正方形杭問題とトポロジー/層理論

浅野　知紘　(京都大学)*

概　要

本稿では正方形杭問題とトポロジー・シンプレクティック幾何との関連を概観し, 最近の超局所層理論からの進展, 特に講演者と池祐一氏による共同研究の成果 [AI25] について概説・報告する. *1

1　正方形杭問題

正方形杭問題 *2 とは,

問題 1.1 (正方形杭問題)**.** ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内のジョルダン曲線 *3 が任意に与えられたとき, その上の相異なる 4 点であって正方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

という問題である. この問題は Toeplitz によって 1911 年に提起されたが, 今日においても未解決である.

初期の重要な結果として，Emch が区分的に解析的な曲線の広い範囲に対して証明し，1929 年に Schnirelmann が滑らかな曲線に対して同境理論を用いて証明している．また Emch の議論は後に Stromquist によって精密化され局所単調 (locally monotone) と呼ばれる曲線に一般化された．正方形杭問題に関する歴史や文献については，例えば [Mat14] を参照されたい.

本講演では正方形杭問題の長方形への一般化について考える．$[abcd]$ で頂点がこの順に反時計回りに並んだ四角形を表すことにする *4．$\theta \in (0,\pi)$ が与えられたとき，長方形 $[abcd]$ であって，対角線 ac と対角線 bd の交点を e としたとき対角線のなす角度 $\angle aeb$ が θ となっているものを θ-長方形と呼ぶことにする.

問題 1.2 (長方形杭問題)**.** ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内のジョルダン曲線と角度のパラメータ $\theta \in (0,\pi)$ が任意に与えられたとき, ジョルダン曲線上の相異なる 4 点であって θ-長方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

---

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学　大学院理学研究科
e-mail: `tasano[at]math.kyoto-u.ac.jp`

本研究は科研費 (課題番号:24K16920) の助成を受けたものである。
キーワード：正方形杭問題，シンプレクティック幾何，超局所層理論

*1 実際の講演では，本稿よりも先行研究の紹介に重点を置いた．講演スライドは講演者の個人サイト (https://sites.google.com/view/tomohiro-asano) から入手可能である.

*2 英語圏では “square peg problem” もしくは “inscribed square problem” と呼ばれる．日本語では後者の直訳で内接正方形問題と呼ばれることも多い．しかし, 内接という語が連想させる状態がこの問題の状況を必ずしも反映しないので, ここでは前者の直訳として, 正方形杭問題という訳語をあてることにした.

*3 連続単射 $c\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ の像

*4 ここでは, 頂点の順序が異なる四角形, 例えば $[abcd]$ と $[bcda]$, は区別する.

注意 1.3. $\frac{\pi}{2}$-長方形は正方形に他ならない. また, $[abcd]$ が θ-長方形であることと, $[bcda]$ が $(\pi-\theta)$-長方形であることは同値である.

1977 年ごろの Vaughan による議論で, 任意のジョルダン曲線上に少なくとも一組, 長方形の 4 頂点をなす点たちをとれることが「向き付け不可能な閉曲面は 3 次元ユークリッド空間へ埋め込めない」といった基本的な事実の帰結として証明された. 対角線のなす角も指定したい場合には, 3 次元空間ではなく角度の 1 次元分のパラメータを増やして 4 次元空間への曲面の埋め込みやその (自己) 交差について調べる必要が出てくる. この方向での最初の結果は Hugelmeyer [Hug18] によるもので, 彼はヒーガードフレアー理論に由来する制約を用いて, $\theta=\frac{\pi}{3}$ でジョルダン曲線が滑らかな場合に存在証明を与えた [*5].

2 Greene と Lobb の先行研究

Greene と Lobb は [GL21] において, 長方形杭問題にシンプレクティック幾何が有効に使えることを見出し, この問題を滑らかなジョルダン曲線に対して肯定的に解決した. ここでは [GL23; GL24] の議論に従いながら, 彼らによる先行研究について触れる.

2.1 トーラスの埋め込み

まず，C 上の θ-長方形を見つける問題を別の問題に帰着しよう．以下，平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する．4 つの相異なる複素数 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ に対して，四角形 $[abcd]$ が θ-長方形をなすことは

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)\\ c-a=e^{-\sqrt{-1}\theta}(d-b)\end{cases}$$

と同値である．ここで，$R_\theta\colon\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ を行列

$$\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-\sqrt{-1}\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

で表現される線形写像とすると，上記の条件は $R_\theta\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ と書き直すことができる．$z\in\mathbb{C}$ と $\theta\in(0,\pi)$ に対して，$R_\theta\begin{pmatrix}z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\end{pmatrix}$ であるから，$\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の対角線 $\Delta_{\mathbb{C}}$ 上で R_θ は恒等写像であり，$\Delta_{\mathbb{C}}$ は退化した（4 点が等しい）長方形に対応する．したがって，Jordan 閉曲線 $C\subset\mathbb{C}$ と $\theta\in(0,\pi)$ が与えられたとき，θ-長方形の存在を示す問題は，$(C\times C)\cap R_\theta(C\times C)\setminus\Delta_C\neq\varnothing$ を示す問題に言い換えられる．

2.2 正方形杭問題とシンプレクティック幾何

多様体 M に対して，その余接束 T^*M はシンプレクティック多様体と呼ばれる構造を持つ．M の局所座標を $(x_1,\dots,x_n)$ として対応する余接座標を $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ とすれ

[*5] 彼の結果は実際にはこれよりも強いが, ここでは述べやすい弱い形の結果を紹介した.

