

混合多項式の特異点解消とニュートン図形

福井敏純 (埼玉大学)

第 72 回トポロジーシンポジウム (2025 年 8 月 4 日 – 6 日)

2025 年 8 月 4 日 (月) 15:45 – 16:45 (質疑含む)

概要

ニュートン非退化な多項式はトーリック改変でその特異点解消が構成できる. 本稿では混合トーリック改変の概念を導入し, 混合多項式が混合ニュートン非退化ならば混合トーリック改変が混合多項式の特異点解消類似物を与える事を紹介する.

Milnor は, 著書 [5] で複素係数多項式

$$(0.1) \quad f = \sum_{\nu} c_{\nu} \mathbf{x}^{\nu}, \quad c_{\nu} \in \mathbb{C},$$

の定める写像

$$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}),$$

の特異点の位相を研究し, 特異点の周りに錐構造と束構造が存在することを示した. ここで $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq}^n$ であり, 多重指数の記号

$$\mathbf{x}^{\nu} = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$$

を用いている. Milnor の本は多くの研究者の研究の出発点であり, 微分位相幾何学に豊富な例を提供, 対象の位相を記述する言語の研究へと発展してきた.

Khovanski ([4]) は, 多項式がニュートン非退化ならば, トーリック改変が特異点解消を与える事を示した.

Pichon-Seade ([9]) は複素多項式 f, g に対し積 $f\bar{g}$ の定める写像がしばしば束構造を持つことを示し, 複素多項式を含むより広い特異点のクラスで束構造が存在することを示唆した.

岡睦雄 ([6]) は混合多項式 (2.1 参照) を導入し, その特異点の位相を組織的に調べている ([7], [8]). 例えば, 多項式の場合と類似の束構造が存在するための十分条件を与え, トーリック改変がいつ特異点解消を提供するかなどが調べられている.

本稿では, 混合トーリック改変の定義 (定義 3.4) を与え, 混合多項式が混合ニュートン非退化ならば混合トーリック改変が特異点解消の類似物を与えることを説明する.

1 ニュートン図形とトーリック改変

多項式 (0.1) のニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$ を次で定める.

$$\Gamma_+(f) = \{\boldsymbol{\nu} + \mathbb{R}_{\geq}^n : c_{\boldsymbol{\nu}} \neq 0\} \text{ の凸包}$$

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle = a_1 \nu_1 + \dots + a_n \nu_n$$

と置く.

$$\ell(\mathbf{a}) = \min\{\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle : \boldsymbol{\nu} \in \Gamma_+(f)\}$$

$$\gamma(\mathbf{a}) = \{\boldsymbol{\nu} \in \Gamma_+(f) : \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \ell(\mathbf{a})\}$$

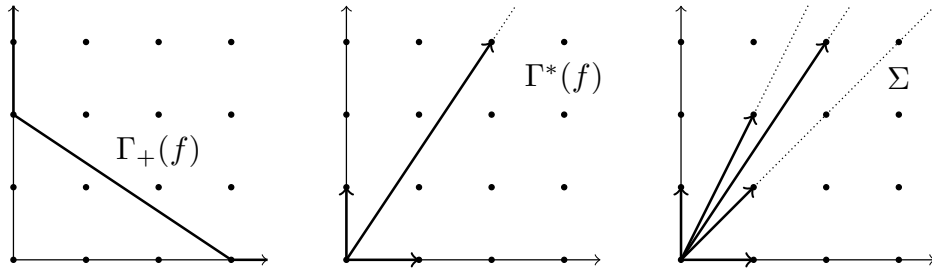
と置いて, $\gamma(\mathbf{a})$ をベクトル \mathbf{a} の支持する $\Gamma_+(f)$ の面という. $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ に対し

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{a}' \iff \gamma(\mathbf{a}) = \gamma(\mathbf{a}')$$

で同値関係を定義すると, 同値類の閉包は \mathbb{R}_{\geq}^n 内の多面錐であり, これは \mathbb{R}_{\geq}^n の分割を与える. この分割を**双対ニュートン図形**とよび $\Gamma^*(f)$ で表す.

