

カンドルホモロジーに反映される 結び目補空間の構造について

井上 歩 (津田塾大学)*

1 はじめに

カンドルは結び目理論と非常に相性が良い代数系である。これまで講演者は、カンドルおよびそのホモロジーと結び目が備える幾何との関係性に興味を抱き、研究を進めてきた。本講演では、特に「カンドルホモロジー」と「結び目補空間」をキーワードとして、今までに得られた成果を抜粋して簡単に紹介したい。なお一部の成果は、北見工業大学の蒲谷祐一氏との共同研究により得られたものである。

2 準備

まず最初に、カンドルについて基本事項を確認しておく。詳細については、例えば [6] を参照されたい。なお本講演では、すべての結び目は3次元球面 S^3 内にあり、向き付けられているものとする。

カンドルとは、集合 X とその上に定義された二項演算 $* : X \times X \rightarrow X$ の組であり、次の公理を満たすものである。

- (Q1) 任意の $a \in X$ に対して、 $a * a = a$.
- (Q2) 任意の $a \in X$ に対して、写像 $*a : X \rightarrow X$ ($\bullet \mapsto \bullet * a$) は全単射。
- (Q3) 任意の $a, b, c \in X$ に対して、 $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$.

カンドルに対しても、適切に準同型などが定義される。カンドル X に対し、次の表示で与えられる群 G_X を、 X の**付随群**と呼ぶ。

$$G_X = \langle X \mid \{(a * b)^{-1}b^{-1}ab \mid a, b \in X\} \rangle.$$

今後のため、カンドル X の要素は付随群 G_X の生成元でもあることを強調しておく。

X をカンドルとし、 D を結び目の図式とする。 D の各弧に対して、 X の要素を割り当てるを考える。この割り当ては、 D の各交点において図 1 左の条件を満たすとき、 D の X 彩色と呼ばれる。ここで図中 $a, b, a * b$ は、対応する弧に割り当てられた X の要素を表している。 D には X 彩色が施されているとし、 Y を付随群 G_X が右から作用する集合とする。 D の各領域に対して、さらに Y の要素を割り当てるを考える。この割り当ては、 D の各弧の周辺において図 1 右の条件を満たすとき、 D の Y 彩色と

* 〒187-0025 東京都小平市津田町 2-1-1 津田塾大学学芸学部数学科

e-mail: ayminoue@tsuda.ac.jp

本研究は科学研究費補助金（課題番号：25K07014）の助成を受けたものである。

呼ばれる。ここで図中 r, ra は、対応する領域に割り当てられた Y の要素を表す。特に X 彩色と Y 彩色の組を、 D の (X, Y) 彩色という。詳細は割愛するが、同値な結び目を表す図式の (X, Y) 彩色全体の集合の間には、自然な全単射が存在する。よって、 D の (X, Y) 彩色の総数は、結び目に不变量を与える（これを (X, Y) 彩色数という）。以降、 (X, Y) 彩色によって弧（および領域）に割り当てられた X （および Y ）の要素を、その弧（および領域）の色と呼ぶ。

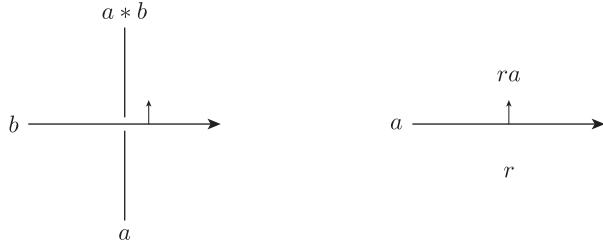


図 1 X 彩色の条件（左）と Y 彩色の条件（右）

カンドル X と付随群 G_X が右から作用する集合 Y の組に対しては、次のようにしてホモロジーが定義される。正の整数 n に対して、 $C_n^R(X)_Y$ を $Y \times X^n$ が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする。また、 $C_0^R(X)_Y$ を Y が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする。このとき、写像 $\partial_n : C_n^R(X)_Y \rightarrow C_{n-1}^R(X)_Y$ を

$$\begin{aligned}\partial_n(r; a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (r; a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (-1)^i (ra_i; a_1 * a_i, \dots, a_{i-1} * a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)\end{aligned}$$