ば，$\omega_{T^*M} \coloneqq \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$ は貼りあって T^*M 上の非退化閉 2 次形式を定める．一般に $2n$ 次元多様体 N とその上の非退化閉 2 次形式 ω の組 (N, ω) をシンプレクティック多様体と呼ぶ．$2n$ 次元シンプレクティック多様体 (N, ω) が与えられたとき，はめ込み $i_L\colon L \to N$ がラグランジュはめ込みであるとは，$\dim L = n$ かつ $i_L^*\omega = 0$ となることをいう．さらに i_L が埋め込みの場合, i_L の像をラグランジュ部分多様体という．N 上に時間変化する C^∞ 級関数 $H = (H_s)_{s\in[0,1]}\colon N \times [0,1] \to \mathbb{R}$ が与えられたとき, 時間変化するベクトル場 $X^H = (X^H_s)_{s\in[0,1]}$ が $\omega(X^H_s, \text{-}) = -dH_s$[*6] によって定まる．$X^H$ の積分によって定まるアイソトピーをハミルトニアンアイソトピーといい, 時刻を固定したときに得られる N の微分同相をハミルトン微分同相という．ハミルトン微分同相 φ は $\varphi^*\omega = \omega$ を満たす微分同相写像（シンプレクティック微分同相）になる．

ここでは $\mathbb{C} \simeq T^*\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の余接束と同一視して，上のやり方でシンプレクティック多様体とみなす．ジョルダン曲線 C が滑らかであると仮定する．このとき，C は $T^*\mathbb{R}$ のラグランジュ部分多様体である．一般にラグランジュ部分多様体の直積はまたラグランジュ部分多様体となるので，$C \times C$ は $T^*\mathbb{R}^2$ のラグランジュ部分多様体となる．さらに, $(R_\theta)_\theta$ は (時間変化しない) 関数 $H(z_1, z_2) = \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$ によって [*7] 定義されるハミルトニアンアイソトピーなので，各 θ に対して $R_\theta(C \times C)$ もラグランジュ部分多様体となる．したがって，$(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ はふたつのラグランジュ部分多様体の交差となる．

次に, Δ_C の部分でラングジュはめ込みとしての構造は保つように手術を行う．もし $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_C \neq \varnothing$ ならば，手術後のラグランジュはめ込みはラグランジュ埋め込み（部分多様体）となる．このラグランジュはめ込みのマスロス数と呼ばれる不変量を計算すると 4 になるのだが, Polterovich と Viterbo のそれぞれ独立な 1990 年ごろの結果から $\mathbb{C}^2$ 内のラグランジュ部分トーラスのマスロフ数は 2 でなくてはならないので, これは埋め込みになりえない．

その後 [GL24] において $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ のラグランジュ交差フレアーコホモロジーであって, 対角線 Δ_C の寄与を排除したバージョンが構成された．彼らはこれに付随したスペクトル不変量の解析・評価を行うことで, 直径とそれが囲う領域の面積についての条件をみたす長さ有限 [*8] のジョルダン曲線に対して長方形杭問題を肯定的に解決した．

3 層について

層は局所と大域をつなぐ概念であり, 幾何学やそれ以外の分野で広い領域で有効に活用されている．

ここではまずベクトル空間に値をとる層の定義を見てみよう．その前にいくつか記法などを確認しておく．

[*6] 文献によって符号が異なるので注意されたい．

[*7] ここでは $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}^2$ の同一視のもと, $\mathbb{C}^2$ の座標で記述している．

[*8] 折れ線近似の精度を良くしていくにしたがって, その長さがある有限の値に収束することをいう．求長可能 (rectifiable) とも呼ばれる．

- 位相空間 X に対し, その開集合全体の集合を $\mathrm{Open}(X)$ と書く. 包含によって半順序集合の構造をもち, 圏とみなせる. この圏のことも $\mathrm{Open}(X)$ と書く.
- 圏 $\mathcal{C}$ に対し, その反対圏を $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と書く.
- 以下, 係数体 $\mathbf{k}$ を固定する. $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ で $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間と線形写像のなす圏とする.

定義 3.1. **前層**とは関手 $F\colon \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ のことである. また前層の間の射とは, 関手としての自然変換のことである.

即ち, X 上の前層 F は次のデータ

(1) 開集合 $U \subset X$ に対する $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間 $F(V)$
(2) 開集合の包含 $U \subset V \subset X$ に対する線形写像 $\rho_{UV}\colon F(V) \to F(U)$

からなり, これらは次の条件

(i) 各開集合 $U \subset X$ について $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{F(U)}$ である.
(ii) 各開集合の列 $U \subset V \subset W \subset X$ について, $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ である.

を満たす. また, $U \subset V \subset X$ および $s \in F(V)$ のとき, $\rho_{UV}(s)$ を $s|_U$ とも書く.

定義 3.2. 前層 F は次の条件 (降下 (descent) 条件) をみたすとき**層**とよばれる. 任意の開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ について,

$$F(U) \to \prod_{\alpha \in I} F(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta \in I} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

がイコライザ図式になることである. ここで右側の 2 つの射は $(s_\alpha)_{\alpha \in I}$ に対し $(s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta})_{\alpha,\beta \in I}$ および $(s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta})_{\alpha,\beta \in I}$ を対応させる射である. また, 層の射とは, 前層としての射のことをいう.

