

第71回
トポロジーシンポジウム
講演集

2024年（令和6年）8月5日～8月8日

於 山口大学

はしがき

この講演集は 2024 年 8 月 5 日から 8 月 8 日までの 4 日間、山口大学において開催された第 71 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。(ただし、一部の原稿についてはシンポジウム終了後から 9 月 20 日までの期間に修正版に差し替えをおこなっている。) その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

令和 6 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究(A)
研究代表者 藤原耕二
研究課題名 幾何学的群論における新しい指導的理論の確立
研究課題番号 20H00114

研究種目 基盤研究(A)
研究代表者 大槻知忠
研究課題名 3次元双曲多様体上の量子トポロジー
研究課題番号 21H04428

研究種目 基盤研究(B)
研究代表者 下川航也
研究課題名 結び目のトポロジーとその高分子科学への応用の研究
研究課題番号 23K20791

世話人： 宮澤康行 (山口大学)
茂手木公彦 (日本大学)
佐藤進 (神戸大学)
主催：日本数学会トポロジー分科会
後援： 山口大学

第71回トポロジーシンポジウム プログラム

日程： 2024年8月5日（月）午後～8月8日（木）午前

会場： 山口大学 吉田キャンパス 大学会館
山口県山口市吉田 1677-1

ホームページ： <https://ds.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~ymiya/topolSympo/>

8月5日（月）

- 14:50～15:50 鈴木 正明（明治大学）
Twisted Alexander vanishing order of knots 1
- 16:10～17:10 柴山 允瑠（京都大学）
 n 体問題の周期軌道の存在とその組み紐について 9

8月6日（火）

- 9:40～10:40 宮澤 仁（京都大学数理解析研究所）
4次元多様体に埋め込まれた曲面の不変量とエキゾチック P^2 -knot 24
- 11:00～12:00 安田 順平（大阪大学 日本学術振興会特別研究員 DC1）
ニット状曲面を用いた曲面絡み目のチャート表示 31
- 13:30～14:30 田村 俊輔（津山工業高等専門学校）
低次元ホモロジー球面上の有限群作用による不動点集合のオイラー標数について
..... 41
- 14:50～15:50 佐々木 東容（城西大学）
Counting subgroups via Mirzakhani's curve counting 51
- 16:10～17:10 真瀬 真樹子（東京都立大学）
Lattices and symplectic actions on algebraic K3 surfaces 61

8月7日（水）

- 9:40～10:40 菅原 朔見（北海道大学 日本学術振興会特別研究員 DC1）
平面代数曲線補集合のトポロジー 70
- 11:00～12:00 糟谷久矢（大阪大学）
佐々木多様体の非可換 Hodge 対応と Uniformization 80
- 13:30～14:30 松下 尚弘（信州大学）
多様体の三角形分割に対する van Kampen–Flores の定理 88

14:50~15:50	児玉 悠弥 (鹿児島大学)	
	高野 暁弘 (大阪大学 日本学術振興会特別研究員 PD)	
	Thompson 群と結び目	97

8月8日 (木)

9:40~10:40	軽尾 浩晃 (学習院大学)	
	スケイン代数の有限次元表現の理解に向けて	106
11:00~12:00	知念 直紹 (防衛大学校)	
	同変漸近次元の不等式による評価について	118

Twisted Alexander vanishing order of knots

鈴木 正明 (明治大学)*

1 イントロダクション

結び目の不変量である Alexander 多項式は基本的かつ重要な不変量でこれまで様々な研究がされてきた。結び目 K に対して Alexander 多項式を $\Delta_K(t)$ と表すとき、 $\Delta_K(t) = 1$ となる結び目は自明な結び目以外に Conway 結び目や Kinoshita-Terasaka 結び目などがあり、特に Alexander 多項式は完全な不変量ではないことが知られている。しかしながら、 $\Delta_K(1) = \pm 1$ となることから、Alexander 多項式が消える、すなわち $\Delta_K(t) = 0$ となる結び目は存在しないことが古くから知られている。では、ねじれ Alexander 多項式は同じくゼロになることはないか、ということを考えるのは自然な問いである。

ねじれ Alexander 多項式は結び目に対して Lin[23] が、有限表示可能な群に対して Wada[29] が導入した不変量で、通常の Alexander 多項式の拡張になっている。Alexander 多項式は結び目に対して定義されるが、ねじれ Alexander 多項式は結び目とその結び目群の表現の組に対して定義される。これまでねじれ Alexander 多項式について多くの研究があり、全てを述べることはできないが、Alexander 多項式では決定できなかった結び目の性質を捉えることができることが知られている。たとえば、結び目がファイバー結び目かを決定できることが示されている [10]。

有限群 G に対して、結び目群 $G(K)$ の全射準同型 $f: G(K) \rightarrow G$ が存在するとき、 G の正則表現 $\rho: G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ との合成 $\rho \circ f: G(K) \rightarrow G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ は結び目群の表現となるので、この表現を用いてねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K^{\rho \circ f}(t)$ を考えることができる。本研究では常に有限群の正則表現を経由した結び目群の表現を考えるので、これを有限群への全射準同型に付随した結び目のねじれ Alexander 多項式と呼ぶことにする。この設定の下で、ねじれ Alexander 多項式がゼロになることがあるかという前述の問いに対して、Friedl-Vidussi は次のような驚くべき定理を与えている。

定理 1.1 (Friedl-Vidussi [11]) 結び目 K が非ファイバー結び目である必要十分条件は、ある有限群 G と全射準同型 $f: G(K) \rightarrow G$ が存在し、 f に付随した結び目 K のねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K^{\rho \circ f}(t)$ がゼロになることである。

* 〒164-8525 東京都中野区中野 4-21-1 明治大学 総合数理学部
本研究は科研費 (課題番号:20K0396) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 57K14, 57K10

キーワード: ねじれ Alexander 多項式, TAV 群, TAV 位数, 非ファイバー結び目, p -群

この定理により、Alexander 多項式とねじれ Alexander 多項式ではゼロになるか否かという点において、完全に異なった様相を呈することが分かる。またこの定理により、ねじれ Alexander 多項式がゼロになる有限群の特徴を考えると、非ファイバー結び目に対して、ねじれ Alexander 多項式がゼロになる有限群を具体的に見つけること、それらの中で一番位数の小さい有限群を決定することなどが次に問題となる。

本研究は京都大学の石川勝巳氏と慶応義塾大学の森藤孝之氏との共同研究によるものである。

2 有限群の正則表現

有限群 G が n 次元 (複素) 線型空間 V に作用し、 V の自己同型写像による群 $GL(V)$ と $GL(n, \mathbb{C})$ を同一視するとき、この作用による G の準同型 $\rho: G \rightarrow GL(V) \simeq GL(n, \mathbb{C})$ を G の (n 次元) 表現と呼ぶ。さらにこの作用を保つ V の真部分空間が存在しないときに、この表現は既約であるという。たとえば、有限アーベル群の既約表現は全て 1 次元表現であることが知られている。

有限群 G に対して、各 $g \in G$ に対応する元 e_g で生成される線型空間 V を考える。自然に G はこの V に作用するので、 G の $|G|$ 次元表現 $\rho: G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ を得る。ここで $|G|$ は G の位数を表す。この表現を有限群 G の正則表現と呼ぶ。すなわち、 G の積を G 自身への作用として見なすことで得られる表現である。正則表現の (\mathbb{C} 上の) 既約分解はその有限群の既約表現を全て含んでいる。より正確には次のような性質を持つ。

補題 2.1 有限群 G の既約表現を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ とし、 $\dim \rho_i$ で ρ_i の次元を表すとすると、このとき、 G の正則表現 $\rho: G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z}) \subset GL(|G|, \mathbb{C})$ は基底を取り換えることにより、 $\bigoplus_{i=1}^k \rho_i^{\oplus \dim \rho_i}$ と表すことができる。

このことから、正則表現は有限群の最も重要な有限次元表現と言える。

3 ねじれ Alexander 多項式と TAV 位数

結び目 $K(\subset S^3)$ に対して、 $G(K)$ で K の結び目群を表す。すなわち、 $G(K)$ は K の補空間の基本群で定義される。結び目群は Wirtinger 表示と呼ばれる、結び目の図式から得られる群表示を持つ。結び目 K が m 交点をもつ図式を許容すると、

$$G(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid r_1, r_2, \dots, r_{m-1} \rangle$$

と表すことができる。ここで生成元 x_i は図式の弧に対応し、互いに共役である (メリディアンと呼ばれる)。関係子 r_j は交点に対応するが、それらのうち任意の一つは他の関係子の帰結で得られることが知られているので、関係子の個数は交点数より一つ少なくできる。結び目群のアーベル化 $\phi: G(K) \rightarrow \mathbb{Z} \simeq \langle t \rangle$ は、各 x_i に対して $\phi(x_i) = t$ で得られる。

定義 3.1 結び目 K の Alexander 多項式は結び目群 $G(K)$ の表示が上記で与えられるとき、

$$\Delta_K(t) = \det \left(\phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq m-1}$$

と定義される。ここで $\frac{\partial}{\partial x_j}$ は Fox 微分を表す。

Alexander 多項式の定義は、他にもスケイン関係式やザイフェルト行列を用いて定義される方法もあるが、それらは等価である。本研究ではねじれ Alexander 多項式への拡張を念頭に、上記のように結び目群と Fox 微分による定義を用いる。

さらに以下のようにねじれ Alexander 多項式を定義する。(Wada は一般の有限表示可能な群に対してねじれ Alexander 多項式を定義しているが、本研究では結び目に対してのみ考察するので、結び目群に特化した定義を述べる。詳しいことについては Wada の原論文 [29] とねじれ Alexander 多項式について詳細に書かれている日本語の文献 [20] を参考文献として挙げる。)

定義 3.2 結び目 K のねじれ Alexander 多項式は結び目群 $G(K)$ の表示が上記で与えられ、さらに $G(K)$ の表現 $\rho: G(K) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ が与えられているとき、

$$\Delta_K^\rho(t) = \frac{\det \left(\rho \otimes \phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq m-1}}{\det (\rho \otimes \phi (x_m - 1))}$$

と定義される。

二点だけ注意を述べておくと、ねじれ Alexander 多項式は一般には多項式ではなく有理式であり、結び目だけでなく結び目群の表現にも依存する。本来であれば他にも定義の注意として述べるべき点があるが、それらは同じく [29] や [20] の説明に任せることにする。この定義において、ねじれ Alexander 多項式の分子に現れる行列は $n(m-1)$ 次正方行列となり、その行列式を求める必要があることから、結び目の交点数や表現の次元が大きいとかなり大変な計算を要することが想像できる。

例 3.3 結び目群 $G(K)$ の表現として、 n 次元自明表現 $\mathbf{1}: G(K) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$ を考える。すなわち、各 x_i に対して $\mathbf{1}(x_i)$ を n 次単位行列とすると、定義から

$$\Delta_K^{\mathbf{1}}(t) = \left(\frac{\Delta_K(t)}{t-1} \right)^n$$

となることが分かる。

この例より、結び目群の表現として自明表現を考えると、ねじれ Alexander 多項式は通常の Alexander 多項式と本質的に等価である。一方、自明でない表現を考えると一般にはねじれ Alexander 多項式は Alexander 多項式では表せず (c.f. [26])、ねじれ Alexander 多項式は通常の Alexander 多項式よりも豊富な情報を含んでいることが知られている。

本研究では以下のような設定を考える。有限群 G に対して、結び目 K の結び目群 $G(K)$ から G に全射準同型 $f: G(K) \rightarrow G$ が存在すると仮定する。この全射準同型と G の正則表現の合成 $\rho \circ f: G(K) \rightarrow G \rightarrow GL(|G|, \mathbb{Z})$ は結び目群の表現となるので、ねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K^{\rho \circ f}(t)$ を考えることができる。

二つの表現の直和表現に対してねじれ Alexander 多項式はそれぞれの表現によるねじれ Alexander 多項式の積になるので、補題 2.1 により次の命題を得る。

命題 3.4 上記の記号の下で次の等式が成立する。

$$\Delta_K^{\rho \circ f}(t) = \prod_{i=1}^k \left(\Delta_K^{\rho_i \circ f}(t) \right)^{\dim \rho_i}$$

イントロダクションで述べたように、この設定の下でねじれ Alexander 多項式がゼロになるかを考察する。

定義 3.5 TAV (twisted Alexander vanishing) 群と TAV 位数を次のように定義する。

- (i) 結び目 K に対して、その結び目群から有限群への全射準同型が存在し、それに付随した結び目 K のねじれ Alexander 多項式がゼロになるとき、その有限群を K の TAV 群と呼ぶ。
- (ii) 有限群がある結び目の TAV 群となっているとき、単にその有限群は TAV 群であるという。
- (iii) 結び目 K の TAV 群が存在するとき、 K の TAV 群の中で位数が一番小さい有限群の位数を K の TAV 位数 $\mathcal{O}(K)$ と呼ぶ。 K の TAV 群が存在しないときは、 $\mathcal{O}(K) = +\infty$ と定義する。

この定義により、結び目の集合を \mathcal{K} とすると、TAV 位数は写像 $\mathcal{O}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ とみなすことができる。定理 1.1 より $\mathcal{O}(K) = +\infty$ となるのは K がファイバー結び目のときで、またそのときに限るので、非ファイバー結び目の集合を $\mathcal{N} (\subset \mathcal{K})$ とすると、TAV 位数による写像 \mathcal{O} を非ファイバー結び目に制限した $\mathcal{O}|_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を得る。

4 主定理

結び目群から有限群への全射準同型が存在する必要十分条件は、その有限群が 1 元で正規的に生成される (weight one という) ということであることが [14] で示されている。これによりたとえば、結び目群から全射準同型が存在するアーベル群は巡回群に限ることや、どのような結び目群からも位数 $4n$ の二面体群 D_{2n} への全射準同型は存在しないと分かる。逆に weight one である有限群には必ずある結び目群から全射準同型が存在するが、ねじれ Alexander 多項式がゼロになるか、すなわち TAV 群であるかは分からない。weight one である有限群が TAV 群であるかについて次の定理が得られた。

定理 4.1 ([18]) weight one である有限群が TAV 群である必要十分条件はその有限群の交換子部分群が p 群でないことである。

これによりたとえば、巡回群や位数 $2p$ (p :素数) の二面体群 D_p は weight one だが TAV 群ではないことが分かる。定理 4.1 を用いて位数の小さい有限群が TAV 群かを調べると以下が得られる。

系 4.2 位数 191 以下の有限群のうち、その群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式がゼロになりえる群の位数は

$$24, 30, 42, 48, 60, 66, 70, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 110, 114, 120, 126, 130, \\ 132, 138, 140, 144, 150, 154, 156, 160, 168, 170, 174, 180, 182, 186, 190$$

に限られる。特に位数 24 未満の有限群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式はゼロにならない。

定理 4.3 ([18]) TAV 位数 $\mathcal{O}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ は次の性質をもつ。

- (i) 全ての結び目 $K \in \mathcal{K}$ に対して、 $\mathcal{O}(K) \geq 24$ が成り立つ。
- (ii) TAV 位数による写像 \mathcal{O} を非ファイバー結び目に制限した $\mathcal{O}|_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は非有界な写像になる。
- (iii) もし全射準同型 $\varphi: G(K_1) \rightarrow G(K_2)$ が存在するならば、 $\mathcal{O}(K_1) \leq \mathcal{O}(K_2)$ が成り立つ。
- (iv) 結び目 K_1, K_2 の連結和 $K_1 \# K_2$ に対して、 $\mathcal{O}(K_1 \# K_2) = \min\{\mathcal{O}(K_1), \mathcal{O}(K_2)\}$ が成り立つ。

定理 4.3 (iii) より、 K_1 が周期結び目で K_2 がその商として現れる結び目のときや、 K_1 の補空間から K_2 の補空間へ degree one map が存在するとき、 $\mathcal{O}(K_1) \leq \mathcal{O}(K_2)$ が成立する。

いくつかの結び目に対しては [25],[18] とその後の研究において、次の定理のように具体的に TAV 位数を決定している。

定理 4.4 ([25], [18]) 10 交点以下の素な結び目に対して、TAV 位数は次のようになる。

- (i) $\mathcal{O}(K) = 24$, if $K = 9_{35}, 9_{46}$
- (ii) $\mathcal{O}(K) = 60$, if $K = 10_{67}, 10_{120}, 10_{146}$
- (iii) $\mathcal{O}(K) = 96$, if $K = 10_{166}$
- (iv) $\mathcal{O}(K) = 120$, if $K = 8_{15}, 9_{25}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}, 10_{58}$
- (v) $\mathcal{O}(K) = 168$, if $K = 7_4, 8_3$
- (vi) $\mathcal{O}(K) \geq 192$, otherwise

たとえば全射準同型 $f: G(9_{35}) \rightarrow S_4$ に付随するねじれ Alexander 多項式はゼロになり、一方で位数 24 未満のどの有限群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式もゼロにはならない。よって $\mathcal{O}(9_{35}) = 24$ が示される。また、定理 4.4 で挙げられた結び目以外にも 5_2 の位数 336 の群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式はゼロになるので $\mathcal{O}(5_2) \leq 336$ などと、TAV 位数の上限が分かっている結び目がいくつかある [18]。

定理 4.5 系 4.2 で挙げた TAV 群の位数のうち、実際に TAV 位数が

24, 30, 42, 60, 66, 70, 78, 96, 102, 110, 114, 120, 130, 138, 154, 168, 170, 174, 182, 186, 190

となる結び目が存在する (ex: $\mathcal{O}(9_{35}) = 24$)。一般に、素数 p, q に対して、 $\mathcal{O}(K) = 2pq$ となる結び目が存在する。

上記のことを 2 橋結び目に制限して考えると、すべての結び目を対象にするときとは違った結果が得られる。

まず有限群が weight one であっても、共役な 2 元で生成されない有限群へはどんな 2 橋結び目からも全射準同型は存在しない。すなわち、2 橋結び目の TAV 群にはなり得ない。たとえば、位数 72 の有限群 $C_3 \times S_4$ は TAV 群だが、共役な 2 元で生成されないので 2 橋結び目の TAV 群ではない。また、 S_4 への全射準同型が存在する 2 橋結び目は多数あるが、 S_4 への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式がゼロになる 2 橋結び目は存在しないことが示される。これにより、2 橋結び目の TAV 位数は必ず 24 よりも大きいことが分かる。

5 今後の課題

問題 5.1 以下の問題は今後の課題である。

- (i) 10 交点以下の素な結び目に対して TAV 位数を決定せよ。
- (ii) $\mathcal{O}(K) = 48, 72, \dots$ となる結び目 K は存在するか?
- (iii) TAV 群に対して、その群への全射準同型に付随するねじれ Alexander 多項式がゼロになる結び目を構成せよ。
- (iv) 2 橋結び目に対する TAV 群を特徴づけよ。
- (v) 2 橋結び目の TAV 位数の最小値はいくつか? またそれを実現する 2 橋結び目は何か?

参考文献

- [1] H. Boden and S. Friedl, *Metabelian $SL(n, \mathbb{C})$ representations of knot groups IV: twisted Alexander polynomials*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 81–97.

- [2] G. Burde, H. Zieschang and M. Heusener, *Knots*, Third, fully revised and extended edition. De Gruyter Studies in Mathematics, 5. De Gruyter, Berlin, 2014. xiv+417 pp.
- [3] J. C. Cha, *Fibred knots and twisted Alexander invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4187–4200.
- [4] J. C. Cha and M. Suzuki, *Non-meridional epimorphisms of knot groups*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), 1135–1155.
- [5] J. Cho, *Connected sum of representations of knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015) 18, 1550020. Erratum: J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), 1692001, 2 pp.
- [6] R. Fox, *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad. J. Math. **22** (1970), 193–201.
- [7] S. Friedl and T. Kim, *The Thurston norm, fibered manifolds and twisted Alexander polynomials*, Topology **45** (2006), 929–953.
- [8] S. Friedl and M. Powell, *An injectivity theorem for Casson-Gordon type representations relating to the concordance of knots and links*, Bull. Korean Math. Soc. **49** (2012), 395–409.
- [9] S. Friedl and S. Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, The Mathematics of Knots: Theory and Application (Contributions in Mathematical and Computational Sciences), eds. Markus Banagl and Denis Vogel (2010), 45–94.
- [10] S. Friedl and S. Vidussi, *Twisted Alexander polynomials detect fibered 3-manifolds*, Ann. of Math. **173** (2011), 1587–1643.
- [11] S. Friedl and S. Vidussi, *A vanishing theorem for twisted Alexander polynomials with applications to symplectic 4-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. **15** (2013), 2027–2041.
- [12] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*. A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer, New York etc., 1991.
- [13] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), 51–61.
- [14] F. González-Acuña, *Homomorphs of knot groups*, Ann. of Math. **102** (1975), 373–377.
- [15] K. W. Gruenberg, *The residual nilpotence of certain presentations of finite groups*, Arch. Math. **13** (1962), 408–417.
- [16] M. Hirasawa and K. Murasugi, *Twisted Alexander polynomials of 2-bridge knots associated to metacyclic representations*, arXiv:0903.0147.
- [17] M. Hirasawa, K. Murasugi, and D. S. Silver, *When does a satellite knot fiber?*, Hiroshima Math. J. **38** (2008), 411–423.
- [18] K. Ishikawa, T. Morifuji, and M. Suzuki, *Twisted Alexander vanishing order of knots*, preprint, arXiv:2310.10936.
- [19] D. Johnson, *Homomorphs of knot groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 135–138.
- [20] 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之, *ねじれ Alexander 不変量*, 数学メモアール **5** (2006).
- [21] T. Kitano and M. Suzuki, *A partial order in the knot table. II*, Acta Math. Sin. **24** (2008), 1801–1816.
- [22] T. Kitano, M. Suzuki, and M. Wada, *Twisted Alexander polynomials and surjectivity of a group homomorphism*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 1315–1324. Erratum: Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), 2937–2939.

- [23] X.-S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin.(Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380.
- [24] T. Morifuji, *Representations of knot groups into $SL(2, \mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials*, Handbook of Group Actions. Vol. I, Adv. Lect. in Math. (ALM) **31**, Int. Press, Somerville, MA, 2015, 527–576.
- [25] T. Morifuji and M. Suzuki, *On a theorem of Friedl and Vidussi*, Internat. J. Math. **33** (2022), 2250085, 14pp.
- [26] T. Morifuji and M. Suzuki, *Twisted Alexander polynomials of knots associated to the regular representations of finite groups*, preprint, arXiv:2311.15484.
- [27] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc. Berkeley, Calif. (1976).
- [28] V. Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsions*, Birkhäuser, Basel (2001).
- [29] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), 241–256.

n 体問題の周期軌道の存在とその組み紐について

柴山允瑠 (京都大学大学院情報学研究科)

1 n 体問題の周期軌道

n 個の質点の Newton 的引力による相互作用のもとでの運動を調べる問題を n 体問題という。 n 体問題は微分方程式

$$m_k \frac{d^2 q_k}{dt^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{m_k m_j (q_k - q_j)}{|q_k - q_j|^3} \quad (k = 1, \dots, n, \quad q_k \in \mathbb{R}^d) \quad (1)$$

の解を調べる問題として定式化される。 $m_k > 0$ は質点の質量, $q_k \in \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ は質点の位置を表す。

2 体問題では, $m_1 q_1 + m_2 q_2$ が等速運動をし, $q_1 - q_2$ が Kepler 問題の解になる。従って, 2 体問題では衝突解以外の有界な軌道は楕円軌道になる (図 1)。

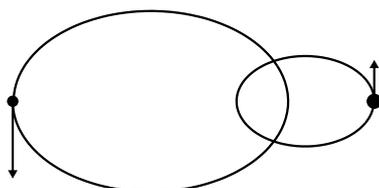


図 1: 2 体問題の楕円軌道

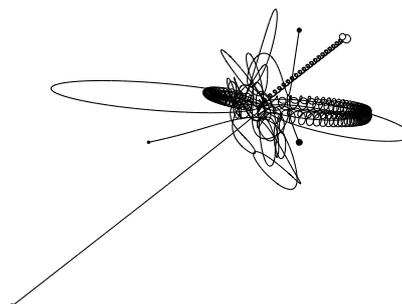


図 2: 3 体問題の 1 つの解

$n \geq 3$ の場合の n 体問題ははるかに難しい。図 2 の数値解^{*1}のように多くの解は複雑な振る舞いをする。実際, 様々な観点から 3 体問題は解けないこと (非可積分性) が証明されている。 [1, 2, 3, 19, 21, 27, 32, 33, 34, 35]。

3 体問題のほとんどの軌道が複雑な振る舞いをするなかで, 単純な振る舞いをする周期軌道も存在する。古典的に知られている周期軌道として Euler 解 (図 3) と Lagrange 解 (図 4) がある。Euler 解は 3 質点が常に 1 直線上に並び, 内分比を保ちながら運動する。Lagrange 解は, 3 質点が常に正三角形の頂点をなしながら運動をする。各質点は Kepler

^{*1} これは平面 3 体問題の数値解である。質量が 3,4,5 でその初期位置はそれぞれの対辺の長さが 3,4,5 となる直角三角形で, 初速度が 0 の解を数値計算したものである。この初期条件を満たす解を求める問題はピタゴラス 3 体問題と呼ばれている。この解を数値計算すると, しばらく複雑な振る舞いをした後, 1 体と 2 体に分かれ無限に離れていく。

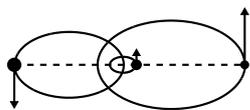


図 3: Euler 解

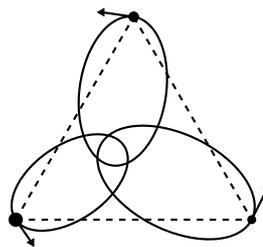


図 4: Lagrange 解

問題の解と同じ振る舞いをする．どちらも任意の質量に対して存在する． $n \geq 4$ について n 体問題についても，このような自己相似解は多数存在する．

自己相似解でないが単純な振る舞いをする解として，3 体問題の 8 の字解と呼ばれる周期軌道が知られている．2000 年に変分法により 8 の字解 (図 5) の存在証明をした論文 [6] が出版され，その後，変分法により周期軌道の存在を示す研究が活発になされてきた．本講演では，8 の字解やその後発見された周期軌道の存在証明について，組み紐と関係にも触れながら述べていく．

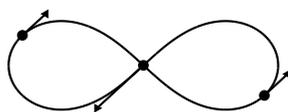


図 5: 8 の字解

2 8 の字解の発見に至るまでの経緯

n 体問題のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k |\dot{q}_k|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

である．ここで， $q = (q_1, \dots, q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ($q_k \in \mathbb{R}^d$, $\dot{q}_k \in \mathbb{R}^d$) である． n 体問題は作用積分

$$\mathcal{A}(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

に関する変分問題として定式化できる。

次節で述べるように、3体問題の8の字解は、等質量の仮定のもと、適切な対称性を課した閉曲線のクラスにおいて、作用積分を最小化するものとして得られる。その発見までの経緯について述べる。

変分法により3体問題の周期軌道の存在を示そうとした最初の論文はおそらくPoincaréによるものであろう。平面3体問題の配位空間は

$$\mathcal{X} = \{(q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0, q_i \neq q_j (i \neq j)\}$$

である。Poincaréは、この配位空間における閉曲線のホモトピーを指定したもとの作用積分の最小点を求めることで、周期軌道を求めようとしたようである [5, 20]。

20世紀初頭にTonelli[31]により一般のラグランジュ系に対する作用積分の最小点の存在が証明され、さらに時間が経過して1970年代にGordon[8]によりケプラー問題の解について変分問題の観点から明らかにされた。1980-90年代には、田中 [29, 30], Terraciniらにより、ケプラー問題を一般化した特異点を持つポテンシャル系における周期軌道の存在証明が活発に研究された。

そして、1993年にMoore[17]が8の字解を数値計算により発見し、2000年にChencinerとMontgomery[6]はその結果を知らずに、8の字解の数学的な存在証明を与えた。

Mooreは質点の運動をもとに構成される組み紐を考えた。平面における n 個の連続な曲線 $\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t) (t \in [0, T])$ で、

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(t) &\neq \mathbf{q}_j(t) & (i \neq j) \\ \{\mathbf{q}_1(0), \dots, \mathbf{q}_n(0)\} &= \{\mathbf{q}_1(T), \dots, \mathbf{q}_n(T)\} \end{aligned}$$

を満たすものを考える。これらを t 軸を加えた3次元空間に描くことで組み紐が定まる(図6)。

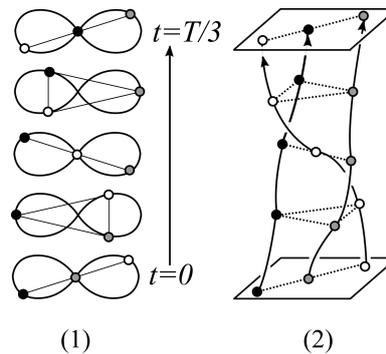


図6: 8の字解から構成される組み紐

$\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t)$ が平面 n 体問題の T -周期軌道とすると、それから組み紐が構成される。Mooreは与えられた組み紐をもつ曲線を取り、その組み紐を保ったまま作用積分を

小さくするように変形し、周期軌道を数値計算により求めた。その中で、8の字解も数値的に発見された。

また、8の字解の存在を証明した一人である Montgomery は、発見に至った経緯をいくつかの記事で述べている [16]。元々は3体問題における食の列の考察から始まったようである。平面3体問題において、3質点が同一直線上に並ぶ配置になった状態を食 (syzygy) という。日食や月食の「食」である。食は他の2質点の間に位置する質点の番号により3つに分類される (図7)。

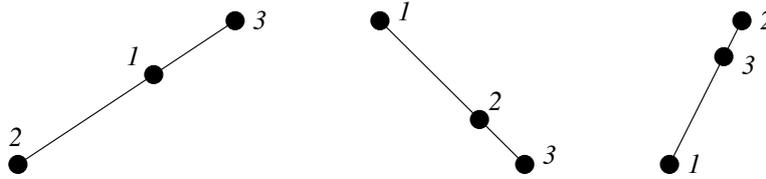


図7: 食配置1(左), 食配置2(真ん中), 食配置3(右),

そこで、Montgomery が考えた問題は次のようなものであった。

問題 1 (Montgomery [16]) 任意に与えられた 1,2,3 の数列に対し、その数列と同じ食のパターンをもつ軌道は存在するか？

Montgomery は...123123... というパターンになる軌道を考察しているうちに、8の字解の発見に至ったようである。

3 周期軌道の存在証明

3.1 変分構造と最小点の存在

n 体問題のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k |\dot{q}_k|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

である。ここで、 $q = (q_1, \dots, q_n), \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) (q_k \in \mathbb{R}^d, \dot{q}_k \in \mathbb{R}^d)$ である。 n 体問題は作用積分

$$\mathcal{A}(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

に関する変分問題として定式化できる。

$$\mathcal{X} = \left\{ (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \sum_{k=1}^n m_k q_k = 0 \right\}$$

とし、

$$\Delta_{ij} = \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{X} \mid q_i = q_j\}, \quad \Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}$$

とする。 Δ は衝突の配置全体の集合で、これに属する q は微分方程式 (1) の特異点である。配位空間を

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$$

とする。

$\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ 上の周期 2π の曲線全体を $\Lambda, \hat{\Lambda}$ とする:

$$\Lambda = H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad \hat{\Lambda} = H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \hat{\mathcal{X}}).$$

H^1 は Sobolev 空間で Sobolev ノルムを $\|\cdot\|$ で表す:

$$\|q\| = \left(\int_0^{2\pi} |q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$q \in H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \hat{\mathcal{X}})$ が \mathcal{A} の臨界点であれば、 $q(t)$ は C^2 級で微分方程式 (1) の解になる (例えば, [22] 参照).

以下、周期軌道を求めることを目的とするので、 $t_0 = 0, t_1 = 2\pi$ とし、 \mathcal{A} の定義域を $\hat{\Lambda}$ とする。なお、一般に、 $q(t)$ が n 体問題の解であれば、 $\lambda > 0$ に対し $\lambda^{-2/3}q(\lambda t)$ も解になるので、周期 2π の周期軌道が求まれば、任意の $T > 0$ に対して周期 T の周期軌道が求まったことになる。

$\hat{\Lambda}$ の部分集合 Ω を適当にとり、 \mathcal{A} の Ω における最小点として、周期軌道が得られる。

定義 2 $\Omega \subset \hat{\Lambda}$ とする。 $\|q\| \rightarrow \infty (q(t) \in \Omega)$ のとき $\mathcal{A}|_{\Omega}(q) \rightarrow \infty$ が成り立つならば、 $\mathcal{A}|_{\Omega}$ は coercive であるという。

最小点の存在を保証するのは次である。

命題 3 (Tonelli [31]) $\mathcal{A}|_{\Omega}$ が coercive ならば、

$$\mathcal{A}(q^*) = \inf_{q \in \Omega} \mathcal{A}(q)$$

となる $q^* \in \bar{\Omega}$ が存在する。

$\bar{\Omega}$ は Ω の閉包である。最小点の存在が示されても、 Ω の境界に属さないことを示さなければならない。通常の設定の場合、 Ω の境界に属する曲線は衝突を持つものになる。

3.2 対称性

G を有限群とし、 $\Lambda, \hat{\Lambda}$ に以下のように作用するとする。 $O(d)$ を d 次直交行列全体とし、 \mathfrak{S}_n を n 次の対称群とする。準同型

$$\tau : G \rightarrow O(2)$$

$$\rho : G \rightarrow O(d)$$

$$\sigma : G \rightarrow \mathfrak{S}_n$$

を与え, $g \in G, q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in \Lambda, \hat{\Lambda}$ に対し,

$$g \cdot ((q_1, \dots, q_n)(t)) = (\rho(g)q_{\sigma(g^{-1})(1)}, \dots, \rho(g)q_{\sigma(g^{-1})(n)})(\tau(g^{-1})t)$$

により作用を定める. t は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ に属するので, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を \mathbb{R}^2 内の単位円 \mathbb{S}^1 と同一視して, $O(2)$ が作用するとみなしている.

$$\begin{aligned}\Lambda^G &= \{q \in \Lambda \mid g \cdot q = q \ (\forall g \in G)\} \\ \hat{\Lambda}^G &= \{q \in \hat{\Lambda} \mid g \cdot q = q \ (\forall g \in G)\}\end{aligned}$$

とし, $\mathcal{A}^G = \mathcal{A}|_{\Lambda^G}$ とする. また, ρ, σ により G は $\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ に作用するので, その作用で不変な $\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ の元全体を $\mathcal{X}^G, \hat{\mathcal{X}}^G$ と書く. G の作用を適当に与えて, \mathcal{A}^G を最小化する曲線の存在を示すことで, 様々な周期軌道が得られる.

\mathcal{A}^G を最小化する曲線であれば \mathcal{A}^G の臨界点であるが, これが \mathcal{A} についても臨界点である必要がある. そのことを保証するのが次の Palais 原理である.

命題 4 (Palais [18]) \mathcal{A} が G の作用で不変, つまり $\mathcal{A}(g \cdot q) = \mathcal{A}(q) (\forall q \in \hat{\Lambda}, g \in G)$ ならば, \mathcal{A}^G の臨界点は \mathcal{A} の臨界点である.

これより, \mathcal{A}^G の臨界点は \mathcal{A} の臨界点となるため Euler-Lagrange 方程式の解となる. この命題の仮定を満たすためには, σ で入れ替わる質点同士の質量は同じである必要がある.

また, 群作用により作用積分が制限されている場合に, coercive となるための簡潔な必要十分条件が得られている.

命題 5 (Ferrario & Terracini [7]) \mathcal{A}^G が coercive になるための必要十分条件は, $\mathcal{X}^G = \{0\}$ である.

以下では, 群作用とそのもとで \mathcal{A}^G の最小点として得られる周期軌道の例を挙げる.

例 6 3体問題の 8 の字解 (図 5) は次のような対称性である. $n = 3, d = 2, m_1 = m_2 = m_3$ とし

$$G = \langle a, b, c \rangle = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

の作用を

$$\begin{aligned}\rho(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(a) &= (1, 2, 3), & \tau(a) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \\ \rho(b) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(b) &= \text{Id}, & \tau(b) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \rho(c) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \sigma(c) &= (2, 3), & \tau(c) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で定める. $\mathcal{X}^G = \{0\}$ は成立し \mathcal{A} の最小点が存在する. Chenciner と Montgomery [6] は \mathcal{A}^G を最小化する曲線として 8 の字解を得た.

例 7 等質量の平面上の $2n$ 体問題を考える. つまり, $d = 2, m_1 = m_2 = \dots = m_{2n}$ の場合を考える. $p = 1, 2, \dots, [n/2]$ ($[\cdot]$ はガウス記号) を固定し, 2 つの元で生成される群 $G_{n,p} = \langle g_n, h_{n,p} \rangle$ をとり, 作用を

$$\begin{aligned}\rho(g_n) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \\ \sigma(g_n) &= (1, 2, \dots, 2n) \\ \tau(g_n) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \rho(h_{n,p}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma(h_{n,p}) &= (1, 3, \dots, 2n-1)^{-p}(2, 4, \dots, 2n)^p \\ \tau(h_{n,p}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi j}{n} & -\sin \frac{2\pi j}{n} \\ \sin \frac{2\pi j}{n} & \cos \frac{2\pi j}{n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で決める. ここで, j は n と p の最大公約数である. $\mathcal{X}^{G_{n,p}} = \{0\}$ が成立するので最小点が存在する. $p \neq p'$ であっても

$$\Lambda^{G_{n,p}} \cap \Lambda^{G_{n,p'}} \neq \emptyset$$

となりうるので, p ごとに最小点が異なることを示す必要がある. その証明については, [23, 26] を参照されたい. $\mathcal{A}^{G_{n,p}}$ を最小化する曲線により, 図 8 のような周期軌道が得られる.

例 8 等質量の平面 4 体問題を考える. 群を

$$G = \mathbb{Z}_2 \times D_8 = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1^2 = g_2^2 = g_3^4 = (g_1 g_2)^2 = g_1 g_3 g_1 g_3^{-1} = (g_2 g_3)^2 = 1 \rangle,$$

準同型を

$$\begin{aligned}\tau(g_1) &= \text{Id}_2, & \rho(g_1) &= -\text{Id}_2, & \sigma(g_1) &= (1 \ 3)(2 \ 4), \\ \tau(g_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \rho(g_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(g_2) &= (2 \ 4), \\ \tau(g_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho(g_3) &= \text{Id}_2, & \sigma(g_3) &= (1 \ 2 \ 3 \ 4).\end{aligned}\tag{2}$$

とする.

このもとでの, 作用積分 \mathcal{A}^G の最小点は, 自明な回転する正方形解になる. そこで, $\hat{\Lambda}^G$ を

$$P_y q_1(0) > 0, \quad P_x q_2(0) > 0, \quad P_x q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, \quad P_y q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

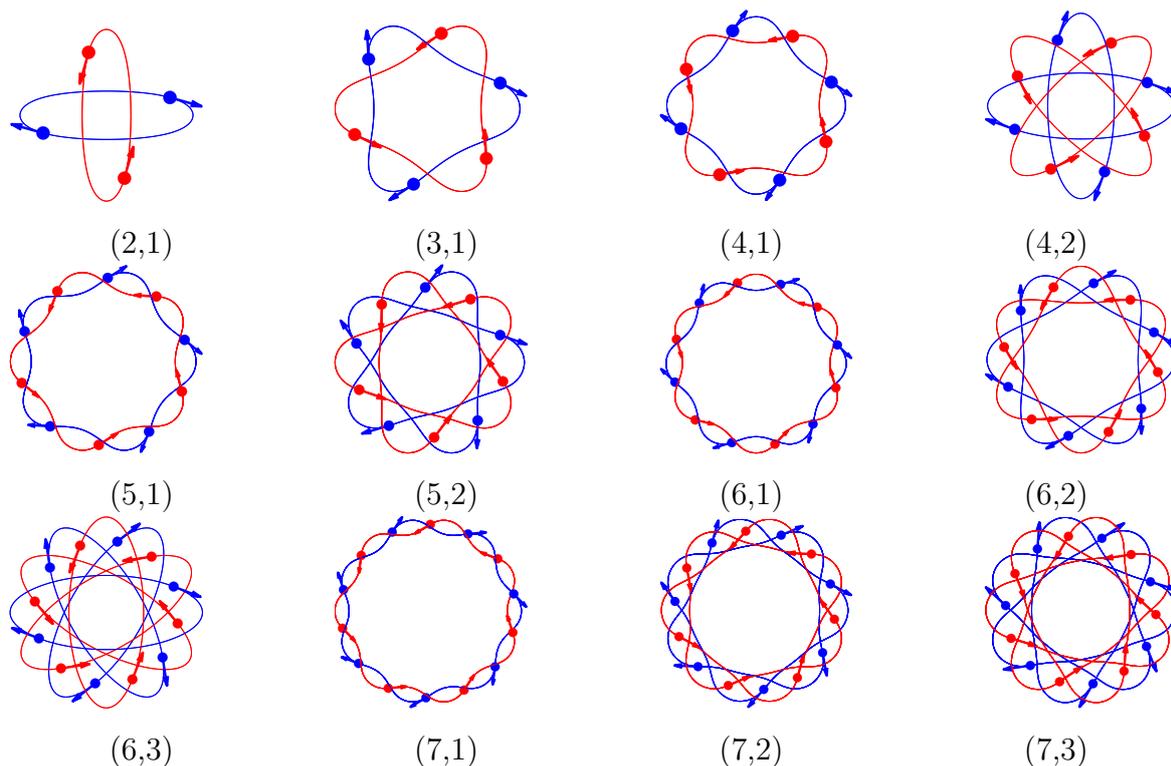


図 8: $2n$ 体問題の周期軌道: 対応する (n, p) を各図の下に記している.