と定めると、 $(C_n^R(X)_Y, \partial_n)$ は鎖複体となる。図 2 に示すように、 $C_n^R(X)_Y$ の生成元は適切に向き付け・ラベル付けされた n 次元立方体と同一視できる。この意味において、 ∂_n はその境界を読み取る写像に他ならない。さらに、 $C_n^R(X)_Y$ の部分加群 $C_n^D(X)_Y$ を次のように定義する。

$$C_n^D(X)_Y = \begin{cases} \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(r; a_1, a_2, \dots, a_n) \in Y \times X^n \mid a_i = a_{i+1} \text{ for some } i\} & (n \geq 2), \\ 0 & (n = 0, 1). \end{cases}$$

このとき、 $\partial_n(C_n^D(X)_Y) \subset C_{n-1}^D(X)_Y$ が成り立つので、 $(C_n^D(X)_Y, \partial_n)$ は $(C_n^R(X)_Y, \partial_n)$ の部分鎖複体となる。よって、商 $C_n^Q(X)_Y = C_n^R(X)_Y / C_n^D(X)_Y$ を考えれば、鎖複体 $(C_n^Q(X)_Y, \partial_n)$ が得られる。この鎖複体から定まる（コ）ホモロジーグループを **カンドル（コ）ホモロジーグループ** と呼ぶ。 $C_n^Q(X)_Y$ の生成元は、場合によって幾つかの面が退化した、向き付け・ラベル付けされた n 次元立方体と同一視できる。

(X, Y) 彩色が施された結び目図式 D の（ D が描かれている 2 次元球面 S^2 上での）双対グラフを考えると、その各領域は D の交点を丁度ひとつ含む四角形である。そこで

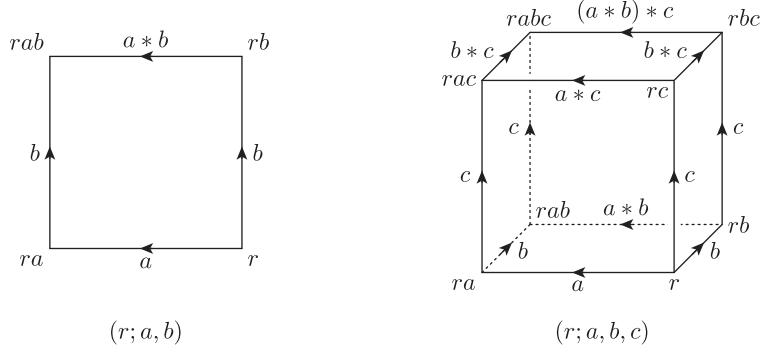


図 2 $C_n^R(X)_Y$ の生成元の図式的な理解

図 3 の要領で、交わる D の弧の向き（が定める法ベクトル）と色から四角形の辺に向きとラベルを、交わる D の領域の色から四角形の頂点にラベルを与えることで、 D の各交点に対して $C_2^Q(X)_Y$ の要素を定めることができる。構成より、 D のすべての交点についてこれらの要素を足し合わせたものは、2次元サイクルとなる。詳細は割愛するが、前述の自然な全单射で対応する同値な結び目を表す図式の (X, Y) 彩色が定める2次元サイクルは互いにホモロジーである。よって、2次元コサイクルをひとつ選び、 D のすべての (X, Y) 彩色についてそれらが定める2次元サイクルをこの2次元コサイクルで評価した値を集めて得られる多重集合は、また結び目に不变量を与える（これをカンドルコサイクル不变量という）。