これまで, ベクトル空間に値をとる層について述べたが, より一般に上述のような降下条件を定式化できる圏の対象たちは層の値として使うことができる. ここでは層の値として主にベクトル空間の複体の圏を用いる. 複体間の射の間には自然にホモトピーの概念があるが, これを尊重した前層や層の定義が可能である. 前層の定義において「各開集合の列 $U \subset V \subset W \subset X$ について, $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ である.」という条件があったが, この条件を課す代わりに ρ_{UW} と $\rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ の間の構造のホモトピーを指定して, 前層がもつ構造に含めるのである. また, より長い開集合の包含の列に付随して, さらに高次のホモトピーも構造として指定する. これによって前層が定義でき, それがさらに層であることを規定する降下条件も, より大きな図式

$$F(U) \to \prod_{\alpha \in I} F(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta \in I} F(U_\alpha \cap U_\beta) \Rrightarrow \prod_{\alpha,\beta,\gamma \in I} F(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \mathrel{\substack{\to\\\to\\\to\\\to}} \cdots$$

がホモトピー極限の図式になるといった形で述べ直される．この意味での層 [*9] のなす圏 [*10] を $\mathrm{Sh}(X)$ と書く．また, 係数を別の圏 $\mathcal{C}$ に取り換えた場合は $\mathrm{Sh}(X;\mathcal{C})$ などと書くことにする．

また, $\mathrm{Sh}(X)$ は閉な対称モノイダル構造 $\otimes$ をもち, 対応する内部 Hom 関手を $\mathcal{H}om(\text{-},\text{-})$ と書く．さらに, $f\colon X \to Y$ が局所コンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像のとき, 関手 $f_*, f_!\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$, $f^*, f^!\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ が定義され, 随伴 $f^* \dashv f_*$ と $f_! \dashv f^!$ が成立する．これら 6 つの関手とそれらの間の自然変換のなす枠組みは six-functor formalism とよばれる．

4 超局所層理論

超局所層理論は層の超局所的な性質を調べる分野である．ここで超局所とは「方向込みの局所性」･「余接束における局所性」を意味する．この理論は Kashiwara–Schapira [KS90] によって 1980 年代から 1990 年頃に確立・整備されたが, その後 2006 年から 08 年頃の Nadler–Zaslow と Tamarkin の先駆的な仕事を皮切りにシンプレクティック幾何への応用が活発になった．

ここでは, 超局所層理論とそのシンプレクティック幾何への応用において重要な概念を紹介したい．

4.1 層のマイクロ台と μhom

X を可微分多様体として, $F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対し**マイクロ台**とよばれる閉集合 $\mathrm{SS}(F) \subset T^*X$ が定義される．

定義 4.1. 任意の開集合 $U \subset T^*X$ について, $\mathrm{SS}(F) \cap U = \varnothing$ であることと次の条件が同値になるように閉集合 $\mathrm{SS}(F) \subset T^*X$ が定義される．

$x_0 \in X$ と C^∞ 級関数 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ であって $d\varphi(x_0) \in U$ を満たす任意の組に対し, $V = \{x \in X \mid \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$ とし, B は x_0 の開近傍をわたるとしたとき, 制限写像が誘導する

$$\operatorname*{colim}_{x \in B} F(V \cup B) \to F(V)$$

が擬同型になる．

これは雑に述べれば, V をその境界の x_0 において $d\varphi(x_0)$ が指定する方向にわずかに拡げたときに, V 上の関数について (コホモロジーのレベルでの) $d\varphi(x_0)$ 方向への解析接続の存在と一意性の成立を意味する．すなわち, $\mathrm{SS}(F)$ はこれが成り立たない方向の全体

[*9] これは homotopy sheaf とか ∞-sheaf と呼ばれることも多いが, ここでは単に層 (sheaf) とよぶ．

[*10] 正確には無限圏である．この無限圏のホモトピー圏は, (X が多様体などのよい位相空間の場合は,) 古典的な導来圏と自然に圏同値になる．古典的な導来圏においては極限・余極限のふるまいがよくないという不満点がある．ホモトピーの情報を忘れる前の圏でホモトピー極限・ホモトピー余極限を考える必要がある状況が今回の応用においても発生する．

であり, 層のある種の特異性を表す. また, $\mathrm{SS}(F)$ は錐状, 即ち $\mathbb{R}_{>0}$ によるスカラー倍の作用で保たれる. さらに, 次の基本的な性質が成り立つ.

補題 4.2. 多様体上の層 $F, G, H \in \mathrm{Sh}(X)$ に対して, そのマイクロ台は次を満たす.

(1) $\mathrm{SS}(F[1]) = \mathrm{SS}(F)$.

(2) $F \to G \to H$ が $\mathrm{Sh}(X)$ における (コ) ファイバー列のとき,
$\mathrm{SS}(G) \subset \mathrm{SS}(F) \cup \mathrm{SS}(H)$.

