|r|$ に移す射影である.

- (3) K を境界とする S^{2n+1} 内の $(n-1)$ -connected な向き付け可能多様体 (Seifert surface) が存在する.

定理 2.3 (Durfee [4], 加藤 [19]). $n \geq 3$ とする. S^{2n+1} 内の simple fibered knot が同値であることと, Seifert form が integral unimodular bilinear form として同値であることは必要十分である.

論文 [19] では simple spinnable structure と呼んでいる. この定理から分かるように, $n \geq 3$ のときは, simple fibered knot の研究は Seifert form を使って進めることができ, 代数的な問題に書き換わる. 例えば, 次の定理が成り立つ.

定理 2.4 (Lines [22]). $n \geq 3$ とする. S^{2n+1} 内の simple fibered knot は自明な結び目から Hopf plumbing とその逆操作を繰り返すことで構成できる.

Hopf plumbing とは, simple fibered knot のファイバーに $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2$ の原点での特異点の Milnor fiber, あるいはその mirror image を貼り付ける操作である. 私の知る限りでは, この主張は $n = 1, 2$ のときは未解決である.

S^3 内の fibered link は結び目理論における重要な研究対象の一つであり, 多くのことことが知られている. S^5 内の simple fibered knot については, 佐伯による一連の研究がある. 論文 [29] を参照.

3 Fibered knot の次元を跨ぐ構成

3.1 Cyclic suspension

複素多項式写像 $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ は $f(0) = 0$ を満たし, 原点に孤立特異点をもつとする. f および自然数 m に対し, $n+2$ 変数の複素多項式写像 $g : \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}$ を

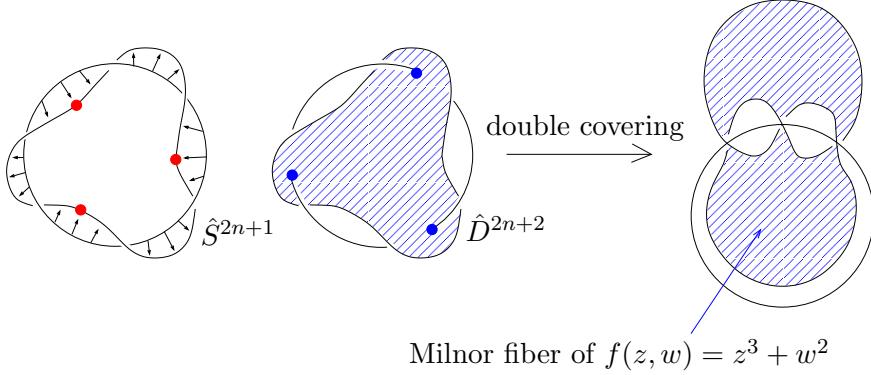
$$g(z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_0, z_1, \dots, z_n) + z_{n+1}^m$$

で定める. 特異点 $(g, 0)$ リンク L_g は $g(z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = 0$ と S_ε^{2n+3} との共通部分として得られる. この定義式を $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = -z_{n+1}^m$ と変形すると, L_g は S_ε^{2n+1} の, 特異点 $(f, 0)$ のリンク L_f に沿った m 重巡回分岐被覆であることが分かる. 例えば, Brieskorn 多様体 $\Sigma(a_0, a_1, a_2)$ は S^3 のトーラス結び目 $\Sigma(a_0, a_1)$ に沿った a_2 重巡回分岐被覆として得られる. $\Sigma(a_0, a_1, a_2)$ は特異点のリンクであり, S^5 に埋め込まれている. この S^5 の $\Sigma(a_0, a_1, a_2)$ に沿った a_3 重巡回分岐被覆として $\Sigma(a_0, a_1, a_2, a_3)$ が得られる. Kauffman の論文 [20] では, この関係を以下のように図示している.