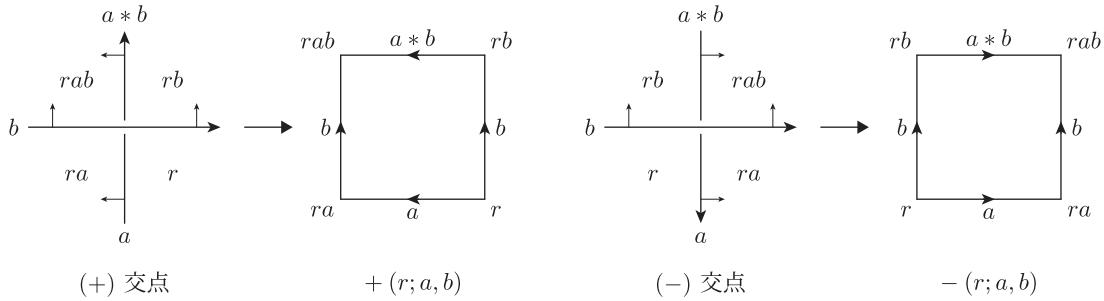


図 3 (X, Y) 彩色が施された結び目図式の交点に対応する $C_2^Q(X)_Y$ の要素

3 カンドルホモロジーと結び目補空間の理想四面体分割

本節では、カンドルホモロジーと結び目補空間の理想四面体分割との関係を紹介する。本節の内容は、北見工業大学の蒲谷祐一氏との共同研究 [4] によって得られたものである。まず、カンドル X に対して、新たなホモロジーを導入する。非負整数 n に対して、 $B_n^\Delta(X)$ を X^{n+1} が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする。写像 $\partial_n : B_n^\Delta(X) \rightarrow B_{n-1}^\Delta(X)$ を

$$\partial_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

と定めると、 $(B_n^\Delta(X), \partial_n)$ は非輪状な鎖複体になる。 $B_n^\Delta(X)$ の生成元は、頂点に X の

要素が割り当てられた n 次元単体と同一視できる。この意味において、 ∂_n はその境界を読み取る写像に他ならない。 $B_n^\Delta(X)$ には次のように付随群 G_X が右から作用するので、この作用による $B_n^\Delta(X)$ の商を $C_n^\Delta(X)$ とする。

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) a = (a_0 * a, a_1 * a, \dots, a_n * a) \quad (a \in X).$$

鎖複体 $(C_n^\Delta(X), \partial_n)$ から定まる (コ) ホモロジ一群を、**単体的カンドル (コ) ホモロジ一群** と呼ぶ。

X には次のように付随群 G_X が右から作用するから、鎖複体 $(C_n^Q(X)_X, \partial_n)$ を考えることができる。

$$ab = a * b \quad (a, b \in X).$$

この鎖複体について、次の主張が成立する。

定理 3.1 ([4]). 具体的な鎖写像 $\varphi_n : C_n^Q(X)_X \rightarrow C_{n+1}^\Delta(X)$ が構成できる。

一般の場合は割愛するが、 $n = 2$ の場合、この鎖写像は任意の $p \in X$ に対して次の式で与えられる。

$$\varphi_2(r; a, b) = + (p, r, a, b) - (p, r * a, a, b) - (p, r * b, a * b, b) + (p, (r * a) * b, a * b, b).$$

鎖写像 φ_2 を図式的に表すと、図 4 のようになる。ここで図中、同じパターンおよび（黒以外の）同じ色で塗られた面および辺は、それぞれ貼り合わすことができる。よって、 (X, X) 彩色された結び目 K の図式の各交点に対応する $C_2^Q(X)_X$ の要素の φ_2 による像は、図 5 右のように「 $S^3 \setminus K$ の『各交点に対応する部分』を 4 つの理想四面体によって分割したものに『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解することができる。これら 4 つの理想四面体は交点の隣接関係に従って適切に貼り合うから、 (X, X) 彩色が定める 2 次元サイクルの φ_2 による像は「 $S^3 \setminus K$ の理想四面体分割に『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解できる。詳細は割愛するが、蒲谷氏と講演者は、この枠組みを用いて次を示している。