を満たすものに制限して, その集合上で \mathcal{A}^G を考える. ここで,

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

この最小点として, 図 9 のような超 8 の字解が得られる [24].

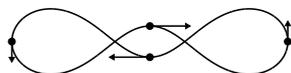


図 9: 超 8 の字解

3.3 衝突の除去

群 G とその作用をうまく設定することで \mathcal{A}^G の最小点 q^* が得られる. q^* は $\hat{\Lambda}^G$ の閉包である Λ^G に属する. そのため, q^* は衝突する可能性がある. 変分法により n 体問題の周期解の存在を示す際に最も困難な部分は, 衝突の可能性を除去することである.

衝突を持つ曲線の作用積分はある程度大きいことを示し、最小点の作用積分はより小さな値を持つことで、最小点が衝突しないことを示すことになる。この部分は、技術的になるので、ここでは省略する。[7, 25, 26] を参照されたい。

4 3 体問題の形状空間

等質量の平面 3 体問題を考える。3 質点の運動を表すのに適切な形状空間を導入する。これは、8 の字解の存在証明の際にテスト曲線と呼ばれるものを構成する際に用いられている。 \mathbb{R}^2 を \mathbb{C} と同一視し、重心 $q_1 + q_2 + q_3$ を原点に固定した配位空間を

$$\mathcal{X} = \{(q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{C})^3 \mid q_1 + q_2 + q_3 = 0, q_i \neq q_j (i \neq j)\}$$

とする。Jacobi 変換 $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$(z_1, z_2) = J(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(q_3 - q_2), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(q_1 - \frac{1}{2}(q_2 + q_3) \right) \right)$$

で定める。これにより、3 体問題の作用積分は

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (|\dot{z}_1|^2 + |\dot{z}_2|^2) + \frac{1}{\sqrt{2}|z_1|} + \frac{1}{\left| \sqrt{\frac{3}{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 \right|} + \frac{1}{\left| \sqrt{\frac{3}{2}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 \right|} dt$$

と表せる。 $z_1 \wedge \dot{z}_1 + z_2 \wedge \dot{z}_2$ は角運動量に相当する。実際、

$$z_1 \wedge \dot{z}_1 + z_2 \wedge \dot{z}_2 = q_1 \wedge \dot{q}_1 + q_2 \wedge \dot{q}_2 + q_3 \wedge \dot{q}_3$$

が成り立つことが容易に分かる。ここで、 \wedge は外積 (の第 3 成分) である。つまり、 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して、 $z \wedge w = xv - yu = \text{Im}(\bar{z}w)$ である。

\mathbb{S}^1 を \mathbb{C} の単位円として、 $\omega \in \mathbb{S}^1$ の $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ への作用を $(\omega z_1, \omega z_2)$ で定める。 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上に $(z_1, z_2) \sim (\omega z_1, \omega z_2)$ により同値関係を定め、この商空間 $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{S}^1$ を考える。この空間を形状空間と呼ぶ。

$(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{S}^1$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ と同相になる。 \mathbb{C}^2 から $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ への写像を与えるものとして、Hopf 写像がある^{*2}。天体力学では、Kustaanheimo-Stiefel 変換とも呼ばれる。Hopf 写像は

$$F: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{C}) \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto (u_1, u_2 + iu_3) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$$

で与えられる。 $u_2 + iu_3 \in \mathbb{C}$ は $(u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$ と同一視する。 $(z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対して、 $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2)$ と $F(z_1, z_2) = F(z'_1, z'_2)$ が同値である。これにより形状空間への自然な写像が実現されたことになる。

^{*2} 多様体論で出てくる Hopf 写像は、これを単位球面 \mathbb{S}^3 に制限して得られる写像 $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ に対応する。

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad E_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad E_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$L_+ = (0, 0, 1), \quad L_- = (0, 0, -1)$$

とおく. E_k の張る直線は 1 質点が他の 2 質点の midpoint に位置する直線配置 (Euler 配置) である. L_{\pm} は正三角形の配置 (Lagrange 配置) を表している. L_+ と E_1 で張られる 2 次元空間は二等辺三角形配置全体の集合になる.

いま与えられた曲線に課された対称性は時間 $T' = 2\pi/12$ 毎に Euler 配置と二等辺三角形配置を通過することに対応する.

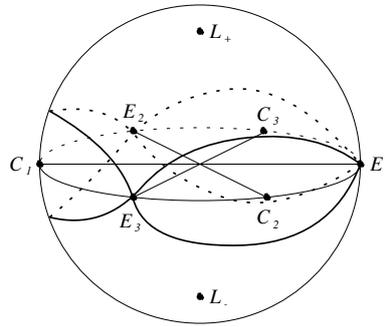


図 10: 形状空間における 8 の字解に対応する曲線

なお, 形状空間において, 食配置は赤道に対応し, C_1, C_2, C_3 により分けられた 3 つのいずれを通過するかで, 食のタイプが決まる.

5 3 体問題の解のなす組み紐や食の列に関する研究

問題 1 に戻ろう. 食の列の研究はその後も進められている. Montgomery は以下の結果を示している.

定理 9 (Montgomery [13]) 角運動量が 0 かつ軌道が有界かつ 3 体衝突をもたない平面 3 体問題の任意の解には, 無限回の食が現れる.

なお, 角運動量が 0 の解は, 3 質点が平面上を運動することが示されている ([28] 参照) ので, 空間で考えても, 結果は成立する.

与えられた食のパターンをもつ軌道を変分法により示そうとすると, 衝突の除去が困難な問題としてある. 万有引力をより強い力に変えるとその問題は回避できる. 互いの距離の 3 乗に反比例する引力で引き合う等質量の平面 3 体問題を考える:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^4} \quad (k = 1, 2, 3, \quad q_k \in \mathbb{R}^2). \quad (3)$$

定理 10 (Montgomery [14]) 同じ番号が連続して続かないもので, $\dots ijijij \dots$ 以外の任意の食の列に対して, それを実現する (3) の解が存在する.

証明は変分法によるもので, Jacobi–Maupertuis 汎関数が用いられている.

前節で述べたように Moore は 3 体の運動から構成される組み紐を考察している中で, 8 の字解を数値的に発見した. その進展として, 次の問題が考えられる.

問題 11 (Moore [17], Montgomery [11, 12]) 任意に与えられた 3 本の組み紐について, それを実現する平面 3 体問題の解は存在するか?

それに関連する結果として次の結果がある. 定理 9 は角運動量 0 のもとで示されているが, 十分 0 に近いという仮定で次が示されている.

定理 12 (Moeckel & Montgomery [10]) 等質量か等質量に近い平面 3 体問題において, 形状空間の曲線に対する任意のホモトピー型について, それを実現する解が存在する. その解の角運動量は 0 に近いが 0 ではない.

この証明では, 変分法は用いられていない. 3 体衝突に対応する特異点をブローアップし, そこに現れる平衡点間に多様なヘテロクリニック軌道が存在し, 与えられたヘテロクリニック軌道の族を追跡する軌道として実現される. 3 体衝突は角運動量が 0 の場合のみ起こる. 角運動量を 0 ではなく十分 0 に近いとすることで, 3 体衝突せずに衝突特異点のスレスレを通る軌道になる.

なお, 定理 9 に関連して 4 体問題について次が示されている.

定理 13 (Montgomery [15]) 角運動量が 0 でありかつ有界で 3 体衝突を持たない空間 4 体問題の任意の解には, 同一平面上の配置が無限回現れる.

これにより, 4 体問題についても平面配置のパターンによる軌道の分類や存在など様々な問題が考えられるが, まだほとんど解明されていない.

6 平面 $2n$ 体問題の周期軌道の組み紐型

組み紐の位相不変量はいくつかあるが, その中で拡大率 (stretch factor) は力学系と深い関係があるものとして, 特に重要である. B_m を m -組み紐群とする. $Z(B_m)$ を B_m の中心とし,

$$\mathcal{B}_m = B_m / Z(B_m)$$

とおく. この元の共役類を組み紐型という.

図 3 のオイラー解や図 4 のラグランジュ解はいずれも \mathcal{B}_3 が trivial になる.

m 個の穴の空いた 2 次元円盤を D_m とする. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $a_1, \dots, a_m \in D$ を互いに異なる点とする. $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$ とし, $D_m = D \setminus A_m$ とする. D_m 上の同相写像 $\text{Homeo}_+(D_m)$ のアイソトープを同値関係とする同値類を

$MCG(D_m)$ と書き, D_m 上の写像類群という. $MCG(D_m)$ の元に対し, その代表元となる写像の懸垂 (suspension) における A_m の軌道が組み紐をなす. この対応により, $MCG(D_m)$ と \mathcal{B}_m を対応させることができる. Nielsen-Thurston により, 写像類群は, 周期的, 可約, 擬 Anosov に分類される ([4]などを参照). 例えば, 8 の字解から構成される組み紐 (図 6) は擬 Anosov である.

擬 Anosov の場合, 対応する写像は安定/不安定葉層を持つ. ある定数 $\lambda > 1$ があって安定葉層上で λ^{-1} 倍に縮小し, 不安定葉層上で λ 倍に拡大する. この λ を拡大率という.

定理 14 (Kajihara-Kin-Shibayama [9]) 例 7 で, n, p について得られた周期軌道がなす組み紐は擬 Anosov であり, その拡大率は $(s_{2p})^{2n/j}$ である. ここで, s_k は k 番目の金属数

$$s_k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 4}) = k + \frac{1}{k + \frac{1}{k + \frac{1}{\ddots}}}$$

で, j は n と p の最大公約数である.

この証明では, $2n$ 体問題の形状空間での解の振る舞いと組み紐の関係を明らかにすることが鍵となる (図 11).

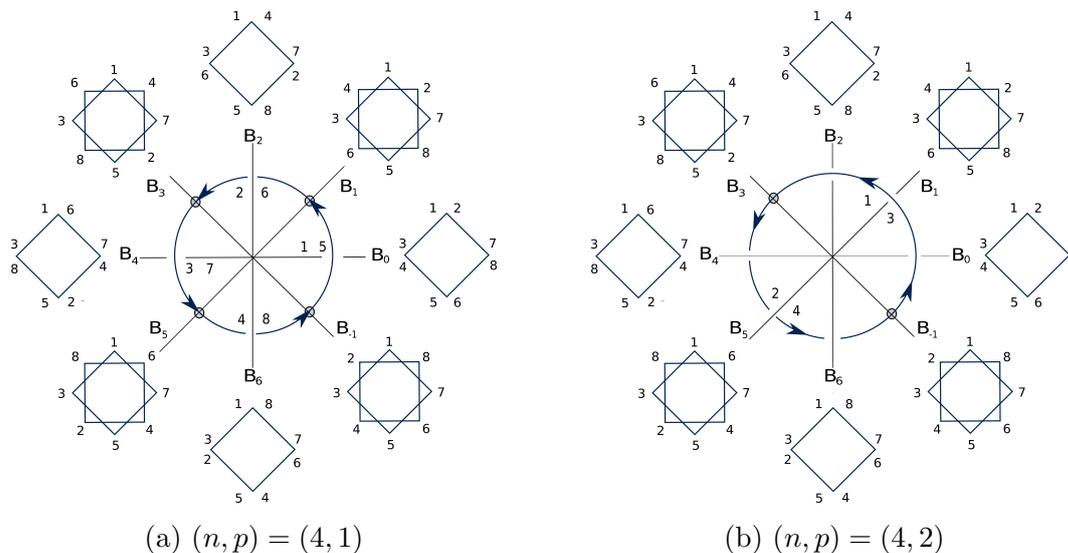


図 11: $2n$ 体問題の形状空間と, (1) $(n, p) = (4, 1)$ と (2) $(n, p) = (4, 2)$ の周期解に対応する曲線.

また, 超 8 の字解 (図 9) の組み紐は擬 Anosov で, 拡大率は $2 + \sqrt{3}$ である.

拡大率の対数をとったものは, 写像類に属する写像に対する位相的エントロピーの下限を与える. つまり, これが正ということは, 写像が力学系として複雑であることを意味する. 定理 14 が $2n$ 体問題の複雑さの評価に直ちに結びつくわけではないが, その点を

明らかにすることは今後の課題である。

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招きくださった先生方にお礼申し上げます。また、原稿について貴重なコメントをいただいた金英子氏 (大阪大学) に感謝致します。本研究は、科研費 (基盤 B, 23K25778) の助成を受けています。

参考文献

- [1] D. Boucher. Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(5):391–394, 2000.
- [2] D. Boucher and J.-A. Weil. Application of J.-J. Morales and J.-P. Ramis’ theorem to test the non-complete integrability of the planar three-body problem. In *From combinatorics to dynamical systems*, Vol. 3 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pp. 163–177. de Gruyter, Berlin, 2003.
- [3] H. Bruns. über die Integrale des Vielkörper-Problems. *Acta Math.*, 11(1-4):25–96, 1887.
- [4] A. J. Casson and S. A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Vol. 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [5] A. Chenciner. A note by Poincaré. *Regul. Chaotic Dyn.*, 10(2):119–128, 2005.
- [6] A. Chenciner and R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math. (2)*, 152(3):881–901, 2000.
- [7] D. L. Ferrario and S. Terracini. On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem. *Invent. Math.*, 155(2):305–362, 2004.
- [8] W. B. Gordon. A minimizing property of Keplerian orbits. *Amer. J. Math.*, 99(5):961–971, 1977.
- [9] Y. Kajihara, E. Kin, and M. Shibayama. Braids, metallic ratios and periodic solutions of the $2n$ -body problem. *Topology Appl.*, 337:Paper No. 108640, 21, 2023.
- [10] R. Moeckel and R. Montgomery. Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem. *Nonlinearity*, 28(6):1919–1935, 2015.
- [11] R. Montgomery. *Four Open Questions for the N -body Problem*.
- [12] R. Montgomery. Some open questions in the n -body problem. <https://youtu.be/JItBND4phWk?si=Gub0g4N1Ay0M0Tws>. Sydney Dynamics Group Seminars.
- [13] R. Montgomery. Infinitely many syzygies. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 164(4):311–340, 2002.
- [14] R. Montgomery. Fitting hyperbolic pants to a three-body problem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(3):921–947, 2005.
- [15] R. Montgomery. Oscillating about coplanarity in the 4 body problem. *Invent. Math.*, 218(1):113–144, 2019.
- [16] R. Montgomery. The three-body problem. *Scientific American*, 321, 2019. 三体問題に進展 周期解に新たな予想 (柴山 允瑠 訳), 日経サイエンス 2020 年 3 月号, 別冊 254 「SF を

科学する 研究者が語る空想世界」2022年。

- [17] C. Moore. Braids in classical dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 70(24):3675–3679, 1993.
- [18] R. S. Palais. The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.*, 69(1):19–30, 1979.
- [19] H. Poincaré. *New methods of celestial mechanics. Vol. 1*, Vol. 13 of *History of Modern Physics and Astronomy*. American Institute of Physics, New York, 1993. Periodic and asymptotic solutions, Translated from the French, Revised reprint of the 1967 English translation, With endnotes by V. I. Arnol'd, Edited and with an introduction by Daniel L. Goroff.
- [20] H. Poincaré. *Œuvres. Tome VII. Les Grands Classiques Gauthier-Villars*. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1996. Masses fluides en rotation. Principes de mécanique analytique. Problème des trois corps. [Rotating fluid masses. Principles of analytic mechanics. Three-body problem], With a preface by Jacques Lévy, Reprint of the 1952 edition.
- [21] H. Poincaré. *The three-body problem and the equations of dynamics*, Vol. 443 of *Astrophysics and Space Science Library*. Springer, Cham, 2017. Poincaré's foundational work on dynamical systems theory, Translated from the 1890 French original and with a preface by Bruce D. Popp.
- [22] P. H. Rabinowitz. The calculus of variations and the forced pendulum. In *Hamiltonian dynamical systems and applications*, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., pp. 367–390. Springer, Dordrecht, 2008.
- [23] M. Shibayama. Multiple symmetric periodic solutions to the $2n$ -body problem with equal masses. *Nonlinearity*, 19(10):2441–2453, 2006.
- [24] M. Shibayama. Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 214(1):77–98, 2014.
- [25] 柴山 允瑠. n 体問題と変分法—周期解をめぐる—. 日本評論社. 2024年.
- [26] 柴山 允瑠. n 体問題の周期解とその性質について. 数学, 日本数学会. to appear.
- [27] 柴山 允瑠. 重点解説 ハミルトン力学系—可積分系と KAM 理論を中心に—. サイエンス社. 2016年.
- [28] C. L. Siegel and J. K. Moser. *Lectures on celestial mechanics*, Vol. Band 187 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971. (邦訳)『天体力学講義』, 伊藤 秀一・関口 昌由 訳, 丸善出版, 2024.
- [29] K. Tanaka. Noncollision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 10(2):215–238, 1993.
- [30] K. Tanaka. A note on generalized solutions of singular Hamiltonian systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(1):275–284, 1994.
- [31] L. Tonelli. The calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31(3-4):163–172, 1925.
- [32] A. Tsygvinsev. La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(3):241–244, 2000.
- [33] A. Tsygvinsev. The meromorphic non-integrability of the three-body problem. *J. Reine Angew. Math.*, 537:127–149, 2001.
- [34] K. Yagasaki. Non-integrability of the restricted three-body problem. *Ergodic Theory*

and Dynamical Systems, p. 1 – 29, 2024.

- [35] S. L. Ziglin. On involutive integrals of groups of linear symplectic transformations and natural mechanical systems with homogeneous potential. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 34(3):26–36, 96, 2000.

A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic P^2 -knots

京都大学数理解析研究所
宮澤 仁 (Jin MIYAZAWA) *

概要

4次元多様体に埋め込まれた曲面に関する情報は、4次元多様体の微分構造の情報を反映しており、微分トポロジーの観点から興味深い対象である。曲面 Σ の4次元多様体への埋め込み f, g がエキゾチックであるとは、 f, g が連続的に ambient isotopic だが滑らかにはそうでないことをいう。エキゾチックな曲面の埋め込みの研究は4次元多様体論において現在盛んに研究されている話題であるが、最も基本的な閉4次元多様体である S^4 中のエキゾチックな曲面に関する研究は多くない。

本講演の主定理は S^4 への $\mathbb{R}P^2$ の埋め込みの無限族であって互いにエキゾチックであるものの存在である。滑らかに同値でないことの証明が既存の方法では難しいが、講演者によって構成された新たな不変量を用いて示すことができる。不変量の構成にはゲージ理論を用いる。

1 導入

以下、単に多様体と言ったら可微分多様体であり、微分構造を考えないときは位相多様体ということにする。

1.1 エキゾチック曲面

4次元多様体に埋め込まれた曲面の種数や isotopy 類の情報は4次元多様体の微分構造の情報を反映しており、4次元多様体の微分トポロジーを調べるうえで基本的な対象である。4次元多様体 X への曲面 Σ の滑らかな埋め込み

$$f, g: \Sigma \rightarrow X$$

がエキゾチックであるとは連続的には ambient isotopic だが滑らかにはそうでないことをいう。

4次元多様体論においてエキゾチック曲面の研究は盛んなトピックであり、エキゾチックな曲面埋め込みに関する研究自体は列挙することが困難なほど数多くの研究がある。特に近年、 D^4 内の D^2 で、境界の特定の結び目を張るようなエキゾチック Disk が Khovanov homology を用いて発見されるなど大きな進展を迎えている。一方、閉4次元多様体の中で最も基本的な S^4 中の閉曲面に関するエキゾチック曲面の研究は多くない。

* E-mail:miyazawa.jin.5a@kyoto-u.ac.jp

S^4 内のエキゾチックな曲面に関する背景を述べる. 最も基本的な閉 4 次元多様体である S^4 内のエキゾチックな曲面埋め込みの例はあまり多くない. 実際, S^4 内の向き付け可能な曲面によるエキゾチックな曲面埋め込みは発見されていない. 向き付け不可能な例については Finashin–Kreck–Viro [2] や Finashin [3], Matić–Öztürk–Stipsicz [14] による例などがあるが多くはない. さらに, 向き付け不可能なエキゾチック曲面で今まで知られていた例の種数はいずれも 5 以上であり, 種数が小さい例は知られていなかった.

1.2 4 次元多様体とゲージ理論

4 次元多様体の微分トポロジーは 5 次元以上の多様体とは全く異なった振る舞いを示す. コンパクトな n 次元位相多様体に対して $n \neq 4$ なら入りうる微分構造は高々有限個なことがわかっているが, 4 次元位相多様体で複数の微分構造が見ついているものはほとんど無限個の微分構造が見ついている. さらに n 次元ユークリッド空間は $n \neq 4$ のときには微分構造は一意だが, R^4 には非加算無限個の微分構造がある. 4 次元多様体論は単に低次元から順に多様体を調べていく過程の途中にある分野ではなく, 微分トポロジーに残されたフロンティアである.

上で述べた, 4 次元多様体の微分構造の特異な性質はどのようにして調べられたのであろうか. 3 次元以下では滑らかな多様体と位相多様体の差はない. 一方, 5 次元以上の微分トポロジーで重要な役割を果たす h-同境定理の証明ではホイットニーの手品と呼ばれる手法が用いられる. ホイットニーの手品の鍵となる部分は, D^2 からの写像を (境界部分を変えず) 少し変形し自己交差を消すことであるが, これができるのは $2+2$ より大きい 5 次元以上の多様体である. したがって 4 次元多様体の微分構造を調べるには他の次元とは異なる手法が必要となる.

1982 年, Atiyah の学生であった Donaldson はそれまでトポジストが予期しない方法を 4 次元多様体論に持ち込んだ. 素粒子物理学に端を発するゲージ理論である. Donaldson が [1] で示した定理は次である.

Theorem 1.1 (Donaldson [1]). 任意の向き付けられたコンパクト単連結可微分 4 次元多様体 X の交差形式が負定値 (*negative definite*) であるとする. このとき, 交差形式は \mathbb{Z} 係数の範囲で対角化可能である.

この定理の単連結性の仮定は現在では外されている. 4 次元多様体 X の交差形式というのは, 二次のコホモロジーに対して定まる次の二次形式である:

$$H^2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor} \times H^2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor} \rightarrow \mathbb{Z}; (\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha \cup \beta, [X] \rangle.$$

X が閉向き付け可能ならポアンカレ双対から交差形式は非退化である. この定理がなぜ驚くべき定理なのかを説明する. まず, 前年の 1981 年に示された Freedman の定理 [5] によって, 任意のユニモジュラー形式に対してそれを交差形式に持つような単連結位相的 4 次元多様体が存在することがわかる. また, 負定値のユニモジュラー形式で \mathbb{Z} 係数の範囲で対角化できないものは無数にあることが知られている. したがって, Donaldson の定理によって無数の位相的 4 次元多様体に対して微分構造が入らないことが示されたのである.

この Donaldson の対角化定理は, 反自己双対方程式 (ASD 方程式) と呼ばれる非線形偏微分方程式

の解のモジュライ空間を観察することによって示された。ASD 方程式は Yang–Mills 方程式というゲージ理論 (素粒子物理学) に出てくる方程式の解の特別な場合である。このようにして、素粒子物理学の偏微分方程式の 4 次元トポロジーへの応用が始まった。第一段落で述べた 4 次元多様体の奇妙な性質はこのゲージ理論を用いて調べられたものである。

1.3 SW 方程式の反線形な対称性

4 次元多様体の微分トポロジーを調べる強力な手段にゲージ理論がある。ゲージ理論は素粒子物理学に由来する非線形偏微分方程式の解のモジュライ空間の情報から 3 次元あるいは 4 次元多様体の微分トポロジー的信息を調べる手法である。ゲージ理論の微分トポロジーへの応用で用いられる方程式に Seiberg–Witten (SW) 方程式がある。SW 方程式は、常にモジュライ空間がコンパクトであり、解析的に扱いが容易なうえに、SW 方程式を用いた証明しか知られていない結果もある。代表的なものでは古田幹雄 [6] による、10/8-不等式である。

Theorem 1.2 (Furuta [6]). X を可微分閉スピン 4 次元多様体で交差形式が不定値であるとする。このとき第二ベッチ数 $b_2(X)$ と符号数 $\sigma(X)$ の間に不等式

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\sigma(X)| + 2$$

が成り立つ。

この定理から単連結位相 4 次元多様体で交差形式が不定値かつ even (つまり、任意の元 $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$ について $\langle \alpha \cup \alpha, [X] \rangle \in 2\mathbb{Z}$) なもので微分構造が入らないものが無数に存在することがわかる。

この定理の証明で重要なのは (スピン構造に対する) SW 方程式がもつ「反線形な変換」である。このことを説明するために、4 次元多様体上の SW 方程式の説明をもう少し詳しく行う。 X を可微分有向閉 4 次元多様体とする。 X のリーマン計量を固定する。 X 上のスピン c 構造とは、 TX の構造群 $SO(4)$ の、

$$\text{Spin}^c(4) \cong \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \times \text{U}(1)/(-1, -1, -1)$$

への持ち上げのことである。4 次元多様体上にはいつでもスピン c 構造は存在し、ひとつスピン c 構造を固定するとその同型類は $H^2(X, \mathbb{Z})$ の分だけある。スピン c 構造 \mathfrak{s} を定めると、 \mathfrak{s} に対し、ふたつの階数 2 の複素ベクトル束 S^+, S^- が定義される。これらを \mathfrak{s} のスピノル束という。SW 方程式は $\det S^+$ の $\text{U}(1)$ -connection A と S^+ の切断 $\phi \in \Gamma(S^+)$ を未知関数にした

$$F_A^+ = (\phi\phi^*)_0, D_A^+\phi = 0. \tag{1}$$

という方程式である。

いま、スピン c 構造構造がスピン構造、すなわち、 TX の構造群 $SO(4)$ の、 $\text{Spin}(4) \cong \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ への持ち上げから来ているとしよう。このとき、スピノル束には四元数の右作用が存することが知られており、SW 方程式は

$$(A, \phi) \mapsto (j \circ A \circ j^{-1}, \phi j)$$

なる変換で不変である。これが、SW 方程式の、反線形な変換である。この変換は、ゲージ理論にでてくる方程式がもつゲージ変換による対称性とは異なる、SW 方程式特有の対称性である。

1.4 Real SW 理論

4次元多様体 X に滑らかな $\mathbb{Z}/2$ の作用 (involution) があるとしよう。さらに、その involution ι が X のあるスピノール構造 \mathfrak{s} を裏返す、すなわち、

$$\iota^* \mathfrak{s} \cong \bar{\mathfrak{s}}$$

をみたく状況を考える。ここで、 $\bar{\mathfrak{s}}$ は \mathfrak{s} に対して、 $\text{Spin}^c(4)$ の $U(1)$ 成分の向きを裏返すことで得られるスピノール構造で、特に $\bar{\mathfrak{s}}$ のスピノール束は \mathfrak{s} のスピノール束の複素構造を裏返したものである。

involution がしかるべき位相的な条件を満たしていればこの作用の情報と元から SW 方程式にあった反線形な変換を用いて、SW 方程式の解のモジュライ空間に「反線形な involution」を定めることができる。この反線形な involution の固定部分を見ることで、4次元多様体 X と X 上の involution に関する不変量を得ることができる。この SW 理論の変種を Real SW 理論という。これが本講演の主演である。

X と X 上の involution ι の組 (X, ι) を自然に調べたくなるのはどのようなときであろうか。

ひとつは単連結でない 4次元多様体の二重被覆空間として X が現れ、 ι が被覆変換である場合、Real SW は X/ι の微分構造の情報を持っている。このような場合の Real SW は中村信裕によって $\text{Pin}^-(2)$ -monopole [15, 16] として、 X/ι 上の局所系でねじった SW 理論として定式化されている。さらに、局所系のコホモロジーの 10/8-型不等式や連結和で保たれるエキゾチックな 4次元多様体の検出など $\text{Pin}^-(2)$ -monopole をもちいないと得られないトポロジーへの応用が得られている。

involution が固定点を持つ状況が自然に出てくるのは、4次元多様体 X' の中の曲面 S について、 S に沿った二重分岐被覆 $\Sigma_2(X', S) =: X$ を考えるときである。このとき X と被覆変換 ι に関する Real SW 理論を考えると X' に埋め込まれた S についての不変量ができる。講演者と今野北斗氏、谷口正樹氏との共同研究 [8, 9] はこのような場合の Real SW 理論を用いて (境界付き)10/8 型不等式や Frøyshov 型不等式と呼ばれる constraint を考察し、ある条件を満たす曲面の種数の下からの評価を得ている。4次元多様体の $\mathbb{Z}/2$ 作用そのものに興味がある場合もある。加藤祐矢は [7] で閉 4次元多様体の involution で固定点がある場合の 10/8 型不等式を示し、滑らかには実現できない位相的な群作用を検出している。時系列でいえばこの加藤の不等式の方が [8] より先で、[8] の不等式は加藤のその境界付き版である。

Real SW の関係した研究でいえば、Li による 3次元多様体に involution がある場合の monopole floer homology がある [11, 12].

この講演では、4次元多様体 X の中の曲面 S に沿った二重分岐被覆 $\Sigma_2(X, S)$ に対し Real SW 理論を用いた不変量を構成し、 X の中のエキゾチックな曲面、すなわちふたつの曲面 $S, S' \subset X$ で位相的にはアイソトピックだが滑らかにはそうではない例を検出する。

2 主定理

本講演では、以下の定理について説明する。

Theorem 2.1 ([13]). $\mathbb{R}P^2$ の S^4 への埋め込みの無限族で、互いに位相的には同値だが滑らかには互いに同値でないものが存在する。

種数が小さい例を作る際、既存の方法では困難があった。今まで、 S^4 内のエキゾチックな曲面埋め込みが実際に滑らかには同値でないことを検出する既存の方法は、曲面に沿った二重分岐被覆が互いに微分同相でない 4 次元多様体であることを示すというものであった。この方法では、例えば種数 1 の向き付け可能な曲面すなわち $\mathbb{R}P^2$ のエキゾチックな曲面埋め込みを検出しようとするときエキゾチックな $\mathbb{C}P^2$ を見つけねばならず、このようなものは見つからない。種数が小さい向き付け可能な曲面の埋め込みの二重分岐被覆は二次のコホモロジーの次元が小さく、このような 4 次元多様体でエキゾチックな微分構造を見つけるのは困難であることが知られている。

さらに、[13] が提出されたあと、以下のような定理が Hughes–Kim–Miller [4] によって示された。

Theorem 2.2. *Theorem 2.1* で与えられた P^2 -knot の二重分岐被覆は $\mathbb{C}P^2$ と微分同相である。

つまり、Theorem 2.1 と合わせると、 $\mathbb{C}P^2$ にエキゾチックな $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用が無数に存在することがわかった。したがって、今回与えたエキゾチック P^2 -knot たちは単に二重分岐被覆を見るだけでは区別できず、被覆変換の情報、すなわち $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用の情報まで込めてみないと区別出来ない。

[13] では、Real SW 理論を用いた、4 次元多様体に埋め込まれた曲面の不変量を構成し、Theorem 2.1 を示した。つまり、二重分岐被覆に対し、被覆変換からくる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用が SW 方程式に反線形に持ち上がっている状況を考え、その作用で固定される解を数え上げるのである。

本講演ではその不変量の構成の概略と、エキゾチック P^2 -knot の構成を説明する。

2.1 エキゾチック P^2 -knot の構成

さて、Theorem 2.1 の P^2 -knot の与え方を説明する。 P^2 -knot には S^4 の向きから決まる、法束の局所係数のオイラー数、すなわち法オイラー数 (normal Euler number) が定義され、 ± 2 のどちらかであることがわかる。ここでは 2 のものを考える。注意すべきなのは、法オイラー数が 2 の標準的な P^2 -knot P_0 の二重分岐被覆は向きを込めて考えると $-\mathbb{C}P^2$ である。法オイラー数が -2 の P^2 -knot について考えたければ S^4 の向きを裏返す微分同相で移せばいい。

Definition 2.3. P_0 を法オイラー数が 2 の標準的な P^2 -knot とする。また、 S^3 内の通常の結び目 K に関して、 $\tau_{k,\alpha}(K)$ で K の k -twist α -roll spun で与えられる 2-knot とする。このとき、 P^2 -knot P_n を

$$P_n := P_0 \# n\tau_{0,1}(P(-2, 3, 7))$$

で定める。

結び目 K に対して k -twist α -roll spun で与えられる 2-knot の構成法は講演中に述べることにす

る。この結び目の無限族が Theorem 2.1 で述べられたエキゾチック P^2 -knot たちである。これらが互いに位相的には isotopic であることは次の補題を用いる。

Lemma 2.4. 任意の $n \geq 0$ に関して $\pi_1(P_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

この補題と, Lawson[10] の結果から P_n たちは互いに位相的にアイソトピックである。

2.2 不変量の性質

Real SW 理論を用いて構成される, 2-knot および P^2 -knot の不変量の構成は講演中に述べる。ここでは, 不変量が満たす性質を述べる。

Theorem 2.5. いま, $\Sigma \subset S^4$ を 2-knot か, 法オイラー数が 2 であるような P^2 -knot とする。さらに, 簡単のため, ここでは Σ の二重分岐被覆は, Σ が 2-knot ならホモロジー S^4 , P^2 -knot ならホモロジー $-CP^2$ とする。このとき, 以下の性質を満たす, 非負整数に値をとる不変量

$$|deg(\Sigma)|$$

が存在する。

- (S^4, Σ_0) と (S^4, Σ_1) が組として微分同相なら

$$|deg(\Sigma_0)| = |deg(\Sigma_1)|.$$

- Σ_0 が 2-knot なら

$$|deg(\Sigma_0 \# \Sigma_1)| = |deg(\Sigma_0)| + |deg(\Sigma_1)|.$$

- Σ が unknot な 2-knot あるいは標準的な P^2 -knot P_0 ならば

$$|deg(\Sigma)| = 1.$$

- k, α を整数とし, k は偶数で $\frac{k}{2} + \alpha$ は奇数であるとする。このとき,

$$|deg(\tau_{k,\alpha}(P(-2, 3, 7)))| = 3.$$

上の性質を用いると, P_n の不変量は 3^n と計算され, 互いに滑らかにはアイソトピックでないことが示される。

参考文献

- [1] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. J. Differential Geom., Vol. 18, No. 2, pp. 279–315, 1983.
- [2] S. M. Finashin, M. Kreck, and O. Ya. Viro. Nondiffeomorphic but homeomorphic knottings of surfaces in the 4-sphere. In Topology and geometry—Rohlin Seminar, Vol. 1346 of Lecture Notes in Math., pp. 157–198. Springer, Berlin, 1988.

- [3] Sergey Finashin. Exotic embeddings of $\#6\mathbb{R}P^2$ in the 4-sphere. In Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2008, pp. 151–169. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2009.
- [4] , Hughes, Mark and Kim, Seungwon and Miller, Maggie Branched covers of twist-roll spun knots, arXiv preprint arXiv:2402.11706,2024.
- [5] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geometry, Vol. 17, No. 3, pp. 357–453, 1982.
- [6] Mikio Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture. Mathematical Research Letters, Vol. 8, No. 3, pp. 279–291, 2001.
- [7] Yuya Kato. Nonsmoothable actions of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ on spin four-manifolds. Topology Appl., Vol. 307, pp. Paper No. 107868, 13, 2022.
- [8] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and floer k-theory. arXiv preprint arXiv:2110.09258, 2021.
- [9] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, links, and floer cohomologies. arXiv preprint arXiv:2304.01115, 2023.
- [10] , Lawson, Terry Normal bundles for an embedded $\mathbb{R}P^2$ in a positive definite 4-manifold, Journal of Differential Geometry, Vol 22, No.2, pp 215–231,1985.
- [11] Jiakai Li. Monopole floer homology and real structures. arXiv preprint arXiv:2211.10768, 2022.
- [12] Jiakai Li. Real monopole floer homology and skein exact triangles. arXiv preprint arXiv:2304.01742, 2023.
- [13] Jin Miyazawa. A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic p^2 -knots. arXiv preprint arXiv:2312.02041, 2023.
- [14] Matic, Gordana and Öztürk, Ferit and Stipsicz, András . An exotic $5\mathbb{R}P^2$ in the 4-sphere arXiv preprint arXiv:2312.03617, 2023.
- [15] Nobuhiro Nakamura. $\text{Pin}^-(2)$ -monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. Math. Ann., Vol. 357, No. 3, pp. 915–939, 2013.
- [16] Nobuhiro Nakamura. $\text{Pin}^-(2)$ -monopole invariants. J. Differential Geom., Vol. 101, No. 3, pp. 507–549, 2015.
- [17] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. Mathematical Research Letters, Vol. 1, No. 6, pp. 769–796, 1994.