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ \Sigma(a_0, a_1, a_2, a_3) & \longrightarrow & S^7 \\ & & \downarrow \\ \Sigma(a_0, a_1, a_2) & \longrightarrow & S^5 \\ & & \downarrow \\ \Sigma(a_0, a_1) & \longrightarrow & S^3 \end{array}$$

Kauffman は論文 [20] で, 特異点 $(f, 0)$ から特異点 $(g, 0)$ の Milnor fiber を構成している. 具体的には, S^{2n+1} は余次元 2 で S^{2n+3} に埋め込まれているので, その環状近傍 $N(S^{2n+1})$ は $S^{2n+1} \times D^2$ と同相である. S^{2n+1} 内の特異点 $(f, 0)$ のリンクは動かさずに, それ以外の点を $f/|f| = e^{i\theta}$ に従って $S^{2n+1} \times D^2$ 内で $(0, e^{i\theta})$ 方向に push して, S^{2n+3} に埋め込まれた球面 \hat{S}^{2n+1} を作る. この “push” に従って D^{2n+2} を変形したものを \hat{D}^{2n+2} とする. この \hat{D}^{2n+2} の S^{2n+1} に沿った m 重巡回分岐被覆として, $(g, 0)$ の Milnor fiber を得ることができる. 次頁の図は $n = 0$ のときの構成を図示している. 円板 \hat{D}^2 の 2 重被覆として, $z^3 + w^2$ の特異点の Milnor fiber が得られることが分かる.

複素多項式 $f(z_0, z_1, \dots, z_m)$ および $g(w_0, w_1, \dots, w_n)$ について, 多項式写像 $f : \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ は $f(0) = g(0) = 0$ を満たし, 原点に孤立特異点をもつ



とする。この f と g に対し、 $n+m+2$ 変数の複素多項式写像 $h : \mathbb{C}^{m+n+2} \rightarrow \mathbb{C}$ を

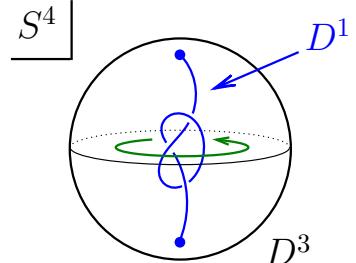
$$h(z_0, z_1, \dots, z_m, w_0, w_1, \dots, w_n) = f(z_0, z_1, \dots, z_m) + g(w_0, w_1, \dots, w_n)$$

で定義する。これは cyclic suspension の一般化であり、 f と g の Milnor fiber のホモロジーサイクルから h の Milnor fiber のホモロジーサイクルを読み取ることができるなど、次元を跨いで情報を引き継ぐことができる。Thom-Sebastiani 構成法と呼ばれる ([31, 26, 30])。

3.2 Twist-spinning

S^4 を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$ 内の単位球面として、 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f((x_1, x_2, x_3), z) = z$ で定義すると、Milnor 束と同様に、局所自明束