補題 4.3 (超局所 Morse の補題)**.** 層 $F \in \mathrm{Sh}(X)$ および C^∞ 級関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ であって $a < b$ をみたすものが与えられている. これらが次の条件

(i) f は $\mathrm{Supp}(F)$ 上で固有である

(ii) 任意の $x \in f^{-1}([a,b))$ について, $df(x) \notin \mathrm{SS}(F)$

をみたすとき, 制限射 $F\left(f^{-1}((-\infty,b))\right) \to F\left(f^{-1}((-\infty,a))\right)$ は擬同型である.

この補題は Morse 理論において「値を特異値をまたがずに変化させる場合に劣位集合がホモトピー型を変えない」という主張の対応物である. 一方,「特異値をまたぐ」つまり $df(x) \in \mathrm{SS}(F)$ なる $x \in f^{-1}([a,b))$ における変化はマイクロ茎 (microstalk) や, それと密接にかかわる μhom とよばれる概念によって記述できる.「特異値をまたぐ」場合の主張の一つの具体的なバージョンが後述の補題 4.5 である.

定義 4.4. $F, G \in \mathrm{Sh}(X)$ に対し, $\mu hom(F,G) \in \mathrm{Sh}(T^*X)$ が

$$\mu hom(F,G) \coloneqq \mu_{\Delta_X}\, \mathcal{H}om(q_2^* F, q_1^! G)$$

によって定義される. ここで, $q_1, q_2\colon X \times X \to X$ はそれぞれ射影, $\Delta_X \subset X \times X$ は対角集合, μ_{Δ_X} は超局所化関手である.

超局所化関手は特殊化関手と Fourier–Sato 変換の合成として定義されるが, これらの定義および解説は割愛する. 一般に $\mu hom(F,G)$ の台はマイクロ台の共通部分 $\mathrm{SS}(F) \cap \mathrm{SS}(G)$ に含まれる. μhom は超局所層理論における非常に重要な概念で, 今回の応用においても大きな役割を果たしている.

4.2 Tamarkin 圏とフィルター付き複体の層

超局所層理論の幾何への応用のための大きな方針の一つに「幾何的な対象によい層を対応させ, その層を解析し, そこから幾何的な帰結を得る」というものがある. 層のマイクロ台は常に錐状であった. 錐状でない対象を層理論で扱うための Tarmakin によるアイディアは多様体 M ではなく $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層を考えるというものでった. 写像 ρ を $\rho\colon \{(x,t;\xi,\tau) \in T^*(M \times \mathbb{R}_t) \mid \tau > 0\} \to T^*M; (x,t;\xi,\tau) \mapsto (x;\xi/\tau)$ によって定義する. 任意の $A \subset T^*M$ に対し, その逆像 $\rho^{-1}(A)$ は錐状である.

$F \in \mathrm{Sh}(M \times \mathbb{R}_t)$ に対し, $\mathrm{SS}^\bullet(F) \subset T^*M \times \mathbb{R}_t$ および $\mathrm{MS}(F) \subset T^*M$ を,

$$\mathrm{SS}^\bullet(F) \coloneqq \mathrm{SS}(F) \cap \{(x,t;\xi,1)\},\ \mathrm{MS}(F) \coloneqq \overline{\rho(\mathrm{SS}(F) \cap \{(x,t;\xi,1)\})}$$

として定義する. ただし, ここで $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ の部分集合 $\{(x,t;\xi,1)\}$ を M の 1-jet の空間 $T^*M \times \mathbb{R}_t$ と同一視している.

錐状とは限らない部分集合 $A \subset T^*M$ が与えられたとき M 上の層でなく, $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層であって $\mathrm{MS}(F) \subset A$ になるもの (そのような層ひとつひとつだったり, そのような層の全体だったり) を調べることで A についての帰結が得られることがある.

ここから少し圏論的な準備を進める. 補題 4.2 より, $\mathrm{SS}(F) \subset \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau \leq 0\}$ を満たす F たちのなす部分圏は安定部分圏になる. そのため, 安定圏としての商

$$\mathcal{T}(T^*M) \coloneqq \mathrm{Sh}(M \times \mathbb{R}_t)/\{F \in \mathrm{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau \leq 0\}\}$$

を定義できる. この圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ は Tamarkin 圏とよばれる. $\mathrm{MS}(F), \mathrm{SS}^\bullet(F)$ は F を $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型でとりかえても同じ集合になるし, $\mu hom(F,G)$ を $\{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau > 0\}$ に制限したものは $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型で不変である. また商関手 $\mathrm{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \to \mathcal{T}(T^*M)$ は右随伴と左随伴をもち, どちらも忠実充満である. 右随伴・左随伴どちらもその像は $\{F \in \mathrm{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ に含まれるので, どちらかの随伴関手を用いて $\mathcal{T}(T^*M)$ を圏 $\{F \in \mathrm{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ の部分圏とみなすことができる.

M が一点 pt のときを考えよう. また, このときの圏 $\mathcal{T}(T^*\mathrm{pt})$ を $\mathcal{T}$ と略記する.

$$\mathcal{T} = \mathrm{Sh}(\mathbb{R}_t)/\{F \in \mathrm{Sh}(\mathbb{R}_t) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{(t;\tau) \mid \tau \leq 0\}\}$$

であるが, $\mathcal{T}$ は $\mathrm{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t) \coloneqq \{F \in \mathrm{Sh}(\mathbb{R}_t) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{(t;\tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ の部分圏とみなすことができた.