定義 1.1. \mathbb{R}_{\geq}^n の多面体錐分割 $\Gamma^*(f)$ の細分 Σ で, 各 n 次元多面体錐が \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} 基底から生成されるものを取る. このような多面体錐分割を**非特異扇**という.

例 1.2. $f = x^3 + y^2$ のときニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$, 双対ニュートン図形 $\Gamma^*(f)$, 双対ニュートン図形の非特異細分の例 Σ を図で示す.



注意 1.3. ここで扇とは, 次の性質を満たす有限個の多面体錐の集まり Σ である.

- $\sigma \in \Sigma$ として τ が σ の面ならば $\tau \in \Sigma$
- $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ ならば $\sigma \cap \sigma'$ は σ の面である.

上で定義した双対ニュートン図形 $\Gamma^*(f)$ はこの意味で扇になる． Σ の各元が単体的であるとき Σ を単体扇という．2次元の扇は自動的に単体扇であるが3次元以上では単体的でない扇も存在する，非特異扇は単体扇であるが，非特異でない単体扇も存在する．

$\Sigma(k)$ で Σ の k 次元錐のなす集合を， $\sigma \in \Sigma$ に対し， $\sigma(k)$ で σ の k 次元面のなす集合を表す．

定義 1.4 (トーリック多様体)． 非特異扇 (Σ, β) に対して，乗法群の準同型写像

$$\pi^* : (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n, (z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \longmapsto \left(\prod_{\tau \in \Sigma(1)} z_\tau^{a_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n},$$

$\mathbf{a}^\tau = (a_1^\tau, \dots, a_n^\tau)$ を考え，その核を G で表す．すなわち $G = \text{Ker } \pi^*$ ．

$$(1.5) \quad U_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(n)} U_\sigma, \quad U_\sigma = \left\{ (u_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)} : \prod_{\tau \notin \sigma(1)} u_\tau \neq 0 \right\}.$$

とおくと， G の元 $(z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \in G$ は次式で U_Σ に作用している．

$$(1.6) \quad (z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} : U_\Sigma \longrightarrow U_\Sigma, (u_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \longmapsto (z_\tau u_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)},$$

この作用は U_σ を保つことに注意しておく．このとき**トーリック多様体** M を次で定める．

$$(1.7) \quad M = U_\Sigma / G = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(n)} M_\sigma, \quad M_\sigma = U_\sigma / G.$$

$\sigma \in \Sigma(n)$ に対し

$$(1.8) \quad V_\sigma = \{ (v_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \in U_\sigma : v_\tau = 1, \tau \notin \sigma(1) \}$$

と置くと， V_σ は自明に \mathbb{C}^n と同型であり，自然な写像

$$V_\sigma \subset U_\sigma \rightarrow M_\sigma$$

は同型である．この写像は M のチャートを与える．

定義 1.9 (トーリック改変)． 非特異扇 Σ の \mathbf{a}^τ , $\tau \in \Sigma(1)$ の成分はすべて非負であると仮定する．このとき次の可換図式を満たすような自然な写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ が定義される．

$$(1.10) \quad \begin{array}{ccc} U_\Sigma \supset (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} & \xrightarrow{\pi^*} & (\mathbb{C}^*)^n \\ \downarrow /G & & \cap \\ M & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

この π をトーリック改変という。 M のチャート V_σ 上では π は次のように表示される。

$$\pi|_{V_\sigma}((v_\tau)_{\tau \in \sigma(1)}) = \left(\prod_{\tau \in \sigma(1)} v_\tau^{a_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n}.$$

ここでのトーリック多様体の構成は Cox によるものである。

定理 1.11. 非特異扇 Σ が \mathbb{R}_\geq^n の細分であるとき、 $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ は固有写像である、