$$\phi := \frac{f}{|f|} : S^4 \setminus \{z = 0\} \rightarrow S^1$$

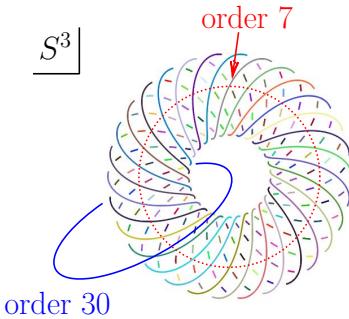


を得ることができる。ファイバーは 3 次元球体 D^3 である。右図のように S^4 内に D^3 を置き、境界である S^2 を固定したまま D^3 を S^4 内で一周させることで、局所自明束が構成される。ここで、図のように 3 次元球体 D^3 の北極と南極を結ぶ弧を描き、境界である S^2 を固定したまま D^3 を S^4 内で一周させる間に、北極と南極を固定したまま D^3 を赤道方向に k 回転させると、弧の軌道として S^4 に埋め込まれた S^2 を得ることができる。つまり、 S^4 内の 2 次元結び目が得られる。この構成は Zeeman の論文 [33] において導入されたもので、twist-spinning と呼ばれる。論文 [33] では S^4 内の twist-spinning だけではなく、一般の $n \geq 2$ に対して、 S^{n+2} 内の twist-spinning が導入されている。上の図の D^3 を S^3 に埋め込み、青い弧 D^1 の端点を D^3 の外側で繋いで S^3 内の結び目を作る。これを K とする。Twist-spinning による 2 次元結び目の構成は、結び目 K に対して、 K 上の 1 点を中心とする十分小さい開球体を取り除き、それに対して twist-spinning を行っているとみなすことができる。 K から twist-spinning により得られる結び目ことを K の twist spun knot と呼ぶ。

4 球面上の S^1 作用の研究

4.1 奇数次元球面上の pseudo-free S^1 -action

S^1 作用が固定点を持たず、かつ、例外軌道が孤立しているとき、その S^1 作用を pseudo-free S^1 -action という。 S^3 上の pseudo-free S^1 -action は Jacoby により分類されており、例外軌道の数は高々 2 つであることが知られている ([17])。この 2 という数字は S^3 を \mathbb{C}^2 の単位球面としたときの複素座標平面の数と一致する。実際、右図の例外軌道は S^3 と z_0 平面および z_1 平面の交わりに対応している。この考察から、 S^{2n+1} 上の pseudo-free S^1 -action の例外軌道の数は高々 $n+1$ 個であると“予想”できる。この予想に対し、Montgomery と Yang は論文 [25] において、 S^7 上の pseudo-free S^1 -action の例外軌道の数はいくらでも大きくなることを示した。9 次元以上の奇数次元球面については、Petrie により同様の結果が示されている ([28])。 S^5 については未解決で、Montgomery と Yang はこれを問題として提起している。



Montgomery-Yang 問題 ([25], cf. Kollar [21, Conjecture 6]). S^5 上の pseudo-free S^1 -action の例外軌道の数は高々 3 つか？

例えば、 a, b, c を 2 以上の互いに素な自然数とし、 $(z_0, z_1, z_2) \in S^5 \subset \mathbb{C}^3$ に対して、 $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ の作用を $(\lambda^{bc}z_0, \lambda^{ca}z_1, \lambda^{ab}z_2)$ で定めると、これは 3 つの例外軌道を持つ pseudo-free S^1 -action となる ([21, Example 7])。Kollar は論文 [21] において代数的 Montgomery-Yang 問題を提起していて、論文 [16, 18] などで進展が得られている。

4.2 S^4 上の locally smooth S^1 -action

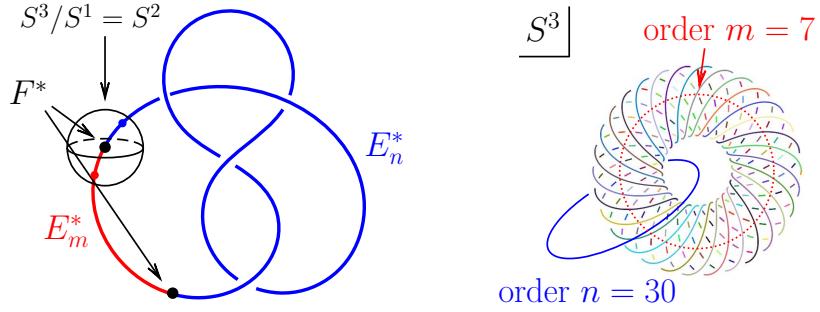
Twist-spinning は S^4 上の S^1 -action を自然に与える。つまり、twist spun knot は S^4 上の S^1 作用で不变な結び目と言うことができる。他にも、Artin の論文 [1] にある spun knot (twist-spinning の k が 0 の場合) も S^4 上の S^1 作用で不变な結び目である。そこで、 S^1 -action により不变な 2 次元結び目は他にあるのだろうか、という問い合わせを考える。