ニット状曲面による曲面絡み目のチャート表示

安田 順平 (大阪大学大学院 理学研究科 D3)*

1 はじめに

曲面絡み目とは、4次元空間 \mathbb{R}^4 に滑らかに埋め込まれた閉曲面である。2つの曲面絡み目が \mathbb{R}^4 のアイソトピーによって互いに移り合うとき、これらは同値であるという。曲面結び目理論においては、これらの同値類の分類および同型の判定が主なテーマとなる。

ブレイド状曲面は、分岐被覆曲面の構造を持つ $D^2 \times B^2$ 内の曲面であり、これはブレイドの高次元化である。また、ブレイド状曲面の特別な場合として2次元ブレイドが定まる。2次元ブレイドは閉包を取ることで曲面絡み目を構成することができ、これにより曲面絡み目を2次元ブレイドを用いて研究することが可能となる。例えば、曲面絡み目の補空間の基本群（結び目群）の特徴付け [6] や、曲面絡み目の非可逆性の判定 [2] などが挙げられる。2章においてブレイド状曲面について紹介する。

一方で、ブレイド状曲面や2次元ブレイドの閉包は $D^2 \times B^2$ 内の曲面や \mathbb{R}^4 内の曲面絡み目をすべて表示することができない。この問題を解消するために、3章では新たにニット状曲面と呼ばれる $D^2 \times B^2$ 内の曲面を導入する。ここで、ニットとはブレイドのいくつかの交点をスプライスと呼ばれる操作で変形することによって得られる $D^2 \times I$ 内の曲線であり、ブレイドの一般化である。

ブレイド状曲面の重要な特徴として、チャートと呼ばれる平面的な記述が挙げられる。チャートを用いることで曲面絡み目を平面的に記述することができるだけでなく、図式的な性質を計算することも可能とする。4章ではブレイド状曲面のチャートをニット状曲面に拡張したものを導入する。

本研究は佐賀大学の中村伊南沙氏との共同研究に基づく。以下では特に断らない限り、多様体や写像は全て滑らかまたはPLであるとし、埋め込みは局所平坦であり、そして曲線や曲面はコンパクトな多様体であって向き付け可能性と連結性は課さないものとする。

2 ブレイド状曲面

本節ではブレイド状曲面について紹介する。詳細については [8] を参照されたい。整数 $n \geq 1$ に対して2次元円板 D^2 の内部で直線上に並んだ相異なる n 点からなる集合 $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ を1つ固定する。また $B^2 = I \times I$ の点 $y_0 = (0, 0) \in \partial B^2$ を B^2 の基点とする。このとき直積空間 $D^2 \times B^2$ へプロパーに埋め込まれた曲面 S が次数 n のブレ

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山 1-1

e-mail: u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:22J20494) の助成を受けたものである。

キーワード：曲面絡み目, ブレイド状曲面, チャート

イド状曲面であるとは、射影 $\pi : D^2 \times B^2 \rightarrow B^2$ の S への制限 $\pi_S : S \rightarrow B^2$ が次数 n の分岐被覆写像となり、かつ $\pi_S^{-1}(y_0) = X_n \times \{y_0\}$ を満たすことを言う。次数 n のブレイド状曲面が**単純**であるとは、各 $y \in B^2$ の逆像 $\pi_S^{-1}(y)$ に対して濃度 $|\pi_S^{-1}(y)|$ が n または $n-1$ であるときをいう。本稿では、特に断らない限りブレイド状曲面といえば単純であると仮定する。単純とは限らないブレイド状曲面については例えば [7, 9] を参照されたい。

2つのブレイド状曲面 S, S' が**同値**であるとは、 $D^2 \times B^2$ のファイバーを保つアイソトピーによって移り合うことをいう；すなわち、 $D^2 \times \{y_0\}$ を固定する $D^2 \times B^2$ のアイソトピー H_t と B^2 のアイソトピー h_t ($t \in [0, 1]$) が存在して、(1) $H_0 = \text{id}$, $H_1(S) = S'$ として (2) 各 $t \in [0, 1]$ で $p \circ H_t = h_t \circ p$ が成り立つことをいう。

2.1 モーションピクチャー

次にブレイド状曲面のモーションピクチャーについて紹介する。 B^2 の直積成分を区別するために、 $B^2 = I_3 \times I_4$ と記す。ブレイド状曲面 S の時刻 $t \in I_4$ における切断 $S_{[t]}$ を $S \cap (D^2 \times I_3 \times \{t\})$ によって定める。ここで $I_3 \times \{t\}$ と I を同一視することで $S_{[t]}$ は $D^2 \times I$ の部分集合であるとみなす。このとき 1-パラメータ族 $\{S_{[t]}\}_{t \in I_4}$ を S の**モーションピクチャー**という。次数 n のブレイド状曲面 S を同値なものと取り替えることで $S \cap D^2 \times (\partial I_3 \times I_4) = X_n \times (\partial I_3 \times I_4)$ と仮定してよい。すると各 $S_{[t]}$ にはブレイドまたは特異ブレイド^{*1}が図1のように現れる。本稿の後半ではチャートからブレイド状曲面（及びニット状曲面）を構成する際にモーションピクチャーを利用する。

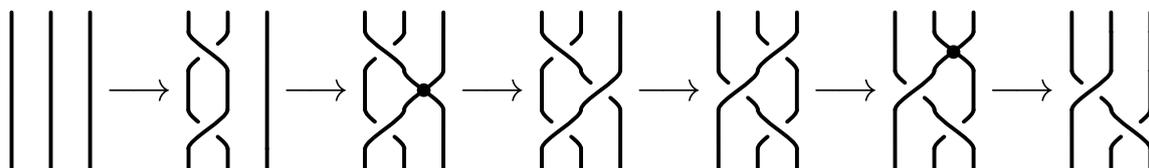


図1 次数3のブレイド状曲面のモーションピクチャー

2.2 2次元ブレイド、ブレイド状曲面による曲面絡み目の表示

次数 n の**2次元ブレイド**とはブレイド状曲面 S であって境界 ∂S が $X_n \times \partial B^2$ に等しいものである。直積空間 $D^2 \times B^2$ を \mathbb{R}^4 内の部分集合として考える。このとき、 ∂S は $\partial(D^2 \times B^2)$ 内の自明な絡み目であるため、 ∂S に沿って自明な円板を貼り合わせることで \mathbb{R}^4 内の曲面絡み目 \bar{S} を得る。この曲面絡み目 \bar{S} を2次元ブレイド S の**閉包**という。これは絡み目におけるブレイドの閉包を高次元化したものであり、鎌田氏により次の定理が示された。

定理 2.1 ([5, 13]) 全ての有向曲面絡み目はある2次元ブレイドの閉包とアイソトピッ

^{*1}特異ブレイドとは自己交叉を持つブレイドであり、モーションピクチャー内の自己交叉は π_S の分岐点に対応する。

クである。

2次元ブレイドの閉包を用いることで曲面絡み目の**ブレイド指数**と呼ばれる正整数値の不変量が定まる。ブレイド指数が2以下である曲面絡み目は自明であること、またブレイド指数3となる曲面絡み目はリボンであることが知られている [4]。またこの指数は連結和に関して加法的でないことが知られている [10]。

また著者により**プラット表示**と呼ばれる曲面絡み目の表示手法が導入された。これは絡み目におけるプラット表示と呼ばれる偶数次のブレイドを用いた表示の高次元化であり、この表示を用いることで向き付け不可能な場合を含む全ての曲面絡み目を表示することが可能となった。

定理 2.2 ([14]) 全ての曲面絡み目はあるブレイド状曲面のプラット閉包とアイソトピックである。

ブレイド指数と同様に、曲面絡み目に対してもプラット指数と呼ばれる正整数値の不変量が定まる。また曲面絡み目のプラット表示を用いることで、曲面絡み目の結び目群や対称結び目カンドルと呼ばれる不変量を計算することが可能である。詳細については [14, 15] を参照されたい。

2.3 ブレイド状曲面による $D^2 \times B^2$ 内の曲面の表示

本節ではブレイド状曲面とアイソトピックな $D^2 \times B^2$ 内の曲面の特徴付け (定理 2.3)、及びその一般化について紹介する。4次元球体 $D^4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$ 上のモース関数 $\phi: D^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\phi(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ として定める。 D^4 と $D^2 \times B^2$ の同相写像を1つ固定することにより同一視を行い、 ϕ は $D^2 \times B^2$ 上の関数であるとする。また $D^2 \times B^2$ へプロパーに埋め込まれた曲面 F に対して、 ϕ の F への制限を ϕ_F とする。このとき F がリボンであるとは、 F をアイソトピーで変形することによって ϕ_F が極大点を持たないモース関数として取れることをいう。ブレイド状曲面は構成よりリボン曲面であることが分かる。さらに Rudolph 氏により次の定理が示された。

定理 2.3 ([12]) $D^2 \times B^2$ へプロパーに埋め込まれた有向リボン曲面はアイソトピーによってブレイド状曲面へ変形することができる。

Hughes 氏はブレイド状曲面にある種の折り目特異点^{*2}を許容することで、定理 2.3 の一般化を与えた。曲面 S, Σ の間の写像 $\varphi: S \rightarrow \Sigma$ に対して、 S に埋め込まれた円板 d が φ に関する**キャップ**であるとは、(1) φ の d への制限 $\varphi|_d: d \rightarrow \Sigma$ は埋め込み写像であり、(2) d の境界は φ の折り目特異点であるときをいう。そして $D^2 \times B^2$ へプロパーに埋め込まれた曲面 S が**キャップ付きブレイド状曲面**であるとは、 π_S の臨界点は単純分岐

^{*2} n 次元多様体 M, M' の間の写像 $\phi: M \rightarrow M'$ について M の点 a が**折り目特異点**であるとは、 a 及び $\phi(a)$ の周りで座標を取ることで $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$ と表示できることをいう。

点^{*3}または折り目特異点であり、全ての折り目特異点は π_S に関するキャップの境界であるときをいう。ここで π_S は射影 π の S への制限である。

ブレイド状曲面及び2次元ブレイドの閉包はキャップ付きブレイド状曲面である。また定義より、キャップ付きブレイド状曲面は向き付け可能曲面である。

定理 2.4 ([3]) $B^2 \times D^2$ へ埋め込まれた全ての向き付け可能曲面はキャップ付きブレイド状曲面へアイソトピーによって変形することができる。

3 ニットとニット状曲面

ブレイド、及びブレイド状曲面の一般化であるニット、及びニット状曲面を導入する。

3.1 ニット

円筒 $D^2 \times I$ 内へプロパーに埋め込まれた曲線 β について、射影 $p: D^2 \times I \rightarrow I$ の β への制限を $\pi_\beta: \beta \rightarrow I$ とする。このとき、 $D^2 \times I$ 内のブレイド β に対してスプライスと呼ばれる操作を行うことで得られる曲線をニットと呼ぶ。ここでスプライスとは、ブレイドの図式に現れる交点 (図3の σ_i または σ_i^{-1}) を π_β の折り目特異点の対 (図3の τ_i) に置き換える操作である。一方で、 $D^2 \times I$ 内の曲線がニットであるためには、スプライスによって得られる折り目特異点のペアを見つける必要がある。そこで本節では、ペアリングと呼ばれる単純弧を用いてニットを導入する。

π_β の折り目特異点全体からなる集合を $\text{Fold}(\beta)$ と記す。このとき $D^2 \times I$ 内の単純弧 l が β のペアリングであるとは次を満たすことをいう。

- (1) $l \cap \beta = \partial l$ は $\text{Fold}(\beta)$ に含まれる。
- (2) l の各点は射影 p の l への制限 π_l に関して正則である。
- (3) 各 $a \in \partial l \cap \text{Fold}(\beta)$ に対して $\pi_\beta(x) = x^2$ 及び $\pi_\beta(l) \cap V = \{s \leq 0\}$ を満たす a と $\pi_\beta(a)$ の局所座標近傍 $(U; x)$ と (V, s) が取れる。

定義 3.1. β の互いに交わらないペアリングからなる集合 $\ell = \{l_1, \dots, l_q\}$ に対して、組 (β, ℓ) が次数 n のニット (または **BMW タングル**^{*4}) であるとは次を満たすことをいう。

- (1) $l_1 \cup \dots \cup l_q$ は $\text{Fold}(\beta)$ を含む。
- (2) π_β はモース的、すなわち π_β の臨界点は折り目特異点である。
- (3) $\partial\beta = X_n \times \{0, 1\}$ が成り立つ。

またこのとき、 ℓ を β のニット構造という。

^{*3} 曲面の間の写像 $\varphi: S \rightarrow \Sigma$ について S の点 a が (孤立) 単純分岐点であるとは、 a 及び $\varphi(a)$ の周りで複素座標を取ることで $\varphi(z) = z^2$ と表示できることをいう。単純なブレイド状曲面 S の π_S の臨界点は全て単純分岐点である。

^{*4} BMW は Birman-Murakami-Wenzl の頭文字を取ったものである、注意 3.3 を参照されたい。

ニット (β, ℓ) に対して、 β がブレイドであるため必要十分条件は $\ell = \emptyset$ である。そのため、ニットはブレイドの一般化であると言える。

2つの次数 n のニット (β_0, ℓ_0) と (β_1, ℓ_1) が同値であるとは、ニットを保つアイトピーによって移り合うときをいう；すなわち、ある $D^2 \times I$ のアイトピー H_t が存在して、(1) $H_0 = \text{id}$, $(H_1(\beta_0), H_1(\ell_0)) = (\beta_1, \ell_1)$ そして (2) 各 $t \in [0, 1]$ で $(H_t(\beta_0), H_t(\ell_0))$ がニットであるときをいう。

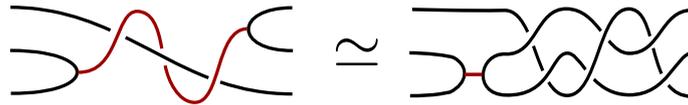


図2 曲線の折り目特異点を結ぶペアリング（赤色）の例とその同値変形

図2はニットの同値変形の例である。以下では断りのない限り、図2右のように変形することによってペアリングで結ばれる折り目特異点は十分近い位置にあるとし、またペアリングは線形なものを考えることで、ニットの図式にはペアリングを記述しないこととし、またニット (β, ℓ) は単に β とも記す。

次数 n のニットの同値類全体からなる集合を D_n とおく。ブレイドと同様に、2つの次数 n のニット (β_1, ℓ_1) と (β_2, ℓ_2) の積を $(\beta_1 \cdot \beta_2, \ell_1 \cup \ell_2)$ によって定める。するとこの積は D_n 上にモノイドの構造を与える。そこで D_n を次数 n のニットモノイドという。

命題 3.2 ニットモノイド D_n は以下のモノイド表示を持つ。

$$\left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \\ \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}, \\ \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, \tau_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \tau_j, \\ \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i, \sigma_i \tau_k = \tau_k \sigma_i, \tau_i \tau_k = \tau_k \tau_i, \\ \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = e, \sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i = \tau_i. \end{array} \right. \right\rangle.$$

ここで生成元は図3のニットが代表する元であり、添え字 $i, j, k \in \{1, \dots, n-1\}$ は $|i-j|=1$ かつ $|i-k|>1$ を満たす。

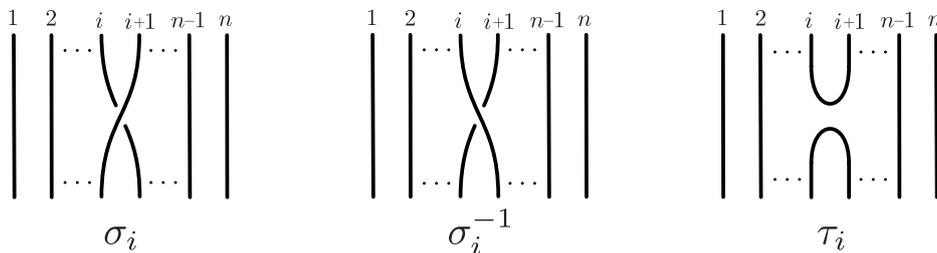


図3 ニットモノイドの生成元 $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$ を代表する次数 n のニット。

注意 3.3. 村上氏におけるニットの定義は、ニット構造を許容する曲線として与えられている [11]。また2つのニットが同値であることは境界を固定するアイトピーによって移り合うことで定義されるため、本稿で定めた同値関係よりも緩やかな同値性である。この同値関係においても同様にしてニットモノイドが定まるが、Birman-Wenzlにより、

この場合のモノイド表示は以下の関係式を追加することで得られることが知られている ([1])。ここで添え字 $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ は $|i-j|=1$ を満たす。

$$\begin{cases} \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_i, \tau_i \sigma_j \tau_i = \tau_i, \\ \sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j = \tau_j \tau_i, \sigma_i \tau_j \sigma_i = \sigma_j^{-1} \tau_i \sigma_j^{-1}, \\ \sigma_i \tau_j \tau_i = \sigma_j^{-1} \tau_i, \tau_i \tau_j \sigma_j = \tau_i \sigma_j^{-1}. \end{cases}$$

3.2 ニット状曲面

本節ではブレイド状曲面の一般化としてニット状曲面を導入する。ブレイド状曲面はブレイドの変形からなるモーショントリッチャーを持っていたが、ニット状曲面はニットの変形からなるモーショントリッチャーを持つ $D^2 \times B^2$ 内の曲面として定まる。またニットはペアリングと呼ばれる付加構造を持っていたが、ニット状曲面にはペアリングの変形からなるモーショントリッチャーによって得られる曲面 (の族) を付加構造として持つ。

$D^2 \times B^2$ へプロパーに埋め込まれた曲面 S について、 $\pi_S : S \rightarrow B^2$ の折り目特異点全体を $\text{Fold}(S)$ とする。このとき、 $D^2 \times B^2$ へ埋め込まれた境界付き曲面 L が S のペアリングであるとは、以下を満たすことをいう。

- (1-1) $L \cap S = \partial L \cap \text{Fold}(S)$ は空でない部分集合である。
- (1-2) ∂L は $\text{Fold}(S) \cup (D^2 \times \partial B^2)$ に含まれ、 $\partial L \cap (D^2 \times \partial B^2)$ の各成分はループでない。
- (2) L の各点は射影 $\pi : D^2 \times B^2 \rightarrow B^2$ の L への制限 π_L に関して正則である。
- (3) 各 $a \in \partial L \cap \text{Fold}(S)$ に対して、 $\pi_S(x, y) = (x, y^2)$ 及び $\pi_S(L) \cap V = \{(s, t) \mid t \leq 0\}$ を満たす a と $\pi_S(a)$ の局所座標近傍 $(U; x, y)$ と $(V; s, t)$ が取れる^{*5}。

注意 3.4. 曲面 S の折り目特異点は境界 ∂S にも現れるため、1次元の場合と比較して複雑な定義となっている。 S の折り目特異点が ∂S と交わらないとき、(1-1) と (1-2) は以下のように言い換えることができる。

- (1') $L \cap S = \partial L$ は $\text{Fold}(S)$ に含まれる。

定義 3.5. 互いに交わらない S のペアリングからなる集合 $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_q\}$ に対して、組 (S, \mathcal{L}) が次数 n のニット状曲面であるとは、次を満たすことをいう。

- (1) $|\mathcal{L}| = L_1 \cup \dots \cup L_q$ は $\text{Fold}(S)$ を含む。
- (2) π_S の臨界点は単純分岐点または折り目特異点である。
- (3) $S \cap (D^2 \times \{y_0\}) = X_n \times \{y_0\}$ かつ $|\mathcal{L}| \cap (D^2 \times \{y_0\}) = \emptyset$ を満たす。

またこのとき、 \mathcal{L} を S のニット構造と呼ぶ。

ニット状曲面 (S, \mathcal{L}) について、 S がブレイド状曲面であることとニット構造 \mathcal{L} が空集合となることは同値である。またニット状曲面を用いることにより、定理 2.3 の一般化と

^{*5} $a \in \partial S$ のとき局所座標はそれぞれ $x \geq 0$ と $s \geq 0$ を満たすとする。

して次を得る。

定理 3.6 $D^2 \times B^2$ へプロパーに埋め込まれた全ての境界付き曲面はアイソトピーによってニット状曲面へ変形することができる。

3.3 2次元ニットの閉包

次数 n の **2次元ニット**とは、次数 n のニット状曲面 (S, \mathcal{L}) であって境界 ∂S が $X_n \times \partial B^2$ に等しいものである。2次元ブレイドと同様に、2次元ニットの閉包が定義される。また曲面絡み目のプラット表示は2次元ニットの閉包の特別な場合であることがみなすことができる。特に、定理 2.2 の系として次を得る。

系 3.7 全ての曲面絡み目はある2次元ニットの閉包とアイソトピックである。

定理 3.6 及び系 3.7 により、向き付け不可能な曲面を含むより一般の曲面をニット状曲面を用いて表示できることが分かった*6。そして次節で導入するチャート表示を用いることにより、これらの曲面を平面的に記述することが可能となる。

4 ニット状曲面のチャート表示

次数 n の **BMW チャート** (もしくは単に**チャート**)とは以下のデータを持つ B^2 へ埋め込まれた有限グラフ $\Gamma = (V, E)$ である。

- (1) 各辺は $\{1, \dots, n-1\}$ に値を持つラベルを持ち、さらに有向または無向である。
- (2) 各頂点は次のいずれかと一致する。これらの頂点は図 4, 5 のように記述される。
 - 境界 ∂B^2 上にある次数 1 の頂点を**境界点**という。

以下で定義する頂点は全て B^2 の内点であると仮定する。

- 次数 1 の頂点を**黒頂点**という。特に有向辺の端点として現れる黒頂点を σ -**黒頂点**、無向辺の端点として現れる黒頂点を τ -**黒頂点**という。
- 次数 3 の頂点であって隣接する全ての辺が無向辺かつラベルが一致するとき τ -**3 価頂点**という。
- 次数 3 の頂点であって隣接する 2 つの辺が無向、1 つの辺が有向、そして 3 本の辺のラベルが一致するとき**混合 3 価頂点**という。
- 次数 4 の頂点が図 5 の上段にあるような向き及びラベルを満たすとき**交点**という。
- 次数 6 の頂点が図 5 の下段にあるような向き及びラベルを満たすとき**白頂点**という。特に隣接する全ての辺が有向辺であるとき、 σ -**白頂点**という。

鎌田氏によって導入されたチャートは全ての辺が有向であり、BMW チャートはそれ

*6 キャップ付きニット状曲面を導入することで全ての曲面を表示することが可能となる。本稿はチャート表示に焦点を当てるため詳細については割愛する。

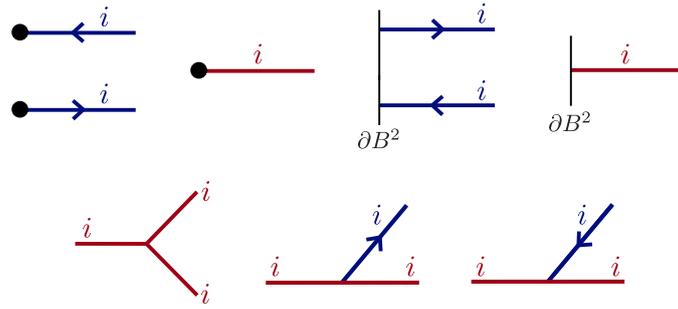


図4 チャートに現れる次数 1,3 の頂点 ($i \in \{1, \dots, n-1\}$)。

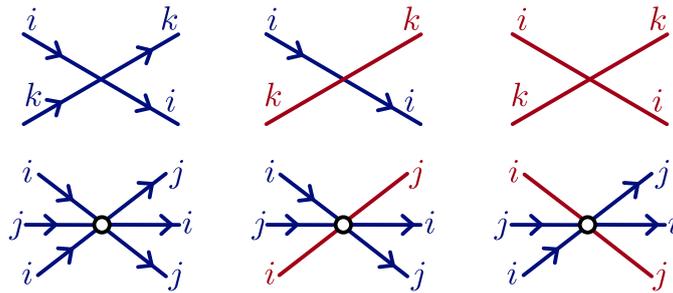


図5 チャートに現れる次数 4,6 の頂点、ここでラベル $i, j, k \in \{1, \dots, n-1\}$ は $|i-j|=1$ と $|i-k|>1$ を満たす。

の一般化である。

チャート Γ からニット状曲面 $S(\Gamma)$ を構成する手法について紹介する。チャート Γ を B^2 のアイソトピーで変形することにより、次を満たす I_4 の分割 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$ が取れる。

- チャートの境界点は $I_3 \times \{t_0, t_{m+1}\}$ 上にある。
- 各 $t \in I_4$ について Γ と $I_3 \times \{t\}$ の交わりは有限個の点からなる。
- Γ の各辺は射影 $I_3 \times I_4 \rightarrow I_4$ に関してモース的である。
- 各 $k \in \{1, \dots, m\}$ に対して $t \in I_4$ は次のどちらかを満たす。
 - (1) $I_3 \times \{t_k\}$ は Γ のある辺と 1 点で接している。
 - (2) $I_3 \times \{t_k\}$ 上には Γ の頂点 v があり、十分小さな $\varepsilon > 0$ について次が成り立つ。

$$|\#(\Gamma_\tau \cap N_{t_k+\varepsilon/2}) - \#(\Gamma_\tau \cap N_{t_k-\varepsilon/2})| \leq 1.$$

ここで N_t は v の ε -近傍 N と $I_3 \times \{t\}$ の共通部分であり、 Γ_τ は Γ の無向辺全体の和集合とする。

- $t \in I_4 \setminus \{t_0, \dots, t_{m+1}\}$ に対して、 $I_3 \times \{t\}$ は Γ の頂点を含まず、かつ Γ の辺とは横断的に交わる。

Γ と $I_3 \times \{t\}$ の交わりをもとに、 $D^2 \times I_3 \times \{t\}$ 内のニットを定義する。各 $t \in I_4 \setminus (\bigcup_{i=1}^m [t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon])$ について、図6のようにして、 Γ と $I_3 \times \{t\}$ の交叉を元に、有向

辺は σ_i 、無向辺には τ_i を対応させることでニットモノイド D_n の生成元からなる交叉語を定める。ここで i は辺のラベルであり、有向辺に対応する σ_i の符号は辺の向きに従って割り当てる。そしてこの交叉語をもとに図3にあるニットを繋ぎ合わせることで β_t を定める。

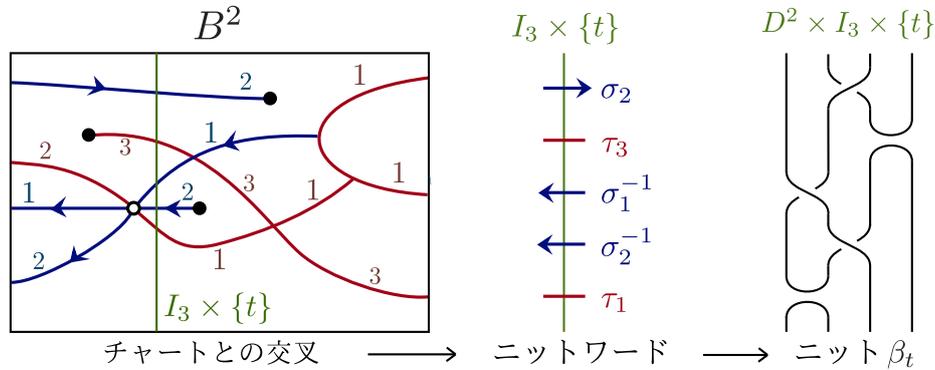


図6 交叉語からニット β_t を構成するプロセス

各 $t_k \in \{t_1, \dots, t_m\}$ について場合分けを行う。 $I_3 \times \{t_k\}$ 上に Γ の黒頂点または τ -3 価頂点がある場合、もしくは Γ の辺が接している場合は、図7もしくは図8のモーションピクチャーによって $\{\beta_t\}_{t \in [t_k - \epsilon, t_k + \epsilon]}$ を定める。ここで無向辺の接点に対応するモーションピクチャー（図8-右）は τ -黒頂点と τ -3 価頂点を繋げて得られるモーションピクチャーに等しい。そして、 $I_3 \times \{t_k\}$ 上に黒頂点及び τ -3 価頂点以外の頂点がある場合、このとき $\beta_{t_k - \epsilon}$ と $\beta_{t_k + \epsilon}$ は同値なニットとなる。そこで $\{\beta_t\}_{t \in [t_k - \epsilon, t_k + \epsilon]}$ をこの同値が誘導するニットの変形として定める。以上により $D^2 \times B^2$ 内の曲面 $S(\Gamma)$ のモーションピクチャー $\{\beta_t\}_{t \in I_4}$ が得られる。このモーションピクチャーは同時に $S(\Gamma)$ のペアリングを誘導するため、これにより $S(\Gamma)$ はニット状曲面となる。さらに次が成り立つ。

定理 4.1 全てのニット状曲面はあるチャート Γ が与えるニット状曲面 $S(\Gamma)$ と同値である。

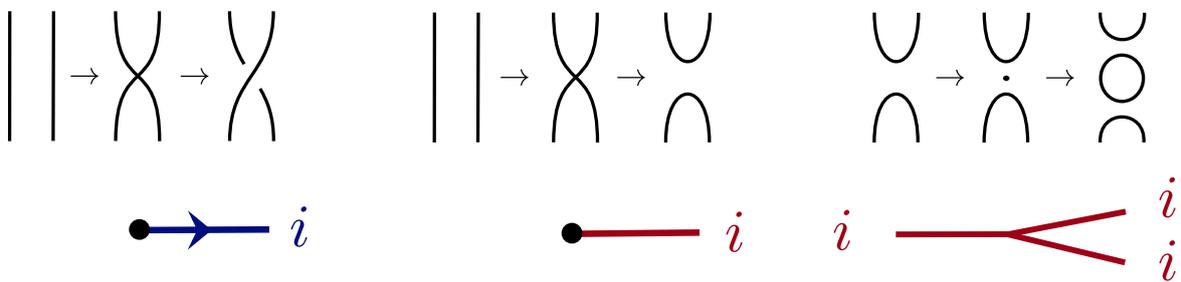


図7 黒頂点及び τ -3 価頂点に関するモーションピクチャー

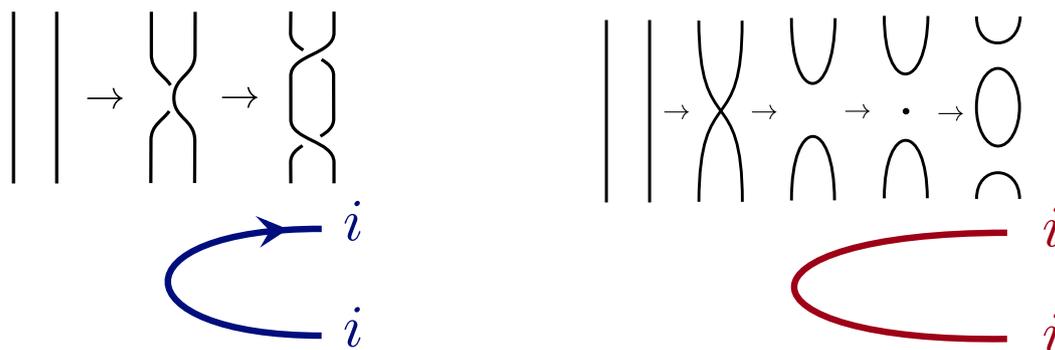


図8 Γ と $I_3 \times \{t_k\}$ の接点に関するモーションピクチャー

参考文献

- [1] Joan S. Birman and Hans Wenzl. Braids, link polynomials and a new algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(1):249–273, 1989.
- [2] J. Scott Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10):3947–3989, 2003.
- [3] Mark C. Hughes. Braiding link cobordisms and non-ribbon surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 15(6):3707–3729, 2015.
- [4] Seiichi Kamada. Surfaces in \mathbf{R}^4 of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.
- [5] Seiichi Kamada. Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.
- [6] Seiichi Kamada. A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space. *Topology*, 33(1):113–122, 1994.
- [7] Seiichi Kamada. On braid monodromies of non-simple braided surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 120(2):237–245, 1996.
- [8] Seiichi Kamada. *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [9] Seiichi Kamada and Takao Matumoto. Chart descriptions of regular braided surfaces. *Topology and its Applications*, 230:218–232, 2017.
- [10] Seiichi Kamada, Shin Satoh, and Manabu Takabayashi. The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358:5425–5440, 12 2006.
- [11] Jun Murakami. The Kauffman polynomial of links and representation theory. *Osaka J. Math.*, 24(4):745–758, 1987.
- [12] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.
- [13] O.Ya. Viro. Lecture given at osaka city university. September 1990.
- [14] Jumpei Yasuda. A plat form presentation for surface-links. *arXiv:2105.08634*, 2021.
- [15] Jumpei Yasuda. Computation of the knot symmetric quandle and its application to the plat index of surface-links. *J. Knot Theory Ramifications*, 33(03):2450005, 2024.

低次元ホモロジー球面上の有限群作用による 不動点集合のオイラー標数について

田村 俊輔 (津山工業高等専門学校)¹

1 序論

変換群論にの分野において「多様体 M の部分多様体 F が M 上のある群作用の不動点集合として実現できるか？」という基本的な問題がある。群作用をもつ多様体が球面、ユークリッド空間、円板などの場合であっても不動点集合として実現できる多様体の決定は容易ではなく、現在でも研究が行われている。² 本講演では、球面上の群作用による不動点集合に関する Montgomery-Samelson の予想について、現在までの研究の変遷を紹介し、最後に関連する低次元ホモロジー球面上の有限群作用の不動点集合に関して講演者が得た最近の進展 [30, 31] について報告する。

本稿を通して、 G は非自明な有限群を表し、断らない限り多様体と多様体上の群作用は全て滑らかなものとする。

1.1 基本事項

初めに、本稿で必要となる変換群論の基本知識や登場する定義を紹介する。

多様体 M 上の滑らかな G -作用とは、群の準同型 $\Phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ のことをいい、自己微分同相群 $\text{Diff}(M)$ が自己同相群 $\text{Homeo}(M)$ である場合、**位相的な G -作用**と呼ばれる。また、核 $\ker \Phi$ が自明であるとき、その作用は**効果的**であるという。 H を G の部分群、 M を G -作用 Φ をもつ多様体とする。 M の H -**不動点集合** M^H とは、

$$M^H = \{ x \in M \mid \Phi(h)(x) = x, \forall h \in H \}$$

で与えられる M の部分集合である。 M^H は M の部分多様体となり、 M が閉多様体ならば M^H も閉多様体である ([5, Corollary 2.5, p.309]). 部分群 H が G の正規部分群である場合、 H -不動点集合 M^H は (M 上の G -作用から誘導される) G/H -作用をもち、 $M^G = (M^H)^{G/H}$ が成立する。 M^G が空でないとき、 $x \in M^G$ における接空間 $T_x(M)$ は $\mathbb{R}[G]$ -加群の構造をもち、これを $x \in M^G$ での**接空間加群**という。 M が向きづけ可能である場合に、各 $g \in G$ から定まる微分同相写像 $\Phi(g) : M \rightarrow M$ が向きを保つとき、その G -作用は M の**向きを保つ**といい、向きを保たない微分同相写像 $\Phi(g)$ が存在するとき、その G -作用は**向きを保たない**という。 M が向きを保つ効果的な G -作用をもつとき、接空間加群 $T_x(M)$ も向きを保つ効果的な G -作用をもつ。

R を単位元をもつ可換環とする。本稿では、 R -**ホモロジー n -球面** (resp. **ホモトピー n -球面**) とは、標準 n -球面 S^n と同じ R -係数のホモロジー群 (resp. ホモトピー群) をもつ n 次元閉多様体を意味する。また、 R が整数環 \mathbb{Z} であるとき、単に**ホモロジー球面**と呼ぶことにする。

¹〒 708-8509 岡山県津山市沼 624-1 津山工業高等専門学校 総合理工学科
e-mail: tamura.s@tsuyama.kosen-ac.jp

²円板とユークリッド空間の場合、それらの次元を問わなければ、不動点集合として実現できる多様体は分類されている [24].

1.2 問題の背景と主定理

球面や円板上の群作用による不動点集合として実現できる多様体について考えるとき、特別な場合として不動点集合が孤立点である (孤立点の個数が0個の場合も含める) 場合に、その個数を調べることを考える。例えば、球面 (resp. 円板) 上の G -作用が線形ならば、孤立不動点の個数は0または2 (resp. 1) である。さらに、 G が巡回群である場合には Lefschetz 不動点定理より、また G が p -群である場合には Smith の定理より、不動点の個数は線形作用の場合と同様に0または2 (resp. 1) であることが示される。Montgomery-Samelson は、球面上の不動点をもつコンパクトリー群の作用は不動点を2点以上もつのではないかと期待していた ([15, Section 7])。彼らの期待から球面上の不動点集合が1点集合である作用の存在性の研究が始まった。 G -不動点集合がちょうど1点集合である G -作用を **one-fixed-point G -action** と呼び、 G -不動点集合が空集合である G -作用を **fixed-point-free G -action** と呼ぶことにする。

最初のブレイクスルーは、Floyd-Richardson [8] によって発見された円板上の fixed-point-free A_5 -action である。円板上の fixed-point-free G -action が与えられたとき、円板の境界を同一視することにより、球面上の位相的な one-fixed-point G -action を得ることができるため、滑らかな作用も存在するのではないかと期待された。次に、Oliver [23] は、ある円板上に fixed-point-free G -action をもつ有限群 G を完全に決定した。ここで決定された有限群は **Oliver 群** と呼ばれる。球面上の one-fixed-point G -action が存在するならば、その不動点周りの G -スライス開近傍を取り除くことによって、円板上の fixed-point-free G -action を得ることができる。故に、有限群 G が Oliver 群であることは球面上の one-fixed-point G -action が存在するための必要条件である。³ 球面上の one-fixed-point G -action を初めて発見したのは Stein [28] であり、彼は手術理論を用いて、 S^7 上の one-fixed-point $SL(2, 5)$ -action を構成した。その後、Petrie [25, 26] は、同変手術理論を開発し、奇数位数の可換 Oliver 群、 $PSL(2, F)$, $SL(2, F)$ (F は3を除く奇数位数の有限体) の有限群が、ある高次元のホモトピー球面上に one-fixed-point action をもつことを示した。

次に one-fixed-point G -action が存在する球面の次元に関する研究を紹介する。非負整数 m に対して、多様体 M 上の G -作用が m -pseudofree であるとは、任意の非自明な $g \in G$ に対して、 $\langle g \rangle$ -不動点集合 $M^{(g)}$ の各々の連結成分の次元が m 以下であるときをいう。Laitinen-Traczyk [13] は、5次元以上のホモトピー球面が 2-pseudofree な one-fixed-point G -action を許容するならば、その作用は S^6 上の one-fixed-point A_5 -action に限ることを示した。その後、森本 [16] によって、 S^6 上の 2-pseudofree な one-fixed-point A_5 -action が実際に存在することが示された。⁴ この結果を受けて、5次元以下の球面上の one-fixed-point G -action の存在性についての研究が行われた。その先駆けとして、古田 [9] はゲージ理論を用いて、ホモトピー4球面が向きを保つ one-fixed-point G -action を許容しないことを示した。同時期に、DeMichelis [7] は変換群論の手法を用いて、ホモロジー4球面上の向きを保つ局所的に滑らか⁵で効果的な G -作用の不動点集合は空集合であるか2次元以下の球面であることを示した。最終的に、ホモトピー3球

³後に、必要十分条件であることが示されている [12].

⁴実は、6次元以上の球面は one-fixed-point A_5 -action を許容する [1, 2, 17, 18].

⁵ m 次元閉多様体 M 上の位相的な G -作用が局所的に滑らか⁵であるとは、任意の $x \in M$ に対して、 x の固定部分群 $G_x = \{g \in G \mid \Phi(g)(x) = x\}$ で不変な x の M における近傍 U_x が存在して、線形な G_x -作用をもつ \mathbb{R}^m と U_x が G_x -同相であるときをいう。

面とホモロジー 5-球面が局所的に滑らかな one-fixed-point G -action を許容しないことが Buchdahl-Kwasik-Schultz [6] によって示され, one-fixed-point G -action を許容する球面の最低次元は 6 であることが結論づけられた. しかしながら, どんな Oliver 群でも S^6 上に効果的な one-fixed-point G -action をもつわけではない. 実際, Borowiecka-Mizerka [4] は 6 次元ホモロジー球面上に効果的な one-fixed-point G -action をもたない位数 216 以下の Oliver 群を例示している.

最近, 森本は S^6 上の one-fixed-point G -action に関する次の結果を得た.

定理 1.1 (森本 [20]). n を 6 以上の偶数とする. ホモトピー n -球面 S 上の 3-pseudofree な G -作用について以下が成立する.

1. $|S^G| \geq 2$ ならば, S^G は 3 次元以下の \mathbb{Z}_2 -ホモロジー球面である.
2. $|S^G| = 1$ ならば, G は $A_5, S_5, A_5 \times C_2$ のいずれかに同型であり, S は S^6 と微分同相である.

逆に, G が $A_5, S_5, A_5 \times C_2$ のいずれかに同型ならば, S^6 上の 3-pseudofree な one-fixed-point G -action が存在する.

定理 1.1 の結果から森本は次のような問題を考えた. この問題が本研究のモチベーションである.

問題 1. 6 次元球面 S^6 上の効果的な one-fixed-point G -action をもつ有限群 G は $A_5, S_5, A_5 \times C_2$ のいずれかに同型であろう.

本研究では, one-fixed-point G -action の一般化として, G -不動点集合のオイラー標数が奇数となる G -作用である **odd-Euler-characteristic G -action** を導入し, ホモロジー 6-球面上の odd-Euler-characteristic G -action に関する以下の 2 つの定理を得た.

主定理 1.2 ([30]). ホモロジー 6-球面 Σ が向きを保つ効果的な odd-Euler-characteristic G -action をもつならば, その G -作用は 2-pseudofree な one-fixed-point A_5 -action である.

ホモロジー 6-球面 Σ が向きを保たない効果的な odd-Euler-characteristic G -action をもつ場合を考える. Σ 上の向きを保つ微分同相 $\Phi(g)$ 全体のなす集合 H は G の指数 2 の部分群である. $|G/H| = 2$ であるので, $\chi(\Sigma^G) \equiv \chi(\Sigma^H) \equiv 1 \pmod{2}$ が成り立ち, 定理 1.2 より, $H \cong A_5$ かつ $\Sigma^H = \{x\}$ が得られる. したがって, G は S_5 あるいは $A_5 \times C_2$ と同型で, $\Sigma^G = \Sigma^H = \{x\}$ である. このような Σ 上の G -作用が 3-pseudofree G -action でなければならぬことを認めることで, もう一つの定理を得ることができる.

主定理 1.3. ホモロジー 6-球面 Σ が向きを保たない効果的な odd-Euler-characteristic G -action をもつならば, その G -作用は S_5 あるいは $A_5 \times C_2$ の 3-pseudofree な one-fixed-point action である.

主定理 1.2 と 1.3 は, ホモロジー 6-球面上の効果的な odd-Euler-characteristic G -action が効果的な one-fixed-point G -action に限ること, 作用する有限群 G が $A_5, S_5, A_5 \times C_2$ のいずれかに同型でなければならぬことを示している. したがって, 問題 1 を肯定的に解決したことになる.

定理 1.2 の証明と同様の手法を用いて, 次の定理も得ることができる.

主定理 1.4 ([31]). 任意の \mathbb{Z}_2 -ホモロジー 5-球面上の G -作用による G -不動点集合のオイラー標数は偶数である.

本研究の主定理と上記で紹介した 4 次元以下のホモロジー球面上の有限群作用の不動点集合に関する事実を合わせることによって, 6 次元以下のホモロジー球面上の odd-Euler-characteristic G -action に関する次の結果を得ることができる.

定理 1.5. 6 次元以下のホモロジー球面が向きを保つ効果的な G -作用をもつならば, 以下の 2 つの場合を除いて, G -不動点集合のオイラー標数は偶数である.