定義 1.12. f がニュートン非退化とは、 $\Gamma_+(f)$ の任意のコンパクト面 γ に対し次が成立するときを言う。

$$\Sigma(f_\gamma) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$$

ここで $f_\gamma = \sum_{\nu \in \gamma} c_\nu x^\nu$ で $\Sigma(f_\gamma)$ はその特異点集合である。

定理 1.13. 多項式 f がニュートン非退化ならば、 $\Gamma_+(f)$ から構成されるトーリック改変が f の特異点解消を与える。

ここで f の特異点解消とは、複素解析的な固有改変 $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ で M の各点の近傍で次を満たす座標が取れるときをいう。

f の π による引き戻し $f \circ \pi$ がその座標で単項式で表される。

特異点解消が具体的に与えられれば、特異点の位相の記述は組み合わせの問題に帰着される。実際、Khovanski ([4]) はそれがどのように可能かも説明している。

2 混合ニュートン図形

\mathbb{C}^n の座標 $x = (x_1, \dots, x_n)$ をとり、その複素共役を $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ で表す。多重指数 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}, \quad \bar{x}^{\bar{\nu}} = \bar{x}_1^{\bar{\nu}_1} \cdots \bar{x}_n^{\bar{\nu}_n}$$

とおき、 $x^\nu \bar{x}^{\bar{\nu}}$ を考える。 $\nu, \bar{\nu}$ の成分がすべて非負整数のとき、これを混合単項式と呼ぶ。負の成分も許せば混合ローラン単項式と呼び、半整数のときは混合ローラン半単項式とよぶ。

混合単項式 $x^\nu \bar{x}^{\bar{\nu}}$ の複素数係数の 1 次結合

$$(2.1) \quad f = \sum_{\nu, \bar{\nu}} c_{\nu, \bar{\nu}} x^\nu \bar{x}^{\bar{\nu}}, \quad c_{\nu, \bar{\nu}} \in \mathbb{C},$$

を**混合多項式**という。混合多項式 f は写像

$$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}),$$

を定めるが、その特異点集合 $\Sigma(f)$ は次の様に表される。

$$\Sigma(f) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \text{rank} \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_n}(\mathbf{x}) & \overline{f_{x_1}}(\mathbf{x}) & \cdots & \overline{f_{x_n}}(\mathbf{x}) \\ \overline{f_{x_1}}(\mathbf{x}) & \cdots & \overline{f_{x_n}}(\mathbf{x}) & f_{x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} < 2 \right\}$$

例 2.2. 混合単項式 $\mathbf{x}^\nu \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\nu}}$, $\nu \neq \bar{\nu}$, の定める写像

$$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}^\nu \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\nu}},$$

の $(\mathbb{C}^*)^n$ への制限 $f|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ は沈め込みである。すなわち $\Sigma(f) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$ 。

\mathbb{R}^n の部分集合 γ に対し f_γ を次で定める。

$$(2.3) \quad f_\gamma := \sum_{\nu + \bar{\nu} \in \gamma} c_{\nu, \bar{\nu}} \mathbf{x}^\nu \bar{\mathbf{x}}^{\bar{\nu}}, \quad c_{\nu, \bar{\nu}} \in \mathbb{C}.$$

さて f の**絶対ニュートン多面体** $\Gamma_+(f)$ を次で定義する。

$$\Gamma_+(f) = \{\nu + \bar{\nu} + \mathbb{R}_{\geq}^n : c_{\nu, \bar{\nu}} \neq 0\} \text{ の凸包}$$

定義 2.4. f が**非退化**とは、 $\Gamma_+(f)$ のコンパクト面 γ に対して次が成り立つときを言う。

$$\Sigma(f_\gamma) \cap f_\gamma^{-1}(0) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$$