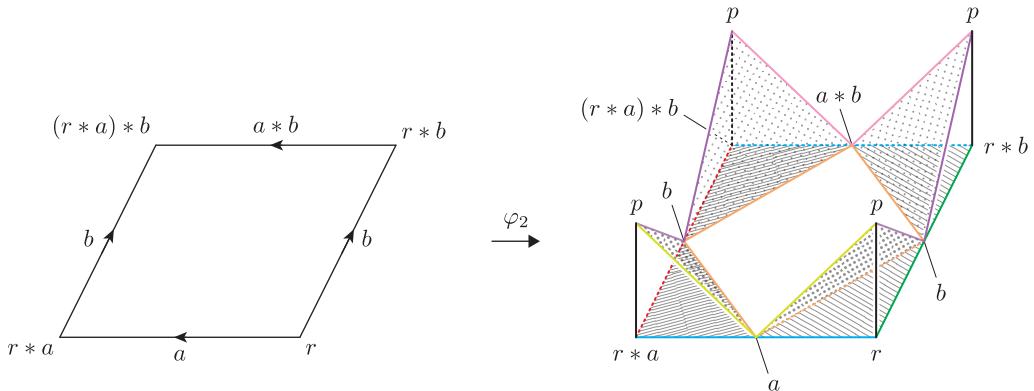


図 4 鎖写像 φ_2 の図式的な理解

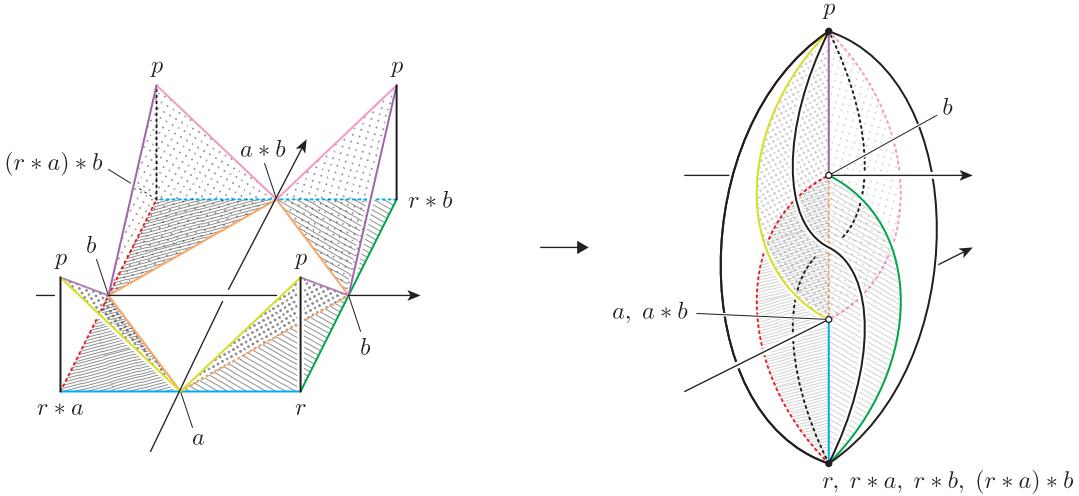


図 5 各交点に対応する 4 つの理想四面体

定理 3.2 ([4]). $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の放物的元全体がなすカンドル \mathcal{P} には、次の性質を満たす、具体的な 2 次元コサイクル cvol が定まる。 K を結び目とし、 $G(K)$ をその補空間の基本群とする。このとき、 $G(K)$ の放物的な $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現に対応する K の図式の $(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ 彩色を考えると、この彩色が定める 2 次元サイクルを cvol で評価することによって、表現の複素体積が組み合わせ的に計算できる。

4 カンドルホモロジーとザイフェルト曲面の理想三角形分割

本節では、カンドルホモロジーと（境界を含まない）ザイフェルト曲面の理想三角形分割との関係を紹介する。そのためにはまず、群対のホモロジーを紹介する（群対に対しては大別して 2 種類のホモロジーが定義されるが、本講演では Adamson/Hochschild の流儀 [1, 3] に従う）。

G を群として、 H をその部分群とする。非負整数 n に対して、 $B_n(G/H)$ を $(G/H)^{n+1}$ が生成する自由 \mathbb{Z} 加群とする。このとき、写像 $\partial_n : B_n(G/H) \rightarrow B_{n-1}(G/H)$ を

$$\partial_n(g_0H, g_1H, \dots, g_nH) = \sum_{i=0}^n (-1)^i(g_0H, \dots, g_{i-1}H, g_{i+1}H, \dots, g_nH)$$