ここでは, $\mathrm{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ とフィルター付き複体の圏についての関係を紹介する [*11]. $F \in \mathrm{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ に対し, 補題 4.3 を用いて, $a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ のとき, $F((-\infty,b)) \to F((a,b))$ が擬同型であることが証明できる. そして, $F((-\infty,b))$ の形の開集合での値 (とそれらの間の制限写像) から, F 自体が復元される. $(F((-\infty,b)))_{b \in \mathbb{R}}$ は順序集合 $\mathbb{R}^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間の複体の圏への (∞-) 関手とみなせる. F は層だったのでその降下条件から, 射 $F((-\infty,b)) \to \lim_{\varepsilon \to 0^+} F((-\infty, b-\varepsilon))$ が任意の $b \in \mathbb{R}$ について擬同型になる.

ここでは, フィルター付き複体の定義として「$\mathbb{R}$ から $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間の複体の圏への (∞-) 関手」を採用する. すると $F \in \mathrm{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ に対し, $V_a \coloneqq F((-\infty,-a))$ と定めることで, フィルター付き複体 $V_\bullet$ が得られるし, 逆にフィルター付き複体 $V_\bullet$ が $\mathrm{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ の対象に対応するための条件は「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $V_a \simeq \lim_{\varepsilon \to 0^+} V_{a+\varepsilon}$ である」と述べ

[*11] $\mathcal{T}$ は $\mathrm{Sh}_{\tau \geq 0}(\mathbb{R}_t)$ の商ともみなせるし, 部分ともみなせる. ここから $\mathcal{T}$ とフィルター付き複体の圏の関係も記述できる. これについて明示的に書いてある文献の一例として [KSZ23] がある.

られる．しかし, このフィルター付き複体の定義に違和感を覚える読者も多いかもしれない．多くの場合, 各 $a \leq b$ に付随した射が $V_a \to V_b$ が部分複体の包含になっていることと高次のホモトピーは自明になっていることを要請する場合が多い．しかし今考えているのは, フィルター付き複体のなす (無限) 導来圏であり, 擬同型を同型にする状況で考えている．そこでは構造射 $V_a \to V_b$ たちが包含写像であるという条件は同型不変な概念ではない．また, ここでのフィルター付き複体を擬同型で取り換えて $V_a \to V_b$ たちが部分複体の包含になりさらに高次のホモトピーが全て自明になるようにもできる．そのため, 今回の定義を採用しても導来圏を考える状況では直感に反するものにはならない．結論としては, 圏 $\mathrm{Sh}_{\tau\geq 0}(\mathbb{R}_t)$ はフィルター付き複体のなす (導来) 圏の部分圏とみなせ, これにより $\mathcal{T}$ もフィルター付き複体のなす (導来) 圏の部分圏とみなせる．

ここで, $p_1, p_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_t$ を各成分への射影とし $s \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_t$ を $s(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ と定める．$\mathcal{T}$ は $F, G \in \mathcal{T}$ に対し

$$F \star G \coloneqq s_!(p_1^* F \otimes p_2^* G)$$

と定めることで閉な対称モノイダル構造をもつ．また, 無限圏としての性質もよく, 層の係数として採用した場合にも $\mathcal{T}$ 係数版の six-functor formalism が機能する．そして自然な同一視 $\mathcal{T}(T^*M) \simeq \mathrm{Sh}(M; \mathcal{T})$ が存在する．これによって $\mathcal{T}(T^*M)$ にも閉な対称モノイダル構造が定義できる．さらに $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ に対し, $\mathcal{T}$-値の射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F, G) \in \mathcal{T}$ が定義される．これをフィルター付き複体とみなすと $(\mathrm{Hom}(F, T_a G))_{a\in\mathbb{R}}$ が対応する [*12]．この $a \in \mathbb{R}$ を動かしたときの構造の変化を μhom によって記述するのが次の補題である．

補題 4.5. $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ とし, $\mathrm{MS}(F)$ と $\mathrm{MS}(G)$ はコンパクトであると仮定する [*13]．このとき, 次の (コ) ファイバー列が存在する

$$\operatorname*{colim}_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Hom}(F, T_{a-\varepsilon} G) \to \mathrm{Hom}(F, T_a G) \to \mu hom(F, T_a G)(\{\tau > 0\}).$$

また, コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi \colon T^*M \to T^*M$ が与えられたとき, φ は圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ にも作用する．記号の濫用だが, この圏への作用も φ で表す．すると．$\mathrm{MS}(\varphi F) = \varphi(\mathrm{MS}(F))$ が成立する．

4.3 ラグランジュ部分多様体の層量子化

ラグランジュ部分多様体などのよい集合 $L \subset T^*M$ に対して, $F_L \in \mathcal{T}(T^*M)$ を $\mathrm{MS}(F_L) = L$ みたす “よい” 層 [*14] を構成することは重要な研究課題であり, 今日までにいろいろな研究がなされている．この層 F_L は L の層量子化とよばれ, L の性質をよく反映している．以前はフレアー理論でしかアプローチでなかった種類の問題に, 今では層量

[*12] T_a は $\mathbb{R}_t$ 成分に a を足す写像が誘導する関手である．詳しくは後述．
[*13] 実はさらに追加の仮定が必要だが, ここでは誤魔化す．後の応用では, この追加の仮定は自動的に満たされる．
[*14] “よい” の意味については, ここでは詳しく述べない．

子化を用いることでも取り組めるようになってきている．また層量子化とフレアー理論や深谷圏との関連も年々明らかになってきている [*15].