まず、 S^4 内の S^1 -action について調べる必要がある。 $G = S^1$ とおき、 G -action の $x \in S^4$ を通る軌道の slice を S 、isotropy 群を G_x 、軌道の近傍を $G \times_{G_x} S$ とする。 G_x が S に orthogonal に作用するとき、 G の作用を locally smooth S^1 -action という。Fintushel は論文 [5] において、Montgomery と Yang の論文 [24] の結果を用いて、4 次元ホモトピー球面上の locally smooth S^1 -action は orbit data により分類されることを示した。

定理 4.1 (Fintushel [5])。4 次元ホモトピー球面上の locally smooth S^1 -action は (i) $\{D^3\}$, (ii) $\{S^3\}$, (iii) $\{S^3, m\}$, (iv) $\{(S^3, K), (m, n)\}$ の 4 通りに分類される。

Orbit data とは上の定理の (i)~(iv) のことで, D^3 と S^3 は orbit space を表し, m, n は自然数を表す. (iv) における m, n は互いに素とする. また, (iv) における K は S^3 内の結び目を表す.

Orbit data (iv) の場合について説明する. S^4 のオイラー標数は 2 だから, S^4 上の S^1 -action は固定点を 2 つ持つことになる. 固定点集合が S^2 でもオイラー標数は 2 になるが, これは orbit data (i) の場合に該当する. 作用は locally smooth なので, 固定点の近傍において orthogonal であり, 特に S^1 -action は固定点を中心とする十分小さい球面 S^3 を保つことになる. 下の左図の 2 つの黒点は, 固定点の orbit map による像を表している. S^3 上に S^1 が作用しているので, その作用の軌道は右図のようであり, orbit space は左図のように S^2 になる.



Orbit data (iv) は, S^3 上の S^1 -action が例外軌道を 2 つ持つ場合となる. 2 つの例外軌道の order を m と n とする. m と n は互いに素と仮定できる. 例外軌道の orbit map による像是, 左図の S^2 上の点となるので, それをそれぞれ赤点と青点で表している.

固定点の像を中心とする S^2 を例外軌道の像に沿って広げていくと赤点と青点の 1-parameter family が得られるが, その拡張は途中で止まることができないので, もう一方の固定点の像にたどり着くことになる. つまり, この固定点の像と固定点の像を繋ぐ 1-parameter family は S^3 内の結び目になる. 別の言い方をすると, 固定点と例外軌道の集合の orbit map による像 K は S^3 内の結び目となる.

X を 4 次元ホモトピー球面とし, S^1 が locally smooth に作用しているとする. F を固定点集合, E_m を order m の例外軌道の和集合, E_n を order n の例外軌道の和集合とする. F, E_m, E_n は X の部分集合である. これらの orbit map による像をそれぞれ X^* , F^* , E_m^* , E_n^* とする. 上の構成から, $E_n \cup F$ は 4 次元ホモトピー球面 X 内の 2 次元結び目になることが分かる. この 2 次元結び目を $\tau_{m,n}(K)$ と書くことにする.

$X \setminus \text{Int } N(\tau_{m,n}(K))$ には S^1 が作用しているので, その軌道に沿ってモノドロミーベクトル場を構成することで, 局所自明束 $X \setminus \text{Int } N(\tau_{m,n}(K)) \rightarrow S^1$ を得ることができる. ここで $\text{Int } N(\tau_{m,n}(K))$ は $\tau_{m,n}(K)$ の環状近傍 $N(\tau_{m,n}(K))$ の内部を表す. このときファイバーは, 結び目 K に沿った S^3 の m 重巡回分岐被覆から開球体を除いたものと同相になる, モノドロミー h は, 分岐被覆のシートを n 個ずらす周期 m の periodic map となる. 補空間 $X \setminus \text{Int } N(\tau_{m,n}(K))$ の境界を環状近傍 $N(\tau_{m,n}(K)) \cong S^2 \times D^2$ で埋めること