と定めると、 $(B_n(G/H), \partial_n)$ は非輪状な鎖複体になる。 $B_n(G/H)$ の生成元は、頂点に G/H の要素が割り当てられた n 次元単体と同一視できる。この意味において、 ∂_n はその境界を読み取る写像に他ならない。 $B_n(G/H)$ には次のように G が左から作用するので、この作用による $B_n(G/H)$ の商を $C_n(G/H)$ とする。

$$g(g_0H, g_1H, \dots, g_nH) = (gg_0H, gg_1H, \dots, gg_nH) \quad (g \in G).$$

鎖複体 $(C_n(G/H), \partial_n)$ から定まる（コ）ホモロジ一群を、**群対の（コ）ホモロジ一群**と呼ぶ。

再び G を群として, H をその部分群とする. さらに ρ を G の自己同型写像で, 条件 $\rho|_H = \text{id}_H$ を満たすものとする. このとき, 右剰余集合 $H \setminus G$ は, 次の二項演算によりカンドルとなる.

$$Ha * Hb = H\rho(ab^{-1})b.$$

慣例に従って, このカンドルを (G, H, ρ) と表すことにする. また, $\rho(ab^{-1})b$ を $a * b$ と略記する (このとき $Ha * Hb = Ha * b$ である).

任意のカンドル X の付随群 G_X は, 無限巡回群 \mathbb{Z} に対して, 次のように右から作用する.

$$ra = r + 1 \quad (r \in \mathbb{Z}, a \in X).$$

よって, 鎖複体 $(C_n^Q(X)_{\mathbb{Z}}, \partial_n)$ を考えることができる. 特に $X = (G, H, \rho)$ であるときは, 次の主張が成立する.

定理 4.1. 具体的な鎖写像 $\psi_n : C_n^Q(X)_{\mathbb{Z}} \rightarrow C_n(G/H)$ が構成できる.

一般の場合は割愛するが, $n = 2$ の場合, この鎖写像は次の式で与えられる.

$$\begin{aligned} \psi_2(r; Ha, Hb) = & \\ & - (H, (\rho^{-r}(a))^{-1}H, (\rho^{-r}(b))^{-1}H) + (H, (\rho^{-(r+1)}(a * b))^{-1}H, (\rho^{-(r+1)}(b))^{-1}H). \end{aligned}$$

鎖写像 ψ_2 を図式的に表すと, 図 6 のようになる. ここで図中, 赤い辺は貼り合わせることができる. よって, (X, \mathbb{Z}) 彩色された結び目 K の図式 D の各交点に対応する $C_2^Q(X)_{\mathbb{Z}}$ の要素の ψ_2 による像は, 図 7 右のように「図式 D から定まる K の標準的ザイフェルト曲面 S の『各交点に対応する部分』を 2 つの理想三角形によって分割したものに『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解することができる. これら 2 つの理想三角形は交点の隣接関係に従って適切に貼り合うから, (X, \mathbb{Z}) 彩色が定める 2 次元サイクルの ψ_2 による像は「 S の理想三角形分割に『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解できる.

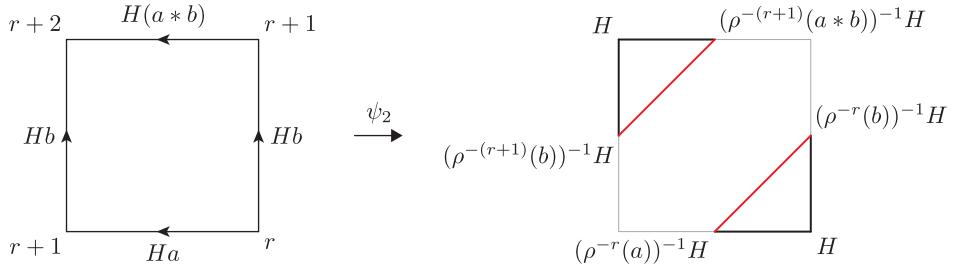


図 6 鎖写像 ψ_2 の図式的な理解

詳細は割愛するが, K の (標準的とは限らない) 任意のザイフェルト曲面 S に対しても適切に K の図式 D を選べば, D の (X, \mathbb{Z}) 彩色から S の理想三角形分割を得ることができる. この仕組みを活用すれば K の種数やファイバー性を議論できるのではないかと考え, 目下, 研究を進めている.