1. その G -作用はホモロジー 3-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である.
2. その G -作用はホモロジー 6-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である.

最後に関連する先行研究として, ホモロジー球面上の odd-fixed-point G -action (奇数個の G -不動点をもつ G -作用) の研究について紹介する. Borowiecka [3] の結果の一般化として, 森本-筆者 [22] は, S_5 と $SL(2, 5)$ に対して, これらの群の効果的な odd-fixed-point action を許容しないホモロジー球面の次元を提示した.⁶ 同様の結果として, 筆者 [29] は A_6 について, Mizerka [14] と森本 [19] は $TL(2, 5)$ (S_5 の非自明な 2 重被覆群の 1 つ) について, 効果的な odd-fixed-point G -action を許容しないホモロジー球面の次元を提示している. 今現在, これらのホモロジー球面の次元について, $G = S_5$ の場合を除いて, 最良の結果であるかはわかっていない. 本稿で紹介する命題 3.6 の証明はこれらの先行研究からアイデアを得たものである.

2 有限群の性質によるホモロジー球面の不動点集合への制約

この節では, 有限群 G が球面や円板に作用しているとき, 有限群 G の性質が与える不動点集合のオイラー標数への制約について紹介する. 球面や円板上の有限群作用による不動点集合の制約の最も基本的な結果として, 次の Smith の定理が知られている.

定理 2.1 (Smith の定理 [27] cf. [5, Theorem 4.3, Theorem 5.1]). G を素数 p -冪位数の群, X を有限 G -CW-複体⁷ とする. このとき,

$$\chi(X) \equiv \chi(X^G) \pmod{p}$$

が成立する. 特に, X が \mathbb{Z}_p -ホモロジー球面 (*resp.* \mathbb{Z}_p -非輪状) であるならば, その不動点集合 X^G も \mathbb{Z}_p -ホモロジー球面 (*resp.* \mathbb{Z}_p -非輪状) である.

p と q を素数あるいは 1 ($p = q$ でも良い) とする. P が p -群, H/P が巡回群, G/H が q -群である正規鎖 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ をもつ有限群 G の族を \mathcal{G}_p^q で表す. ここで, $p = 1$, $q = 1$ はそれぞれ $|P| = 1$, $|G/H| = 1$ を意味する. p と q が素数すべてを渡ったときの \mathcal{G}_p^q の和集合 $\bigcup_{p,q} \mathcal{G}_p^q$ を \mathcal{G} で表す. Oliver は \mathbb{Z}_p -非輪状な有限 G -CW-複体の不動点集合に次のような制約が与えられることを示した.

⁶ S_5 の場合には, ここで提示されたホモロジー球面の次元が最良であることが証明されている [21].

⁷ コンパクト G -多様体は有限 G -CW-複体の構造をもつことが知られている [10].

命題 2.2 (Oliver [23, Proposition 2]). p と q を素数とし, X を \mathbb{Z}_p -非輪状な有限 G -CW-複体とする. G が \mathcal{G}_p^q に属するならば, $\chi(X^G) \equiv 1 \pmod{q}$ が成り立つ.

証明. G は \mathcal{G}_p^q に属するので, 正規鎖 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ であって, P が p -群, H/P が巡回群, G/H が q -群となるものが取れる. また, $X^G = ((X^P)^{H/P})^{G/H}$ が成り立つことに注意する. Smith の定理より, X^P は \mathbb{Z}_p -非輪状である. H/P は巡回群なので, Lefschetz 不動点定理より, $\chi(X^H) = 1$ である. G/H は q -群であるので,

$$\chi(X^G) \equiv \chi(X^H) = 1 \pmod{q}$$

が成立する. □

Oliver は [23] にて, \mathcal{G} に属さないような有限群 G に対して, ある高次元の円板上の fixed-point-free G -action が存在することを示している. したがって, 有限群 G が Oliver 群であることの必要十分条件は G が \mathcal{G} に属さないことである.

実は, 上記の円板の場合と同様の結果が滑らかな作用をもつ球面の場合にも成り立つ.

命題 2.3. p と q を素数とし, Σ を G -作用をもつ \mathbb{Z}_p -ホモロジー球面とする. G が \mathcal{G}_p^q に属するならば, $\chi(\Sigma^G) \equiv 0$ or $2 \pmod{q}$ が成り立つ. 特に, G が \mathcal{G}_p^2 に属するならば, $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ が成立する.

証明. $\Sigma^G = \emptyset$ の場合は明らかであるので, $\Sigma^G \neq \emptyset$ の場合を考える. Σ における $x \in \Sigma^G$ の G -スライス円板近傍を D とし, $X = \Sigma \setminus \text{Int}(D)$ とすると, X はコンパクトで \mathbb{Z}_p -非輪状な G -多様体である. $\Sigma^G = X^G \cup_{\partial} D^G$ であるので,

$$\chi(\Sigma^G) = \chi(X^G) + (-1)^k$$

が成り立つ. ここで, $k = \dim D^G$ である. したがって, 命題 2.2 を用いると,

$$\chi(\Sigma^G) \equiv 1 + (-1)^k \pmod{q}$$

が得られる. □

命題 2.3 より, G が Oliver 群でない場合には, 孤立不動点をもつような球面上の G 作用を考えたとき, その個数には制約が与えられる. しかしながら, G が Oliver 群の場合には, 球面の次元が十分に高い場合, その個数に制約が与えられないことが知られている.

定理 2.4 (Laitinen-森本 [12]). 任意の Oliver 群 G と非負整数 m に対して, ちょうど m 個の不動点をもつような高次元球面上の G -作用が存在する.

序論でもみたように, 上記の定理は球面の次元が低い場合 (例えば 4 次元以下の場合) には成立しない. 次の節では 6 次元以下の球面の場合にどのような制約が与えられるかを紹介する.

3 ホモロジー球面の次元による不動点集合の制約

この節では、ホモロジー球面の次元が6以下の場合に不動点集合へ与えられる制約について論じ、主定理の証明に用いた命題を紹介する。

有限群 G が**特性的に単純**であるとは、 G が単純群であるか、 G がいくつかの互いに同型な単純群の直積と同型であるときをいい、有限群の任意の極小正規部分群は特性的に単純であることが知られている。有限群 G の唯一つの極大冪零正規部分群 $F(G)$ を**Fitting 部分群**といい、唯一つの極大正規 p -部分群 $O_p(G)$ を **p -核**という。任意の非自明な有限群 G は、非可換な極小正規部分群をもつか、 $F(G)$ が非自明であるか、のいずれかを満たしているので、定理 1.5 は次の2つの補題から得られる。

補題 3.1. 6次元以下のホモロジー球面が向きを保つ効果的な G -作用をもつとする。 G が非可換な極小正規部分群をもつならば、以下の2つの場合を除いて、 G -不動点集合のオイラー標数は偶数である。

1. その G -作用はホモロジー 3-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である。
2. その G -作用はホモロジー 6-球面上の *one-fixed-point A_5 -action* である。

補題 3.2. 6次元以下のホモロジー球面が向きを保つ効果的な G -作用をもち、 $F(G)$ が非自明ならば、 G -不動点集合のオイラー標数は偶数である。

注意 3.3. 補題 3.2 は、7次元以上のホモロジー球面に対して成立するとは限らない。実際、 S^7 上の向きを保つ効果的な *one-fixed-point $SL(2, 5)$ -action* が存在し、高次元の球面上の向きを保つ効果的な可換 *Oliver* 群の *one-fixed-point action* が存在する。

2次元以下のホモロジー球面上の G -作用の不動点集合は、Smith の定理より、2次元以下の球面あるいは空集合となることが直ちにわかる。このことから、ある G の正規部分群 H に対して、その H -不動点集合が2次元以下の球面であるならば、 G -不動点集合も2次元以下の球面となることがわかる。次に、3, 4次元のホモロジー球面の場合に定理 1.5 の証明を行う。5次交代群 A_5 は部分群の共役類を9つもち、(同型なものを除いて) 4つの非自明な既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群をもつ。以下の表は既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群の部分群による不動点集合の次元を与えたものである。

	E	C_2	C_3	C_5	D_4	D_6	D_{10}	A_4	A_5
$U_{3.1}$	3	1	1	1	0	0	0	0	0
$U_{3.2}$	3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_4	4	2	2	0	1	1	0	1	0
U_5	5	3	1	1	2	1	1	0	0

表 1: 非自明な既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群と部分群による不動点集合の次元 (参照 [22, Table 3.1])

命題 3.4. \mathbb{Z}_2 -ホモロジー 3-球面 Σ が向きを保つ効果的な *odd-Euler-characteristic G -action* をもつならば、その G -作用は *one-fixed-point A_5 -action* である。

証明. V をある G -不動点での接空間加群とする. V 上の G -作用は向きを保ち効果的なので, G は $SO(3)$ の部分群であるとして良い. A_5 と同型でない $SO(3)$ の部分群 G に対して, $G \in \mathcal{G}_2^2$ であるので, 命題 2.3 より $\chi(\Xi^G) \equiv 0 \pmod{2}$ が成立する. $G \cong A_5$ であるとき, V は 3次元の既約 $\mathbb{R}[A_5]$ -加群に同型である. 表 1 より, $\dim V^{D_4} = 0$ であるので, Smith の定理より, $|\Xi^{D_4}| = 2$ となる. $\Xi^{A_5} \subset \Xi^{D_4}$ であるので, $|\Sigma^{A_5}| = 1$ でなければならない. \square

ホモトピー 3-球面上の one-fixed-point G -action は存在しないが, いくつかのホモロジー 3-球面上には one-fixed-point A_5 -action が存在することが知られている [11].

命題 3.5 (DeMichelis [7], cf. [6, Theorem II.1]). ホモロジー 4-球面 Σ 上の向きを保つ効果的な G -作用による空でない不動点集合は 2次元以下の球面である.

証明. V をある G -不動点での接空間加群とする. ある G の正規部分群 H に対して, Σ^H が 2次元以下の球面となることを示せば良い. $F(G)$ が非自明である場合, ある p -核 $O_p(G)$ は非自明である. V 上の $O_p(G)$ -作用は向きを保つので, $\dim V^{O_p(G)} \leq 2$ が成立する. Smith の定理より, $\Sigma^{O_p(G)}$ は 2次元以下の球面である. $F(G)$ が自明であるとき, G は非可換な極小正規部分群 H をもつが, $H \cong A_5$ であることがわかる. 以下, H と A_5 を同一視する. 表 1 より, 接空間加群の制限 $\text{Res}_H^G V$ は $\mathbb{R} \oplus U_{3,i}$ ($i = 1, 2$) あるいは U_4 のいずれかに同型である. ここで, \mathbb{R} は 1次元の自明な $\mathbb{R}[A_5]$ -加群を表している. 前者の場合, $\dim V^{A_5} = \dim V^{D_4} = 1$ が成り立つので, Smith の定理より, $\Sigma^{A_5} = \Sigma^{D_4}$ は S^1 である. 後者の場合,

$$\Sigma^{C_5} \cong S^0, \Sigma^{C_2} \cong S^2, \Sigma^{D_4} \cong S^1, \Sigma^{D_6} \cong S^1$$

が成立する. $\Sigma^{A_5} \subset \Sigma^{C_5}$ より, $1 \leq |\Sigma^{A_5}| \leq 2$ であり, $\langle D_4, D_6 \rangle = A_5$ より, $\Sigma^{D_4} \cap \Sigma^{D_6} = \Sigma^{A_5}$ である. Σ^{C_2} における Σ^{D_4} と Σ^{D_6} の \mathbb{Z}_2 -交差数は自明なので, $|\Sigma^{A_5}| = 2$ であることがわかる. \square

5, 6次元のホモロジー球面の場合の証明は, 場合分けが多少煩雑であるため, ホモロジー 6-球面の場合 (定理 1.2) に限り, その証明の方針のみを述べることにする. \mathbb{Z}_2 -ホモロジー 5-球面 (定理 1.4) の場合もほぼ同様である.

以下, Σ は向きを保つ効果的な G -作用をもつホモロジー 6-球面を表す. まずは, 作用する有限群 G が非可換な極小正規部分群をもつ場合 (補題 3.1) の証明に必要な命題を紹介する.

命題 3.6. V を $V^G = \{0\}$ を満たす有限次元 $\mathbb{R}[G]$ -加群とする. G の部分群の 3つ組 (H, K, P_2) であって, 次の 4つの条件を満たすものが存在すると仮定する.

- (1) H と K は G を生成する.
- (2) P_2 は 2-群であり, H と K に含まれる.
- (3) $\dim V^H + \dim V^K = \dim V^{P_2}$ が成り立つ.
- (4) $\dim V^H = 0$ (resp. $\dim V^K = 0$) ならば, $K \in \mathcal{G}$ (resp. $H \in \mathcal{G}$) が成り立つ.

このとき、 G がホモロジー球面 X に作用していて、ある G -不動点 x での接空間加群 $T_x(X)$ が $\mathbb{R}[G]$ -加群として V と同型ならば、 X^G は 1 点集合になり得ない。特に、ある部分群 Q に対して、 $|X^Q| = 2$ であるとき、 $X^G \cong S^0$ である。

G が Σ に向きを保って効果的に作用し、 G -不動点をもつとき、 G は $SO(6)$ の部分群であるとして良い。 $SO(6)$ の非可換で特性的な有限単純部分群 G は

$$A_5, A_6, A_7, PSL(2, 7), PSU(4, 2) \text{ あるいは } A_5 \times A_5.$$

のいずれかに同型である (参照 [13, p.156]). これらのうち、 A_5 と A_6 の同型でないものに対して、命題 3.6 を適用することができ、次の結果を得る。

命題 3.7. G が $A_7, PSL(2, 7), PSU(4, 2), A_5 \times A_5$ のいずれかと同型なとき、 G がホモロジー 6-球面 Σ に G -不動点をもって効果的に作用するならば、どのような接空間加群 V も命題 3.6 の条件を満たす。特に、 $\Sigma^G \cong S^0$ である。

G が A_5 と A_6 に同型な正規部分群をもつ場合は個別に調べることにし、命題 3.7 と合わせると、ホモロジー 6-球面の場合の補題 3.1 を示すことができる。有限群 G が非可換な極小正規部分群をもつ場合の証明は完了したとし、 G が非可換な極小正規部分群をもたない場合を考える。この場合、 $F(G)$ が非自明となることを用いて証明を進める。

V を有限次元の $\mathbb{R}[G]$ -加群とし、 G -不変な内積をもつとする。 $F(G)$ は G の正規部分群であるので、 $V^{F(G)}$ は V の $\mathbb{R}[G]$ -部分加群となる。 V における $V^{F(G)}$ の直交補空間を $V_{F(G)}$ で表す。

補題 3.2 の証明の鍵となる命題の一つは次である。

命題 3.8. V を n 次元の忠実な $\mathbb{R}[G]$ -加群とし、 $\mathbb{R}[G]$ -部分加群 $V_{F(G)}$ の次元を m とする。もし G が非可換な極小正規部分群をもたないならば、 G は $O(m)$ のある有限部分群と同型である。

証明. $V_{F(G)}$ 上の G -作用の核を K とする。 Fitting の定理より⁸、積 $F(G) \cdot F(K)$ は G の冪零正規部分群であるので、 $F(G) \cdot F(K) = F(G)$ が成立する。 V 上の G -作用は効果的なので、 $F(G) \cap K = E$ である。したがって、 $F(K)$ は自明でなければならない。 G が非可換な極小正規部分群をもたないという仮定より、 K も非可換な極小正規部分群をもたないので、 K は自明でなければならない。したがって、 $G \cong G/K$ は $O(m)$ のある有限部分群と同型である。 \square

最後に、今までに用意した結果を用いて、主定理 1.2 の証明の方針を与える。

定理 1.2 の証明の方針.

ある G -不動点での接空間加群を V とする。 V は 6 次元の忠実な $\mathbb{R}[G]$ -加群で、向きを保つ G -作用をもっているため、作用する有限群 G は $SO(6)$ の部分群であるとして良い。さらに、 G は非可換な極小正規部分群をもたないと仮定する。このとき、 $F(G)$ は非自明であり、向きを保って V に作用するので、 $\dim V^{F(G)} \leq 4$ が成り立つ。ここでは、 $\dim V^{F(G)} = 3, 4$ の場合にのみ、 $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ になることを確認しよう。

Case 1. $\dim V^{F(G)} = 4$ のとき。

⁸有限群 G の冪零正規部分群 H と K の積 $H \cdot K$ もまた G の冪零正規部分群である。

命題 3.8 より, G は $O(2)$ の有限部分群と同型なので, G は巡回群か二面体群のいずれかである. このとき, G は \mathcal{G}_1^2 に属するため, 命題 2.3 から $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ がしたがう.

Case 2. $\dim V^{F(G)} = 3$ のとき.

命題 3.8 より, G は $O(3)$ の有限部分群と同型である. G が非可換な極小正規部分群をもたないので, G が可解群であり, \mathcal{G}_2^2 に属することがわかる. したがって, 命題 2.3 より, $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ がしたがう.

$\dim V^{F(G)} \leq 2$ の場合も, p -核 $O_p(G)$ の不動点集合を調べたりすることによって, 全ての場合に $\chi(\Sigma^G) \equiv 0 \pmod{2}$ を示すことができる.

謝辞

第71回トポロジーシンポジウムでの講演の機会を与えてくださった宮澤康行先生(山口大学), 茂手木公彦先生(日本大学), 佐藤進先生(神戸大学)に心より感謝申し上げます. また, 本原稿にコメントをくれた同僚の浅野喜敬氏に感謝します.

参考文献

- [1] A. Bak and M. Morimoto: *Equivariant surgery and applications*, in: Proc. of Conf. on Topology in Hawaii 1990, K.H. Dovermann (ed.), World Scientific Publ., Singapore, (1992), 13–25.
- [2] A. Bak and M. Morimoto: *The dimension of spheres with smooth one fixed point actions*, Forum Math. **17** (2005), 199–216.zw
- [3] A. Borowiecka: *$SL(2, 5)$ has no smooth effective one-fixed-point action on S^8* , Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **64** (2016), 85–94.
- [4] A. Borowiecka and P. Mizerka: *Nonexistence of smooth effective one fixed point actions of finite Oliver groups on low-dimensional spheres*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **66**, No.2, (2018), 167–177.
- [5] G. E. Bredon: *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.
- [6] N. P. Buchdahl, S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point action on low-dimensional spheres*, Invent. Math. **102** (1990), 633–662.
- [7] S. Demichelis: *The fixed point set of a finite group action on a homology four sphere*, L'Enseign. Math. **35** (1989), 107–116.
- [8] E. E. Floyd and R. W. Richardson: *An action of a finite group on an n -cell without stationary points*, Bull. Amer. Math. Soc. **65**, No.2, (1959), 73–76.
- [9] M. Furuta: *A remark on a fixed point of finite group action on S^4* , Topology **28** (1989), 35–38.
- [10] S. Illman: *The Equivariant Triangulation Theorem for Actions of Compact Lie Groups*, Math. Ann. **262**, (1983), 487–502.
- [11] S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point actions and homology 3-spheres*, Amer. J. Math. **117**, No.3, (1995), 807–827.

- [12] E. Laitinen and M. Morimoto: *Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres*, Forum Math. **10** (1998), 479–520.
- [13] E. Laitinen and P. Traczyk: *Pseudofree representations and 2-pseudofree actions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 151–157.
- [14] P. Mizerka: *Exclusions of smooth actions on spheres of the non-split extension of C_2 by $SL(2, 5)$* , Osaka J. Math. **60**, No.1, (2023), 1–14.
- [15] D. Montgomery and H. Samelson: *Fiberings with singularities*, Duke Math. J. **13**, No.1, (1946), 51–56.
- [16] M. Morimoto: *On one fixed point actions on spheres*, Proc. Japan Acad. **63** Ser.A (1987), 95–97.
- [17] M. Morimoto: *Most of the standard spheres have one fixed point actions of A_5* , in: Proc. Conf. Transformation Groups, Osaka 1987, ed. K. Kawakubo, Lect. Notes in Math. **1375**, 240–258, Springer Verlag, Heidelberg, 1989.
- [18] M. Morimoto: *Most standard spheres have one fixed point actions of A_5 .II*, K-Theory **4** (1991), 289–302.
- [19] M. Morimoto: *Appendix to P. Mizerka’s theorem*, Osaka J. Math. **60**, No.2, (2023), 377–383.
- [20] M. Morimoto: *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups I*, Osaka J. Math. **60**, No.3, (2023), 493–525.
- [21] M. Morimoto: *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups II*, accepted by J. Math. Soc. Japan.
- [22] M. Morimoto and S. Tamura: *Spheres not admitting smooth odd-fixed-point actions of S_5 and $SL(2, 5)$* , Osaka J. Math. **57**, No.1, (2020), 1–8.
- [23] R. Oliver: *Fixed point sets of group actions on finite acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–178.
- [24] R. Oliver: *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidian spaces*, Topology, **35**, (1996), 583–615.
- [25] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres I*, Adv. Math. **46** (1982), 3–14.
- [26] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres II*, Adv. Math. **46** (1982) 15–70.
- [27] P. A. Smith: *Transformations of finite period*, Ann. of Math. **39**, No.1, (1938), 127–164.
- [28] E. Stein: *Surgery on products with finite fundamental group*, Topology **16** (1977), 473–493.
- [29] S. Tamura: *Remarks on dimension of homology spheres with odd numbers of fixed points of finite group actions*, Kyushu Journal of Mathematics **74**, No.2, (2020), 255–264.
- [30] S. Tamura: *Smooth finite group actions on homology six-spheres with odd Euler characteristic fixed point sets*, arXiv:2407.07363.
- [31] S. Tamura: *Fixed point sets of finite group actions on \mathbb{Z}_2 -homology five-spheres have even Euler characteristics*, preprint.

Counting subgroups via Mirzakhani's curve counting

佐々木 東容 (城西大学)*

概要

Mirzakhani は閉双曲曲面上の閉測地線の数え上げ問題に関して次のような明快な解を与えた：種数 $g (\geq 2)$ の閉双曲曲面上の閉測地線 γ に対して、 γ と同じタイプの閉測地線で長さ L 以下のものの個数は、 $c_\gamma L^{6g-6}$ ($c_\gamma > 0$) に漸近する。本研究では閉測地線が基本群の共役類に対応することに注目し、一般化として「基本群の有限生成部分群の共役類」の数え上げ問題を考えた。部分群の共役類の長さとして「部分群の凸核の境界の長さの和の半分」を用いると、同様に同じタイプで長さ L 以下のものの個数が cL^{6g-6} ($c > 0$) に漸近することが分かった。加えて、重み付き有限生成部分群の共役類の完備化であるサブセットカレントの理論を用いることで、この長さが自然なものであることが分かった。

1 背景と主結果の簡易版

向き付け可能な閉曲面 Σ で種数 g が 2 以上であるものを考える。 Σ 上の双曲構造を一つ固定しておく (Σ はこのとき閉双曲曲面と呼ばれる)。 Σ 上の閉曲線の自由ホモトピー類にはただ一つの閉測地線が含まれるため、以後はこの二つは同一視して扱う。 Σ の写像類群 $\text{Map}(\Sigma) = \text{Homeo}^+(\Sigma)/\text{isotopy}$ は、この同一視を利用することで、 Σ 上の閉測地線全体の集合 $\text{Geod}(\Sigma)$ に作用していると思える。なお、閉測地線の向きやパラメーターについては考えないものとする。また、閉測地線が素であるとは、他の閉測地線の何重巻きになっていない場合をいう。

素な閉測地線の数え上げ問題に関して、Huber の有名な結果を紹介したい (この結果は測地線の素数定理とも呼ばれている)。Huber[Hub61] の結果：

Σ 上の長さ L 以下の素な閉測地線の個数は、 $\frac{e^L}{2L}$ に漸近する。

ここで、分母に 2 があるのは、閉測地線の向きを考えないからであり、向きを考えれば $\frac{e^L}{L}$ となる。驚くべきは、この漸近関数は種数 g に依らないということである (Σ の双曲構造にも依らない)。なお、この結果は Margulis によって一般のコンパクト負曲率多様体に拡張されている ([Mar04] を参照。ただし、未出版の 1970 年の学位論文が元)。

Huber による結果から、自己交差がない閉測地線、単純閉測地線についての数え上

* 〒350-0295 埼玉県坂戸市けやき台 1-1

e-mail: dsasaki@josai.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/dounnusasaki/>

本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:21J01271) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M50, 30F35, 37C85.

キーワード: counting subgroups, counting curves, hyperbolic surface, measured lamination, geodesic current, subset current.

閉測地線を考えるのは自然である。二つの閉測地線 γ_1, γ_2 が同じタイプであるとは、ある $\phi \in \text{Map}(\Sigma)$ が存在して $\phi(\gamma_1) = \gamma_2$ となることである。 $\gamma_0 \in \text{Geod}(\Sigma)$ を固定したとき、 γ_0 と同じタイプの閉測地線を数え上げる（すなわち軌道 $\text{Map}(\Sigma)(\gamma_0)$ の要素を数える）問題に関して、Mirzakhani は次の結果を得た：

ある定数 $c > 0$ が存在して、長さ L 以下の γ_0 と同じタイプの閉測地線の個数は cL^{6g-6} に漸近する。

単純閉測地線は Σ を二つに切り分けるものとそうでないものの 2 つのタイプに分かれるため、系として次が従う：

ある定数 $c > 0$ が存在して、長さ L 以下の単純閉測地線の個数は cL^{6g-6} に漸近する。

閉測地線は閉曲線の自由ホモトピー類に対応するが、さらに基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の共役類と対応することに講演者は着目した。そして、 $\pi_1(\Sigma)$ の共役類を数えるという問題から発想を得て、講演者は $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類を数えるという問題を考え、以下の結果を得ることができた。

定理 1.1 (主結果の簡易版) $\pi_1(\Sigma)$ の“非自明な”有限生成部分群の共役類 $[H]$ に対して、ある定数 $c > 0$ が存在して、適当な幾何学的尺度で測ったときの長さが L 以下の $[H]$ と同じタイプの共役類の個数は、 cL^{6g-6} に漸近する。

$[H]$ と同じタイプの共役類 $[H']$ とは、ある $\phi \in \text{Map}(\Sigma)$ が存在して、 $\phi([H]) = [H']$ となるもののことである。 H が $\pi_1(\Sigma)$ の有限指数部分群であるときと自明群であるとき、またそのときに限り、 $\text{Map}(\Sigma)([H])$ は有限集合である。上で書いた非自明は、これらの場合を除外するという意味である。共役類 $[H]$ には Σ の被覆空間 Σ_H が対応するが、「 Σ_H の凸核 C_H の境界の長さの和の半分」がこの場合の尺度である。

2 Mirzakhani と Erlandsson–Souto の結果

Mirzakhani の得た結果は、簡単には上のように述べられるが、実際にはより強い結果を得ている。そのことについて説明する。まず、閉測地線 γ_0 は重み付きのマルチカーブに変えることができる。この重み付きマルチカーブとは

$$a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m \quad (a_1, \dots, a_m > 0, \gamma_1, \dots, \gamma_m: \text{閉測地線})$$

のように表わされる形式的線形和のことである。重み付きマルチカーブに対する $\text{Map}(\Sigma)$ の作用は、通常的作用を線形に拡張したもので定義される。

重み付きマルチカーブが単純であるとは、それを構成する全ての閉測地線が単純で互いに交わらないことを言う。単純な重み付きマルチカーブを測度論的に完備化した空間は測度付き測地線層 (Measured lamination) の空間 $\text{ML}(\Sigma)$ と呼ばれ、双曲曲面の研究

では非常に大きな役割を果たしてきた。Mirzakhani の初期の結果 [Mir08] においては、単純な重み付きマルチカーブ γ_0 の $\text{Map}(\Sigma)$ による軌道を $\text{ML}(\Sigma)$ の格子点とみなして数えるというのが基本的なアイデアであった。なお、 $\text{ML}(\Sigma) \setminus \{0\}$ は \mathbb{R}^{6g-6} に同相であるが、この次元 $6g-6$ が個数の漸近関数 cL^{6g-6} の次数に直結している。

単純とは限らない一般の重み付きマルチカーブ全体を測度論的に完備化すると、測地カレント空間 $\text{GC}(\Sigma)$ が得られる (定義は 5.3 小節参照)。 $\text{GC}(\Sigma)$ は $\text{ML}(\Sigma)$ を部分空間として含み、単純とは限らない一般の重み付きマルチカーブの数え上げを考える際には、 $\text{Map}(\Sigma)$ による軌道を $\text{GC}(\Sigma)$ の格子点と見なして数えるというアイデアを使う。

$\text{GC}(\Sigma)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -線形構造をもつ局所コンパクト完備距離空間であり、重み付きマルチカーブの自然な完備化となっている。たとえば、閉測地線にその長さを対応させる長さ関数 ℓ は、 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -線形かつ連続に $\text{GC}(\Sigma)$ 上に拡張される。他にも、交点数などの様々な幾何学的尺度が $\text{GC}(\Sigma)$ 上に連続拡張されることが知られている。

γ_0 と同じタイプというとき、 $\text{Map}(\Sigma)(\gamma_0)$ の要素を数えていることになるが、 $\text{Map}(\Sigma)$ の代わりに、その有限指数部分群 Γ に変えることができる。さらに、正定数 c についても、より細かな特徴付けが存在する。加えて、閉双曲曲面 Σ はカスプ付き双曲曲面とすることもできるが、カスプ周りに言及すると説明が長くなるため、本講演集では避ける。

以上をふまえると、Mirzakhani の結果は以下のように述べられる。

定理 2.1 ([Mir08, Mir16]) 任意の $\text{Map}(\Sigma)$ の有限指数部 Γ と、 Σ 上の任意の重み付きマルチカーブ γ_0 に対して、ある正定数 $c_g^\Gamma(\gamma_0)$ が存在して、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\#\{\gamma \in \Gamma(\gamma_0) \mid \ell(\gamma) \leq L\}}{L^{6g-6}} = c_g^\Gamma(\gamma_0) m_{\text{Thu}}(\ell^{-1}([0, 1])),$$

が成り立つ。 m_{Thu} は $\text{ML}(\Sigma)$ 上の Thurston 測度であり、Lebesgue 測度と同じクラスに属する測度で、 $\text{Map}(\Sigma)$ 不変な測度である。加えて、 $\text{Map}(\Sigma)$ の $\text{ML}(\Sigma)$ への作用は、 m_{Thu} に関してエルゴード的である ([Mas85] 参照) ことが重要な役割を果たす。

Erlandsson–Souto は Mirzakhani の結果を以下のように拡張した。

定理 2.2 ([ES22, Theorem 9.1]) 上記の Mirzakhani の結果の設定で、長さ汎関数 ℓ を任意の正值等質な連続関数 $F: \text{GC}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に取り替えられる。すなわち、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\#\{\gamma \in \Gamma(\gamma_0) \mid F(\gamma) \leq L\}}{L^{6g-6}} = c_g^\Gamma(\gamma_0) m_{\text{Thu}}(F^{-1}([0, 1])),$$

が成り立つ。 F が正值であるとは、任意の $\mu \in \text{GC}(\Sigma) \setminus \{0\}$ に対して、 $F(\mu) > 0$ が成り立つことであり、 F が等質であるとは、任意の $a \geq 0$ と $\mu \in \text{GC}(\Sigma)$ に対して、 $F(a\mu) = aF(\mu)$ が成り立つことである。

この結果の単純な重み付きマルチカーブの場合は、Mirzakhani が [Mir08] で示しており、Erlandsson–Souto はそれを一般の重み付きマルチカーブに拡張した。文献 [ES22] は

双曲曲面上の閉測地線の数え上げ問題に関して非常によくまとめられた本である。この一般形の漸近公式を得るためのアイデアについて、次の章で解説する。

3 数え上げのアイデア： \mathbb{R}^2 の格子点の数え上げを例として

\mathbb{R}^2 の格子点 \mathbb{Z}^2 の数え上げ問題について考える (\mathbb{R}^n でも同様)。原点中心の半径 L の閉円板を $B(0, L)$ と書くとき、 $B(0, L)$ 内の格子点の個数

$$\#(B(0, L) \cap \mathbb{Z}^2)$$

が L を大きくしたとき、どのような関数に漸近するかを考える。次のアイデアがポイントである。

閉円板を大きくしていくのではなく、 \mathbb{Z}^2 の方を $\frac{1}{L}$ にスケーリングしたときの、 $B(0, 1)$ 内の個数を数える。

すなわち、

$$\#(B(0, L) \cap \mathbb{Z}^2) = \# \left(B(0, 1) \cap \frac{1}{L} \mathbb{Z}^2 \right).$$

ここで、点 $x \in \mathbb{R}^2$ における Dirac 測度を δ_x と書くことにする。 δ_x は集合が x を含めば 1 で、含まなければ 0 を返す。さらに、 \mathbb{R}^2 の離散集合 A に対して、

$$m_A = \sum_{x \in A} \delta_x$$

と定めれば、

$$\# \left(B(0, 1) \cap \frac{1}{L} \mathbb{Z}^2 \right) = m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2}(B(0, 1))$$

が成り立つ。この形に着目すると、格子点の数え上げ問題は、

$L \rightarrow \infty$ のとき、測度 $m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2}$ がどのような測度に近づくか？

という問題に言い換えられる。

\mathbb{R}^2 上の Borel 測度の列 μ_n が μ に汎弱収束するとは、任意のコンパクト台をもつ連続関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$$

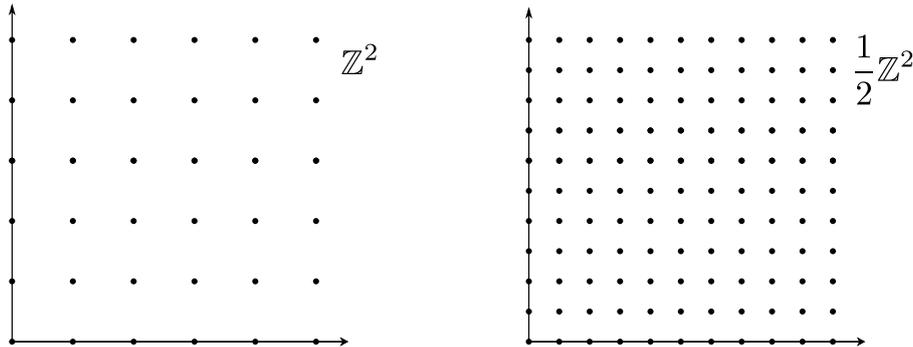
が成り立つことである。この条件は次と同値である (Portmanteau の補題と呼ばれる。[Sas22, Proposition 5.45.] を参照)：任意の \mathbb{R}^2 の相対コンパクトな Borel 集合 B に対して、境界 ∂B が $\mu(\partial B) = 0$ を満たすならば、

$$\mu_n(B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(B).$$

\mathbb{R}^2 の Lebesgue 測度を m_{Leb} と書くことにする. 任意のコンパクト台をもつ連続関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の Riemann 積分と Lebesgue 積分は一致するため,

$$\begin{aligned} \int f dm_{\text{Leb}} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(f \text{ の台を } \frac{1}{L} \text{ の幅の格子に細分したときの Riemann 和} \right) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int f d \left(\frac{1}{L^2} m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 上の式の $\frac{1}{L^2}$ は $\frac{1}{L}$ の幅の格子の 1 マスの面積である.



以上より, $\frac{1}{L^2} m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2}$ は $L \rightarrow \infty$ のとき, Lebesgue 測度 m_{Leb} に汎弱収束する. **この測度の汎弱収束こそが, 格子点の数え上げの本質であることを以下で見ていく.**

$m_{\text{Leb}}(\partial B(0, 1)) = 0$ であるから, Portmanteau の補題から次が成り立つ:

$$\frac{1}{L^2} m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2}(B(0, 1)) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} m_{\text{Leb}}(B(0, 1)).$$

すなわち,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\#(B(0, L) \cap \mathbb{Z}^2)}{L^2} = \pi$$

であり, $B(0, L)$ 内に含まれる格子点の個数は, πL^2 に漸近することが分かる.

正値等質な連続関数 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を与えたとき (例えば, $F(x, y) = |x| + |y|$ など), $F^{-1}([0, 1])$ は星状領域であり, 境界の Lebesgue 測度は 0 である. 従って,

$$\frac{1}{L^2} m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2}(F^{-1}([0, 1])) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} m_{\text{Leb}}(F^{-1}([0, 1]))$$

が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} m_{\frac{1}{L} \mathbb{Z}^2}(F^{-1}([0, 1])) &= \frac{1}{L^2} \# \left\{ \left(\frac{1}{L}x, \frac{1}{L}y \right) \in \frac{1}{L} \mathbb{Z}^2 \mid F \left(\frac{1}{L}x, \frac{1}{L}y \right) \leq 1 \right\} \\ &= \frac{1}{L^2} \# \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid F(x, y) \leq L \} \end{aligned}$$

なので, 尺度 F に関する \mathbb{Z}^2 格子の数え上げ漸近公式:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \# \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid F(x, y) \leq L \} = m_{\text{Leb}}(F^{-1}([0, 1])).$$

が得られた.

4 測度の収束に関する Erlandsson–Souto の結果とアイデア

前の節におけるアイデアは Mirzakhani と Erlandsson-Souto の結果にも使われている。定理 2.2 は次の定理の系として得られる。

定理 4.1 ([ES22, Theorem 8.1]) 任意の Σ 上の重み付きマルチカーブ γ_0 と任意の $\text{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ に対して、正定数 $c_g^\Gamma(\gamma_0)$ が存在して、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{6g-6}} \sum_{\gamma \in \Gamma(\gamma_0)} \delta_{\frac{1}{L}\gamma} = c_g^\Gamma(\gamma_0) m_{\text{Thu}}$$

が成り立つ。ただし、左辺の $\delta_{\frac{1}{L}\gamma}$ は測地カレント空間 $\text{GC}(\Sigma)$ 上における Dirac 測度であり、収束は $\text{GC}(\Sigma)$ 上の測度の汎弱収束である。

上の定理において、 m_{Thu} はもともと $\text{ML}(\Sigma)$ 上の測度であり、 $\text{GC}(\Sigma) \setminus \text{ML}(\Sigma)$ においてはゼロ測度であることに注意する。 γ_0 が単純である場合は、 $\Gamma(\gamma_0) \subset \text{ML}(\Sigma)$ であり、この場合は [Mir08] で示されている。Erlandsson-Souto の結果の新しさは、 γ_0 が単純とは限っていない点である。この場合、 $\delta_{\frac{1}{L}\gamma}$ は $\text{ML}(\Sigma)$ から離れた点における Dirac 測度であるため、 $L \rightarrow \infty$ のときにそれらが“集積”して m_{Thu} に収束するのは不思議に思われるかもしれない。[ES22] の証明では図 1 のアイデアが使われている。

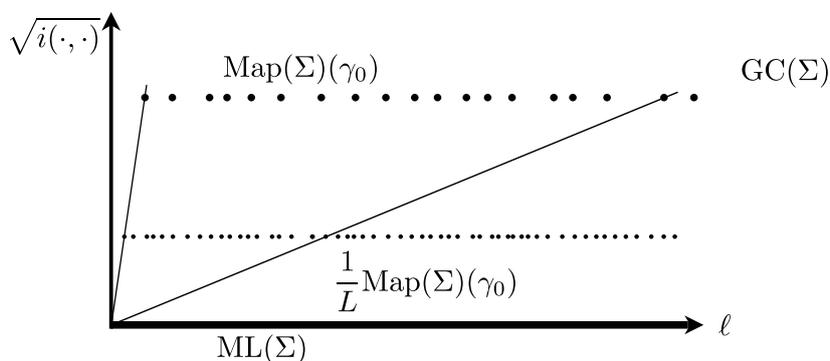


図 1 $\frac{1}{L} \text{Map}(\Sigma)(\gamma_0)$ が $L \rightarrow \infty$ のとき $\text{ML}(\Sigma)$ 上に“集積”していく様子。

2つの閉測地線（閉曲線の自由ホモトピー類）についての交点数 i は $\text{GC}(\Sigma)$ 上に $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -双線形かつ連続に拡張されるのだが、これが重要な役割を果たす。一つの閉測地線 γ に対して、その自己交点数 $i(\gamma, \gamma)$ （通常はその半分を自己交点数とよぶ）は Σ の写像類群の作用で不変である。すると、 i の $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -双線形性により、 $\phi \in \text{Map}(\Sigma)$ に対して、

$$i\left(\frac{1}{L}\phi(\gamma), \frac{1}{L}\phi(\gamma)\right) = \frac{1}{L^2} i(\gamma, \gamma) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

である。また、 $\text{ML}(\Sigma)$ は $\text{GC}(\Sigma)$ の部分空間として、

$$\text{ML}(\Sigma) = \{\mu \in \text{GC}(\Sigma) \mid i(\mu, \mu) = 0\}$$

と特徴付けられることから, $\frac{1}{L}\phi(\gamma)$ は $L \rightarrow \infty$ のとき, 一様に $ML(\Sigma)$ に近づくと分かる.