で、ホモトピー球面 X が復元される。つまり、

$$X = \left((M_m(K) \setminus \text{開球体}) \times [0, 1] /_{(x, 1) \sim (h(x), 0)} \right) \cup \left(S^2 \times D^2 \right)$$

が成り立つ。Pao は論文 [27] において、以下を示した。

定理 4.2 (Pao [27]). 4 次元ホモトピー球面 X は S^4 と微分同相である。

この定理により、 S^4 上の locally smooth S^1 -action は定理 4.1 の 4 種類の orbit data に分類されることが従う。

5 主結果の紹介

5.1 Branched twist spin の区別

前章で紹介した S^4 内の 2 次元結び目 $\tau_{m,n}(K)$ を branched twist spin という。この名前は Hilman の著書 [14, §16.3] に書かれている。Orbit data (iii) は (iv) の $n = 1$ の場合に対応し、 $\tau_{m,1}(K)$ は K の m -twist spun knot になる。Branched twist spin を S^1 -action で不变な 2 次元結び目として定式化するために、spun knot を $\tau_{0,1}(K)$ としておく。これは orbit data (i) に該当する。この定義により、4 次元球面内の 2 次元結び目 K が S^1 -action により不变であることと、 K が branched twist spin であることは同値ということになる。研究の目標は branched twist spin $\tau_{m,n}(K)$ の分類である。先行研究については福田の一連の研究 ([6, 7, 8, 9]) を参照。また、Hilman も論文 [15] を執筆している。

S^{n+2} 内の 2 つの結び目 K_1 と K_2 に対し、微分同相写像 $(S^{n+2}, K_1) \rightarrow (S^{n+2}, K_2)$ が存在するとき、 K_1 と K_2 は同値であると定義する。今回の研究では、 m と n を固定した上で、 S^3 内の 2 つの結び目 K_1 と K_2 に対し、 $\tau_{m,n}(K_1)$ と $\tau_{m,n}(K_2)$ が同値になるかについて考察した。次が主結果となる。

定理 5.1 (石川-福田 [10]). $m \geq 3$ とする。 S^3 内の結び目 K_1, K_2 は prime であり、トーラス結び目ではないとする。このとき、 K_1 と K_2 が同値であることと、 $\tau_{m,n}(K_1)$ と $\tau_{m,n}(K_2)$ が同値であることは、必要十分である。

Branched twist spin の構成から、 $\tau_{m,n}(K)$ と $\tau_{m,n-2m}(K)$ は Gluck full-twist ([12]) で移り合うため、それらが同値であることが分かる。また、 $m = 0$ のときは $\pi_1(S^4 \setminus \tau_{0,1}(K))$ と $\pi_1(S^3 \setminus K)$ が同型であることが知られており、結び目補空間予想の解決 ([13]) により、定理の主張が正しいことが従う。 $m = 1$ のときは $\tau_{1,1}(K)$ は自明な 2 次元結び目になり、定理の主張は成り立たないことが分かる。 $m = 2$ のときはファイバーは S^3 内の結び目に沿った 2 重分岐被覆から開球体を除いたものと同相になるが、結び目 K の補空間に入る幾何構造と 2 重分岐被覆である 3 次元多様体に入る幾何構造が hyperbolic から spherical に切り替わることがあり、技術的な理由で証明できていない。

証明では結び目 K の orbifold fundamental group を用いる。 n 次元 orbifold とは \mathbb{R}^n の $O(n)$ の有限部分群による商空間を局所近傍とする距離化可能空間のことであり、その

普遍被覆空間の Deck 変換群として orbifold fundamental group が定義される。証明では cyclic type と呼ばれる特別なクラスのみを利用する。この場合、orbifold fundamental group は

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m)) = \langle \pi_1(S^3 \setminus K) \mid \mu^m = 1 \rangle$$