例 4.6. C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ の外微分 $df\colon M \to T^*M$ の像 Γ_{df} は完全ラグランジュ部分多様体である．ここで閉集合 $Z_f \subset M \times \mathbb{R}_t$ を, $Z_f := \{(x,t) \mid f(x)+t \geq 0\}$ とおけば, $\mathbf{k}_{Z_f}$ は Γ_{df} の層量子化である．ただしここで $\mathbf{k}_{Z_f}$ は Z_f 上の階数 1 の定数層を包含写像で押し出して得られる $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層である．

コンパクト完全ラグランジュ部分多様体 $L \subset T^*M$ に対して, Guillermou と Viterbo によって独立に層量子化 F_L の構成法が知られている．

4.4 層の間の距離とその完備性

ここでは, Tamarkin 圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ 上のインターリービング距離 d_I について紹介する．

$a \in \mathbb{R}$ に対し, $T_a\colon \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}_t$ を $T_a(t) := t+a$ で定める．これは $T_{a*}\colon \mathrm{Sh}(\mathbb{R}_t) \to \mathrm{Sh}(\mathbb{R}_t)$ は $T_a\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を誘導する．また今後, 記号の濫用だが $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ などの他の空間の t 方向のシフトやそれらが誘導する関手も T_a で表す．$\mathcal{T}$ の対象をフィルター付き複体 $V_\bullet$ とみなした場合には, T_a の作用は $(T_aV)_b := V_{a+b}$ として記述される．$\mathcal{T}$ 上の関手として, $a_1 \leq a_2$ をみたす実数に対し, 自然変換 $\tau_{a_1,a_2}\colon T_{a_1} \Rightarrow T_{a_2}$ が定まる．実際, フィルター付き複体に対しては $(T_{a_1}V)_b = V_{b+a_1} \to V_{b+a_2} = (T_{a_2}V)_b$ が自然に定まる．そして, $\mathcal{T}(T^*M)$ に対しても関手 T_a や自然変換 τ_{a_1,a_2} が同様に定義される．

定義 4.7.
(1) 組 (F,G) が (a,b)-interleaved であるとは, ある射 $\alpha\colon F \to T_aG$ および $\beta\colon G \to T_bF$ が存在して, $T_a\beta \circ \alpha \simeq \tau_{0,a+b}(F)$ および $T_b\alpha \circ \beta \simeq \tau_{0,a+b}(G)$ をみたすこととする．
(2) $d_I(F,G) := \inf\{a+b \mid (F,G) \text{ は } (a,b)\text{-interleaved}\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$.

この d_I は $\mathcal{T}(T^*M)$ の対象の間に距離 [*16] を定める．

ここで, d_I の重要な性質を 2 つ紹介しておく．

命題 4.8. コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi\colon T^*M \to T^*M$ に対して, 不等式 $d_I(F,\varphi F) \leq \|\varphi\|_{\mathrm{Hof}}$ が成り立つ. ここで $\|\varphi\|_{\mathrm{Hof}}$ は, φ を時刻 1 の写像としてもつコンパクト台ハミルトニアンアイソトピーを生成する $H = (H_s)_{s\in[0,1]}\colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ すべてにわたった下限 $\inf_H \int_0^1 \left(\max_{p\in T^*M} H_s(p) - \min_{p \in T^*M} H_s(p) \right) ds$ によって定義される．

命題 4.9. d_I は完備である．即ち任意の Cauchy 列に収束先が存在する．

[*15] 層量子化の概要については [Kuw23] を参照されたい．層量子化を含む超局所層理論のシンプレクティック幾何への応用については [Gui23] に多くの結果がある．

[*16] 正確には拡張擬距離である．値が $+\infty$ になりうるし, $d(F,G) = 0$ は F と G が同型であることを一般には導かない．一方で, 追加の条件を課せば $d(F,G) = 0$ から F と G の同型を導けるようになる場合も多い．

5 主結果と証明の概略

5.1 主結果

ここで, 我々の主結果を述べる. その前に, $e\colon \mathbb{R} \to S^1$ を普遍被覆とし, $\lambda = \xi dx \in \Omega^1(T^*\mathbb{R})$ としておく.

定義 5.1. 連続単射 $c\colon S^1 \to T^*\mathbb{R}$ が**連続ルジャンドルリフトを許容する** [*17] とは, 滑らかな埋め込みの族 $(c_n\colon S^1 \to T^*\mathbb{R})$ が存在し, 次の条件をみたすことをいう.

(i) c_n は c に C^0 収束する.

(ii) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $(c_n \circ e)^*\lambda$ の原始関数 [*18] とする. $(f_n)_n$ はある連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に広義一様収束する.

また, この条件は $c\colon S^1 \to T^*\mathbb{R}$ の S^1 のパラメータの取り換えで不変である. 像であるジョルダン曲線 $c(S^1)$ についても連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを定義する.

定理 5.2 ([AI25][*19])**.** $C \subset T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容するとき, 任意の $\theta \in (0, \pi)$ について, C 上の相異なる 4 点であって θ-長方形の 4 頂点をなすものが存在する.