図 1 では, ℓ と $\sqrt{i(\cdot, \cdot)}$ の二つの座標軸で $GC(\Sigma)$ を表わしているが, 次元という観点では $GC(\Sigma)$ は局所的に無限次元と見なせる.

5 主結果

閉測地線の数え上げの場合, 重み付きマルチカーブの完備化空間である測地カレント空間 $GC(\Sigma)$ が重要な役割を果たした. 有限生成部分群の共役類の数え上げ問題を考える場合, [KN13] で導入されたサブセットカレント空間 $SC(\Sigma)$ が同様の重要な役割を果たす. [KN13] においては, 主に自由群上のサブセットカレント空間が扱われているが, これは境界付きコンパクト双曲曲面上のサブセットカレント空間と見なせる. 閉双曲曲面上のサブセットカレント空間の理論については, [Sas22] で基礎理論がまとめられている (定義は 5.3 小節参照). $SC(\Sigma)$ は有限生成部分群の共役類の線形和の測度論的完備化と見なせるような空間であり, 多くの面で $GC(\Sigma)$ と同様の役割を果たすことができる.

基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の非自明な有限生成部分群 H に対しては, 被覆空間 Σ_H が対応させられる. H が $\pi_1(\Sigma)$ の有限指数部分群でない場合, Σ_H は面積無限の双曲曲面であるが, その凸核 C_H は境界付きコンパクト双曲曲面になる. 凸核とは, 包含写像がホモトピー同値写像となるような最小の凸閉部分集合のことであるが, 実際には, Σ_H のいくつかの漏斗状に無限に広がる部分を, その根元の閉測地線で切って取り除くことで C_H が得られる. 凸核 C_H は共役類 $[H]$ の幾何学的表示と見なせ, 共役類の数え上げ問題は凸核の数え上げ問題と見なせる.

H が巡回部分群の場合, C_H は S^1 と同相であり, 普遍被覆写像から自然に誘導される射影 $p_H: C_H \rightarrow \Sigma$ によって, C_H は H の生成元の閉測地線表示と同一視できる. すなわち, 主結果の定理 1.1 を巡回部分群の場合に制限すれば Mirzakhani の結果になる. また, H が巡回部分群でなく, p_H が単射な場合は, C_H は Σ の部分曲面と見なせる.

5.1 長さ ℓ を使った場合の主結果

Σ 上のサブセットカレント空間 $SC(\Sigma)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -線形構造をもつ位相空間で, $GC(\Sigma)$ と $ML(\Sigma)$ をその部分空間に含む. 有限生成部分群の共役類 $[H]$ (あるいは凸核 C_H) に対して, $\eta_H \in SC(\Sigma)$ を対応させることができるが, この対応は有限 : 1 の対応であることには注意が必要である. ただし, 数え上げという観点では, 最終的に定数倍をすればよいため, 以後は η_H の方をメインに扱っていく.

$\text{Map}(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類の集合への作用は, 連続かつ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -線形に $SC(\Sigma)$ 上に拡張される. さらに, $\eta_H \in SC(\Sigma)$ に対して, C_H の境界成分全体を $\text{Comp}(\partial C_H)$ と書くとき,

$$\eta_H \mapsto \left(\frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \text{Comp}(\partial C_H)} \gamma \right) \in GC(\Sigma)$$

という写像は, $B: SC(\Sigma) \rightarrow GC(\Sigma)$ に連続, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -線形かつ $\text{Map}(\Sigma)$ -同変に拡張される.

この写像 \mathcal{B} は数え上げ問題において極めて重要な役割を果たす. なお, $\frac{1}{2}$ が付いているのは, 連続性を維持しつつ $\mathcal{B}|_{\text{GC}(\Sigma)}$ が恒等写像になるようにするためである. このために, H が巡回部分群の場合には, $\text{Comp}(C_H)$ は C_H の二つのコピーからなる集合としておく.

次の補題が共役類の数え上げにおいて基本的である:

補題 5.1 任意の $\text{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$ (あるいはそれらの線形和) に対して,

$$\mathcal{B}: \Gamma(\eta_H) \rightarrow \text{GC}(\Sigma)$$

は有限:1-写像である.

$\ell_{\text{SC}} = \ell \circ \mathcal{B}$ を共役類を数える際の幾何学的尺度とすると, 上の補題から直ちに次の結果が得られる.

定理 5.2 (ℓ_{SC} に関する数え上げ) 任意の $\text{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$ (あるいはそれらの線形和) に対して, $\mathcal{B}(\eta_H) \neq 0$ のとき, ある正整数 $s_\Gamma(H) > 0$ が存在して,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\#\{\eta \in \Gamma(\eta_H) \mid \ell_{\text{SC}}(\eta) \leq L\}}{L^{6g-6}} = s_\Gamma(H) \mathfrak{c}_g^\Gamma(\mathcal{B}(\eta_H)) m_{\text{Thu}}(\ell^{-1}([0, 1]))$$

が成り立つ.

5.2 一般形の主結果とそのアイデア

一般の正值等質な関数 $F: \text{SC}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を尺度とした際の数え上げ定理を得るには, 定理 4.1 と同様に測度に関する収束結果を得ればよい. 実際, 同様の設定で以下の定理が得られた:

定理 5.3 (一般形の主結果) 任意の $\text{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$ (あるいはそれらの線形和) に対して, $\mathcal{B}(\eta_H) \neq 0$ のとき,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{6g-6}} \sum_{\eta \in \Gamma(\eta_H)} \delta_{\frac{1}{L}\eta} = s_\Gamma(H) \mathfrak{c}_g^\Gamma(\mathcal{B}(\eta_H)) m_{\text{Thu}}$$

が成り立つ. 収束は $\text{SC}(\Sigma)$ 上の測度の汎弱収束である.

さらにその系として:

系 5.4 (一般形の主結果の系) $F: \text{SC}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を任意の正值等質な関数とする. ただし, F は $\text{GC}(\Sigma)$ 上で正值であればよい. 任意の $\text{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$ (あるいはそれらの線形和) に対して, $\mathcal{B}(\eta_H) \neq 0$ のとき,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\#\{\eta \in \Gamma(\eta_H) \mid F(\eta) \leq L\}}{L^{6g-6}} = s_\Gamma(H) \mathfrak{c}_g^\Gamma(\mathcal{B}(\eta_H)) m_{\text{Thu}}(\mathcal{F}^{-1}([0, 1]))$$

が成り立つ. なお, η_H の代わりに, $[H]$ を数え上げる場合も, $s_\Gamma(H)$ を変えることで, 同様の公式が成り立つ.

主結果における測度の収束について考える際, Elrandsson-Souto の定理 4.1 の場合と同様, $\frac{1}{L}\eta$ は H が巡回部分群でかつその閉測地線表示が単純でなければ, $ML(\Sigma)$ から離れた点である. 逆に言えば, $L \rightarrow \infty$ のときに, $\frac{1}{L}\eta$ がそのような状態に近づいていくか?, ということが問題となる.

ここで, 面積汎関数 $Area: SC(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が重要な役割を果たす. $Area$ は, η_H に対して凸核 C_H の面積を対応させる写像を, 連続かつ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -線形に拡張したものである (一意的). 自己交点数のときの類似で, $Area$ を用いると,

$$GC(\Sigma) = \{\mu \in SC(\Sigma) \mid Area(\mu) = 0\}$$

と表わすことができる. 加えて, 面積は写像類群の作用によって不変であるため, 任意の $\phi \in Map(\Sigma)$ に対して,

$$Area\left(\frac{1}{L}\phi(\eta_H)\right) = \frac{1}{L}Area(\eta_H) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

が成り立つ.

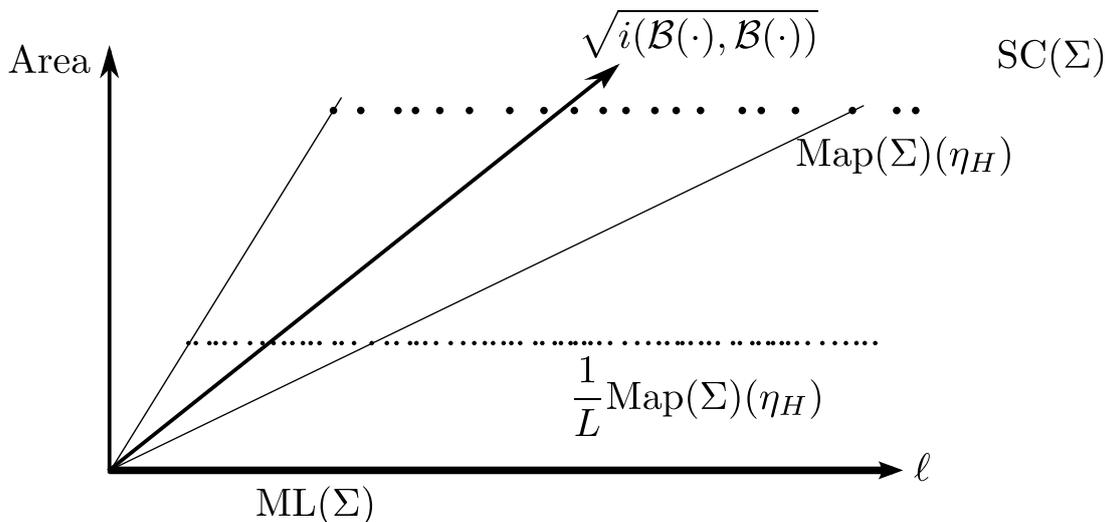


図2 $\frac{1}{L}Map(\Sigma)(\eta_H)$ が $L \rightarrow \infty$ のとき $ML(\Sigma)$ 上に“集積”していく様子.

閉測地線のときの自己交点数の代わりに, 境界成分たちの $i(\mathcal{B}(\eta), \mathcal{B}(\eta))$ を考えることで,

$$i\left(\mathcal{B}\left(\frac{1}{L}\phi(\eta_H)\right), \mathcal{B}\left(\frac{1}{L}\phi(\eta_H)\right)\right) = \frac{1}{L^2}i(\mathcal{B}(\eta_H), \mathcal{B}(\eta_H)) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

が成り立つ. 以上より, 図2のような状況が想像できる. これにより, 主結果の定理 5.3 の左辺が $ML(\Sigma)$ 上の測度に収束していくことが分かる. 実際に, m_{Thu} の定数倍に収束することはさらなる議論が必要であるが, そこでも \mathcal{B} と $Area$ が有効活用され, 最終

的には Erlandsson–Souto の結果を用いる。なお、 H が巡回部分群の場合は、まさしく、Erlandsson-Souto の結果そのものが得られる。

5.3 測地カレントとサブセットカレントの定義

閉双曲曲面 Σ の普遍被覆は双曲平面 \mathbb{H} である。 \mathbb{H} の無限遠境界 $\partial\mathbb{H}$ の 2 点を決めると、それを結ぶ無限測地線が定まるため、 $\partial_2\mathbb{H} := \{S \subset \mathbb{H} \mid \#S = 2\}$ は \mathbb{H} 上の無限測地線全体の集合と思える。測地カレントは、 $\partial_2\mathbb{H}$ 上の $\pi_1(\Sigma)$ -不変 Radon 測度として定義される。 Σ 上の閉測地線 γ に対して、その \mathbb{H} へのリフト全体を Dirac 測度として足し合わせると測地カレントができるが、これが γ と同一視される。

サブセットカレントは、超空間 $\mathcal{H}(\partial\mathbb{H}) := \{S \subset \mathbb{H} \mid S \geq 2, S: \text{コンパクト}\}$ 上の $\pi_1(\Sigma)$ -不変 Radon 測度として定義される ($\mathcal{H}(\partial\mathbb{H}) \supset \partial_2\mathbb{H}$)。 $\pi_1(\Sigma)$ の非自明な有限生成部分群 H に対して、その極限集合 $\Lambda(H) \in \mathcal{H}(\partial\mathbb{H})$ が考えられるが、その上の Dirac 測度を $\pi_1(\Sigma)/H$ の作用で動かすとサブセットカレント η_H が作れる。

面白いのは、測地カレント、サブセットカレントの定義にも数え上げの理論が使われており、閉測地線や部分群の数え上げはその空間上で再び測度を考えているのである。

測地カレントの基本的なことは [ES22] によくまとまっている。コンパクト双曲曲面上のサブセットカレントの理論は [Sas22] に基本的なことがまとまっており、[Sas22b] ではカusp付きの場合が詳しく書かれている。

参考文献

- [ES22] V. Erlandsson and J. Souto: *Mirzakhani’s curve counting and geodesic currents*, Progress in Mathematics. **345**, Birkhäuser, 2022.
- [Hub61] H. Huber: *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen II*, Mathematische Annalen, **142**, 1961.
- [KN13] I. Kapovich and T. Nagnibeda: *Subset currents on free groups*, Geom. Dedicata **166** (2013), 307–348.
- [Mas85] H. Masur: *Ergodic actions of the mapping class group*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 455–459.
- [Mar04] Grigoriy A. Margulis: *On some aspects of the theory of Anosov systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004. With a survey by R. Sharp: *Periodic orbits of hyperbolic flows*
- [Mir08] M. Mirzakhani: *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Ann. of Math **168** (2008), 97–125.
- [Mir16] M. Mirzakhani: *Counting mapping class group orbits on hyperbolic surfaces*, arXiv:1601.03342, 2016.
- [Sas22] D. Sasaki: *Subset currents on surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **278** (1368), 2022, 165 pp.
- [Sas22b] D. Sasaki: *Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property*, Groups Geom. Dyn. **16** (2022), no. 3, 1077–1117.

On the lattices and $K3$ surfaces admitting symplectic automorphism¹

Makiko Mase*[†]

Abstract

In this talk, we will discuss a study on symplectic automorphisms on $K3$ surfaces. The main source of this talk is the article in preparation entitled “Primitive closure of the lattices associated to symplectic automorphisms on $K3$ surfaces (temporary)” by the presenter.

Acknowledgement. The author appreciates the organizers of “Topology Symposium” for giving her an opportunity to present a talk. She also thanks Dr. Kenji Hashimoto for a series of fruitful discussions.

Contents

1	Introduction	1
2	Preliminary.....	2
2.1	Basic Facts	2
2.2	History	3
3	Main Theorem and a sketch of the proof.....	5
3.1	Existence	6
3.2	$Q = C_2$ case.	6
3.3	$Q = C_3$ case.	7
4	Summary and Prospect	8
4.1	Summary	8
4.2	Prospects I: Other cases.....	8
4.3	Prospects II.....	9

1 Introduction

A study of $K3$ surfaces spreads in a wide range of areas in mathematics. We are interested from the viewpoints of algebraic geometry and singularity theory.

As an example, a $K3$ surface is obtained as the minimal model of a double covering of the projective plane branching at a sextic curve with at most ADE singularities. By identifying “Gorenstein model” and its minimal model up to birational equivalence, such a surface is regarded as a general anticanonical member of the weighted projective space with weights $1, 1, 1, 3$. This weight system also gives a compactified simple $K3$ singularity in \mathbb{C}^3 . Thus we may consider the Milnor lattice associated to the hypersurface singularity. A $K3$ surface admits the Picard lattice, which is the group $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ with a natural pairing inherited by $H^2(X, \mathbb{Z})$. One of our motivation is to find out some intrinsic relation between the Milnor lattice of a simple $K3$ singularity and the Picard lattice of the associated $K3$ surface.

*Tokyo Metropolitan University

[†]e-mail: mtmase@arion.ocn.ne.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 14J28 32M18.

Keywords: $K3$ surfaces, Picard lattices, symplectic automorphism group on a $K3$ surface.

Related to algebraic curves in $K3$ surfaces, it is quite important to study whether or not a given semigroup is admitted by a pointed algebraic curve. For a double covering type, we have technique to investigate this question, while in genral, for an n -covering, we have no technique. We think we have to study algebro-topological aspects for the coverings to study the im-/possibility of this admittance, which is our second motivation.

Finally, what is in common in the above topics is the existence of automorphism on a $K3$ surface. Finite automorphism groups acting symplectically on $K3$ surfaces are well-studied and all classified by Nikulin [3], Mukai [2] and Xiao [7]. If a $K3$ surface X admits a symplectic automorphism group G , then, the minimal model $Y := \widetilde{X}/G$ of the quotient X/G is also birationally isomorphic to a $K3$ surface. It is interesting to compare the Picard lattice of X and that of Y . The classes of (-2) -curves in the exceptional divisor of a minimal resolution of the singular locus of X/G live in the Picard lattice of Y , forming a sublattice, say L_G .

By Torelli-type theorem, in order to understand the geometry of Y , it is important to study the Picard lattice of Y , and in particular, the structure of L_G in the Picard lattice. In fact, it is not necessarily true that L_G itself is a primitive sublattice of the $K3$ lattice Λ_{K3} , while the Picard lattice of Y is. Our problem is to determine whether or not it is possible to construct explicitly a primitive sublattice \tilde{L}_G such that $L_G \subset \tilde{L}_G \subset \Lambda_{K3}$ holds, and if it is true, to find an explicit generator of the primitive model. Among such groups G , Nikulin [3] and Whitcher [6] study the problem for all Abelian cases and non-Abelian with $G = [G, G]$, respectively. Our aim is to consider the problem for the remaining cases. Here is our main theorem of this talk:

Main Theorem. Suppose that a finite group G acts symplectically on a $K3$ surface and neither the commutator subgroup $[G, G]$ nor the abelianization $Q := G/[G, G]$ of G is trivial. Then, there exists a generator for the quotient \tilde{L}_G/L_G satisfying the condition $(*)$. Moreover, if Q is a cyclic group of order 2 or 3, then the existance of the generator is unique up to isomorphism.

2 Preliminary

2.1 Basic Facts

We start with recalling basic facts on $K3$ surfaces and symplectic automorphisms on them.

Definition 2.1. A $K3$ surface is a compact complex 2-dimensional smooth algebraic variety with trivial canonical divisor and irregularity zero. ■

A *lattice* is a non-degenerate finitely-generated \mathbb{Z} -module. Denote by U the hyperbolic lattice of rank 2 and E_8 the negative-definite even unimodular lattice of rank 8. For a $K3$ surface X , the Hodge decomposition gives

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X),$$

where $H^{2,0}(X) = \overline{H^{0,2}(X)}$ and $H^{1,1}(X) = \overline{H^{1,1}(X)}$.

Facts 2.2. Let X be a $K3$ surface.

- The surface X admits a nowhere-vanishing holomorphic 2-form ω_X that is unique up to constant, and $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X$.

- The cohomology group $H^2(X, \mathbb{Z})$ is a negative-definite even unimodular lattice with signature $(3, 19)$: $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$. We call the even unimodular lattice $U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$ the *K3 lattice*, which is denoted by Λ_{K3} .
- The *Picard lattice* of X , denoted by $\text{Pic}(X) := H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, is a torsion-free primitive sublattice of $H^2(X, \mathbb{Z})$ of signature $(1, \rho - 1)$, where ρ is called the *Picard number*.

Let $g \in \text{Aut}(X)$ faithfully act on X . The action of g naturally induces a transformation on ω_X by

$$g^*\omega_X = \alpha\omega_X \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*).$$

Definition 2.3. (1) The action of g on X is called *symplectic* if $\alpha = 1$, and *non-symplectic*.

- (2) A finite subgroup G of the automorphism group $\text{Aut}(X)$ of a *K3* surface X acts *symplectically* on X if all $g \in G$ acts symplectically on X . ■

Facts 2.4. If a finite subgroup $G \subseteq \text{Aut}(X)$ acts symplectically on X , then the quotient space X/G has at most *ADE* singularities. Thus, the minimal model $Y := \widetilde{X/G}$ is again a *K3* surface.

Here, we fix the notations as in the list below:

X : *K3* surface,

$G \subseteq \text{Aut}(X)$: finite group, symplectically acting on X ,

$\text{Sing}(X/G)$: the singular locus of X/G ,

$\pi : Y := \widetilde{X/G} \rightarrow X$: minimal resolution of $\text{Sing}(X/G)$,

L_G : lattice spanned by all classes of (-2) -curves in the exceptional divisor of π .

In general, for an even lattice L ,

$L^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$: the dual lattice of L ,

$A_L := L^*/L$ the discriminant group of L ,

$q_L : A_L \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$: the discriminant quadratic form on A_L ,

$b_L : A_L \times A_L \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: the discriminant bilinear form on A_L .

2.2 History

We first present a brief history of the classifications of symplectic automorphism groups G on a *K3* surface, and their fundamental properties.

Denote by C_n the cyclic group of order n .

- Nikulin [3, Theorem 4.5] classifies abelian cases. There are fourteen of them in all:

$$C_2^k \ (k = 1, \dots, 4), \quad C_3^l \ (l = 1, 2), \quad C_4^m \ (m = 1, 2), \\ C_n \ (n = 5, 6, 7, 8), \quad C_2 \times C_h \ (h = 4, 6).$$

- Mukai [2] shows that each G (not necessarily abelian) is a subgroup of the Mathieu group M_{23} of order 23.
- Xiao [7] completes the classification of G to conclude that there are 81 classes up to isomorphism, and the configuration of $\text{Sing}(X/G)$ is determined.

Remark 2.5. *The lattice L_G is not necessarily a primitive sublattice of the $K3$ lattice as in Example 2.6.*

Example 2.6 ([3], $G = \mathbb{Z}_2$). Suppose $G = C_2$. Then, we have $L_G = A_1^{\oplus 8}$, which is not a primitive sublattice of Λ_{K3} . Indeed,

$$x = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

is a torsion element in Λ_{K3}/L_G since $x^2 = -2$, and $2x \in L_G$. ■

Our next natural question is the existence and properties of a primitive sublattice \tilde{L}_G of L_G in the Picard lattice of Y . We summarize a history of the studies concerning \tilde{L}_G .

- Nikulin [3, Theorem 7.2] : for all abelian G , \tilde{L}_G is determined, and uniqueness of its generator is proved.

- Xiao [7] : L_G is determined for each G . Moreover, he proves

Lemma 2.7 ([7]). *The quotient \tilde{L}_G/L_G is isomorphic to the dual of the abelization group $Q := G/[G, G]$. □*

- Whitcher [6] : for all non-abelian G with $G/[G, G] = \{1\}$, determines the non-/uniqueness of the generators of \tilde{L}_G .

As an example, we produce a part of Nikulin's result in [3]. In this context, we assume that

$G \subseteq \text{Aut}(X)$: abelian group of order $m := |G|$,

$\{id\} \neq G_i \subset G$: cyclic subgroup of G of order $m_i := |G_i|$ ($i = 1, \dots, N$),

k_i : the number of points in X that are stationary by G_i .

Then, by an analysis of the Euler characteristic, there is a relation :

$$24(m-1) = \sum_{i=1}^N k_i(m_i^2 - 1). \quad (\star)$$

By (\star) , one can determine G .

Theorem 2.8 (Theorem 7.2 [3]). *There exists a unique generator for \tilde{L}_G/L_G for abelian G . □*

Note that, in his paper, our \tilde{L}_G is denoted by $M_{(G)}$. The generator in each case is explicitly given as in the following table:

#	G	Additional Element(s)	$\text{rk} M_{(G)}$	$\det M_{(G)}$	$A_{M_{(G)}}$
1a	\mathbb{Z}_2	$\sum_{l=1}^8 f_{1l}^{(2)}$	8	2^6	\mathbb{Z}_2^6
1a	\mathbb{Z}_3	$\sum_{l=1}^6 f_{1l}^{(3)}$	12	3^4	\mathbb{Z}_3^4
1a	\mathbb{Z}_5	$f_{11}^{(5)} + f_{12}^{(5)} + 2f_{13}^{(5)} + 2f_{14}^{(5)}$	16	5^2	\mathbb{Z}_5^2
1a	\mathbb{Z}_7	$f_{11}^{(7)} + 2f_{12}^{(7)} + 3f_{13}^{(7)}$	18	7	\mathbb{Z}_7
1b	\mathbb{Z}_4	$f_{11}^{(2)} + f_{12}^{(2)} + f_{21}^{(4)} + f_{22}^{(4)} + f_{33}^{(4)} + f_{34}^{(4)}$	14	2^6	$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^2$
1c	\mathbb{Z}_6	$f_{11}^{(2)} + f_{12}^{(2)} + f_{21}^{(3)} + f_{22}^{(3)} + f_{31}^{(6)} + f_{32}^{(6)}$	16	$2^2 \cdot 3^2$	\mathbb{Z}_6^2
1d	\mathbb{Z}_8	$f_{11}^{(2)} + f_{21}^{(4)} + f_{31}^{(8)} + 3f_{32}^{(8)}$	18	2^3	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
2a	\mathbb{Z}_2^2	$\frac{1}{2} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_q=1} \sum_{l=1}^4 e_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)l}$ ($q = 1, 2$)	12	2^8	\mathbb{Z}_2^8
2a	\mathbb{Z}_2^3	$\frac{1}{2} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \varepsilon_q=1} \sum_{l=1}^2 e_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)l}$ ($q = 1, 2, 3$)	14	2^8	\mathbb{Z}_2^8
2a	\mathbb{Z}_2^4	$\frac{1}{2} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4), \varepsilon_q=1} e_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)1}$ ($q = 1, 2, 3, 4$)	15	-2^7	\mathbb{Z}_2^7
2b	\mathbb{Z}_3^2	$f_{11}^{(3)} + f_{12}^{(3)} + f_{21}^{(3)} + f_{22}^{(3)} + f_{31}^{(3)} + f_{32}^{(3)}$, $f_{21}^{(3)} + f_{22}^{(3)} - f_{31}^{(3)} - f_{32}^{(3)} + f_{41}^{(3)} + f_{42}^{(3)}$	16	3^4	\mathbb{Z}_3^4
2c	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$f_{11}^{(2)} + f_{12}^{(2)} + f_{21}^{(2)} + f_{22}^{(2)} + f_{41}^{(4)} + f_{42}^{(4)}$, $f_{11}^{(2)} + f_{12}^{(2)} + f_{31}^{(4)} + f_{32}^{(4)} + f_{41}^{(4)} + f_{42}^{(4)}$	16	2^6	$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^2$
2d	\mathbb{Z}_4^2	$f_{11}^{(4)} + f_{21}^{(4)} + f_{31}^{(4)} + f_{41}^{(4)} + f_{61}^{(4)}$, $2f_{21}^{(4)} + f_{31}^{(4)} - f_{41}^{(4)} + f_{51}^{(4)} + f_{61}^{(4)}$	18	2^4	\mathbb{Z}_4^2
2e	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	$f_{21}^{(2)} + f_{31}^{(2)} + 3f_{51}^{(6)} + 3f_{61}^{(6)}$, $f_{11}^{(2)} + f_{21}^{(2)} + f_{41}^{(6)} + f_{51}^{(6)} + 2f_{61}^{(6)}$	18	$2^2 \cdot 3$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

In the above list, we mean:

$$f_{il}^{(m_i)} := \sum_{r=1}^{m_i-1} \frac{r}{m_i} e_{ilr},$$

and e_{ilr} 's (resp. $e_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)l}$'s) are canonical generators of the lattice \tilde{L}_G (forming appropriate trees in accordance with $\text{Sing}(X/G)$).

Example 2.9 ([3], $G = \mathbb{Z}_2$, $L_G = A_1^{\oplus 8}$). Suppose $G = \mathbb{Z}_2$. Then, one obtains the primitive sublattice

$$\tilde{L}_G = L_G + \mathbb{Z}g$$

of Λ_{K3} with the UNIQUE additional element

$$g := \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8).$$

Here, e_i is the generator of the i -th copy of A_1 in L_G .

Note that $q_{L_G}(e_i) = -2$, and $q_{L_G}(g) = -4$. ■

In general, since $L_G \subseteq \tilde{L}_G$, we have that $\tilde{L}_G^* \subseteq L_G^*$ (the dual-lattice process is contravariant). It is trivial by definition that $L_G \subseteq L_G^*$, and $\tilde{L}_G \subseteq \tilde{L}_G^*$. Combining them, and we get

$$L_G \subseteq \tilde{L}_G \subseteq \tilde{L}_G^* \subseteq L_G^*.$$

Thus, $\tilde{L}_G/L_G \subseteq L_G^*/L_G = A_{L_G}$. Therefore, We may search a generator for \tilde{L}_G/L_G in the discriminant group of L_G .

Motivated by [3], we set the condition (*) as follows:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad q_{L_G}(e) \equiv 0 \pmod{2}, \text{ and } e^2 \neq -2, \\ \bullet \quad \forall d \in L_G, b_{L_G}(d, e) \in \mathbb{Z} \text{ (i.e., } \tilde{L}_G \text{ is a } \mathbb{Z}\text{-lattice), and} \\ \bullet \quad \text{if } L_G^*/L_G \simeq \langle e_1 \rangle \simeq \langle e_2 \rangle \text{ with } e_1 \neq e_2, \text{ then, } b_{L_G}(e_1, e_2) \in \mathbb{Z} \\ \quad \text{("compatibility").} \end{array} \right.$$

Problem 2.10. Describe the smallest primitive sublattice \tilde{L}_G s.t.

$$L_G \subseteq \tilde{L}_G \subseteq \Lambda_{K3}.$$

Equivalently, describe a generator $e \in L_G^*/L_G$ with

$$\tilde{L}_G = L_G + \mathbb{Z}e$$

satisfying the condition (*).

According to the background results, we may proceed to give an answer to Problem 2.10 for non-abelian G 's with neither $[G, G]$ nor Q is trivial.

3 Main Theorem and a sketch of the proof

We re-produce our main theorem.

Main Theorem 1. Suppose that a finite group G acts symplectically on a $K3$ surface and neither the commutator subgroup $[G, G]$ nor the abelianization $Q := G/[G, G]$ of G is trivial. Then, there exists a generator for the quotient \tilde{L}_G/L_G satisfying the condition (*). Moreover, if Q is a cyclic group of order 2 or 3, the existence of the generator is unique up to isomorphism.

In the following three subsections, we give a sketch of the proof of our main theorem.

3.1 Existence

Suppose that the abelianization of G contains a factor C_n as

$$Q := G/[G, G] = \cdots \times C_n \times \cdots .$$

As we have discussed before, we may search a generator in the discriminant group A_{K_G} .

Since we know explicitly a formula for the discriminant quadratic form q_{L_G} on A_{L_G} , we can compute the self-intersection number (norm)

$$q_{L_G}(g) \quad \text{for} \quad \text{ord}(g) = n$$

to determine which $g \in A_{L_G}$ satisfies the conditions

$$q_{L_G}(g) \in 2\mathbb{Z} \quad \text{and} \quad q_{L_G}(g) \leq -4.$$

In case that there exist two candidates $g_1, g_2 \in A_{L_G}$ for the generator, determine whether or not the intersection number satisfies the condition

$$b_{L_G}(g_1, g_2) \in \mathbb{Z}.$$

Since there is a relation

$$2b_{L_G}(g_1, g_2) \equiv q_{L_G}(g_1 + g_2) - q_{L_G}(g_1) - q_{L_G}(g_2) \pmod{2},$$

we may well see if

$$q_{L_G}(g_1 + g_2) \in 2\mathbb{Z}$$

holds true.

Next, we show the uniqueness of the generator in the cases $Q = C_2$, and C_3 .

Let M be a lattice that is the direct sum of lattices of ADE -type. Occasionally we use the following well-known facts for such a lattice M .

- (i) There exists an induced homomorphism $O(M) \rightarrow O(A_M)$ between the automorphism group of the lattice M and that of discriminant group A_M [4, §1-4°].
- (ii) If the Dynkin diagram $D(M)$ of M admits a \mathbb{Z}_2 -symmetry due to a reflection, then, so does the discriminant group A_M .

For notations of groups, we refer [7].

3.2 $Q = C_2$ case.

We construct a generator explicitly by a case-by-case analysis for

$$G = \mathfrak{S}_4(\#34), T_{48}(\#54), \mathfrak{A}_{4,3}(\#61), 2^4D_6(\#65), \\ 4^2D_6(\#67), \mathfrak{S}_5(\#70), \mathfrak{A}_{4,4}(\#78), F_{384}(\#80).$$

In other cases, we use the following two Lemmas.

Lemma 3.1 ($G = D_6(\#6), D_{10}(\#16), \mathfrak{A}_{3,3}(\#30)$). If $q_{L_G}(g)$ of an element $g \in A_{L_G}$ of order 2 is given by

$$q_{L_G}(g) = \sum_{i=1}^8 \left[-\frac{[a_i]_2^2}{2} \right]_{-2},$$

then, g contains non-trivial entries as in the table.

Norm	Element
-2	$(\cdots [1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2, [0]_2, [0]_2, [0]_2, [0]_2 \cdots)$
-4	$(\cdots [1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2 \cdots)$

Therefore, there exists a unique generator of $\widetilde{L_G}/L_G$ with the condition (*) up to $O(A_M)$. \square

Lemma 3.2 ($G = 2^4 D_{10}(\#73), T_{192}(\#77)$). If $q_{L_G}(g)$ of an element $g \in A_{L_G}$ of order 2 is given by

$$q_{L_G}(g) = \sum_{j=1}^3 \left[-\frac{3[b_j]_4^2}{4} \right]_{-2} + \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{[c_k]_2^2}{2} \right]_{-2},$$

then, g contains non-trivial entries as in the table. Denote by $m := \#\{j \in \{1, 2, 3\} \mid [b_j]_4 = [2]_4\}$ and $n := \#\{k \in \{1, 2\} \mid [c_k]_4 = [1]_4\}$.

Norm	(m, n)
-2	$(1, 2), (2, 0)$
Norm	Element
-4	$(\cdots [0]_5, [0]_5, [2]_4, [2]_4, [2]_4, [1]_2, [1]_2 \cdots)$

Therefore, there exists a unique generator of $\widetilde{L_G}/L_G$ with the condition (*) up to $O(A_M)$. \square

3.3 $Q = C_3$ case.

Similarly we construct explicitly the generator. In particular, we use the following Lemmas.

Lemma 3.3. Consider a lattice M admitting \mathbb{Z}_2 -symmetry. If the self-intersection number (norm) of an element g of order 3 in A_M is given by

$$g^2 = \sum_{i=1}^6 \left[-\frac{2[a_i]_3^2}{3} \right]_{-2},$$

then, g contains non-trivial entries up to permutation as in the table below.

Norm	Conditions
-2	$[a_i]_3 = [0]_3$ for $i = 4, 5, 6$, and $\#\{i \in \{1, 2, 3\} \mid [a_i]_3 = [2]_3\}$ is odd
-4	$[a_i]_3 \neq [0]_3 \forall i$, and $\#\{i \in \{1, \dots, 6\} \mid [a_i]_3 = [2]_3\}$ is even

Therefore, there exists a unique generator

$$(\cdots, [1]_3, [1]_3, [1]_3, [1]_3, [1]_3, [1]_3, \cdots)$$

(of norm -4) of A_M up to $O(A_M)$ symmetry with the condition (*). \square

Lemma 3.4. *Consider a lattice M admitting \mathbb{Z}_2 -symmetry. If the self-intersection number (norm) of an element g of order 3 in A_M is given by*

$$g^2 = \sum_{i=1}^2 \left[-\frac{4[a_i]_3^2}{3} \right]_{-2} + \sum_{j=1}^2 \left[-\frac{2[c_j]_3^2}{3} \right]_{-2},$$

then, g contains non-trivial entries up to permutation as in the table below.

Norm	Conditions
-2	$[a_1]_3 = [c_1]_3 \neq [0]_3$ and $[a_2]_3 = [c_2]_3 = [0]_3$
-4	$[a_i]_3$ and $[c_j]_3 (\forall i, \forall j)$ are non-zero

Therefore, there exists a unique generator

$$(\cdots, [1]_3, [1]_3, [1]_3, [1]_3, \cdots)$$

(of norm -4) of A_M up to $O(A_M)$ symmetry with the condition (*). \square

4 Summary and Prospect

4.1 Summary

In this talk, by giving an explicit generator, we have described the smallest primitive closure \tilde{L}_G of the lattice L_G in the $K3$ lattice Λ_{K3} in the cases where $G \subseteq \text{Aut}(X)$ acts symplectically on X , neither $[G, G]$ nor Q is trivial.

4.2 Prospects I: Other cases

An idea: general theory of du Val singularities. ²

In some cases, we expect to be able to use techniques of double covering of rational double points (RDP 's for short), globally a ramified point. An RDP is a germ of isolated singularity $(\mathcal{X}, 0)$ which is known to be isomorphic to the quotient singularity

$$(\mathbb{C}^2/\mathcal{G}, 0),$$

where \mathcal{G} is a finite subgroup of $SL_2(\mathbb{C})$. It is known that such a group \mathcal{G} is up to isomorphism classified into the following five cases, and the corresponding RDP 's are given in the far right column :

Cyclic	$C_{2m} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$	A_{2m-1}
Binary Dihedral	$BD_n = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	D_n
Binary Tetrahedral	$BT_{24} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$	E_6
Binary Octagonal	$BO_{48} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$	E_7
Binary Icosahedral	$BI_{120} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{10} & 0 \\ 0 & \zeta_{10}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5 - \zeta_5^4 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ \zeta_5^2 - \zeta_5^3 & -\zeta_5 + \zeta_5^4 \end{pmatrix} \right\rangle$	E_8

²Here, we follow the notations in [1] and refer [5].

Since the group C_{2n} is a normal subgroup of BD_{4n} , the group BD_{4n}/C_{2n} gives a covering transformation of

$$\sigma : \mathbb{C}^2/C_{2n} \rightarrow \mathbb{C}^2/BD_{4n}$$

of order 2. Thus the mapping σ is a ramifying double covering of du Val singularities from an A_{2n-1} -singularity to a D_{4n} -singularity. Similarly, there is a double covering $D_{8n} \rightarrow D_{4n}$ due to the fact that the group BD_{8n} is a normal subgroup of BD_{4n} .

4.3 Prospects II

In future, we are intended

- to compute the invariants of the lattice \tilde{L}_G :
the rank, the discriminant group, the discriminant form.
- to describe a polarization of the $K3$ surface Y .
- to reveal an elliptic structure (if any) of Y .
- to study the relations between the Picard lattice of X , that of Y and the lattice \tilde{L}_G .

References

- [1] Dolgachev, I. V., “McKay correspondence”, available online at <https://dept.math.lsa.umich.edu/~idolga/McKaybook.pdf>.
- [2] Mukai, S., Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group, *Invent. Math.*, **94** (1988), 183–221.
- [3] Nikulin, V.V., Finite automorphism groups on Kähler $K3$ surfaces, *Trans. Moscow Math. Soc.*, (1980), Issue 2, 71–135.
- [4] Nikulin, V.V., Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, *Math. USSR Izv.*, **14** (1980), No. 1, 103–167.
- [5] Reid, M., “The du Val singularities A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 ”, available online at <https://homepages.warwick.ac.uk/~masda/.surf/>.
- [6] Whitcher, U., Symplectic automorphisms and the Picard group of a $K3$ surface, *Communications in Algebra*, **39** (2011), 1427–1440.
- [7] Xiao, Z., Galois covers between $K3$ surfaces, *Ann. de l’Institut Fourier*, **46** (1996), 73–88.

Makiko Mase
July 2024

平面代数曲線補集合のトポロジー

菅原 朔見 (北海道大学大学院理学院数学専攻, JSPS 特別研究員 DC1)*

1 序

$f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ を被約な複素二変数多項式とし, $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ を f が定義する代数曲線とする. 代数曲線は最も基本的な代数多様体であり, 代数幾何, トポロジーの両観点から長く研究されてきた対象である. 本稿では, 補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ のトポロジーについて扱う.

平面代数曲線の補集合のトポロジーに関して最も注目すべき最初の結果は 1929 年の Zariski によるもの [22] であろう. Zariski は元々, 与えられた平面曲線を分岐集合として持つ二変数関数の存在 (分岐被覆の存在) 問題を考えており, それを補集合の基本群の問題へと帰着させ, 補集合の基本群を計算する手法について考察した. 基本群を計算する手法は後に van Kampen [12] により完成され, 現在 Zariski–van Kampen の方法として, 代数曲線のトポロジーにおける基本的な技術として知られている (Zariski–van Kampen の方法については [17, 18] も参照).

主題とはやや逸れるが, Zariski の論文 [22] において述べられたいくつかの問題は, その後長年の代数曲線のトポロジーにおける主要な研究対象となっていた. 例えば, 「通常二重点のみを特異点として持つ曲線の補集合の基本群は可換であるか」という問^{*1}は Zariski 予想として長年注目された. 他にも, 特異点の“組合せ的情報”が等しいが補集合のトポロジーが異なる曲線の組 (現在 Zariski 対と呼ばれる) についても言及されていた. Zariski 対は 1990 年代以降多くの研究者により調べられ, 現在も注目されている対象である [3].