と表される。ここで μ は結び目 K の meridian である。Branched twist spin $\tau_{m,n}(K)$ の補空間の基本群は

$$\pi_1(S^4 \setminus \tau_{m,n}(K)) \cong \langle x \in \pi_1(S^3 \setminus K), h \mid xh = hx, \mu^m h^\beta = 1 \rangle$$

と表すことができ、これを $\langle h \rangle$ で割ると $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ が得られる。 h は S^1 -作用の regular orbit に対応する基本群の元である。 $m \geq 3$ で、 K_1 と K_2 が双曲結び目のとき、これらが同値でないならば、 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_2, m))$ が同型でないことが、論文 [2] における m 重分岐被覆の双曲性についての定理および Mostow rigidity から従う。 $m \geq 2$ で、 K_1 と K_2 が satellite 結び目のとき、これらが同値でないならば、 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_2, m))$ が同型でないことが、竹内の論文 [32] において知られている。他の組み合わせについても基本群の性質を比較することで、 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K_2, m))$ が同型でないことを示すことができ、主定理が従うことになる。

5.2 Twist spun knot of twist spun knot

2 次元結び目をさらに twist-spinning することで、 S^5 内の 3 次元のファイバー結び目を得ることができる。特に、twist spun knot の twist spinning を考えることで、次の定理を示すことができる。

定理 5.2 (石川・福田 [11])。 $m = \gcd(m_1, m_2)$ とする。 K が自明な結び目か $m = 1$ ならば、 $\tau_{m_2,1}(\tau_{m_1,1}(K))$ は S^5 内の自明な 3 次元結び目である。逆に、 $m \geq 2$ かつ $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の center が自明であれば、 $\tau_{m_2,1}(\tau_{m_1,1}(K))$ は S^5 内の非自明な 3 次元結び目である。

$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の center が自明という条件は $\langle h \rangle$ で割るときの技術的な問題であり、今のところ深い意味があるわけではない。前半の主張では Pao の定理 (定理 4.2) を使っており、そのままでは branched twist spin の twist-spinning に拡張できない要因の一つとなっている。後半の主張は定理 5.1 と同様の手法により証明される。定理 5.1 では 2 つの branched twist spin を区別していたが、定理 5.2 の設定でも、orbifold fundamental group を用いて 2 つの twist spun knot of twist spun knot を区別することができる。

Twist spun knot の twist-spinning をさらに繰り返すことで S^n 内のファイバー結び目を得ることができる。その場合、twist-spinning の twist の回数の列を (m_1, m_2, \dots, m_N) とすると、 $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_N) \geq 3$ のときに同様の主張が成り立つ。

6 感想

重み付き齊次多項式の特異点の研究をより広い枠組みの中で進めようと思った場合、球面上の S^1 -作用の研究がその枠組みの候補となる。複素 3 変数の場合に限っても、 S^5 上の S^1 -作用の研究はまだ未開拓であり、その研究を低次元トポロジーの技術を使ってリジッドに進めるのは面白いと思う。定理 5.2 で紹介した twist spun knot of twist spun knot は安直な研究対象に見えるかもしれないが（実際、私もそう思っているが^{*1}）、幾何というより群による考察であることに弱さを感じつつも、 S^5 内の結び目の研究に orbifold fundamental group という低次元トポロジーの技術を組み込めたことは、良い進展だったと思っている。こういった研究が進み、3 変数の複素多項式写像の特異点のより深い理解が得られることを心の隅で期待している。