ニュートン多面体 $\Gamma_+(f)$ のコンパクトな面 γ に対し次で定義される $\text{LE}(f_\gamma)$ を考える。

$$\text{LE}(f_\gamma) = \{\nu - \bar{\nu} : c_{\nu, \bar{\nu}} \neq 0, \nu + \bar{\nu} \in \gamma\} \text{ の凸包}$$

これらをすべて集めたデータ

$$(\Gamma_+(f); \text{LE}(f_\gamma), \gamma \text{ は } \Gamma_+(f) \text{ のコンパクト面})$$

を混合多項式の**混合ニュートン図形**と呼ぶことにする。

定義 2.5 (混合擬斉次多項式). 混合多項式 (2.1) が**混合擬斉次**であるとは、次を満たす \mathbf{a} , \mathbf{b} と ℓ, m が存在するときを言う。

$$c_{\nu, \bar{\nu}} \neq 0 \implies \langle \mathbf{a}, \nu + \bar{\nu} \rangle = \ell, \quad \langle \mathbf{b}, \nu - \bar{\nu} \rangle = m.$$

混合多項式 f が混合擬斉次ならば $\dim \text{LE}(f) < n$ となる。

混合多項式 f が混合擬斉次で、上の記号の下で $m \neq 0$ であれば、次が成り立つ.

$$\Sigma(f) \subset f^{-1}(0)$$

$m = 0$ のときは一般にはこの包含関係は成り立たない.

岡 ([6], [8]) は混合多項式 f のトーリック改変による特異点解消を議論している. 具体的には $\tau \in \Sigma(1)$ に対し $f_{\gamma(\mathbf{a}^\tau)}$ を混合擬斉次としてその重み $\mathbf{a}^\tau, \mathbf{b}^\tau$, が一致するときに議論している.

3 混合トーリック改変

定義 3.1 (混合扇). 単体的扇 Σ と写像

$$\beta : \Sigma(1) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n, \quad \tau \longmapsto (\mathbf{a}^\tau, \mathbf{b}^\tau) \quad \begin{cases} \mathbf{a}^\tau = (a_1^\tau, \dots, a_n^\tau) \\ \mathbf{b}^\tau = (b_1^\tau, \dots, b_n^\tau) \end{cases}$$

の組 (Σ, β) が**混合扇**であるとは次を満たすときを言う.

- (i) \mathbf{a}^τ は $\tau \in \Sigma(1)$ の最も短い (整数係数の) 生成元
- (ii) 任意の $\sigma \in \Sigma(n)$ に対し $\{\mathbf{b}^\tau : \tau \in \sigma(1)\}$ は \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} 基底

注意 3.2. $\mathbf{a}^\tau = \mathbf{b}^\tau, \tau \in \Sigma(1)$, のときは、ここで定義した混合扇は通常の特異扇である.

定義 3.3 (混合トーリック多様体). 混合扇 (Σ, β) に対して、乗法群の準同型

$$\pi^* : (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n, \quad (z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)} \longmapsto \left(\prod_{\tau \in \Sigma(1)} |z_\tau|^{a_i^\tau} \left(\frac{z_\tau}{|z_\tau|} \right)^{b_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n},$$

を考え、その核を G で表す. U_Σ を (1.5) を定義し G の元 $(z_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)}$ を (1.6) で U_Σ に作用させる. このとき**混合トーリック多様体** M を (1.7) で定める. (1.8) で V_σ を定めると、写像の合成 $V_\sigma \subset U_\sigma \rightarrow M_\sigma$ は同相写像で、この写像は M のチャートを与える.

ここで構成した混合トーリック多様体は、[3] で導入された位相的トーリック多様体の特別な場合である.