この結果は, 多くの先行研究の結果を包含し, 正方形 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) の場合に限っても真に新しい. 例えば, C が長さ有限もしくは局所単調ならば, C は連続ルジャンドルリフトを許容することから次が従う.

系 5.3. C が長さ有限もしくは局所単調のとき, 任意の $\theta \in (0, \pi)$ について, C 上の相異なる 4 点であって θ-長方形の 4 頂点をなすものが存在する.

注意 5.4. 連続ルジャンドルリフトを許容しないジョルダン曲線も多く存在する. 与えられたジョルダン曲線が連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを判定するのは一般には難しい. この条件の良い判定方法や特徴付けについては考察の余地が残されている.

5.2 層量子化の構成

以下, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ とおき, スカラー倍により C が囲う有界開領域の面積は π であるとしてよい. まず滑らかな $C \subset T^*\mathbb{R}$ に対し, $C \times C \subset T^*\mathbb{R}^2$ の層量子化 F_C[*20] を構成できる. より具体的には, まず C_0 は半径 1 の真円とし, $C_0 \times C_0 \subset T^*\mathbb{R}^2$ の層量子化 F_{C_0} を具体的に構成する. これは明示的に書きくだすことができ, ある種の一意性も証明できる. 滑

[*17] 一般的な用語ではなくここだけの呼称である.

[*18] 原始関数には定数分の任意性があるが, この定数については都合のいいように選んでよい.

[*19] Stéphane Guillermou 氏も同様の結果を独立に得ている. 超局所層理論を用いる点・パーシステンス加群の変化する位置に注目する点は共通しているが, 議論の詳細は我々のものとは異なる.

[*20] $C \times C$ の層量子化であるので, $F_{C\times C}$ と書く方が自然であるが, 表記を短くするために F_C と書くことにした.

らかな Jordan 曲線 C に対しては, $T^*\mathbb{R}$ のハミルトン微分同相 φ であって $\varphi(C_0) = C$ なるものをとってから, $F_C \coloneqq (\varphi \times \varphi)F_{C_0}$ とすればよい.

c が滑らかでない場合, 滑らかな写像の族 $(c_n\colon S^1 \to T^*\mathbb{R})_n$ であって c に C^0 収束するものをとる．ただし, $C_n = c_n(S^1)$ の囲む面積も π であるようにしておく．C_n らが Hofer 距離の意味で Cauchy 列になることを証明できる [*21]．これと命題 4.8 から, F_{C_n} が層の距離に関して Cauchy 列になることが確認できる．命題 4.9 の完備性により, 極限の対象が存在する [*22]．これを F_C と書き $C \times C$ の層量子化とよぶことにする．これは $\mathrm{MS}(F_C) = C \times C$ をみたす．一方で, $\mathrm{SS}^\bullet(F_C)$ の決定は一般には難しいのだが, C が連続ルジャンドルリフトを許容するという仮定があると, 定義 5.1 の記号を用いて,

$$\mathrm{SS}^\bullet(F_C) = \{(c \circ e(s_1), c \circ e(s_2), -f(s_1) - f(s_2)) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\} \subset T^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t \quad (5.1)$$

であることを確認できる．このとき, 任意の $a \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ について $\mathrm{SS}^\bullet(F_C) \cap T_a \mathrm{SS}^\bullet(F_C) = \varnothing$ が成り立っている.

5.3 パーシステンス構造の解析

$\mathcal{T}$-値の射の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_C, R_\theta F_C) \in \mathcal{T}$ はフィルター付き複体としては $(\mathrm{Hom}(F_C, T_a R_\theta F_C))_{a\in\mathbb{R}}$ に対応する．このフィルター付き複体 $(\mathrm{Hom}(F_C, T_a R_\theta F_C))_{a\in\mathbb{R}}$ は次数を決めてコホモロジーをとると通常の意味でのパーシステンス加群を与える．証明の基本方針としては次のようになる.

(A) パーシステンス加群の変化は交差 $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ の部分集合によって生じる.

(B) しかし自明な交差 Δ_C の寄与によって生み出される変化を捉えても θ-長方形についての情報を得られないので, Δ_C が寄与できるパーシステンス加群の変化の位置に制約を与える.

(C) Δ_C が寄与できない位置にパーシステンス加群の変化を見つける.

以下, これらのステップについて詳説はしないが, 簡単に状況を述べる.
(A) パーシステンス加群の変化は補題 4.5 によって μhom によって与えられる. $\mu hom(F, G)$ の台は $\mathrm{SS}(F) \cap \mathrm{SS}(G)$ に含まれた．そして $\mathrm{SS}(F_C)$ の $\mathrm{SS}(T_a R_\theta F_C)$ の ρ による像が, $C \times C$ および $R_\theta(C \times C)$ である．これらの事実から従う.
(B) 式 (5.1) と補題 4.5 から, Δ_C は π の倍数 $\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ における変化にしか寄与できないことが証明される.
(C) ある $a = a_\theta \in (0, \pi)$ においてパーシステンス加群の変化が生じることを示す．この議論が最も非自明な考察を含む．フィルトレーションのパラメータ a だけでなく θ を $[0, \pi]$ の範囲で動かすことが重要になる．この部分では C が連続ルジャンドルリフトを許

[*21] 具体的にアイソトピーを構成する．ここでは円盤やアニュラスの間の双正則写像を構成の手掛かりにした.
[*22] 実はこの極限は一意的である.