さて, Zariski–van Kampen による補集合の基本群を求めるアルゴリズムは, 1980 年頃 Moishezon により導入されたブレイドモノドロミーの概念へと発展する [15]. ブレイドモノドロミーにより得られる補集合の基本群の表示は Zariski–van Kampen の方法に比べて表れる関係式の数少なく, 「良い」表示である. 実際 Libgober により, ブレイドモノドロミーにより得られる基本群の表示に付随して定まる 2 次元 CW 複体が, 補集合とホモトピー同値となることが示されている [13]. さらにその後 Artal–Carmona–Cogolludo により, \mathbb{C}^2 内の曲線の射影閉包として得られる CP^2 内の射影曲線の埋め込みの位相が,

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目北海道大学大学院理学院数学専攻

e-mail: sugawara.sakumi.f5@elms.hokudai.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/sakumisugawara/>

本研究は科研費 (課題番号:22KJ0114) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 32S50, 32Q55, 57K40, 57R65

キーワード: 代数曲線, ブレイドモノドロミー, ハンドル分解, Kirby 図式

^{*1} Zariski は同論文でこの主張が正しいと述べたが, その証明にはギャップがあった. Zariski 予想は, 1980 年頃 Fulton, Deligne により解決された [6, 9].

ブレイドモノドロミーによって決まることが示された [2] (彼らは補集合の微分同相型を具体的に記述したわけではないことに注意する). このように代数曲線のトポロジーにおいてブレイドモノドロミーは強力な手法であった. そして著者は近年, ブレイドモノドロミーのアイデアに基づき, 平面代数曲線補集合のハンドル分解や Kirby 図式の記述を得た [19]. 本稿では, Libgober によるブレイドモノドロミーを用いたホモトピー型の記述から復習し, 著者による研究で得られた結果について紹介したい.

2 基本的な例, 1 次ホモロジー群

まず本題へ入る前に, 代数曲線の補集合としてどのような空間が現れるか, 基本的な例を通して紹介したい.

例 2.1 曲線 $C = \{y = 0\}$ とする. このとき, 補集合は $M = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \neq 0\} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ となり, S^1 とホモトピー同値である. 1 次ホモロジー群 $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元は複素直線 $y = 0$ の周りを小さく回るループにより代表される.

例 2.2 曲線 $C = \{xy = 0\}$ とする. このとき, 補集合は $M = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x, y \neq 0\} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ となり, $S^1 \times S^1$ とホモトピー同値である. 1 次ホモロジー群 $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ の生成元はそれぞれ複素直線 $x = 0, y = 0$ の周りを小さく回るループにより代表される.

例 2.3 曲線 $C = \{x^p + y^q = 0\}$ とする. ただし p, q はともに非負整数であるとする. 原点中心とする球体 B^4 と曲線との交わり $B^4 \cap C$ は, その境界との交わり $S^3 \cap C$ の錐となる ([14], Theorem 2.10) ので, 補集合は $(S^3 \setminus (S^3 \cap C)) \times (0, \infty)$ と同相である. 曲線 C が S^3 との交わりで作る絡み目は $T(p, q)$ ((p, q) -トーラス絡み目) であるから, 曲線の補集合は $S^3 \setminus T(p, q)$ とホモトピー同値である. 上記二つの例は, 座標変換を行うことでそれぞれ $(p, q) = (0, 1), (2, 2)$ の場合とみなせる.

一般に, 平面曲線の補集合の 1 次ホモロジー群について次が成り立つ.

命題 2.4 \mathbb{C}^2 内で定義された代数曲線 C が r 個の既約成分を持つとする. このとき $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ である.

これは Lefschetz 双対定理とホモロジー群の長完全列を使うことで証明できる. 詳細は [7] の Proposition 4.1.3 などを参照されたい. これは S^3 内の絡み目の補集合の 1 次 Betti 数が絡み目の成分数と一致することに類似する結果である.

3 ブレイドモノドロミーによる基本群, ホモトピー型の記述

本節では, 代数曲線のブレイドモノドロミーについて述べ, 補集合の基本群やホモトピー型について紹介する. ブレイドモノドロミーに関する詳細は [4, 5, 15] を参照されたい. また, 代数曲線補集合の基本群については, [18] の第一部に詳細な解説がある. そち

らも参照されたい。

$f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ を複素二変数の被約な n 次多項式とし, y^n の係数が 0 でないと仮定する. 多項式 $f(x, y)$ が定める代数曲線を $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ とし, その補集合を $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ とおく. 第一成分への射影を $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ とし, 各 $x \in \mathbb{C}$ に対し, $L_x = \pi^{-1}(x)$ とおく. 射影の各ファイバーと曲線の交わり $L_x \cap C$ は高々 n 点集合であることに注意する. 複素平面 \mathbb{C} 内の部分集合 X を以下で定義する:

$$X = \{p \in \mathbb{C} \mid \#(L_p \cap C) < n\}.$$

これは L_p が C と接するか, C の特異点を含むような点 p の集まりである. 別の言い方をすれば, 各 $p \in \mathbb{C}$ を固定するごとに得られる y についての n 次多項式 $f(p, y)$ が重根を持つような p の集まりである. X は有限集合であり, $X = \{p_1, \dots, p_N\}$ と表す. 任意の $p_i \in X$ に対して, L_{p_i} が C の特異点または C との接点を高々 1 点含むようにジェネリックに仮定できる. このとき以下が成り立つ. 証明は例えば [7] の Lemma 3.3.5 などを参照.

命題 3.1 射影の制限 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \rightarrow \mathbb{C} \setminus X$ は $\mathbb{C} \setminus (n \text{ points})$ をファイバーに持つファイバー束である.

このファイバー束のモノドロミーについて観察していく. 各点 $p_i \in X$ を中心とする十分小さい円板 U_i とし, これの境界の円周から一点 $p'_i \in \partial U_i$ をとる. 基点 $p_0 \in \mathbb{C} \setminus X$ をとり, p_0 と p'_i を結ぶ自己交叉のない道 s_i を, 「 $i \neq j$ ならば $s_i \cap s_j = \{p_0\}$ 」となるようにとる (このような道の集まり (s_1, \dots, s_N) を基点 p_0 と集合 $\{p'_1, \dots, p'_N\}$ に関する Hurwitz 系と呼ぶことにする). p_0 を基点とし, $s_i, \partial U_i, s_i^{-1}$ を結んでできる道のホモトピー類を $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0)$ とおく. $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ は $\pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \cong F_N$ (階数 N の自由群) の生成系をなす. 各ループ γ_i に沿って, ファイバー束 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \rightarrow \mathbb{C} \setminus X$ を自明化することで, L_{p_0} 内の $L_{p_0} \cap C$ を保つような自己同相が得られる. そのためこのファイバー束からは準同型

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \rightarrow B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$$

を得る. ここで, $B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ は $L_{p_0} \cap C$ を保つような L_{p_0} の写像類群であり, n 本の紐からなるブレイド群 B_n と同型である. そのため, この準同型 Φ は代数曲線のブレイドモノドロミーと呼ばれる. 各生成元 γ_i に対するモノドロミーを $\beta_i = \Phi(\gamma_i) \in B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ とおく.

基点のファイバーと曲線の交わりを $L_{p_0} \cap C = \{q_1, \dots, q_n\}$ とおく. $L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C)$ から基点 q_0 をとり, 基点 q_0 と集合 $\{q_1, \dots, q_n\}$ に関する L_{p_0} 内の Hurwitz 系をとり, 先と同様に対応する $\pi_1(L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C), q_0)$ の生成元を e_1, \dots, e_n とする.

また, $p \in \partial U_i$ に対して $L_p \cap C$ は n 点集合である. 点 p が p_i に近づくとき, このうち m_i 点が一点に潰れる (L_{p_i} が C と横断的に交わるとき, m_i は特異点の重複度に一致

する) と仮定し, この潰れる m_i 点に対応する $L_{p_0} \cap C$ の点の集まりを $\{q_{i_1}, \dots, q_{i_{m_i}}\}$ とおく. 対応する添字集合を $I_i = \{i_1, \dots, i_{m_i-1}\}$ とおく.

以上の準備のもと, 以下が成り立つことが知られている.

定理 3.2 ([13]) 補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ は以下の基本群の表示から得られる 2 次元の CW 複体とホモトピー同値である:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \cong \langle e_1, \dots, e_n \mid \beta_i \cdot e_j = e_j, i = 1, \dots, N, j \in I_i \rangle.$$

ここで \cdot はブレイド群の自由群への Artin 作用を表す.

この定理は補集合を上記の表示を持つ 2 次元 CW 複体へとレトラクトさせていくことで証明される. ここで, 「 S^3 内の結び目群の Wirtinger 表示, そして Artin 表示が表す 2 次元 CW 複体は補集合とホモトピー同値である」という事実を局所的に用いている. 添字集合 I_i が m_i 個ではなく $m_i - 1$ 個の元からなるのは, 結び目群の Wirtinger 表示や Artin 表示の不足数が 1 であることに由来する.

さて著者の研究は, ここで得られた基本群の表示の生成元が 1-ハンドルに, 関係式が 2-ハンドルに対応するようなハンドル分解を補集合が持つのではないかと, という疑問が出发点であった.

4 補集合のハンドル分解

本節では, 代数曲線の補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ のハンドル分解について述べる. 本節と次節の内容について, 詳細は著者のプレプリント [19] を参照されたい.

補集合 M は開多様体であるので, \mathbb{C}^2 内の十分大きな半径を持つ多重円板 $D \times D$ (角を解消すれば 4 次元球体と微分同相) と曲線に対する十分小さくジェネリックな正則近傍 $\nu(C)$ をとり, $M_0 = (D \times D) \setminus \nu(C)$ のハンドル分解を考えることにする. このとき M_0 はコンパクト境界付き 4 次元多様体であり, M_0 の内部は M と微分同相である. 射影 π を M_0 へと制限したものを $\pi_0: M_0 \rightarrow D$ とおく. このとき, π_0 の制限 $\pi_0: M_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \pi_0^{-1}(U_i) \right) \rightarrow D \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i$ はやはりファイバー束であり, そのファイバーは $n+1$ 個の境界成分を持つ種数 0 の曲面 (つまり, 大きさのある穴を n 個開けた円板 D_n) であることに注意されたい.

基点 p_0 と ∂D を結ぶ自己交叉のない道 s_0 で, $s_0 \cap s_i = \{p_0\}$ ($i = 1, \dots, N$) となるようなものを取り, 各 $i = 0, 1, \dots, N$ に対して道 s_i の十分小さい管状近傍 $\nu(s_i)$ とする. さらに $\nu(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^N U_i \cup \bigcup_{i=0}^N \nu(s_i)$ とおく (図 1 を参照).

このとき, $D \setminus \nu(\Gamma)$ は円板と同相であり, したがって可縮である. よってこの上では, 射影から得られるファイバー束は自明となり, ファイバーは n 個穴あき円板 D_n であるから, 次を得る.

命題 4.1 $\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ は 1 ハンドル体 $\natural_n(S^1 \times D^3)$ ($\cong D_n \times D^2$) と微分同相である.

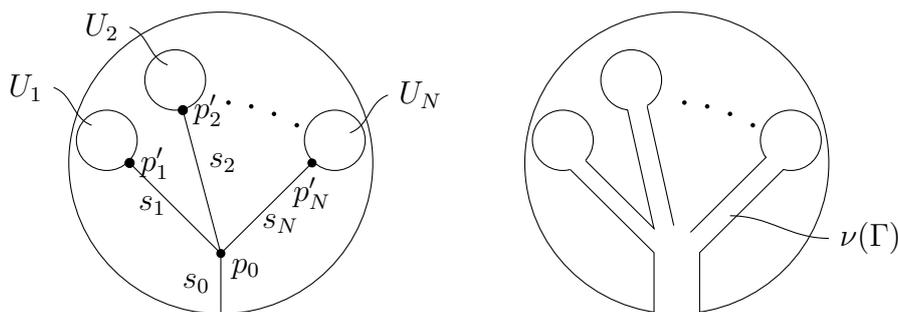


図1 道の集まり s_0, s_1, \dots, s_N と $\nu(\Gamma)$

ハンドル分解を求めたい多様体は $M_0 = \pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cup \pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ であるから、後は上記の1ハンドル体に $\pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ がどのように接着されているかを見ればよい。

各 $i = 1, \dots, N$ に対し、 $V_i \subset U_i$ を p_i を中心とする円板で、任意の $p \in V_i$ が $L_p \cap C \cong D_{n-(m_i-1)}$ を満たすようにとる。点 p_i のまわりでパーツ分けし、 A, B を図2のように定める。

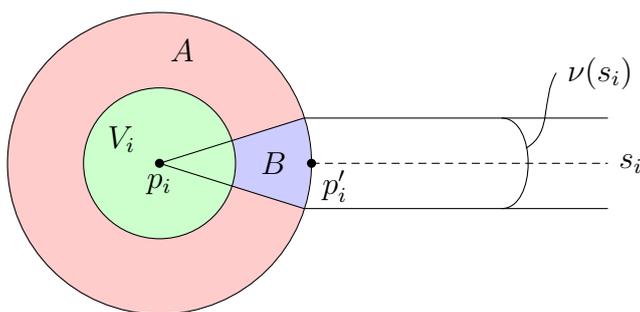


図2 領域 A と B

このとき、実は $\pi_0^{-1}(A)$, $\pi_0^{-1}(V_i)$ を順に接着しても多様体の微分同相型が変わらないことがわかる^{*2}。そして、残る部分 $\pi_0^{-1}(B)$ をこれに接着することが、 $m_i - 1$ 個の2ハンドル接着になっている。この2ハンドル接着の概要を、簡単のために $m_i = 2$ と仮定して見てみよう。Bの両端の連結成分について、 ∂U_i 側では $L_p \cap C$ から得られる二つの連結成分があるが、 V_i 側では、 V_i に対する仮定より $L_p \cap C$ から得られる連結成分は一つになっている(図3)。さらに図のように、 ∂U_i 側から V_i 側へ近づくと、 $L_p \cap C$ から得られる連結成分が二つから一つへ真っ直ぐに減っていることがわかる^{*3}。Bを放物線状の弧で区切っていき、そのファイバーの様子を見ていくと、弧 α_2 のファイバー上にある青色の円が弧を右に進めていくと消えていく様子がわかる(図4)。このとき、この青い円がハンドルの接着円となるような、2ハンドルの接着が行われていることがわかる^{*4}。

^{*2} 詳細は [19] の6ページの議論を参照。

^{*3} これは C の正則近傍を十分小さくとることにより可能になっている。

^{*4} 実際に2ハンドルの接着になっていることは、境界の3次元多様体へ制限して得られる安定写像が不定値折

また、 $m_i \geq 3$ の場合もこの操作を繰り返していくことで、同様の2-ハンドルの接着が行われることがわかる。残りの部分 $\pi_0^{-1}(\nu(s_i))$ の接着は全て多様体の微分同相型をかえず、結局各 i に対して、 $m_i - 1$ 個の2-ハンドルが接着されるようなハンドル分解を M_0 は持つことがわかる。

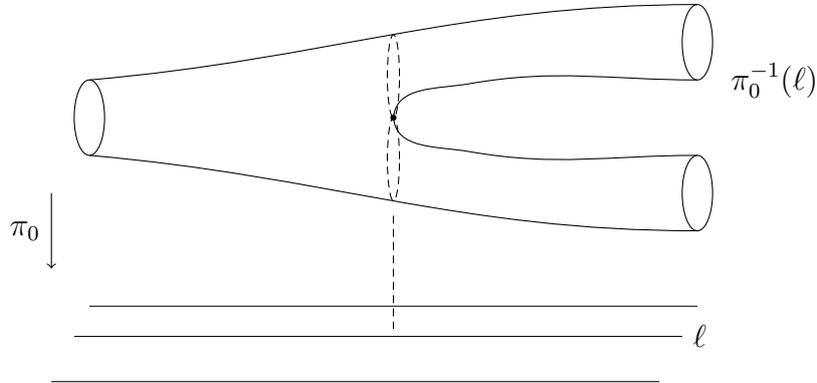


図3 $\pi_0^{-1}(B)$ の様子. l は B 内の半径方向に伸びる直線である.

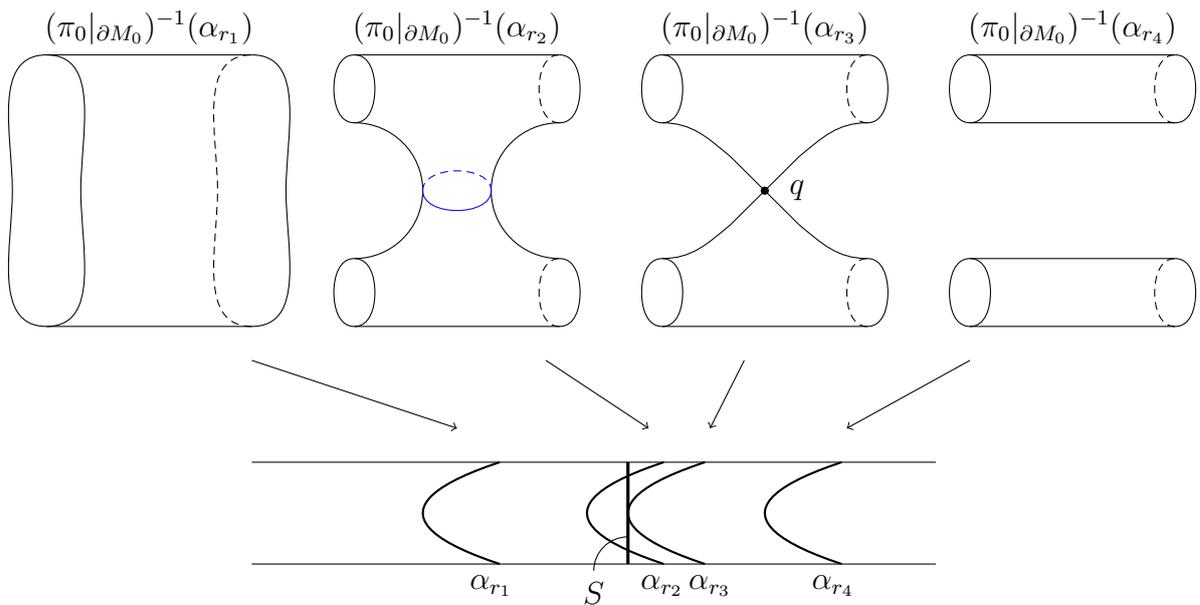


図4 B 内の弧とその上のファイバー

5 補集合の Kirby 図式

本節では、前節で得られたハンドル分解を表す Kirby 図式の記述方法について述べる。4次元多様体のハンドル分解や Kirby 図式については、[1, 8, 11] を参照。

補集合 M_0 は2-ハンドル体であることがわかったので、1-ハンドルの接着を表す点付き円、2-ハンドルの接着を表す枠付き絡み目を描けばよい。まず初めに、1-ハンドル

り目のみの特異点にもつことを用い、具体的に座標を表示することからわかる。

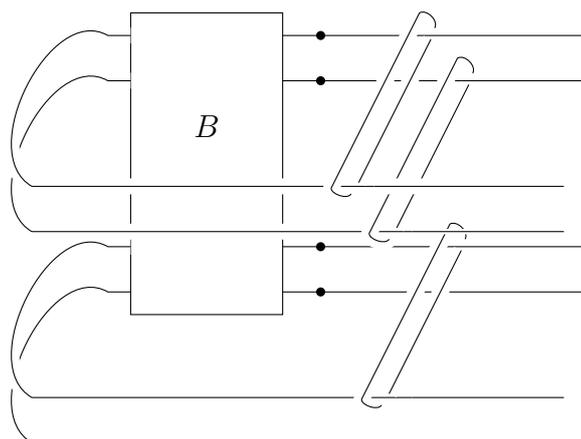


図5 Kirby 図式の局所的な様子

の接着は、適切に埋め込まれた円板 D^2 を取り除くこと（キャンセル 2-ハンドルの除去）によっても得られることを思い出す．このようにして得られる 1-ハンドル接着の Kirby 図式における点付き円は、取り除かれる円板の境界 ∂D^2 そのものであった（キャンセル 2-ハンドルのベルト球面に対応）．現在ハンドル分解を考えている多様体の 1-ハンドル体は、 $\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ である．そして、これは 4 次元球体 $\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ から $\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cap C$ が作る n 個の互いに交わらない適切に埋め込まれた円板を除くことにより得られている．よって 1-ハンドル接着を表す点付き円は $\pi^{-1}(\partial(D \setminus \nu(\Gamma))) \cap C$ となる．

続いて 2-ハンドルの接着を考える．2-ハンドルの接着は、各 $p_i \in X$ に対し、 L_{p_i} の周りで局所的に行われていた．このとき、Kirby 図式において 2-ハンドルの接着を表す接着円は、ブレイドに橋をかけるように、図 5 のように表される．ここで、 B は p_i に付随する局所的なモノドロミーを表すブレイドである．これらをつなぎ合わせていくことで、 M_0 の Kirby 図式を得る．また、フレーミング係数はどのような場合でも全て 0 であることもわかる．

例 5.1 定義式を $f(x, y) = x^p - y^q$ とする．このとき $X = \{0\}$ である．グラフ Γ を図 6 のようにすると、そこから得られる Kirby 図式は図 7 のようになる．ここで、 $B_{p,q}$ は q 本の紐からなるブレイド群 B_q の元で、隣り合う i 番目と $i+1$ 番目の紐の半捻りを表す標準的な生成元 σ_i とした時に、 $B_{p,q} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{q-1})^p$ と表される元である．

6 今後の展望

6.1 Stein 構造

複素多様体が複素ユークリッド空間に双正則埋め込みができるとき、Stein 多様体と呼ばれる．代数曲線の補集合は、対応 $\mathbb{C}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y, 1/f(x, y)) \in \mathbb{C}^3$ により \mathbb{C}^3 に埋め込まれ、Stein 多様体となる（ M は複素 2 次元のため、特に Stein 曲面である）．Stein

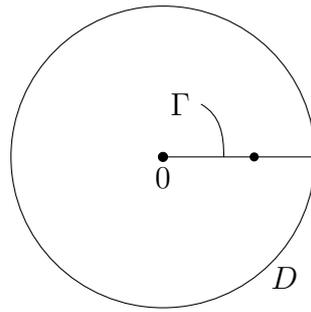


図6 定義式 $f(x, y) = x^p - y^q$ に対して定まるグラフ Γ

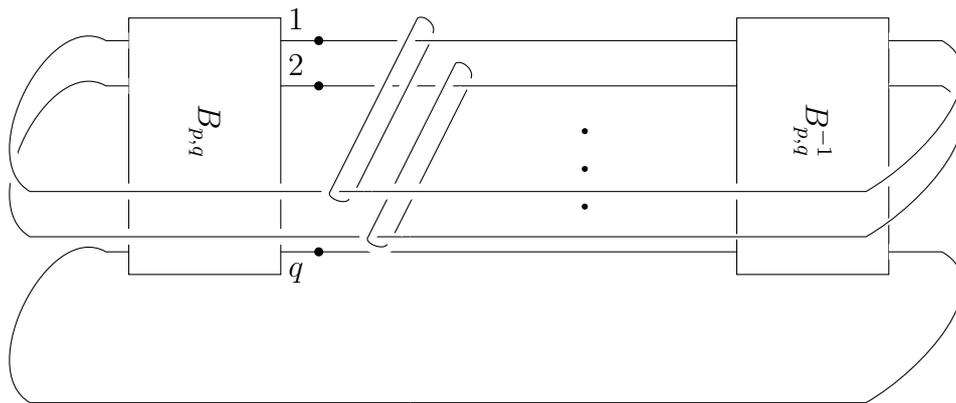


図7 曲線 $x^p - y^q = 0$ の補集合の Kirby 図式

曲面は複素解析だけでなく、4次元トポロジーの観点からも盛んに研究されている対象である [10, 16]. 複素多様体が Stein 構造を許容する同値条件として、その多様体の上に狭義多重劣調和 (strictly plurisubharmonic, spsh と略す) 関数が存在するというものが知られている. spsh 関数が存在したとき、ジェネリックにそれは Morse 関数と仮定してよい. したがって、この spsh 関数からハンドル分解を得ることができる. このように得られたハンドル分解を Stein 構造に適合するハンドル分解という.

本研究では、代数曲線の補集合を具体的なパーツに分解することでハンドル分解を得ており、spsh 関数を用いて構成されているものではない. そこで M の Stein 構造と適合するハンドル分解を求めることは自然な問題である. (ちなみに、[20] において、複素化実直線配置の補集合のハンドル分解が記述されているが、これは [21] において多重劣調和 Morse 関数を用いて得られたホモトピー型を元に構成されており、Stein 構造に適合するハンドル分解である.)

6.2 射影曲線

本稿ではアフィン空間 \mathbb{C}^2 内の平面曲線の補集合のトポロジーを扱った. そこで、射影空間 $\mathbb{C}P^2$ 内の射影平面曲線の補集合のトポロジーを調べることは自然な問いであろう (アフィン曲線は、既約成分の一つに直線を持つような射影曲線だとみなせる). Zariski–van Kampen の方法により、基本群は「すべての生成元の積 = 1」を追加すれば

得られる。しかしながら著者の知る限りでは、Libgober の定理のようなホモトピー型や同相型を具体的に記述する一般的な方法はまだ知られていない ([4] の Question 3.2.2 も参照)。射影空間 CP^2 は C^2 に無限遠直線 CP^1 を貼り合わせて得られるが、これに対応する曲線の補集合の貼り合わせの記述が問題である。

他にも、代数曲線のトポロジーにおいては、モジュライ空間の連結性や、Zariski 対の存在やその判別などの基本的で重要な問題がある。これらに対しても、ハンドル分解や Kirby 図式を用いた新たなアプローチができることを期待したい。

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招きいただきました、世話人の宮澤康行先生、茂手木公彦先生、佐藤進先生に心より御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] S. Akbulut, 4-manifolds. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 25. *Oxford University Press, Oxford*, (2016), xii+262 pp.
- [2] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, and J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy and topology of plane curves, *Duke Math. J.* **118** (2003), 261–278.
- [3] E. Artal Bartolo, J. I. Cogolludo Agustín, A survey on Zariski pairs, *Algebraic geometry in East Asia–Hanoi 2005, Adv. Stud. Pure Math.* 50, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2008), 1–100.
- [4] J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy of algebraic curves, *Ann. Math. Blaise Pascal* **18** (2011), no. 1, 141–209.
- [5] D. C. Cohen, A. Suciu, The braid monodromy of plane algebraic curves and hyperplane arrangements. *Comment. Math. Helvetici* **72** (1997), no. 2, 285–315.
- [6] P. Deligne, Le groupe fondamental du complément d’une courbe plane n’ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d’après W. Fulton), *Bourbaki Seminar*, Vol. 1979/80, Springer, Berlin, 1981, pp. 1-10
- [7] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Universitext, *Springer-Verlag, New York*, (1992), xvi+263 pp.
- [8] 遠藤久顕, 早野健太, 4次元多様体とファイバー構造 –レフシェッツ束のトポロジー–, ひろがるトポロジー, 共立出版 (2024)
- [9] W. Fulton, On the fundamental group of the complement of a node curve, *Ann. of Math.*, **111**, No. 2 (1980), 407–409.
- [10] R. E. Gompf, Handlebody construction of Stein surfaces, *Ann. of Math.* **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [11] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, Graduate Studies in Mathematics, 20. *American Mathematical Society, Providence, RI*, (1999), xvi+558 pp.
- [12] E. R. van Kampen, On the fundamental group of an algebraic curve, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 255–260.
- [13] A. Libgober, On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves, *J.*

- Reine Angew. Math.*, **367** (1986), 103-114.
- [14] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton (1968).
- [15] B. Moishezon, Stable branch curves and braid monodromies, Lectures Notes in Math., 862, *Springer-Verlag*, (1981), 107–192.
- [16] B. Ozbagci, A. Stipsicz, Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces, Bolyai Soc. Math. Stud., 13, *Springer-Verlag, Berlin; János Bolyai Mathematical Society, Budapest*, 2004, 281 pp.
- [17] I. Shimada, Lecture on Zariski van Kampen theorem, Lecture Notes, 2007. (<https://home.hiroshima-u.ac.jp/ichiro-shimada/lectures.html>)
- [18] 石川剛郎, 徳永浩雄, 島田伊知朗, 齋藤幸子, 福井敏純, 代数曲線と特異点, 特異点の数理 4, 共立出版 (2001)
- [19] S. Sugawara, Handle decompositions and Kirby diagrams for the complement of plane algebraic curves, arXiv:2306.10519, preprint.
- [20] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, *Topology and its Applications*, **313** (2022), 107989.
- [21] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz’s hyperplane section theorem, *Kodai Math. J.* **30** (2007) no. 2, 157–194.
- [22] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic function of two variables possessing a given branch curve, *Amer. J. Math.*, **51** (1929), 305–328.

佐々木多様体の非可換 Hodge 対応と Uniformization

糟谷 久矢 (大阪大学)*

概要

1. Introduction

負のオイラー数を持つコンパクトリーマン面は上半平面 H (単位円盤 B) の $PSL_2(\mathbb{R})$ ($PSU(1, 1)$) の離散群商 $\Gamma \backslash H$ ($\Gamma \backslash B$) で表される. この古典的な一意化定理 (Uniformization) の Higgs 束を用いた別証明が Hitchin [7] により与えられている. Hitchin の方法により一意化される流れについて概観しよう. コンパクトリーマン面 M 上の正則ベクトル束 $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ 上に恒等写像 $T^{1,0}M \rightarrow T^{1,0}M$ から定まる Higgs 場 θ を与える. この Higgs 束 (E, θ) が安定であることと M のオイラー数が負であることは同値である. この時, 安定な Higgs 束は M の基本群 $\pi_1(M)$ の $SU(1, 1)$ 表現に対応する (非可換 Hodge 対応 [10, 12]). この対応する表現 $\pi_1(M) \rightarrow SU(1, 1)$ が一意化 $M = \Gamma \backslash B$ を与える.

もう少し Hitchin の構成について詳しくみよう. Hitchin の定理 [7] (より一般に Simpson の Higgs 束の小林-Hitchin 対応 [10]) により, 上記 Higgs 束 (E, θ) が安定 (\Leftrightarrow オイラー数が負) であれば E にはエルミート計量が存在して, Hitchin の (自己双対) 方程式

$$R^2 + [\theta, \bar{\theta}] = 0$$

$$\bar{\partial}_E \theta + \theta \bar{\partial}_E = 0$$

を満たす (R はエルミート計量から定まる曲率).

さらに, (E, θ) の S^1 対称性からエルミート計量は $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ を直交とするものであり, さらに Hitchin の方程式は

$$R^2 + [\theta, \bar{\theta}] = 0$$

$$D\theta + \theta D = 0$$

と書くことができる (D はエルミート計量から定まる接続). これらの式は $SU(1, 1)$ を構造群とする Maurer-Cartan 方程式と見ることができ, その Monodromy 表現として表現 $\pi_1(M) \rightarrow SU(1, 1)$ が得られる.

話を (実)2次元から3次元に持ち上げてみよう. リーマン面 M にエルミート計量を取り, それに関する単位円周束を $S(M)$ とする. この時, M の正則接束を $S(M)$ に引き戻した $S(M)$ 上の複素線束は, $(v, v) \in S(M) \times T^{1,0}M$ が大域的なフレームとなり C^∞ 自明化される. この自明化より, M の Levi-Civita 接続の接続形式は $S(M)$ 上大域的に定義された実微分形式 η を定める. また考えていた Higgs 場 θ は $S(M)$ 上の複素微分形式 w を定める. これに関して, 上記 Hitchin の構成を考える. 得られたエルミート計量は $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ を直交としているため, $K^{-1/2}$ にエルミート計量を定めていることになり

本研究は科研費 (課題番号:19H01787, 24K00524) の助成を受けたものである。

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: kasuya@math.sci.osaka-u.ac.jp

web: <https://sites.google.com/site/hisashikasuyamath/home>

$T^{1,0}M = (K^{-1/2})^2$ に (つまり M に) エルミート計量を定める. Hitchin の方程式から得られた方程式

$$R^2 + [\theta, \bar{\theta}] = 0$$

$$D\theta + \theta D = 0$$

はこの M のエルミート計量から定まる $S(M)$ 上の自明化を考えることによって, $S(M)$ 上の微分形式に関する方程式

$$\sqrt{-1}d\eta + w \wedge \bar{w} = 0$$

$$dw + 2\sqrt{-1}\eta \wedge w = 0$$

と表すことができる. この式は Lie 代数 $\mathfrak{su}(1, 1)$ の構造関係式である. これによって, $S(M)$ がコンパクトであることから, $S(M)$ は $\widetilde{SU(1, 1)}$ ($SU(1, 1)$ の普遍被覆群) を普遍被覆に持つことがわかる. つまり, $S(M)$ は幾何 $SL_2(\mathbb{R})$ を持つ 3次元多様体である [9].

このような議論を 2次元 (複素 1次元) から出発せずに 3次元多様体上の幾何学として展開することが今回発表する理論の基本的発想である.

本稿のねらい

本稿では, 佐々木多様体の非可換 Hodge 対応と Uniformization に関して, 一般論を展開することよりも, トポロジー的に特に興味深いと思われる 3次元佐々木多様体の場合にフォーカスしてより具体的に理解することを目指す. 同テーマについて, 次元の高い場合も含めたより概説的な記事, “佐々木多様体の Higgs 束, 現状とこれから” (2024 年日本数学会特別講演予稿) を Reseachmap で公開しているので, そちらも参照されたい.

2. 3次元佐々木多様体:定義と例

ここでは, 3次元の場合に限定して佐々木多様体について考える. 一般の場合については Boyer-Galicki のテキスト [5] を参照されたい. M を実 3次元可微分多様体とする. M の接触形式とは M 上の一次微分形式 η であって, $\eta \wedge d\eta$ が M の各点で 0 ではないものである. 接触形式 η に対し M のベクトル場 ξ であって, $\eta(\xi) = 1$ かつ $\iota_\xi d\eta = 0$ を満たすものが一意に定まる (Reeb ベクトル場). この時, $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker \eta$ である. 佐々木構造 $(\eta, T^{1,0})$ とは, 接触形式 η と複素ベクトル束 $\ker \eta \otimes \mathbb{C}$ の複素部分線束 $T^{1,0} \subset \ker \eta \otimes \mathbb{C}$ で $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}}$ とおくと $T^{1,0} \cap T^{0,1} = 0$ となるもの (CR 構造) でありさらに以下を満たす:

- $T^{1,0} \ni \forall W \neq 0, \sqrt{-1}d\eta(W, \bar{W}) > 0$;
- $[\xi, \Gamma(T^{1,0})] \subset \Gamma(T^{1,0})$.

M のリーマン計量であって, $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker \eta$ は直交であり, ξ の長さは 1 かつ $\ker \eta$ 上では $d\eta$ から定まるエルミート計量となるものを考える. この計量は佐々木計量と呼ばれる. 佐々木計量は計量錐をとるとケーラー計量になる. このような性質のリーマン計量として佐々木構造を定義することも可能である.

例 1 (標準的佐々木多様体) $M = \mathbb{R}^3$ とする. 座標 $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\eta = dt + xdy$ とすると \mathbb{R}^3 の接触形式である. Reeb ベクトル場は ∂t である. $w = dx + \sqrt{-1}dy$ とおくと,

$$d\eta = \frac{\sqrt{-1}}{2} w \wedge \bar{w}.$$

$$dw = 0$$

が成立する. $T\mathbb{R}^{3*} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}w \oplus \mathbb{C}\bar{w}$ について, $\mathbb{C}w$ が双対になるように, $T^{1,0}$ を定めれば, $(\eta, T^{1,0})$ は \mathbb{R}^3 の佐々木構造である. (注: $T^{1,0} \neq \mathbb{C}(\partial x - \sqrt{-1}\partial y)$)

例 2 (Moving frame) Σ をリーマン面とする. Σ は各点で曲率が 0 にならないエルミート計量を持つとし, その単位円周束 $S(\Sigma)$ を考える. 正則接束を $S(\Sigma)$ に引き戻した $S(\Sigma)$ 上の複素線束は, $(v, v) \in S(\Sigma) \times T^{1,0}\Sigma$ が大域的なフレームとなり C^∞ 自明化される. この自明化より, Σ の Levi-Civita 接続の接続形式は $S(\Sigma)$ 上大域的に定義された実微分形式 η を定める. $d\eta$ は Σ の曲率である. (v, v) の双対となる $S(\Sigma)$ 上の複素微分形式を w とすると, 構造方程式

$$\begin{aligned} dw &= -\sqrt{-1}\eta \wedge w, \\ d\eta &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}Kw \wedge \bar{w} \end{aligned}$$

を満たす (K はガウス曲率). よって, $\pm\eta$ と w によって $S(\Sigma)$ の佐々木構造が与えられる. Σ がケーラーであることから, Σ がコンパクトかつ第一 Chern 類 $c_1(\Sigma)$ が非自明ならば常にこのような構成によって佐々木多様体 $S(\Sigma)$ が得られる.

例 3 (Seifert ファイバー空間) Σ をコンパクトオービフォールドリーマン面とする. 通常のリーマン面の場合と同様にして, オービフォールドエルミート計量に対し, 単位円周束 $S(\Sigma)$ を考えると, $S(\Sigma)$ は Σ 上の Seifert 円周束であり, 滑らかな 3 次元多様体である. 第一 Chern 類 $c_1(\Sigma)$ が非自明ならば通常のリーマン面同様適切なエルミート計量によって $S(\Sigma)$ に佐々木構造が定まる.

例 4 (3次元 Lie 群) 実 3 次元 Lie 代数 \mathfrak{g} とその双対 \mathfrak{g}^* を考える. \mathfrak{g} の佐々木構造は $\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\eta \oplus w \oplus \bar{w}$, $\eta \in \mathfrak{g}^*$ および構造方程式

$$\begin{aligned} d\eta &= -\sqrt{-1}w \wedge \bar{w}, \\ dw &= C\eta \wedge w \end{aligned}$$

により特徴づけられる. \mathfrak{g} が佐々木構造を持つ時, \mathfrak{g} を Lie 代数とするリー群 G は左不変佐々木構造を持つ. $\Gamma \subset G$ を離散群とすると $\Gamma \backslash G$ は佐々木多様体である. 佐々木構造を持つ Lie 代数 \mathfrak{g} は以下の三種に限られる.

(\mathfrak{n}_3) abel ではない 3 次元冪零 Lie 代数 (3 次元 Heisenberg algebra) \mathfrak{n}_3 には

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{\sqrt{-1}}{2}w \wedge \bar{w}, \\ dw &= 0 \end{aligned}$$

により佐々木構造が入る. 3 次元 Heisenberg 群 N_3 が対応する Lie 群である. N_3 の左不変佐々木構造を入れたものは 3 次元ユークリッド空間に標準佐々木構造を入れたものである. 佐々木計量を考えると, 幾何 Nil_3 に対応する.

($\mathfrak{su}_{1,1}$) $\mathfrak{su}_{1,1} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ には

$$d\eta = \sqrt{-1}w \wedge \bar{w},$$

$$dw = -2\sqrt{-1}\eta \wedge w$$

により佐々木構造が入る. $PSU(1, 1)$, $SU(1, 1)$ およびこれらの普遍被覆群 $\widetilde{SU(1, 1)}$ は対応するリー群である. 佐々木計量を考えると, 幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ に対応する.

($\mathfrak{su}(2)$) $\mathfrak{su}(2)$ には

$$\begin{aligned} d\eta &= \sqrt{-1}w \wedge \bar{w}, \\ dw &= \sqrt{-1}\eta \wedge w \end{aligned}$$

により佐々木構造が入る. $SU(2)$, $SO(3)$ は対応するリー群である. 佐々木計量を考えると, 幾何 S^3 に対応する. $SU(2)$ の \mathbb{C}^2 への線形作用の軌道を考えることにより, $SU(2)$ は S^3 と同一視できる.

$(M, \eta, T^{1,0})$ をコンパクト3次元佐々木多様体とする. \mathfrak{g} を上記三種のいずれかとする. 佐々木構造が \mathfrak{g} -構造であるとは $T^{1,0*}$ の大域フレーム w であって, η, w が上記の \mathfrak{g} に対応する構造方程式を満たすことである. この時, Frobenius の定理より, M は佐々木多様体として $\Gamma \backslash G$ と表される. Σ をコンパクトリーマン面とする.