定義 3.4 (混合トーリック改変). 混合扇 (Σ, β) に対し $\mathbf{a}^\tau, \tau \in \Sigma(1)$, の成分はすべて非負であるとし、次の条件を仮定する.

$$(3.5) \quad a_i^\tau = 0 \implies b_i^\tau = 0 \quad (\forall \tau \in \Sigma(1), i = 1, \dots, n).$$

このとき可換図式 (1.10) を満たすような自然な写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ が定義される. この π を混合トーリック改変という. M のチャート V_σ 上では π は次のように表示される.

$$(3.6) \quad \pi|_{V_\sigma}((v_\tau)_{\tau \in \sigma(1)}) = \left(\prod_{\tau \in \sigma(1)} |v_\tau|^{a_i^\tau} \left(\frac{v_\tau}{|v_\tau|} \right)^{b_i^\tau} \right)_{i=1, \dots, n}.$$

定理 3.7. 混合扇 (Σ, β) が次の性質を満たせば, 混合トーリック多様体 M は実代数的多様体である.

$$(3.8) \quad \mathbf{a}^\tau \equiv \mathbf{b}^\tau, \quad \forall \tau \in \Sigma(1).$$

定理 3.9. 単体扇 Σ が \mathbb{R}_{\geq}^n の細分であるとし, 条件 (3.5) を仮定する. このとき混合トーリック改変 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ は固有写像である. さらに, 条件 (3.8) を満たせば, 写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ は実代数的写像である.

定義 3.10 (混合ニュートン非退化性). 混合多項式 f が混合ニュートン非退化とは, $\Gamma_+(f)$ の任意のコンパクト面 γ について次の条件が成り立つときを言う.

- $\Sigma(f_\gamma) \cap f_\gamma^{-1}(0) \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$.
- f_γ は混合重み付き多項式.

定理 3.11 ([2]). 混合多項式 f が混合ニュートン非退化ならば, $\Gamma_+(f)$ の細分として得られる単体扇 Σ と, 次の条件を満たす混合扇から構成される混合トーリック改変が f の特異点解消類似物を与える.

$$\text{任意の } \tau \in \Sigma(1) \text{ に対し } \text{LE}(f_{\gamma(\mathbf{a}^\tau)}) \subset \{\boldsymbol{\nu} : \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}^\tau \rangle = m_\tau\}, \quad m_\tau \in \mathbb{Z}.$$

ここで f の特異点解消類似物とは, グラフが半代数的集合である固有改変 $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ で, M の各点の近傍 \mathcal{U} で次を満たす同相写像 $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ でそのグラフが半代数的集合であるようなものが取れるときをいう. X を $\pi^{-1}(\{f = 0\}) \setminus \Sigma(\pi)$ の閉包とすると,

$X \cap \mathcal{U}$ は \mathbb{C}^n の座標での単項式の零点集合の ϕ による引き戻しで表される.

4 ゼータ関数

位相空間 Y の変換 $h : Y \rightarrow Y$ に対し, ゼータ関数 $\zeta_h(t)$ を次で定める.

$$\zeta_h(t) = \prod_{i \geq 0} \Delta_i(h)^{(-1)^i} \Delta_i(h) = \det\{1 - th_* : H_i(Y) \rightarrow H_i(Y)\},$$

ただし $H_i(Y)$ は閉台をもつ \mathbb{C} 係数鎖複体の i 次ホモロジーを表す. これは [1] での定義と若干異なった定義であり, [1] でのゼータ関数の逆数をとったものになっている.

A'Campo ([1]) はミルナー束のモノドロミー変換のゼータ関数に対して次の公式を示した.

$$\zeta(t) = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{\chi(S_m)}.$$

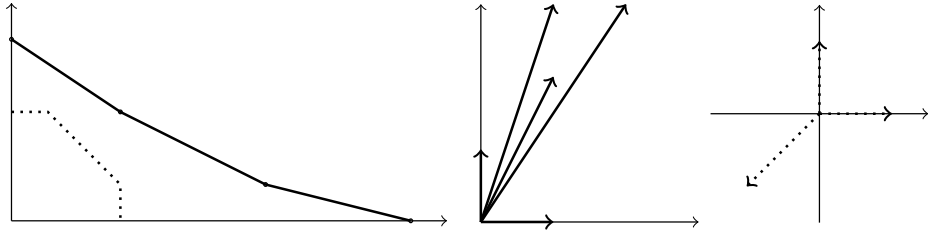
ただし S_m は次で定まる集合である.

$$S_m = \{x \in \pi^{-1}(0) : f \circ \pi \text{ は } s \text{ 中心の適当な座標系 } (z_1, \dots, z_m) \text{ で } z_1^m \text{ と表される.}\}$$

証明は位相的なので, 混合多項式がミルナー束構造を持ち, 混合トーリック改変によって特異点解消類似物が与えられるときは, 同様のゼータ関数の公式を得ることができる.