容することは仮定しなくてよい．一方で, C の $\mathbb{R}^2$ の部分集合としてのルベーグ測度が 0 であることは仮定する [*23] [*24].

6 今後の課題

6.1 より一般のジョルダン曲線について

一般のジョルダン曲線 C についても (ルベーグ測度 0 ならば) ある $0 < a_\theta < \pi$ でパーシステンス加群に変化が生じることは証明することができた．この a_θ に対応する変化を生み出している $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ の交差が Δ_C の点ではないことが証明できればよい．Δ_C の寄与は $\mathcal{F}_{a,\theta} \coloneqq \mu hom(F_C, T_a R_\theta F_C)|_{\rho^{-1}(\Delta_C)}$ のコホモロジーとして定式化できる．

連続ルジャンドルリフトを許容するという仮定の下では, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ の台が空集合であることが言えて, 証明がうまくいった．仮定がないと, この台の評価がうまくいかなくなる．しかしそれでも $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 である可能性はあり, それならば十分である．また, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 でなくとも, その大域的なコホモロジーが 0 なだけでも十分である．いずれにせよ, 層 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられればよさそうである．しかしながら現状では, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられるまでには, μhom に対する知見が足りていないように思われる．この種の滑らかでない対象に付随した層の μhom の解析・計算は, 今回扱った杭問題以外の観点からも現在の超局所層理論における重要な課題である．

6.2 別の形の杭について

長方形以外の多角形に対しても, それと相似の図形の頂点を任意のジョルダン閉曲線上に見いだせるかという問題が考えられる．特別なジョルダン曲線として円があるので, 円に内接する多角形のみが議論の対象となる．三角形については必ず存在することが初等的にわかり, 5 以上の n について, 内接 n 角形に対しては反例となる滑らかなジョルダン曲線 (楕円でよい) が存在することがわかる．残る内接四角形が問題になるのだが, 滑らかなジョルダン曲線については [GL23] が肯定的に解決している．一方, 等脚台形でない内接四角形に対して, 滑らかでない曲線 (実は三角形でよい) であってそれと相似な図形の 4 頂点を選んでこれないものが存在することはそれ以前から知られている．

しかし,「任意の等脚台形と任意のジョルダン閉曲線上にその等脚台形と相似な図形の 4 頂点を選んでこれるか?」という問題に反例は見つかっていない．この問題を肯定的に解決する方向での層理論的なアプローチは可能であると思われる．しかし, 長方形でない等脚台形の場合, ラグランジュ部分多様体の単調性という性質が失われるなど状況が悪く

[*23] この場合, コンパクト台で面積を保つ同相写像 $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で $C = \phi(C_0)$ なるものをとれる．ただしここで, C_0 は半径 1 の真円である．実は, この同相写像 ϕ を並べた $\phi \times \phi$ も $\mathcal{T}(T^*\mathbb{R}^2)$ に作用し, $F_C \simeq (\phi \times \phi)F_{C_0}$ が成り立つ．すると, F_C 関連の計算の一部を非常に具体的な層である F_{C_0} に対する計算に帰着でき, 議論がうまくいく．

[*24] ルベーグ測度が正になるジョルダン曲線も多く存在するが, そのような曲線に対しては長方形杭問題はルベーグの密度定理の簡単な系として肯定的に解決されている．

なっている．等脚台形の対角線が対角線の交点によってどのような比で内分されるかは, ラグランジュトーラスの有理性という性質に関わり, 層量子化の構成のしやすさや性質にも影響する．よって, 一部の等脚台形は比較的扱いやすく, 扱いやすい等脚台形についてはは類似の方針で何らかの具体的な帰結が得られるのではないかと思われる．しかし講演者は, いずれにせよ一般の等脚台形に関しては, 今回の主結果に匹敵するほど強い主張には今回使われた手法を適用するだけでは到達できず, 何か新しいアイデアが必要だと考えている．

参考文献

[AI25] T. Asano and Y. Ike. *The rectifiable rectangular peg problem.* 2025. arXiv: 2412.21057 [math.SG].

[GL21] J. E. Greene and A. Lobb. "The rectangular peg problem". *Ann. of Math. (2)* 194.2 (2021), pp. 509–517.

[GL23] J. E. Greene and A. Lobb. "Cyclic quadrilaterals and smooth Jordan curves". *Invent. Math.* 234.3 (2023), pp. 931–935.

[GL24] J. E. Greene and A. Lobb. *Floer homology and square pegs.* 2024. arXiv: 2404.05179 [math.SG].

[Gui23] S. Guillermou. "Sheaves and symplectic geometry of cotangent bundles". *Astérisque* 440 (2023), pp. x+274.

[Hug18] C. Hugelmeyer. *Every smooth Jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to* $\sqrt{3}$. 2018. arXiv: 1803.07417 [math.MG].

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on manifolds.* Vol. 292. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. x+512.

[KSZ23] C. Kuo, V. Shende, and B. Zhang. *On the Hochschild cohomology of Tamarkin categories.* 2023. arXiv: 2312.11447 [math.SG].

[Kuw23] T. Kuwagaki. *An introduction to sheaf quantization.* 2023. arXiv: 2205.02661 [math.SG].

[Mat14] B. Matschke. "A survey on the square peg problem". *Notices Amer. Math. Soc.* 61.4 (2014), pp. 346–352.