参考文献

- [1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R⁴*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 174–177.
- [2] M. Boileau, J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, Astérisque, no. 272 (2001), 208 pp.
- [3] E. Brieskorn, Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math. **2** (1966), 1–14.
- [4] A.H. Durfee, Fibered knots and algebraic singularities, Topology **13** (1974), 47–59.
- [5] R. Fintushel, Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres, Duke Math. J. **43** (1976), no. 1, 63–70.
- [6] M. Fukuda, Branched twist spins and knot determinants, Osaka J. Math., **54** (2017), 679–688.
- [7] M. Fukuda, Irreducible $SL(2, \mathbb{C})$ -metabelian representations of branched twist spins, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), no. 2, 1950007, 11 pp.
- [8] M. Fukuda, Gluck twists along 2-knots with periodic monodromy, arXiv:1811.05109 [math.GT]
- [9] M. Fukuda, Representations of branched twist spins with a non-trivial center of order 2, Topology and its Application **365**, 109284.
- [10] M. Fukuda, M. Ishikawa, Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups, Revista Matemática Complutense (2024).
- [11] M. Fukuda, M. Ishikawa, Twist spun knots of twist spun knots of classical knots, arXiv:2409.00650 [math.GT], to appear in Dalat University Journal of Science.
- [12] H. Gluck, Embedding of two spheres in the four sphere, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 308–333.
- [13] C.McA. Gordon, J. Luecke, Knots are determined by their complements, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 2, 371–415.

^{*1} でも、cyclic suspension と twisting が同じ立ち位置だとすれば、twist spun knot of twist spun knot は Brieskorn 多様体と同じくらいの価値はあると言えなくもない。

- [14] J.A. Hillman, Four-manifolds, geometries and knots, Geometry & Topology Monographs, 5, Geometry & Topology Publications, Coventry, 2002, xiv+379 pp.
- [15] J.A. Hillman, *The groups of branched twist-spun knots*, arXiv:2305.00443 [math.GT]
- [16] D. Hwang, J. Keum, *Algebraic Montgomery-Yang problem: the non-cyclic case*, Math. Ann. **350** (2011), no. 3, 721–754.
- [17] R. Jacoby, *One-parameter transformation groups of the three-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 131–142.
- [18] W. Jo, J. Park, K. Park, *Algebraic Montgomery-Yang problem and smooth obstructions*, Trans. Amer. Math. Soc. **378** (2025), no. 4, 2969–3003.
- [19] M. Kato, *A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 454–463.
- [20] L.H. Kauffman, *Branched coverings, open books and knot periodicity*, Topology **13** (1974), 143–160.
- [21] J. Kollár, *Is there a topological Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality?*, Pure Appl. Math. Q. **4** (2008), no. 2, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov. Part 1, 203–236.
- [22] D. Lines, *Stable plumbing for high odd-dimensional fibred knots*, Canad. Math. Bull. **30** (1987), no. 4, 429–435.
- [23] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Stud. 61, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. iii+122 pp.
- [24] D. Montgomery, C.T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension $n - 3$. I, II*, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517; **5** (1960), 206–211.
- [25] D. Montgomery, C.T. Yang, Differentiable pseudo-free circle actions on homotopy seven spheres, Proceedings of the Second Conference on Compact Transformation Groups (Univ. Massachusetts, Amherst, Mass., 1971), Part I, pp. 41–101, Lecture Notes in Math., Vol. 298, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [26] M. Oka, *On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology **12** (1973), 19–32.
- [27] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology, **17** (3) (1978), 291–296.
- [28] T. Petrie, Equivariant quasi-equivalence, transversality and normal cobordism, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974), Vol. 1, pp. 537–541, Canadian Mathematical Congress, Montreal, QC, 1975.
- [29] O. Saeki, *Theory of fibered 3-knots in S^5 and its applications*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), no. 4, 691–756.
- [30] K. Sakamoto, Milnor fiberings and their characteristic maps, Manifolds – Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), pp. 145–150, Published for the Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1975.
- [31] M. Sebastiani, R. Thom, *Un résultat sur la monodromie*, Invent. Math. **13** (1971), 90–96.
- [32] Y. Takeuchi, *A classification of a class of 3-branchfolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **307** (1988), no. 2, 481–502.
- [33] E.C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.