5 例

例 5.1. $f = x_2^4 \bar{x}_2 + x_1^2 \bar{x}_1 x_2^3 + x_1^5 \bar{x}_1^2 x_2 + x_1^7 \bar{x}_1^4$. 下図 (左) に $\Gamma_+(f)$ を太線で $\text{LE}_\gamma(f)$ を破線で示す. 下の (5.2), (5.3) に示すデータで定まる混合扇を考える. この混合扇のデータは下図 (中, 右) に図示されている.



$$(5.2) \quad (\mathbf{a}^0 \ \mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \mathbf{a}^3 \ \mathbf{a}^4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5.3) \quad (\mathbf{b}^0 \ \mathbf{b}^1 \ \mathbf{b}^2 \ \mathbf{b}^3 \ \mathbf{b}^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

対応する次数 $\ell = (\ell_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)}$, $m = (m_\tau)_{\tau \in \Sigma(1)}$ は次で与えられる.

$$\ell = (0 \ 15 \ 9 \ 11 \ 0), \quad m = (0 \ 3 \ -4 \ 3 \ 0).$$

$r_i = |u_i|$, $e_i = u_i/|u_i|$, $i = 0, 1, \dots, 4$, と置くと $\tilde{\pi}_{\Sigma, \beta} : U_\Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は

$$\begin{aligned} |x_1| &= r_0 r_1^2 r_2 r_3, & \frac{x_1}{|x_1|} &= e_0 e_2^{-1} e_3, \\ |x_2| &= r_1^3 r_2^2 r_3^4 r_4, & \frac{x_2}{|x_2|} &= e_1 e_2^{-1} e_4, \end{aligned}$$

で表される. $\pi^* f = r_1^{15} r_2^9 r_3^{11} e_1^3 e_2^{-4} e_3^3 \tilde{f}$ と書くと

$$\tilde{f} = r_2 r_3^9 r_4^5 e_2 e_3^{-3} e_4^3 + r_0^3 r_3^4 r_4^3 e_0 e_3^{-2} e_4^3 + r_0^7 r_1^2 r_4 e_0^3 e_1^{-2} e_4 + r_0^{11} r_1^7 r_2^2 e_0^3 e_1^{-3} e_2.$$

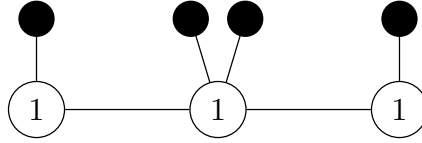
V_σ , $\sigma \in \Sigma(2)$, における f の “狭変換” f' は次のようになる.

f_γ	$f'_\gamma _{V_\sigma}$
$x_2^3(x_2 \bar{x}_2 + x_1^2 \bar{x}_1)$	$1 + r_0^3 e_0$ on $V_{\sigma_{0,1}}$ $r_2 e_2 + 1$ on $V_{\sigma_{1,2}}$
$x_1^2 \bar{x}_1 x_2 (x_2^2 + x_1^3 \bar{x}_1)$	$1 + r_1^2 e_1^{-2}$ on $V_{\sigma_{1,2}}$ $r_3^4 e_3^{-2} + 1$ on $V_{\sigma_{2,3}}$
$x_1^5 \bar{x}_1^2 (x_2 + x_1^2 \bar{x}_1^2)$	$1 + r_2^2 e_2$ on $V_{\sigma_{2,3}}$ $r_4 e_4 + 1$ on $V_{\sigma_{3,4}}$