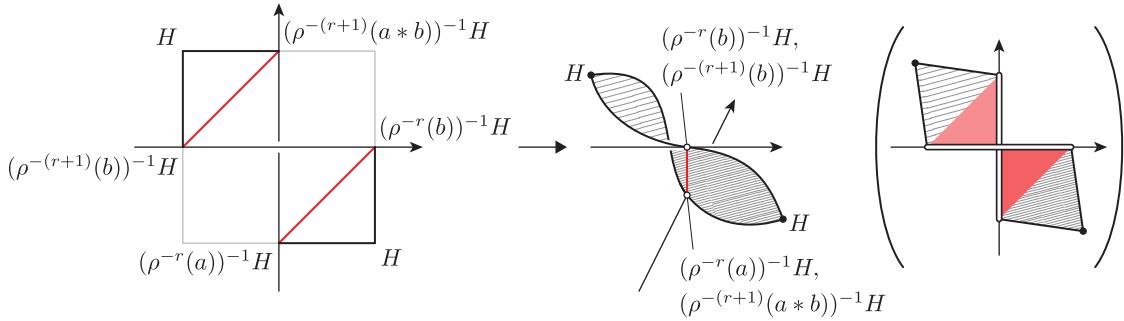


図 7 各交点に対応する 2 つの理想三角形（状況を理解しやすいように、括弧内には、赤い辺および理想頂点に幅を与えたものも描いておいた）

5 おわりに

ここまでカンドルホモロジーと結び目補空間の構造との関係性に着目してきたが、定理 3.1, 4.1 で与えた鎖写像は、具体的なカンドルにコサイクルを与えるためにも利用できる。最後に、簡単ではあるが、そのような成果を紹介する。

北見工業大学の蒲谷祐一氏は、定理 3.1 を活用して、ある条件を満たすカンドル X に対して鎖複体 $(C_n^Q(X)_X, \partial_n)$ から群の鎖複体への（次元をひとつ上げる）鎖写像を構成した [5]。（特に $n = 2$ の場合、この鎖写像による (X, X) 彩色が定める 2 次元サイクルの像は「結び目を分岐集合とする S^3 の巡回分岐被覆空間の四面体分割に『彩色から定まる情報』を付与したもの」と理解できる。）この鎖写像によって引き戻すことにより、群のコサイクルからカンドルのコサイクルを構成することができる。特に「望月 3 コサイクル [2, 7]」という業界では有名な 3 次元コサイクルも、この方法により群のコサイクルから再構成できることを蒲谷氏は示している。

東京科学大学の野坂武史氏は、蒲谷氏とは別の方法で定理 3.1 を応用して、ある条件を満たすカンドル X に対して鎖複体 $(C_n^Q(X)_{\{1 \text{ pt.}\}}, \partial_n)$ から群の鎖複体への（次元を保つ）鎖写像を構成した [9]。この鎖写像によって引き戻すことにより、やはり群のコサイクルからカンドルのコサイクルを構成することができる。例えば、京都大学数理解析研究所の望月拓郎氏があるカンドルの族に対して与えた全てのコサイクル [8]（望月 3 コサイクルはそのひとつ）も、この方法により群のコサイクルから再構成できることを野坂氏は示している。

講演者も、定理 4.1 を活用して、結び目の研究に有益と思われるカンドルのコサイクルを幾つか構成している。しかし、その紹介は別の機会に譲りたい。

参考文献

- [1] I. T. Adamson, *Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2** (1954), 66–76.
- [2] S. Asami and S. Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-space*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 2, 285–296.

- [3] G. Hochschild, *Relative homological algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 246–269.
- [4] A. Inoue and Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, Geom. Dedicata **171** (2014), 265–292.
- [5] Y. Kabaya, *Cyclic branched coverings of knots and quandle homology*, Pacific J. Math. **259** (2012), no. 2, 315–347.
- [6] 鎌田 聖一, 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ 16, 丸善出版, 2012.
- [7] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), no. 3, 287–330.
- [8] T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles $\mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$* , Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 183–205.
- [9] T. Nosaka, *On third homologies of groups and of quandles via the Dijkgraaf-Witten invariant and Inoue-Kabaya map*, Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), no. 5, 2655–2691.