- Σ が正定曲率計量を持てば, 円周束 $S(\Sigma)$ は $\mathfrak{su}(2)$ -構造を持ち,
- Σ が負定曲率計量を持てば, 円周束 $S(\Sigma)$ は $\mathfrak{su}(1, 1)$ -構造を持つ. (Introduction の議論を参照)

Σ が0曲率計量を持つ場合, $T^{1,0*}$ の円周束 $S(\Sigma)$ 自明となり佐々木多様体にはならない. この場合, 非自明な複素線束に関する単位円周束が \mathfrak{n}_3 -構造を持つ.

3. 佐々木多様体のベクトル束と Higgs 束

$(M, \eta, T^{1,0})$ を3次元佐々木多様体とする. ξ をその Reeb ベクトル場とする. $(A^*(M), d)$ を M の de Rham 複体とする. 微分形式 α が

$$\iota_\xi \alpha = \iota_\xi d\alpha = 0$$

を満たす時, basic であるといい, basic な微分形式がなす $A^*(M)$ の部分空間を $A_B^*(M)$ で表す. $(A_B^*(M), d)$ は $(A^*(M), d)$ の部分複体である. そのコホモロジーを $H_B^*(M)$ で表し, basic コホモロジーと呼ぶ.

ξ が生成するフローを考えると, $T^{1,0}$ によって横断的正則 foliation が定まる. 本稿では $TM_{\mathbb{C}}$ の部分束 $\mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0}$ を佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ の正則構造と考える. 例えば, 正則関数 f とは $\xi(f) = \bar{Z}(f) = 0$ ($\forall \bar{Z} \in T^{0,1}$) を満たす複素関数であり, 特に $f \in A_B^0(M)$ である. 正則一次微分形式 φ とは, $\varphi(\xi) = \varphi(\bar{Z}) = \iota_\xi d\varphi = \iota_{\bar{Z}} d\varphi = 0$ を満たす複素一次微分形式であり, 特に $\varphi \in A_B^1(M)$ である.

(E, h) を M 上の C^∞ エルミート束とし, ∇ をそのユニタリ接続とする. (E, h, ∇) が正則エルミート束であるとは, ∇ の曲率 R が

$$\forall \bar{Z} \in T^{0,1}, R(\xi, \bar{Z}) = 0$$

を満たすことである. この時 ∇_ξ について平行な局所フレームを取ることで, $Tr R \in A_B^*(M)$ がわかる. basic Chern 類

$$c_{B,1}(E) = \left[-\frac{Tr R}{2\pi\sqrt{-1}} \right] \in H_B^2(M)$$

が定まる. M がコンパクトならば, $H_B^2(M) = \langle [d\eta] \rangle$ である. よって, この時, 実数 C によって, $c_{B,1}(E) = C[d\eta]$ と書ける.

正則エルミート束 (E, h, ∇) に対し, ∇ から定まる $\langle \xi \rangle \oplus T^{0,1}$ についての偏微分接続 ∇'' を E の正則構造 (Dolbeault 作用素) と呼ぶ. 佐々木多様体の正則ベクトル束は (エルミート計量とは無関係に) ベクトル束と平坦な偏微分接続の組みとして定義できるが, 複素多様体の正則ベクトル束とは異なり, すべての正則ベクトル束が正則エルミート束の構造を持つわけではない.

例 5 C を実定数とする. $L_C = (M \times \mathbb{C}, h = 1, \nabla = d - 2C\pi\sqrt{-1}\eta)$ は正則エルミート束であり, $c_{B,1}(L_C) = C[d\eta] \in H_B^2(M)$ が成り立つ.

正則エルミート束 (E, h, ∇) に対し, 適切な C で L_C と E のテンソル積を取ることで, basic Chern 類を自明にすることができる.

正則ベクトル束 (E, ∇'') に対し, $\theta \in A^1(M, \text{End}(E))$ が Higgs 場であるとは,

$$\theta(\xi) = \theta(\bar{Z}) = 0 \quad \forall \bar{Z} \in T^{0,1},$$

$$(\nabla''\theta + \theta\nabla'')(\xi, X) = (\nabla''\theta + \theta\nabla'')(\bar{Z}, X) = 0 \quad \forall \bar{Z} \in T^{0,1}, \forall X \in TM$$

を満たすことである. 正則ベクトル束 (E, ∇'') と Higgs 場 θ の組 (E, θ) を Higgs 束と呼ぶ.

正則エルミート束 (E, h, ∇) で $c_{B,1}(E) = 0$ となるものを考える. Higgs 束 (E, θ) が stable であるとは, θ によって保たれる真の正則部分束 $F \subset E$ が常に $c_{B,1}(E) = -C[d\eta]$ ($C > 0$) を満たすことである. Corlette-Simpson による非可換 Hodge 対応 [6, 10, 12] の佐々木版が Biswas-Kasuya [2, 3] によって与えられているので, それの 3次元の場合について述べる.

定理 1 (佐々木多様体の非可換 Hodge 対応, Biswas-Kasuya [2, 3]) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ 上で, 単純平坦複素ベクトル束と (上記の意味で) stable な Higgs 束 (E, θ) は 1対1 に対応する.

例 6 佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ の実接束 TM は以下の性質を満たす接続 ∇^{TW} を一意に持つことが知られている (Tanaka-Webster 接続 [13, 14])

1. ∇^{TW} は $T^{1,0}$ を保つ.
2. $\nabla^{TW}d\eta = \nabla^{TW}\eta = \nabla^{TW}\xi = 0$.
3. ∇^{TW} のトーションを T^{TW} とすると,

$$T^{TW}(X, Y) = -d\eta(X, Y)\xi.$$

∇^{TW} , $d\eta$ によって, $T^{1,0}$ は正則エルミート束となる.

正則エルミート束 $T^{1,0} \oplus \mathbb{C}$ に対し, $T^{1,0}M \rightarrow T^{1,0}M$ から定まる Higgs 場 θ を与える. $c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ とすると, $E = (T^{1,0} \oplus \mathbb{C}) \otimes L_{C/2}$ とおけば $c_{B,1}(E) = 0$. Higgs 束 (E, θ) の θ によって保たれる正則部分束は $T^{1,0} \otimes L_{C/2}$ であるので, Higgs 束 (E, θ) が stable であることと $C > 0$ は同値である. よってこの時, 非可換 Hodge 対応により, M の単純複素平坦束, よって基本群の単純線形表現が得られる.

さて, Introduction での議論を思い出して, 上記例の Higgs 束 (E, θ) の非可換 Hodge 対応による 3次元佐々木多様体の一意化を考えよう. 定理を述べる前に準備をする.

佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ において, 佐々木構造の変形とは佐々木構造 $(\eta', T^{1,0})$ であって, η, η' は定数倍を除いて同じ Reeb ベクトル場を持ち, さらに $T^{1,0} \subset \mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0}$ となるものである. ここで, $\mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0} = \mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0}$ であることに注意するとこの変形によって正則構造は変化していないことがわかる (この点で Kodaira-Spencer の変形とは異質なものである). $(M, \eta, T^{1,0})$ 上の正則ベクトル束や Higgs 束であることと $(M, \eta', T^{1,0})$ の正則ベクトル束や Higgs 束であることは同じである.

定理 2 (佐々木多様体の一意化定理 Kasuya-Miyatake[8]) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ が $c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ ($C > 0$) を満たすとすると, 適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{su}(1, 1)$ 構造に変形可能である. よって, 特に 3次元多様体 M は幾何 $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ を持つ.

定理の詳細を概観しよう. $c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ という仮定から, M 上に ξ のフローが S^1 作用を生成することがわかる. また, 同変コホモロジーを用いると, $T^{1,0}$ は S^1 -同変束として, L_{-C} に同型とみなせる. (ただしトーション線束を除くため, M は適切な有限被覆にとりかえる必要がある.) 特に $T^{1,0}$ は大域自明化できる. Higgs 束 (E, θ) は stable より, 非可換 Hodge 対応より, Hitchin の方程式

$$R^2 + [\theta, \bar{\theta}] = 0$$

を与える正則エルミート束 (E, h, ∇) が得られる. (E, θ) は S^1 について対称性があることから, $T^{1,0} \otimes L_{C/2}$ に (よって $T^{1,0}$ に) エルミート計量が定まる. $T^{1,0}$ について, このエルミート計量による単位ベクトル W によって, $T^{1,0}$ を S^1 -同変束として L_{-C} に同型となるように自明化する. W に対応する微分形式 w と接続形式 η' を考えると, Hitchin の方程式は行列値微分形式についての式となり, $\mathfrak{su}(1, 1)$ の構造関係式

$$\sqrt{-1}d\eta' + w \wedge \bar{w} = 0$$

$$dw + 2\sqrt{-1}\eta' \wedge w = 0$$

を導く. ここで, η' は接触構造であり, 元の η にしかるべき Rescaling をすることで $\eta - \eta' \in A_B^1(M)$ となる. $w \in T^{1,0*}$ より, $\mathfrak{su}(1, 1)$ -構造から定まる M の佐々木構造は元の佐々木構造の変形となっていることがわかる.

注意 1 (リーマン面) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ が, リーマン面 Σ 上の円周束 $S(\Sigma)$ とする. この時, $c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ ($C > 0$) は $c_1(\Sigma)$ 負であることと同値でありつまり Σ のオイラー数が負 $2 - 2g < 0$ であることと同値である. ここで g は位相的種数. M を一意化する際に, 上で考えている Higgs 束 (E, θ) は $(K^{-1/2} \oplus K^{1/2}, \theta)$ を引き戻したものの “ではない” ことに注意. 実際 $\Gamma \subset PSU(1, 1)$ の “ $SU(1, 1)$ への自然なリフト” が (E, θ) に非可換 Hodge 対応する単純平坦束のモノドロミー表現である. つまり, その像は Γ ではなく, $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ に同型である. Γ の $SU(1, 1)$ リフトの分解 $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ の取り方は 2^{2g} 個あり, 標準束のルート $K^{1/2}$ を取ることに対応している. ここで, $M = S(\Sigma)$ の基本群は $\Gamma \subset PSU(1, 1)$ のリフト $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{PSU}(1, 1)$ であり, Γ の \mathbb{Z} による中心拡大と同型である.

注意 2 (オービフォルド) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ が, オービフォルドリーマン面 Σ 上の Seifert 円周束 $S(\Sigma)$ とする. この時, Σ 上のオービフォルド de Rham 複体は M 上の $A_B^*(M)$ に引き戻すことができ, $H_B^2(M)$ は $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$ に同型である. Σ 上の正則ベクトル “V” 束は M 上の正則エルミート束に引き戻すことができる. Σ 上の正則 Higgs “V” 束はリーマン面上の特異的 Higgs 束である Regular Filtered Higgs 束 ([11]) の一種である.

$T^{1,0}$ は Σ の正則接ベクトル “V” 束 $T^{1,0}\Sigma$ を引き戻したものである. $c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ ($C > 0$) は $T^{1,0}\Sigma$ のオービフォルド Chern 類が負であることと同値であり, よってオービフォルド Euler 数が負

$$2 - 2g - n - \sum_i^n \frac{1}{p_i} < 0$$

であることに同値である. g は位相的な種数, n はオービフォルド点の数, p_i は各オービフォルド点の次数.

注意 3 (3次元佐々木多様体の分類) 上記一意化定理の主張は, Belgun[1] による3次元佐々木多様体の分類定理, “3次元コンパクト佐々木多様体は適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{n}_3, \mathfrak{su}(1, 1), \mathfrak{su}_3$ のいずれか一つの構造に変形できる” から導くことができる. Belgun の証明は複素曲面の Enriques-Kodaira の分類を用いている. 今回の証明は, 他の分類定理に依存しないものであり高次元化が可能である. \mathfrak{n}_3 -構造に変形される場合に関しても, このような証明が可能であり高次元化もできる (Biswas-Kasuya[4]).

定理 3 (Biswas-Kasuya[4]) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ が $c_{B,1}(M) = 0$ を満たすとすると, 適切に有限被覆を取ると, \mathfrak{n}_3 構造に変形可能である. よって, 特に3次元多様体 M は幾何 Nil_3 を持つ.

4. 3次元佐々木多様体の Teichmüller 空間論 (今後の課題)

コンパクト3次元佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ が $\mathfrak{su}(1, 1)$ 構造

$$\sqrt{-1}d\eta + w \wedge \bar{w} = 0$$

$$dw + 2\sqrt{-1}\eta \wedge w = 0$$

から定まっているとする. この時, $T^{1,0} = L_{-1/\pi}$ である. $E = L_{-1/2\pi} \oplus L_{1/2\pi}$ とする, $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} w$ ($\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(M)$) とおくと, θ が Higgs 場であるための必要十分条件は以下等式を満たすことである:

$$\xi(\alpha) - 2\sqrt{-1}(\alpha) = \bar{W}(\alpha) = 0 \quad (\text{正則一次微分}),$$

$$\xi(\beta) = \bar{W}(\beta) = 0 \quad (\text{正則関数}),$$

$$\xi(\gamma) - 4\sqrt{-1}(\gamma) = \bar{W}(\gamma) = 0 \quad (\text{正則二次微分}).$$

M はコンパクトなので β は定数である. Higgs 束 (E, θ) が stable となる必要十分条件は $\beta \neq 0$ である.

$\alpha = 0, \beta = 1$ と仮定する. (E, θ) の非可換 Hodge 対応を考える. M 上の正值関数 h を

$$h^4|\gamma|^2 - h^{-4} + 1 = 0$$

を満たすものとして定めると, $\eta' = \eta + d \log(h)$, $w' = h^{-2}w + h^2\bar{\gamma}\bar{w}$ とすると, $D' = d + \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\eta' & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\eta' \end{pmatrix}$, $\theta' = \begin{pmatrix} 0 & w' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, Hitchin の方程式

$$R'^2 + [\theta', \bar{t}\theta'] = 0$$

が得られる. よって, 新たに $\mathfrak{su}(1, 1)$ 構造

$$\sqrt{-1}d\eta' + w' \wedge \bar{w}' = 0$$

$$dw' + 2\sqrt{-1}\eta' \wedge w' = 0$$

が得られる.

よって, 正則二次微分に対し, $\mathfrak{su}(1, 1)$ 構造を対応づけることができた. この対応によって, Hitchin[7] による Teichmüller 空間の構成の佐々木版が期待される.

予想 1 正則二次微分がなす空間と佐々木構造の変形同値類の空間は上記対応によって微分同相である.

参考文献

- [1] F. A. Belgun, Normal CR structures on compact 3-manifolds, *Math. Zeit.* **238** (2001), 441–460.
- [2] I. Biswas and H. Kasuya, Higgs bundles and flat connections over compact Sasakian manifolds, *Comm. Math. Phys.* **385** (2021), 267–290.
- [3] I. Biswas and H. Kasuya, Higgs bundles and flat connections over compact Sasakian manifolds, II: quasi-regular bundles, arXiv:2110.10644. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (to appear).
- [4] I. Biswas and H. Kasuya, Sasakian geometry and Heisenberg groups, arxiv-2310.12588.
- [5] C. P. Boyer and K. Galicki, *Sasakian geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [6] K. Corlette, Flat G-bundles with canonical metrics, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 361–382.
- [7] N. J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987), 59–126.
- [8] H. Kasuya and N. Miyatake, Uniformizations of compact Sasakian manifolds, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2024, Issue 10, May 2024, Pages 8313–8328
- [9] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 401–487.
- [10] C. T. Simpson, Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 867–918.
- [11] C. T. Simpson, Harmonic bundles on noncompact curves., *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1990), 713–770.
- [12] C. T. Simpson, Higgs bundles and local systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **75** (1992), 5–95.
- [13] N. Tanaka, A Differential Geometric Study on strongly pseudoconvex CR manifolds, *Lecture Notes in Math.*, **9**, Kyoto University, 1975.
- [14] S. Webster, Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface, *J. Differential Geom.* **13** (1978), 25–41.

多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores の定理

松下 尚弘 (信州大学)*

1 背景

本講演では、多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores 型の定理に関する、岸本大祐氏 (九州大学) との共同研究 [15, 16] について述べる。特に断りがない場合、単体複体は有限幾何学的単体複体のことを意味し、しばしばその幾何学的実現と同一視する。また、埋め込みとは位相空間の間の位相的埋め込みのことを意味するものとする。

1.1 van Kampen-Flores の定理

van Kampen-Flores の定理とは、単体複体のユークリッド空間への埋め込みに関する定理である。まず、次の基本的な事実から始める。

事実 1. 任意の d 次元単体複体 K は、 \mathbb{R}^{2d+1} に埋め込むことができる。

実際、 K の頂点集合 $V(K)$ から \mathbb{R}^{2d+1} への写像を、頂点が一般の位置に配置されるように取り、それらを K の各単体上にアフィンに拡張した写像を $f: K \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ とすれば、 f は埋め込みになっている。

一方で、次の van Kampen-Flores の定理は、任意の正の整数 d に対し、 d 次元単体複体で、 \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができないものが常に存在することを示している。

定理 2 (van Kampen-Flores の定理 [5, 14]). $(2d+2)$ -次元の単体 Δ^{2d+2} の d -骨格 Δ_d^{2d+2} は、 \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができない。

van Kampen-Flores の定理と関連する定理について述べる。

一般的に、 \mathbb{R}^2 に埋め込むことができないグラフのことを非平面的グラフという。van Kampen-Flores の定理の $d=1$ の主張は、5 頂点完全グラフ K_5 が非平面的グラフであることを主張している。ここで、 n 頂点完全グラフ K_n とは、 n 個の頂点と、相異なる 2 頂点は辺で結ばれているようなグラフである。非平面的グラフの代表例として、もう一つ完全二部グラフ $K_{3,3}$ (すなわち、三点離散空間二つのジョイン) がある。 K_5 あるいは $K_{3,3}$ と同相な部分グラフを持つグラフは非平面的であるが、グラフ理論の古典的な定理である Kuratowski の定理 (例えば [21]) によれば、グラフ G が非平面的であることと、

* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1

e-mail: matsushita@shinshu-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:23K12975) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57Q35, 52A37

キーワード: 三角形分割, van Kampen-Flores の定理, Stiefel-Whitney 類

K_5 あるいは $K_{3,3}$ と同相な部分グラフを持つことは同値である.

また, n 点からなる離散空間を $[n]$ で表すことにすると, $K_{3,3}$ は $[3]$ の二つのジョイン $[3] * [3]$ である. 一般に, $[3]$ の $(d+1)$ -重のジョイン $[3]^{*(d+1)}$ は d 次元単体複体 \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができないということが知られている. この事実と定理 2 をまとめて van Kampen-Flores の定理ということもある. しかし, 本稿では定理 2 のことを van Kampen-Flores の定理と呼ぶことにする.

最後に多様体の埋め込みとの比較について述べる. 古典的な Whitney の埋め込み定理 (例えば [1] 参照) によれば, 第二可算公理を満たす任意の d 次元微分可能多様体は, \mathbb{R}^{2d} に滑らかに埋め込むことができる. したがって, 単体複体の場合はそれより 1 だけ評価が悪いということになる.

1.2 van Kampen-Flores の定理の一般化

van Kampen-Flores の定理にはいくつかの一般化の方法が考えられている ([3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 19, 20] などを参照). ここでは, 「単体複体 K の d -骨格が \mathbb{R}^{2d} に埋め込めない」というタイプの一般化について考え, このようなタイプの主張を, 「van Kampen-Flores 型の定理」と呼ぶことにする. 本講演では多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores 型の定理について, 岸本大祐氏との共同研究 [15] と [16] から, 結果を紹介する. ここで, $\mathbb{Z}/2$ -ホモロジー n -球面とは, n 次元位相多様体 M で, 任意の非負整数 k に対し $H_k(M; \mathbb{Z}/2) \cong H_k(S^n; \mathbb{Z}/2)$ が成立するもののことをいう.

定理 3 (岸本-松下 [15]). 任意の $\mathbb{Z}/2$ -ホモロジー $(2d+1)$ -球面の三角形分割の d -骨格は, \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができない.

定理 4 (岸本-松下 [16]). M を $(2d+1)$ -次元の境界を持たない微分可能多様体で, 全 Stiefel-Whitney 類 $w(M)$ が自明でないものとする. このとき, M の任意の三角形分割 K に対し, K の d -骨格 K_d は \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができない.

定理 5 (岸本-松下 [16]). M を $(2d)$ -次元の微分可能閉多様体で, $\chi(M)$ は奇数でかつ向き付け可能であるとする. このとき, M の任意の三角形分割 K に対し, K の d -骨格 K_d は \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができない.

本稿の残りの構成について述べる. 第 2 節では, van Kampen-Flores の定理と関連するトピックとして, Sarkaria の彩色埋め込み定理について述べる. これは単体複体の埋め込みが, 彩色数と関連していることを示す重要な定理であり, 定理 3 の証明と関連している. 第 3 節では位相的 Radon の定理を紹介し, Gromov [10] により考案された, 位相的 Radon の定理から van Kampen-Flores の定理を導出する方法を紹介する. この導出法は制約法 (constraint method) と言われ, 定理 4 および定理 5 の証明に関連している.

定理 3 および定理 4 の証明は, 離散的除去積 (discretized deleted product) の Stiefel-Whitney 高さ (Stiefel-Whitney height) の評価により行われるが, 離散的除去積と埋め

込み, Stiefel-Whitney 高さとの関係については第 4 章で説明する. また, 第 5 章では主定理の証明の概要を述べる.

2 Sarkaria の彩色埋め込み定理

Sarkaria の彩色埋め込み定理は, van Kampen-Flores の定理とグラフの彩色問題における Lovász-Kneser の定理を系に持つ強力な定理である. 彩色埋め込み定理は [24, 25] によって示された. [19] も参照.

彩色埋め込み定理を説明するために, いくつか用語を準備しておく. 集合 X と非負整数 k に対し, $\binom{X}{k}$ で X の k -元部分集合全体のなす集合を表すものとする. 本稿では, グラフとは有限集合 V と $\binom{V}{2}$ の部分集合 E の組 (V, E) を意味するものとする. グラフの n -彩色とは, 写像 $f: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ であって, $\{v, w\} \in E$ ならば $f(v) \neq f(w)$ となるもののことである. グラフ G に対して, G の n -彩色が存在するような最小の n を G の染色数 (chromatic number) といい, $\chi(G)$ で表す. 染色数を求める問題をグラフの彩色問題という.

超グラフとは, 有限集合 X と, X の部分集合族 H との組 (X, H) のことである. X のことを頂点集合というが, しばしば X の言及を省略して, 「 H は超グラフである」などということもある. 超グラフ (X, H) からは, 次のように単体複体とグラフを構成することができる:

- (1) X の部分集合 σ で, $e \subset \sigma$ となる $e \in H$ が存在しないとき, σ を H の独立集合という. 独立集合全体は抽象的単体複体となり, それを $I(H)$ と書いて H の独立複体 (independence complex) という.
- (2) H に付随する Kneser 型のグラフ $\text{KG}(H)$ とは, H を頂点集合とし, $\sigma, \tau \in H$ に対し, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ となるとき隣接しているとして定義されるグラフである.

単体複体 K に対し, $e(K)$ で K から \mathbb{R}^n に埋め込むことが出来る最小の n を表すものとする. Sarkaria の彩色埋め込み定理は次のように定式化される:

定理 6 (Sarkaria の彩色埋め込み定理). $H = (X, H)$ を超グラフとする. このとき次の不等式が成立する:

$$\chi(\text{KG}(H)) + e(I(H)) \geq |X| - 1.$$

例えば, $X = \{1, \dots, 2d+3\}$ とし, $H = \binom{X}{d+2}$ とする. このとき, H の相異なる二つの元が交わりを持たないことはあり得ないから, $\text{KG}(H)$ は辺を持たず, $\chi(\text{KG}(H)) = 1$ である. 一方で $I(H) \cong \Delta_d^{2d+2}$ となるから,

$$e(I(H)) \geq 2d + 1$$

となり, van Kampen-Flores の定理が得られる.

注意 7. $X = \{1, \dots, n\}$, $H = \binom{X}{k}$ のとき, $\text{KG}(H)$ のことを $\text{KG}(n, k)$ で表し, このようなグラフを Kneser グラフという. Kneser グラフ $\text{KG}(n, k)$ の彩色数は, $n \geq 2k$ のときに $n - 2k + 2$ であることが Kneser によって [17] で予想され, Lovász によって [18] で示された (Lovász-Kneser の定理). Lovász による証明はグラフ G に対して近傍複体という単体複体 $N(G)$ を対応させ, $N(G)$ の連結度と G の染色数との関係を論じて示すものである. 一方で, Sarkaria の彩色埋め込み定理からも Lovász-Kneser の定理を示すことができる. 実際, 彩色埋め込み定理から

$$\chi(\text{KG}(n, k)) \geq n - 1 - e(I(H))$$

が成立するが, このとき $I(H)$ の次元は $k - 2$ であるから, $e(I(H)) \leq 2k - 3$. したがって,

$$\chi(\text{KG}(n, k)) \geq n - 1 - e(I(H)) \geq n - 1 - (2k - 3) = n - 2k + 2$$

が成立する. 逆の不等式は容易にわかる. Sarkaria の彩色埋め込み定理はグラフの彩色問題と単体複体の埋め込みとを関連付ける定理であり, このような文脈で組合せ論の文脈において van Kampen-Flores の定理は興味を持たれている (例えば [6, 19] 等を参照).

3 位相的 Radon の定理と制約法

Radon の定理 [23] とは \mathbb{R}^d の $(d + 2)$ -元部分集合 X に対し, 交わりのない X の部分集合 Y_1, Y_2 で $\text{conv}(Y_1) \cap \text{conv}(Y_2) \neq \emptyset$ となるものが存在することをいう. アフィン写像 $f: \Delta^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ で Δ^{d+1} の $d + 2$ 個の頂点を X のそれぞれの点に移すようなものを考えれば, Radon の定理とは Δ^{d+1} の面 σ と τ で $\sigma \cap \tau = \emptyset$ かつ $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$ となるものが存在することをいう. アフィン写像だけでなく, 一般の連続写像に対しても成立すると主張するものが, 以下に述べる位相的 Radon の定理である.

定理 8 (位相的 Radon の定理 [2]). Δ^{d+1} から \mathbb{R}^d への任意の連続写像 f に対し, Δ^{d+1} の交わりのない面 σ と τ で, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ かつ $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$ となるものが存在する.

位相的 Radon の定理は, Borsuk-Ulam の定理から直接証明することができる (例えば [8] や 4.4 節を参照).

位相的 Radon の定理から, van Kampen-Flores の定理を導くことができる. 次に示す証明は, 2010 年に Gromov [10] によって考案されたものであり, これにより, 様々な van Kampen-Flores 型の定理が, 位相的 Radon (型) の定理から, 導出する手法が本分野において標準的な手法となった (例えば [3] を参照).

位相的 Radon の定理から van Kampen-Flores の定理を導く方法 背理法で示す.

$f: \Delta_d^{2d+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ を位相的埋め込みとする. $\tilde{f}: \Delta^{2d+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ を連続写像としての拡張とする. また, 連続写像 $\varphi: \Delta^{2d+2} \rightarrow \mathbb{R}$ で, $\varphi^{-1}(0) = \Delta_d^{2d+2}$ となるものを取る. このとき,

これを並べた写像

$$F = (\tilde{f}, \varphi): \Delta^{2d+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}, \quad x \mapsto (\tilde{f}(x), \varphi(x))$$

を考える. このとき, 位相的 Radon の定理から, Δ^{2d+2} の交わりを持たない面 σ と τ で, $F(\sigma) \cap F(\tau) \neq \emptyset$ となるものが存在する. $x \in \sigma$ と $y \in \tau$ で, $F(x) = F(y)$ となるものが存在する. このとき, $\varphi(x) = \varphi(y)$ であるが, この値が 0 か否かで場合分けを行い, いずれにしても矛盾することを見る.

- (1) $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ とする. このとき, $\varphi^{-1}(0) = \Delta_d^{2d+2}$ だから, $x, y \in \Delta_d^{2d+2}$ が成立する. 一方で, $F(x) = F(y)$ だから $f(x) = f(y)$ となるが, これは $f: \Delta_d^{2d+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ が埋め込みであることに反する.
- (2) $\varphi(x) = \varphi(y) \neq 0$ とする. このとき, $\varphi^{-1}(0) = \Delta_d^{2d+2}$ から σ と τ は Δ_d^{2d+2} に含まれない. したがって, σ と τ の次元は $d+1$ 以上である. しかし, Δ^{2d+2} の $d+1$ 以上の次元の面二つは, 必ず交わりを持つ. これは σ と τ が交わりを持たないことに反する.

以上により, Δ_d^{2d+2} が \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができないということがわかる. □

上記の証明のような手法は**制約法 (constraint method)** と呼ばれ, その応用範囲はかなり広い. 制約法に関する詳細な研究は Blagovic-Frick-Ziegler [3] を参照.

4 離散的除去積

4.1 除去積

二つの位相空間 X と Y が与えられたとき, X から Y への埋め込みが存在しないことを示す基本的な手法として, 2 点配置空間の間の同変写像の非存在性に着目するという方法がある (例えば [1] 参照). ここで, 位相空間 X の 2 点配置空間とは,

$$\text{Conf}_2(X) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \neq x_2\}$$

のことである. 位相的組合せ論の文脈では, 2 点配置空間のことを除去積 (discretized product) ということもある (例えば [19] 参照). $f: X \rightarrow Y$ が連続な単射であるならば, 連続写像

$$\text{Conf}_2(X) \rightarrow \text{Conf}_2(Y), \quad (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$$

が存在する. ここで, $\text{Conf}_2(X)$ への $\mathbb{Z}/2$ の作用を $(x_1, x_2) \leftrightarrow (x_2, x_1)$ とすることで考えると, $\text{Conf}_2(f): \text{Conf}_2(X) \rightarrow \text{Conf}_2(Y)$ は $\mathbb{Z}/2$ -連続写像であることがわかる. したがって, まとめると次がわかる:

補題 9. X と Y を位相空間とする. $\text{Conf}_2(X)$ から $\text{Conf}_2(Y)$ への $\mathbb{Z}/2$ -同変連続写像が存在しないならば, X から Y への連続な単射は存在しない.

4.2 離散的除去積と概埋め込み

K を単体複体とする．このとき離散的除去積 $\text{Conf}_2^\Delta(K)$ を

$$\text{Conf}_2^\Delta(K) = \bigcup \{ \sigma \times \tau \mid \sigma \text{ と } \tau \text{ は } K \text{ の単体で } \sigma \cap \tau = \emptyset \}$$

と定義する．離散的除去積を用いると，次の概埋め込みの非存在性がわかることがある．

定義 10 (概埋め込み). K を単体複体とし， X を位相空間とする． K から X への概埋め込み (almost embedding) とは， K の交わりを持たない任意の単体 σ と τ に対し， $f(\sigma) \cap f(\tau) = \emptyset$ が成立することをいう．

定義から埋め込みは概埋め込みである．したがって，「概埋め込みが存在しない」という主張は，「埋め込みが存在しない」という主張より強い．位相的 Radon の定理は「 Δ^{d+1} から \mathbb{R}^d への概埋め込みは存在しない」ということを意味し，第 3 節において紹介した制約法の証明においては，概埋め込みが存在しないという点が本質的に効いている．

補題 9 と同様の議論で，次のことがわかる．

補題 11. K を単体複体， X を位相空間とする． $\text{Conf}_2^\Delta(K)$ から $\text{Conf}_2(X)$ への $\mathbb{Z}/2$ -同変連続写像が存在しないならば， K から X への概埋め込みは存在しない．

定義から，離散的除去積 $\text{Conf}_2^\Delta(K)$ は除去積 $\text{Conf}_2(K)$ の $\mathbb{Z}/2$ -同変部分空間である．離散除去積と通常の除去積の間には，次の関係がある．

補題 12 (Shapiro [26]). K を単体複体とするとき，包含 $\text{Conf}_2^\Delta(K) \hookrightarrow \text{Conf}_2(K)$ は $\mathbb{Z}/2$ -ホモトピー同値である．

上記の補題について一つ注意をする．本稿では除去積 $\text{Conf}_2(X)$ は 2 点の配置空間のこととしたが，明らかなやり方で， k 重の除去積 (k 点配置空間) $\text{Conf}_k(X)$ や， k 重の離散除去積 $\text{Conf}_k^\Delta(K)$ など同様に定義することができる． $k \geq 3$ の場合，これらのホモトピー型は一般には異なることがある．

4.3 Stiefel-Whitney 高さ

4.1 節および 4.2 節で述べたように，二つの空間 X と Y とが与えられたとき， X から Y への (概) 埋め込みの非存在性を，(離散) 除去積の間の $\mathbb{Z}/2$ -同変写像の非存在から導けることがある． $\mathbb{Z}/2$ -同変写像の非存在を示す基本的な方法として，以下に述べる Stiefel-Whitney 高さ (Stiefel-Whitney height) を比べるというものがある．

Z を自由な $\mathbb{Z}/2$ -空間とし，その軌道空間を \overline{Z} で表すとする．このとき， $\mathbb{Z}/2 \cong O(1)$ であるから，被覆写像 $Z \rightarrow \overline{Z}$ は主 $O(1)$ -束である．その第一 Stiefel-Whitney 類を $w_1(Z) \in H^1(\overline{Z}; \mathbb{Z}/2)$ とする．このとき， Z の Stiefel-Whitney 高さ (Stiefel-Whitney height) を

$$\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(X) = \sup \{ n \mid w_1(X)^n \neq 0 \}$$

と定義する. Stiefel-Whitney 類の自然性から, 次の事実が直ちに導かれる.

補題 13. Z と W を自由 $\mathbb{Z}/2$ -空間とする. Z から W への $\mathbb{Z}/2$ -連続写像が存在するならば, $\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(Z) \leq \text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(W)$ が成立する. すなわち, $\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(Z) > \text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(W)$ なら, Z から W への $\mathbb{Z}/2$ -同変写像は存在しない.

二重被覆 $Z \rightarrow \bar{Z}$ に関する Gysin 列から次が成立する.

補題 14. Z を自由 $\mathbb{Z}/2$ -空間, n を非負整数とする. 任意の $i \leq n$ に対し $\tilde{H}^i(Z; \mathbb{Z}/2) = 0$ であるならば, $\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(Z) \geq n + 1$ である.

位相的 Radon の定理の証明 位相的 Radon の定理は Δ^{d+1} が \mathbb{R}^d に概埋め込みできないという定理だが, これは $\partial\Delta^{d+1}$ が \mathbb{R}^d に概埋め込みできないという主張と同値である. $\partial\Delta^{d+1}$ は S^d に同相で, 射影 $\text{Conf}_2(S^d) \rightarrow S^d$ は可縮なファイバーを持つファイブレーションだからホモトピー同値であり, 補題 12 より $\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}\text{Conf}_2^\Delta(\partial\Delta^d) = \text{ht}_{\mathbb{Z}/2}\text{Conf}_2(\partial\Delta^d) = d$ を得る. 一方で $\text{Conf}_2(\mathbb{R}^d) \simeq_{\mathbb{Z}/2} S^{d-1}$ だから, 補題 11 から $\partial\Delta^d$ から \mathbb{R}^d への概埋め込みは存在しない. \square

5 主定理の証明の概要

5.1 定理 3 の証明について

定理 3 の証明について述べる. [15] には本定理の証明を二通り与えている. 一つは蓮井-岸本-武田-蔦谷 [11] の次の位相的 Radon 型の定理に, 制約法を適用する方法である.

定理 15 (蓮井-岸本-武田-蔦谷 [11]). K を d -次元の $\mathbb{Z}/2$ -ホモロジー球面の三角形分割とする. このとき, 任意の連続写像 $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対し, $\sigma, \tau \in K$ で,

$$\sigma \cap \tau = \emptyset, \quad f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset, \quad \dim \sigma + \dim \tau \leq d$$

となるものが存在する.

注意 16. [11] では K は単体的球面の場合のみを考え, さらに $\dim \sigma + \dim \tau \leq d$ という条件は書かれていないが, 証明を見ればこれらの条件で定理が成立することがわかる.

もう一つは [19] における彩色埋め込み定理の証明と類似した手法を用いることであり, この場合は定理 3 より次の (少なくとも見かけ上は) 強い定理を導出することができる.

定理 17 (岸本-松下 [15]). M を $(2d + 1)$ -次元の $\mathbb{Z}/2$ -ホモロジー球面とする. このとき, M の任意の三角形分割 K と, その d -骨格 K_d の \mathbb{R}^{2d+1} への埋め込み $f: K_d \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ に対し, f と $\alpha \circ f$ はイソトピックではない. ここで α は \mathbb{R}^{2d+1} の鏡映変換である.

5.2 定理 4 および定理 5 の証明の概要

定理 4 と定理 5 は, 同じ手法で証明することができる.

まず, M を微分可能多様体とし, TM をその接束とする. M のリーマン計量 g を取る. M 上の連続関数 $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対し, $S_\varepsilon M \subset TM$ で, $T_x M$ 上で長さ $\varepsilon(x)$ となる接ベクトル全体のなす球面束とする. ε をうまく取って, \exp を $S_\varepsilon M$ の各ファイバーに制限したとき単射であるようにしておく. このとき, 写像

$$f: S_\varepsilon M \rightarrow \text{Conf}_2(M), \quad v \mapsto (\exp v, -\exp v)$$

を定義すると, f は $\mathbb{Z}/2$ -同変写像になる. ここで, $S_\varepsilon M$ の $\mathbb{Z}/2$ -作用は (-1) 倍によって定義している. 以上により,

$$\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(S_\varepsilon M) \leq \text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(\text{Conf}_2(M))$$

を得る. $\text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(S_\varepsilon M)$ のことを $\alpha(M)$ と定義すると, 次が成立することがわかる:

補題 18. $\alpha(M) \leq \text{ht}_{\mathbb{Z}/2}(\text{Conf}_2(M))$

ここで, $S_\varepsilon M$ の第 1 Stiefel-Whitney 類を α , M の次元を n とする. Leray-Hirsch の定理より, $S_\varepsilon M/(\mathbb{Z}/2)$ の $\mathbb{Z}/2$ -係数コホモロジーは $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ を基底を持つ自由 $H^*(M; \mathbb{Z}/2)$ -加群であり,

$$\alpha^n = w_n(M) \cdot 1 + \dots + w_1(M) \cdot \alpha^{n-1}$$

が成立する. ここで, $w_i(M) \in H^i(M; \mathbb{Z}/2)$ は M の第 i Stiefel-Whitney 類である. この記述から, 定理 4 と定理 5 は, 次の定理から示すことができる.

定理 19. $\alpha(M) \geq 2d + 1$ ならば, M の任意の三角形分割 K に対し, K の d -骨格 K_d は \mathbb{R}^{2d} に埋め込むことができない.

定理 19 を示すには, 対応する位相的 Radon 型の定理を離散的除去積を用いて証明し, それに制約法を適用することで得られる.

参考文献

- [1] 足立正久, 埋め込みとはめ込み (数学選書), 岩波書店, 1984
- [2] E.G. Bajmóczy, I. Bárány, A common generalization of Borsuk's and Radon's theorem, Acta. Math. Hungarica **34** (1979), 347-350.
- [3] P.V.M. Blagojević, F. Frick, and G.M. Ziegler, Tverberg plus constraints, Bull. Lond. Math. Soc. **46**, (2014), 953-967.
- [4] P.V.M. Blagojević and G.M. Ziegler, Beyond the Borsuk-Ulam theorem: The topological Tverberg story, A journey through discrete mathematics, 273-341, Springer, Cham, 2017.
- [5] A. Flores, Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind, Ergeb. Math. Kolloq. **6** (1932/1934), 4-7.
- [6] F. Frick, Chromatic Numbers of Stable Kneser Hypergraphs via Topological Tverberg-Type Theorems, International Mathematical Research Notices, Volume 2020, Issue 13, July 2020, 4037-4061.