ただし $\sigma_{i,j} = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j \rangle_{\mathbb{R}_{\geq}}$, ベクトル \mathbf{a}^i , $i = 1, 2, 3$, に対応する例外集合を E_i とかくと

$$\#(Z \cap E_1) = 1, \quad \#(Z \cap E_2) = 2, \quad \#(Z \cap E_3) = 1.$$

$-\mathbf{b}^1 = \mathbf{b}^0 + \mathbf{b}^2$, $-\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^3$, $-\mathbf{b}^3 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^4$ なので, 特異点解消の双対グラフは次のようになる.



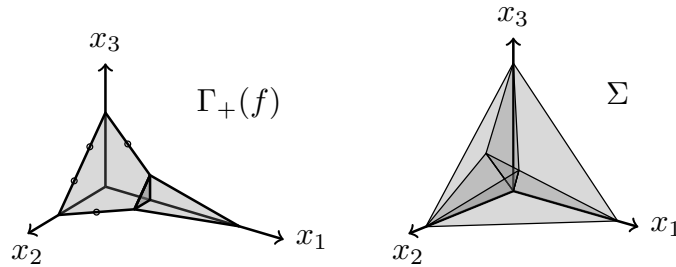
$\chi(S_4) = -2$ かつ $\chi(S_3) = 0$ なのでゼータ関数は $\zeta(t) = (1 - t^4)^{-2}$ で与えられる.

例 5.4. $f = x_1^4 \bar{x}_1^2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^3 + x_3^3$. 次で定まる単体扇 Σ を考える.

$$\Sigma(1) = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^5\}, \quad (\mathbf{a}^i)_{i=1, \dots, 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma(3) = \{\sigma_{1,2,4}, \sigma_{1,3,4}, \sigma_{2,4,5}, \sigma_{3,4,5}, \sigma_{2,3,5}\}.$$

ただし $\sigma_{i,j,k} = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j, \mathbf{a}^k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq}}$.



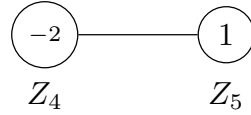
次のデータで決まる混合扇 (Σ, β) をとり, 混合トーリック改変を構成する.

$$(\mathbf{b}^i)_{i=1,\dots,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f の“狭変換”の零点集合を Z で表し, ベクトル \mathbf{a}^i に対応する例外集合と Z との共通部分を Z_i で表す.

$$3b^1 + 2b^2 + 2b^3 + b^5 = 2b^4, \quad -b^2 - b^3 + b^4 = -b^5,$$

なので, Z 内での交点数を計算すると $Z_4 \cdot Z_4 = -2$ かつ $Z_5 \cdot Z_5 = 1$ がわかる. Z 内の例外集合の双対グラフは次のようになる.



参考文献

- [1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie, Comment. Math. Helvetici 50 (1975), 233–248.
- [2] T. Fukui, Singularities of mixed polynomials with Newton polyhedrons, preprint.
- [3] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, Topological toric manifolds, Mosc. Math. J. 13 (2013), 57–98.
- [4] A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and toroidal varieties, Functional Analysis and its Applications 11 (1978), 289–296.
- [5] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies 61, Princeton University Press. London: Oxford University Press, 1969.
- [6] M. Oka, Non-degenerate mixed functions, Kodai Math. J. 33 (2010), 1–62.
- [7] M. Oka, Mixed functions of strongly polar weighted homogeneous face type, Singularities in Geometry and Topology 2011, Advanced Study in Pure Math. 66, 173–202, 2015.
- [8] 岡睦雄, 複素および混合超曲面特異点入門, 丸善出版 2018.
- [9] A. Pichon and J. Seade, Fibred multilinks and singularities $f\bar{g}$, Math. Ann. 342 (2008), no.3, 487–514.