- [7] F. Frick and M. Harrison, Spaces of embeddings: Nonsingular bilinear maps, chirality, and their generalizations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **150** (2022), no. 1, 423-437.
- [8] Craig R. Guilbault, An Elementary Deduction of the Topological Radon Theorem from Borsuk–Ulam, *Discrete & Computational Geometry*, Volume 43, pages 951–954, (2010)
- [9] X. Goaoc, I. Mabillard, P. Paták, Z. Patáková, M. Tancer, and U. Wagner, On generalized Heawood inequalities for manifolds: a van Kampen-Flores-type nonembeddability result. *Israel J. Math.* **222** (2017), no. 2, 841-866.
- [10] M. Gromov, *Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry*, *Geometric and Functional Analysis* Vol. 20 (2010) 416–526.
- [11] S. Hasui, D. Kishimoto, M. Takeda, and M. Tsutaya, *Tverberg’s theorem for cell complexes*, *Bull. London. Math. Soc.*, Volume 55, Issue 4, (2023) 1944-1956.
- [12] D. Jojić, G. Panina, R. Živaljević, *A Tverberg type theorem for collectively unavoidable complexes*, *Israel J. Math.* **241** (2021), no. 1, 17-36.
- [13] D. Jojić, S.T. Vrećica, and R.T. Živaljević, *Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type*, *J. Alg. Comb* **46** (2017), 15-31.
- [14] E.R. van Kampen, *Komplexe in euklidischen Räumen*, *Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg* **9** (1933), 72-78.
- [15] D. Kishimoto, T. Matsushita, *Van Kampen-Flores theorem for cell complexes*, *Discrete & Computational Geometry*
- [16] D. Kishimoto, T. Matsushita, *Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes*, *Proceedings of the American Mathematical Society*
- [17] M. Kneser, Aufgabe 360, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 58:2 Abteilung, S. 27, 1955.
- [18] L. Lovász, Kneser’s conjecture, chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 25: 319-324, 1978.
- [19] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, *Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, written in cooperation with A. Björner and G.M. Ziegler, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [20] L. Martínez-Sandoval and A. Padrol, The convex dimension of hypergraphs and the hypersimplicial Van Kampen-Flores Theorem, *J. Comb. Theory B* **149** (2021), 23-51.
- [21] 中本敦浩, 小関健太, 曲面上のグラフ理論, SGC ライブラリ 172, サイエンス社
- [22] E. Nevo and U. Wagner, On the embeddability of skeleta of spheres, *Israel J. Math.* **174** (2009), 381-402.
- [23] J. Radon, "Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten", *Mathematische Annalen*, 83 (1–2): 113–115 (1921).
- [24] K.S. Sarkaria, A generalized Kneser conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **49** 236-240, 1990.
- [25] K.S. Sarkaria, A generalized van Kampen-Flores theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (1991), no. 2, 559-565.
- [26] A. Shapiro, Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean space. I. The first obstruction, *Ann. of Math.* **99** (1957), No. 2, 256-269.

Thompson 群と結び目

見玉 悠弥 (鹿児島大学)*1

高野 暁弘 (大阪大学)*2

概 要

Jones は 2017 年, Thompson 群と呼ばれる群のユニタリ表現を研究する過程で, Thompson 群の元から結び目 (絡み目) を構成する手法を発見し, 任意の結び目や絡み目がこの手法で得られることを示した [7]. 一方, どのような元が同じ結び目 (絡み目) を与えるのかは, 現在でもあまりわかっていない. 我々は, Jones の手法をより深く理解するための足がかりとして, Thompson 群の部分集合, 特に部分群に着目し, そこから得られる結び目や絡み目の集合を調べてきた. 本稿では, 得られた一連の結果 [10–12] を紹介する.

1 Thompson 群 F

Thompson 群とは, 1965 年に R. Thompson によって定義された 3 つの群 F, T, V のことである. 本稿ではこの群のうち F のみを扱う. F の同値な定義は数多く知られているが, ここでは単位閉区間 $[0, 1]$ 上の同相群の部分群として定義する.

定義 1.1 次の 3 条件を満たす閉区間 $[0, 1]$ 上の同相写像全体からなる群を, **Thompson 群 F** という.

- (1) 各写像は向きを保つ区分線形写像.
- (2) それぞれの線形な部分では, その傾きは 2 の冪.
- (3) 折れる点 $(\in [0, 1] \times [0, 1])$ は $\mathbb{Z}[1/2] \times \mathbb{Z}[1/2]$ の元.

ただし, 二項演算は写像の合成で定める.

以降, F の $[0, 1]$ への自然な右作用を考える. 図 1 の写像は F の元の例である.

F の各元は区分線形なので, 各写像は定義域 $[0, 1]$ の分割と値域 $[0, 1]$ の分割で表すことができる. 例えば図 1 の写像は, 定義域を $[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 1]$, 値域を $[0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ と分割することで表される. ただし, この表し方は一意ではない. 例えば, 定義域を $[0, 1/8], [1/8, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 1]$, 値域を $[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ と分割したとしても, 得られる写像は再び図 1 の写像である.

F の元を表す際に必要な分割は, (根付き) 2 分木による $[0, 1]$ の分割で表すことができる. 以下, 2 分木における, ただひとつの次数 2 の頂点を**根**, 次数 1 の頂点を**葉**といい, 頂

*1 〒890-0065 鹿児島県鹿児島市郡元 1-21-35 鹿児島大学理学部 数理情報科学プログラム
e-mail: yuya@sci.kagoshima-u.ac.jp

*2 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: takano.akihiro.sci@osaka-u.ac.jp

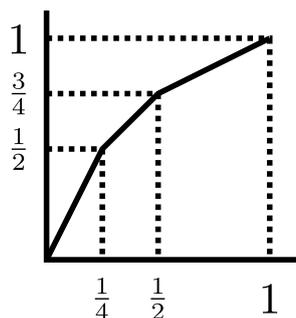


図1 F の元の例

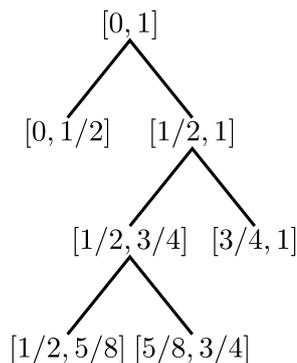


図2 2分木による $[0, 1]$ の分割の例

点が根と2つの葉のみからなる2分木を **caret** という。まず、根に区間 $[0, 1]$ を対応させる。そして、葉でない頂点に区間 $[a, b]$ が対応しているとき、その2つの子に $[a, (a+b)/2]$ と $[(a+b)/2, b]$ を対応させると決めることで、全ての頂点に区間を対応させることができる。このとき、葉に対応する区間をすべて集めることで、 $[0, 1]$ の分割を得ることができる。例えば、caret に対応する分割は $[0, 1/2], [1/2, 1]$ であり、図2の2分木に対応する分割は $[0, 1/2], [1/2, 5/8], [5/8, 3/4], [3/4, 1]$ である。

葉の数が等しい2分木の組 (T_+, T_-) を考える。このとき、 T_+ と T_- それぞれに $[0, 1]$ の分割が対応する。 T_+ に対応する区間の分割を定義域の分割、 T_- に対応する区間の分割を値域の分割と定めることで、 $[0, 1]$ 上の区分線形写像が得られる。実は、この写像はいつでも F の元である^{*1}。さらに、次が成り立つ。

命題 1.2 ([5]) 任意の F の元 f に対して、得られる写像が f であるような2分木の組 (T_+, T_-) が存在する。また、 F の各元に対して、その写像を与える、葉の数が最も少ない2分木の組^{*2}が一意に存在する。

葉の数が最も少ない2分木の組を、**reduced** な2分木の組という。

上の事実は（少なくとも筆者らには）明らかではない。そこで、前半の主張を Burillo による note^{*3}に基づき証明する。後半の主張については、群の表示や各元を一意に表す語 (normal form) 等を経由する大掛かりな説明が必要なため、本稿では解説しない。

さて、 f を F の元とし、 $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k) \in \mathbb{Z}[1/2] \times \mathbb{Z}[1/2]$ を、 f の全ての折れる座標を小さい順に並べたものとする。全ての a_i, b_i は $\mathbb{Z}[1/2]$ の元なので、ある n および m が存在して、 $a_1 = a'_1/2^n, \dots, a_k = a'_k/2^n, b_1 = b'_1/2^m, \dots, b_k = b'_k/2^m$ と表すことができ

^{*1} 条件1は明らかである。各葉に対応する区間の長さが $1/2^k$ という形をしていることから、条件2も容易に確かめられる。条件3についても、折れる点の候補が各葉に対応する区間の端点であることから明らかである。

^{*2} 一般に、区分線形の“折れる点の数+1”と葉の数が一致するとは限らない。例えば、定義域の区間の分割が $[0, 3/4], [3/4, 13/16], [13/16, 7/8], [7/8, 1]$ で、値域の区間の分割が $[0, 3/4], [3/4, 7/8], [7/8, 15/16], [15/16, 1]$ である写像を表すのに必要な葉の数は、少なくとも5である。

^{*3} https://web.mat.upc.edu/pep.burillo/book_en.php

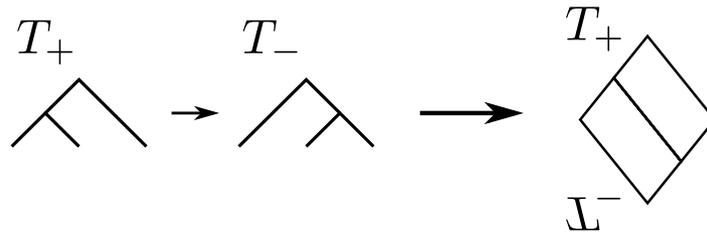


図3 2分木の組から tree diagram を作る方法

る. 自然数 j に対して T_j を, どの葉から根までの辺の数も j であるような2分木とする. T_n に対応する区間の分割は, 分割 $[0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{k-1}, a_k], [a_k, 1]$ の細分であることに注意する. T_m についても同様である.

区間 $[a_i, a_{i+1}]$ と, その f による像 $[b_i, b_{i+1}]$ に着目する. この区間上では f の傾きが一定であるので, その傾きを 2^{r_i} とおく. n の定め方から, ある自然数 l_i を $l_i = a'_{i+1} - a'_i$ としたとき, $a_{i+1} - a_i = l_i/2^n$ が成り立つ. この区間上では f の傾きが 2^{r_i} であったので, $b_{i+1} - b_i = (l_i 2^{r_i})/2^n$ が成り立つ. 一方 m の定め方から, ある自然数 l'_i を $l'_i = b'_{i+1} - b'_i$ としたとき, $b_{i+1} - b_i = l'_i/2^m$ も成り立つ. 以上をまとめると, $l'_i = l_i \times 2^{(r_i+m-n)}$ を得る.

まず, $r_i + m - n > 0$ の場合を考える. このとき, l_i 個の葉が区間 $[a_i, a_{i+1}]$ に対応していて, l'_i 個の葉が区間 $[b_i, b_{i+1}]$ に対応しているから, T_n の l_i 個の葉全てに, T_{r_i+m-n} を貼り付ける. このとき, これらの葉は $[a_i, a_{i+1}]$ と $[b_i, b_{i+1}]$ に対応し, かつ葉の数がともに l'_i となる. そして, 得られる写像の各葉に対応する区間上での傾きは,

$$\frac{\frac{1}{2^m}}{\frac{1}{2^{n+(r_i+m-n)}}} = 2^{r_i}$$

である. $r_i + m - n < 0$ であったときには, 同様のことを T_m の l'_i 個の葉に対して行う. また, $r_i + m - n = 0$ であったときには, 何も行わない.

以上の操作を全ての区間で行えば, 葉の数が等しい2分木の組 (T_+, T_-) で, f を与えるものを得ることができる.

2 Jones の構成法

本節では, Jones 自身によるレビュー論文 [9] に基づき, F の元から結び目 (絡み目) を構成する方法を概説する. 以降, 結び目と絡み目を区別せず, 全て結び目と呼ぶ.

葉の数が等しい (reduced とは限らない) 2分木の組を (T_+, T_-) とする. T_- を上下反転させて, T_+ と T_- の葉同士をくっつけて得られる図を **tree diagram** という. 例えば図3は, 図1に対応する2分木の組から得られる tree diagram である. 結び目 (の図式) は, 以下の方法で構成される.

Step 1: tree diagram は (平面に埋め込まれていると思うと) 領域の分割を与えていることに注意する. このとき, 各有界な領域に対して, T_+ 及び T_- のある頂点がひとつずつ

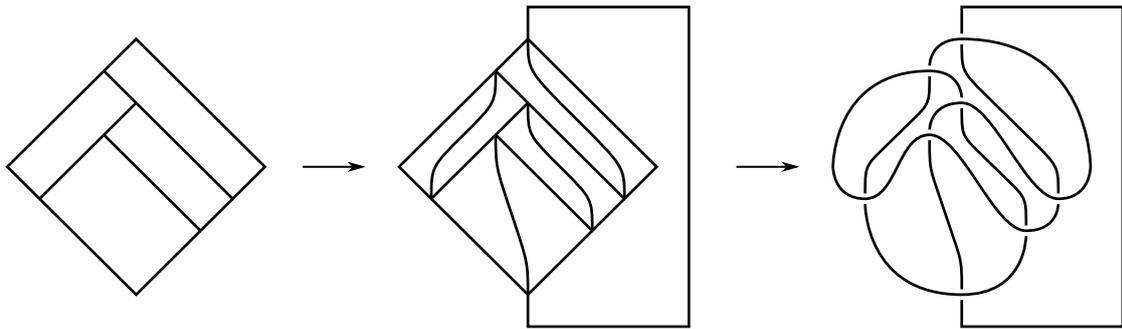


図4 tree pair から結び目を作る方法

存在して、その頂点を根とする caret が有界な領域を構成する辺の一部となる。領域内でこの2点を辺で結ぶ操作を、全ての有界な領域で行う。さらに、 T_+ と T_- の根を、外側の非有界な領域内でも辺で結ぶ。こうして得られたグラフは、葉以外の全ての頂点の次数が4であることに注意する。

Step 2: 次数が4の頂点を、 $\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \frown \\ | \\ \smile \end{array}$, $\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \smile \\ | \\ \frown \end{array}$ というルールに従って書き換える。すなわち、元々の caret が over crossing となるように書き換える。合わせて、 T_+ と T_- のそれぞれの葉を共有している2本の辺を（葉を頂点とみなさず）1本の辺とみなすことで、結び目の図式を得る。

図4は各stepの具体例であり、この tree pair から得られる結び目は三葉結び目である。前節で述べたように、 F の同じ元を表す区間の分割は一意ではなく、対応する2分木の組も一意ではない。ただし、reduced な2分木の組は一意に存在するのであった。そこで、 F の元に対して、その reduced な2分木の組から定まる tree diagram により得られる結び目を対応させる写像を \mathcal{L} とする。このとき次が成り立つ。

定理 2.1 ([7, Theorem 5.3.1]) $\mathcal{L}: F \rightarrow \{ \text{全ての結び目} \}$ は全射。

この事実は、組み紐群と結び目の関係にちなんで、**Alexander の定理** と呼ばれる。また、任意の結び目 K に対して、逆像 $\mathcal{L}^{-1}(\{K\})$ は無限集合であることがわかっている。この事実は、例えば [11, Lemma 2.5] より従う。

3 固定部分群と結び目の関係

我々は、Jones の理論をより深く理解するために、Thompson 群 F の部分群に注目して、次のような問題を考えた。

問題 3.1 Thompson 群 F の部分群 G に対して、制限写像

$$\mathcal{L}|_G: G \rightarrow \{ \text{全ての結び目} \}$$

の像を特定せよ。

この節では、 F の $[0, 1]$ への自然な作用に関する固定部分群に対して得られた結果を紹介する。 S を $[0, 1]$ の部分集合とし、 S の固定部分群を、 $\text{Stab}(S) := \{f \in F \mid f(S) = S\}$ と表す。

3.1 1点の固定部分群

r を $[0, 1]$ の元とし、 $\text{Stab}(\{r\})$ を単に $\text{Stab}(r)$ と書く。

定理 3.2 ([11, Theorem 1.2]) 1点の固定部分群については、以下が成り立つ。

- (1) $r \neq 1/2$ のとき、 $\mathcal{L}|_{\text{Stab}(r)}: \text{Stab}(r) \rightarrow \{\text{全ての結び目}\}$ は全射である。
- (2) $r = 1/2$ のとき、 $\text{Im}(\mathcal{L}|_{\text{Stab}(r)}) = \{L \sqcup \bigcirc \mid L \text{ は全ての結び目}\} \cup \{\bigcirc\}$ 。

ここで、 \bigcirc は自明な結び目を表す。

なお、 $r = 0, 1$ のときは、作用の定義より $\text{Stab}(0) = \text{Stab}(1) = F$ となり、全射性は明らかである。 $r = 1/2$ のときは、1成分の自明な結び目が必ず現れてしまい、全射とはならないが、この自明な結び目の違いを無視すれば、“ほとんど全射” と思うことができる。また、 $r, r' \in (0, 1)$ が2進有理数のとき、 $\text{Stab}(r')$ は $\text{Stab}(r)$ の共役部分群である。従って、 F の部分群の \mathcal{L} による像は、その埋め込み写像に依存して定まることがわかる。

この定理は、各 $r (\neq 1/2)$ に対して、 $\text{Stab}(r)$ の非自明な元でありながら1成分の自明な結び目を与えるものを見つけることで示される。このような元は人工的に構成されており、現時点では、2点以上の有限集合に関する固定部分群の考察はほとんど進んでいない。詳細は [11] を参照していただきたい。

問題 3.3 $S \subset [0, 1]$ を有限集合とする。このとき、制限写像 $\mathcal{L}|_{\text{Stab}(S)}$ の全射性を判定せよ。

3.2 無限集合の固定部分群

次に、 $[0, 1]$ の無限部分集合に関する結果を述べる。Jones は [7] 内で、oriented subgroup \vec{F} という部分群を定義した。紙面の都合上ここで詳細な定義は述べない（例えば [2] が詳しい）が、 \vec{F} は tree diagram から定まる Γ -graph が2部グラフとなるもの全体からなる部分群として定義される*4。名前の通り、 \vec{F} の元から得られる結び目には自然に向きをつけることができる。そこで、有向結び目に対しても、写像 \mathcal{L} の全射性の問題を考える。

定理 3.4 ([7, Theorem 5.3.15], [2, Theorem]) $\mathcal{L}|_{\vec{F}}: \vec{F} \rightarrow \{\text{全ての有向結び目}\}$ は全射である。

上の定理について、もう少し詳しく説明すると、まず Jones [7] が弱い意味での全射性を示した。ここで、「弱い意味」とは、「いくつかの自明な結び目との非交和の違いを除い

*4 なお、 Γ -graph が Tait graph となるような結び目の図式を描くことができるが、その結び目は2節で得られた結び目と同じものになる。Jones は、この方法を用いて Alexander の定理を証明した。

て」という意味である. そして, 後に Aiello [2] が, 本来の意味での全射性を示した.

また, Golan–Sapir [6] は, oriented subgroup \vec{F} を, F の $[0, 1]$ への作用に関する固定部分群として特徴づけた.

定理 3.5 ([6, Theorem 2]) 集合 $S \subset [0, 1]$ を

$$S := \left\{ r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap [0, 1] \mid r \text{ を } 2 \text{ 進小数 } 0.a_1 \cdots a_m \text{ と表したとき, } \sum_{i=1}^m a_i \equiv 1 \pmod{2} \right\}$$

で定める. このとき, $\vec{F} = \text{Stab}(S)$ が成り立つ.

さらに, 彼らは \vec{F} を一般化し, 2 以上の整数 n に対して n -oriented subgroup \vec{F}_n を Γ -graph を用いて定義し, 固定部分群としての解釈を与えた.

定理 3.6 ([6, Theorem 5.11]) 集合 S_i を

$$S_i := \left\{ r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap [0, 1] \mid r \text{ を } 2 \text{ 進小数 } 0.a_1 \cdots a_m \text{ と表したとき, } \sum_{i=1}^m a_i \equiv i \pmod{n} \right\}$$

と定める. このとき, $\vec{F}_n = \bigcap_{i=1}^n \text{Stab}(S_i)$ が成り立つ.

筆者らは, \vec{F}_n に対して, 次の結果を得た.

定理 3.7 制限写像 $\mathcal{L}|_{\vec{F}_3}: \vec{F}_3 \rightarrow \{\text{全ての結び目}\}$ は全射である. また, 2 以上の整数 n に対して, $\mathcal{L}|_{\vec{F}_{2n+1}}: \vec{F}_{2n+1} \rightarrow \{\text{全ての結び目}\}$ は弱い意味で全射である.

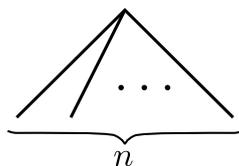
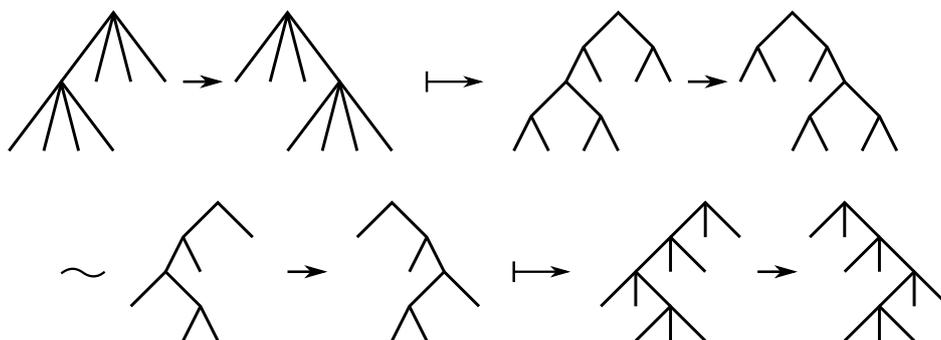
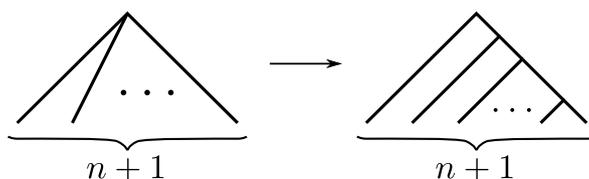
問題 3.8 4 以上の整数 n に対して, 制限写像 $\mathcal{L}|_{\vec{F}_n}: \vec{F}_n \rightarrow \{\text{全ての結び目}\}$ の (本来の意味での) 全射性を判定せよ.

Golan–Sapir [6] は, n -oriented subgroup \vec{F}_n に対して, さらに別の解釈も与えている. その説明のために, Brown–Thompson 群 $F(n)$ を導入する.

定義 3.9 2 以上の整数 n に対し, 次の 3 条件を満たす閉区間 $[0, 1]$ 上の同相写像全体からなる群を, **Brown–Thompson 群** $F(n)$ という.

- (1) 各写像は向きを保つ区線形写像.
- (2) それぞれの線形な部分では, その傾きは n の冪.
- (3) 折れる点 $(\in [0, 1] \times [0, 1])$ は $\mathbb{Z}[1/n] \times \mathbb{Z}[1/n]$ の元.

定義より, $F(2) = F$ である. また, F と同様に, $F(n)$ の元は, 葉の数が等しい根付き n 分木の組で表すことができる. さらに, 一般の n 分木は, 頂点が根と n 個の葉のみからなる n 分木 (n -caret, 図 5 参照) を組み合わせて得られる. この n -caret を, 葉の数が同じであるような 2 分木に置き換えたり, (2-)caret を m -caret に置き換えたりする操作

図5 n -caret図6 単射準同型 $F(4) \rightarrow F(3)$ の例図7 単射準同型 $F(n+1) \rightarrow F$ を誘導する置き換え

を組み合わせると, Brown–Thompson 群の間の単射準同型 $F(n) \rightarrow F(m)$ が得られる^{*5} (m, n は 2 以上の整数, 図 6 参照). Golan–Sapir は, 次の結果を示した.

定理 3.10 ([6, Lemma 5.10]) 2 以上の整数 n に対して, 図 7 の置き換えで得られる単射準同型 $F(n+1) \rightarrow F$ の像は, \vec{F}_n と一致する. 特に, $\vec{F}_n \cong F(n+1)$ である.

一方, Jones は [8] において, 3-colorable subgroup \mathcal{F} という部分群も定義した. この部分群は, tree diagram が領域の彩色に関するある条件を満たすもの全体からなる部分群として定義される. この条件の正確な定義も述べない (例えば [1] が詳しい) が, 以下の特徴付けが知られている.

定理 3.11 ([3, Lemma 2.7]) $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して, 集合 $T_i \subset [0, 1]$ を

$$T_i := \{r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap (0, 1) \mid \omega(r) \equiv i \pmod{3}\}$$

^{*5} 一般に, $F(n)$ から $F(m)$ への単射準同型は, n と m の大小に関わらず, 無数に存在する. また, このような caret を置き換えることで得られる写像は, 擬等長埋め込み写像であることが知られている [4, Theorem 6].

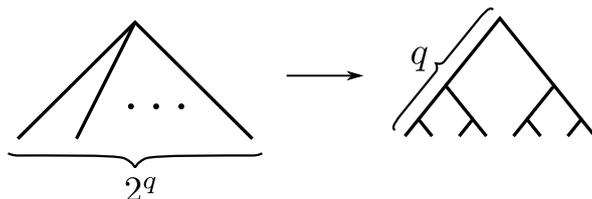


図8 単射準同型 $F(2^q) \rightarrow F$ を誘導する置き換え

で定める. ただし, r を 2 進小数 $0.a_1 \cdots a_n$ としたとき, $\omega(r) = \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i$ と定め, 自然に $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元とみなす. このとき, $\mathcal{F} = \bigcap_{i=0}^2 \text{Stab}(T_i)$ が成り立つ.

Aiello は [1] において, 「 $\mathcal{L}|_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \{\text{全ての結び目}\}$ は全射か?」という Question を挙げた. 次の定理は, この写像は全射ではないということを主張するものである.

定理 3.12 ([10, Theorem 1.2]) f を \mathcal{F} の非自明な元とする. このとき, $\mathcal{L}(f)$ は 3 彩色可能な結び目である.

筆者らはさらに, 3 以上の奇数 p に対し, $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}$ を満たす, p -colorable subgroup \mathcal{F}_p を定義した. この群は, $p = 3$ のときと同様に, F の固定部分群として記述することができる.

定理 3.13 ([12, cf. Theorem 4.14]) $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ に対して, 集合 $T_i \subset [0, 1]$ を

$$T_i := \{r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap (0, 1) \mid \rho(r) \equiv i \pmod{p}\mathbb{Z}\}$$

で定める. ただし, r を 2 進小数 $0.a_1 \cdots a_n$ としたとき, $\rho(r) = \sum_{i=1}^n a_i/2^i$ と定め, 自然に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元とみなす. このとき, $\mathcal{F}_p = \bigcap_{i=0}^{p-1} \text{Stab}(T_i)$ が成り立つ.

また, Ren [13, Theorem 5.9] は, \mathcal{F} が Brown–Thompson 群 $F(4)$ と同型であることを示した. 我々は, この結果を拡張し, 次を示した.

定理 3.14 ([12, Proposition 4.1]) 3 以上の奇数 p に対して, 図 8 の置き換えで得られる単射準同型 $F(2^q) \rightarrow F$ の像は, \mathcal{F}_p と一致する. 特に, $\mathcal{F}_p \cong F(2^q)$ である. ここで, $q = \min\{r \in \mathbb{Z}_{>0} \mid 2^r \equiv 1 \pmod{p}\}$ である.

\mathcal{F}_p もまた, 全ての結び目を与えない部分群の一例である.

定理 3.15 ([12, Theorem 3.8]) f を \mathcal{F}_p の非自明な元とする. このとき, $\mathcal{L}(f)$ は p 彩色可能な結び目である.

問題 3.16 $\mathcal{L}|_{\mathcal{F}_p}: \mathcal{F}_p \rightarrow \{\text{全ての } p \text{ 彩色可能な結び目}\}$ の全射性を判定せよ.

参考文献

- [1] V. Aiello, *An introduction to Thompson knot theory and to Jones subgroups*, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
- [2] ———, *On the Alexander theorem for the oriented Thompson group \overrightarrow{F}* , *Algebr. Geom. Topol.* **20** (2020), no. 1, 429–438. MR4071378
- [3] V. Aiello and T. Nagnibeda, *On the 3-colorable subgroup \mathcal{F} and maximal subgroups of Thompson's group F* , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **73** (2023), no. 2, 783–828. MR4588965
- [4] J. Burillo, S. Cleary, and M. I. Stein, *Metrics and embeddings of generalizations of Thompson's group F* , *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 4, 1677–1689. MR1806724
- [5] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, *Enseign. Math. (2)* **42** (1996), no. 3-4, 215–256. MR1426438
- [6] G. Golan and M. Sapir, *On Jones' subgroup of R . Thompson group F* , *Journal of Algebra* **470** (2017), 122–159.
- [7] V. Jones, *Some unitary representations of Thompson's groups F and T* , *J. Comb. Algebra* **1** (2017), no. 1, 1–44. MR3589908
- [8] V. F. R. Jones, *A no-go theorem for the continuum limit of a periodic quantum spin chain*, *Comm. Math. Phys.* **357** (2018), no. 1, 295–317. MR3764571
- [9] ———, *On the construction of knots and links from Thompson's groups*, *Knots, low-dimensional topology and applications* **284** (2019), 43–66. MR3986040
- [10] Y. Kodama and A. Takano, *The 3-colorable subgroup of Thompson's group and tricolorability of links*, *J. Algebra* **634** (2023), 336–344. MR4624435
- [11] ———, *Alexander's theorem for stabilizer subgroups of Thompson's group*, arXiv preprint arXiv:2306.13398 (2023).
- [12] ———, *The p -colorable subgroup of Thompson's group*, arXiv preprint arXiv:2302.10060 (2023). to appear in *Groups Geom. Dyn.*
- [13] Y. Ren, *From skein theory to presentations for Thompson group*, *J. Algebra* **498** (2018), 178–196. MR3754410

スケイン代数の有限次元表現の理解に向けて

軽尾浩晃 (学習院大学)*

1. はじめに

本稿の対象である「(被約)状態付き $SL(n)$ スケイン代数」を説明する前に、まずは $SL(n)$ スケイン代数について説明する。 $SL(n)$ スケイン代数とは、有向曲面に対して定まる非可換 \mathbb{C} 代数であり、 $SL(n, \mathbb{C})$ 指標多様体の量子化であることが知られている [Sik05]。この代数は有向 n 価グラフで生成され、 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Reshetikhin–Turaev 関手 [RT91] 由来の関係式が要請されている。一般には非可換な代数であるが、図的計算で理解できるというのが特徴である。 $SL(2)$ スケイン代数は Kauffman 括弧スケイン代数 [Prz99, Tur91] と同型であり、 $SL(3)$ スケイン代数は Kuperberg スケイン代数 [Kup96] と同型であることが知られている。特に $n = 2$ の場合は、量子 Teichmüller 空間 [BW16, Lê19]・位相的量子場の理論 [BHMV95]・量子クーロン枝 [AS24]・制限量子モジュライ代数 [BFR23] などと深く関係している。

$SL(2)$ スケイン代数の一般化として、状態付きスケインという元を導入して適切な関係式を課すことで、(被約)状態付き $SL(2)$ スケイン代数が導入された [Lê18, CL22]。これは Bonahon–Wong の量子トレース写像（量子 Teichmüller 空間への埋め込み）の構成 [BW16] から着想を得ており、特に複雑な曲面を理想 3 角形という単純なピース上での議論に帰着させられるというメリットがある。さらに、このスケイン代数は量子団代数 [Mul16, LY23]・量子 Teichmüller 空間 [Lê19, CL22]・位相的量子場の理論 [CL22a]・因子化ホモロジー [Coo20, Coo23] と密接に関わっていることが知られている。スケイン代数を通して他分野の現象を図的に捉えることができ、その重要性は低次元トポロジーに収まらない。 $n = 2$ の場合と同様にして、一般の n に対しても、状態付き $1-n$ 価グラフを考えることで (被約)状態付き $SL(n)$ スケイン代数が導入された [LS21, LY23]。これも以下に挙げる例から筋の良い研究対象であることが伺える。

1. 2 角形の状態付き $SL(n)$ スケイン代数は量子座標環 $\mathcal{O}_q(SL(n))$ と Hopf 代数として同型である ($n = 2$ は [CL22], 一般の n は [LS21])。
2. ある特別な曲面族に対しては、Alekseev–Grosse–Schomerus が導入した数理物理由来の (非制限) 量子モジュライ代数 [AGS95] と同型である [BFR23]。
3. (量子) 高階 Teichmüller 空間の文脈で現れる Fock–Goncharov 代数 [FG06, FG09] への準同型写像 (量子トレース写像) が構成されており、ある条件下では単射である ($n = 2$ は [BW16, Lê19], $n = 3$ は [Kim20, Kim21, Dou24], 一般の n は [LY23])。

状態付き $SL(n)$ スケイン代数の構造の理解を通して他分野への寄与を図りたいのだが、そのための第一歩として

代数の有限次元表現を理解する

というのは基本的かつ重要である。非可換代数の有限次元表現を理解する上で、単一性定理は非常に有効であることが知られている [BG02, FKBL19]。単一性定理は、 \mathbb{C} 代数が概 Azumaya (almost Azumaya) であるとき、つまり、3 条件

1. \mathbb{C} 代数として有限生成である

本研究は科研費 (課題番号: 23K12976) の助成を受けたものである。

キーワード: スケイン代数, 量子クラスター代数, 高階 Teichmüller 空間, Azumaya 表現

* e-mail: hiroaki.karuo@gakushuin.ac.jp

2. 素である (零因子を持たないことよりも弱い条件)
3. 中心 Z 上の加群として有限生成である

を満たすとき, その有限次元 (既約) 表現を Azumaya 集合 ($\text{MaxSpec}(Z)$ の Zariski 稠密開集合) を用いて理解できることを意味している. (1), (2) は先行研究 [LY23] で既に示されているため, 残る問題は (3) を示すことである. (状態付き) $\text{SL}(2)$ スケイン代数の中心を求める際, その基底と適切なフィルトレーションを用いることが本質的であった [FKBL19, Yu23]. しかし, この方針を (状態付き) $\text{SL}(n)$ スケイン代数に適用するのは難しく, その原因の一端は

我々は (状態付き) $\text{SL}(n)$ スケイン代数の (扱いやすい) 基底を知らない

ことにある ([SW07] の合流理論を適用するための複雑度が見つからない).

Bonahon–Higgins [BH23] は一般の n に対し, $n = 2$ のアナロジーとして高階 Chebyshev 多項式によるループの像が $\text{SL}(n)$ スケイン代数の中心元であることを示した. しかし, これは漸化式で与えられる多変数多項式であり, スケイン代数の元として扱うには分かりづらさを孕んでいる.

一方で, Wang [Wan23] は $n = 2$ のアナロジーとして, 弧 (1 価グラフ) の m' 乗が状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数の中心元となることを示した. 後で紹介する関係式 (4) から, すべての n ウェブ ($\text{SL}(n)$ スケイン代数の生成元) は弧の積と和で表されるため, 我々はすべての n ウェブのある種の像が中心に入っていることを知るに至ったのである. $\text{SL}(n)$ スケイン代数の範疇ではなく, 状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数で考えると物事をより簡単に扱える状態になることを意味している.

本稿で述べる結果をまとめると, 以下のようになる (これらは共同研究 [KW24] に基づく).

1. 量子パラメータのオーダーが奇数であるとき, 状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数の中心を求めた. 特に, m' 乗写像の像以外の中心元を特定した.
2. この中心上の加群としての生成元の個数 (PI 次数) を具体的に与えた.

2. (被約) 状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数と量子トーラス

2.1. pb 曲面

pb 曲面 (punctured bordered surface) とは, 有向コンパクト曲面 $\bar{\Sigma}$ から有限個の点を取り除いて得られる曲面 Σ で, Σ のすべての境界が開区間に同相であるものとする. 取り除いた点を **穿孔** (puncture) と呼び, 特に $\bar{\Sigma}$ の内部に含まれている点を **内部穿孔**, $\partial\bar{\Sigma}$ 上の点を **境界穿孔** と呼ぶ. pb 曲面 Σ が **本質的である** (essentially bordered) とは, Σ のすべての連結成分が空でない境界を持つときという. $\bar{\Sigma}$ の **偶境界** (**奇境界**) とは, Σ の偶数個 (奇数個) の境界穿孔を持つ $\bar{\Sigma}$ の境界連結成分のことである. 重要な設定として, 本稿では 内部穿孔はないと仮定する.

pb 曲面 Σ の **理想弧** c とは, 埋め込み $c: (0, 1) \rightarrow \Sigma$ であって, $c(0)$ と $c(1)$ が穿孔であるように, はめ込み $[0, 1] \rightarrow \bar{\Sigma}$ に拡張できるときをいう. 以下では, 理想弧を Σ における像として扱う. 理想弧が **自明である** とはヌルホモトピックであるときをいう.

pb 曲面 Σ が **3 角形分割可能** とは, すべての連結成分が少なくとも穿孔を 1 つ持ち, 1 点または 2 点穴あき球面, 1 角形, 2 角形のいずれも含まないときをいう. 3 角形分割可能な pb 曲面 Σ の (**理想**) **3 角形分割** とは, 互いにイソトピックでない非自明な理想弧のなす極大集合のことである.

2.2. n ウェブとその図

pb 曲面 Σ に対して, 点 $(x, t) \in \Sigma \times (-1, 1)$ の第2成分 t をこの点の**高さ**と呼ぶ.

$\Sigma \times (-1, 1)$ の n **ウェブ** α とは, $\Sigma \times (-1, 1)$ にプロパーに埋め込まれた有向閉曲面と有向(有限)グラフの非交和であり, 以下の条件を満たすものである:

1. α は1個または n 個頂点のみをもつ. 各 n 個頂点 v では, α の辺の向きはすべて v に向かうか, v から出るかのいずれかである. 1個頂点のなす集合を $\partial\alpha$ で表し, その元を α の**端点**と呼ぶ. Σ の各境界連結成分 c に対し, $\partial\alpha \cap (c \times (-1, 1))$ は異なる高さを持つとする,
2. α のすべての辺は $\Sigma \times (-1, 1)$ に埋め込まれた有向閉区間である,
3. α は(横断的) **枠**をもつ,
4. 各 n 個頂点の周りでは, 半辺は巡回順序をもつ.
5. $\partial\alpha \subset \partial\Sigma \times (-1, 1)$ であり, 端点での枠(法ベクトル)は $(-1, 1)$ の1の方向を指している.

空集合 \emptyset も n ウェブとみなし, n ウェブの間のイソトピーは n ウェブのクラスにおいて適用する.

n ウェブ α に対し, 写像 $s: \partial\alpha \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を**状態**と呼び, 状態を備えた α を**状態付き n ウェブ**と呼ぶ.

(状態付き) n ウェブ α が**垂直な位置にある**とは, 以下の条件を満たすときをいう.

1. 枠の法ベクトルは, α の任意の点で $(-1, 1)$ の1の方向を指している,
2. 射影 $\text{pr}: \Sigma \times (-1, 1) \rightarrow \Sigma \times \{0\}$ に関して α は一般の位置にある,
3. すべての n 個頂点において, pr による射影図の半辺の巡回順序は Σ の向きと整合的である(図を描くときは, 反時計まわりであると約束する).

すべての(状態付き) n ウェブ α は垂直な位置にあるようにイソトピーで変形できる. Σ の境界連結成分 c に対して, $\partial\alpha \cap (c \times (-1, 1))$ の高さは $c \cap \text{pr}(\alpha)$ に全順序を与える. 各境界連結成分でこの全順序が, 各2重点で(結び目図における通常の)交差情報が与えられているとき, $\text{pr}(\alpha)$ を α の**(状態付き) n ウェブ図**と呼ぶ.

2.3. (被約) 状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数

以下では, 次の設定・記号を用いる. まず, 整数 $n \geq 2$ とし, $\hat{q} \in \mathbb{C}^\times$ とする. ここで, \hat{q}^2 は1の原始 m'' 乗根である. d' を n と m'' の最大公約数とし, $m' = m''/d'$ とおく. d を $2n$ と m' の最大公約数とし, $m = m'/d$ とおく. $q = \hat{q}^{2m^2}$ を $q^{1/2n^2} = \hat{q}$ を満たすように取り, 次の記号を導入する:

$$c_i = (-q)^{n-i} q^{\frac{n-1}{2n}}, \quad t = (-1)^{n-1} q^{\frac{n^2-1}{n}}, \quad a = q^{\frac{n+1-2n^2}{4}}.$$

有向 pb 曲面 Σ に対し, Σ の**状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数** $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ とは, $\Sigma \times (-1, 1)$ 内のすべての状態付き枠付き n ウェブのイソトピー類で生成される \mathcal{R} 加群を次の関係式 (1)–(6) で割って得られる商加群に, $(-1, 1)$ 方向の重ね合わせによって積構造を定めた \mathcal{R} 代数である. ただし, 図は状態付きウェブ図(の一部)を $(-1, 1)$ の1側から見ているとし, 各関係式のウェブ図は灰色部分の外側は全く同じであるとする. 楕円の中の σ_+ は $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ から定まる正ブレイドを表し, $\ell(\sigma) = \#\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ は $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の転倒数を表す. さらに,

$$\delta_{j < i} = \begin{cases} 1 & j < i \\ 0 & j \geq i \end{cases}, \quad \delta_{i, j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ であり, 白丸と黒丸は状態付き } n \text{ ウェブの向きを表して}$$

いる(ただし, 白丸と黒丸の表す向きは互いに逆であるとする).

$$q^{\frac{1}{n}} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} - q^{-\frac{1}{n}} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} = (q - q^{-1}) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}, \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \longrightarrow \end{array} = \mathfrak{t} \begin{array}{c} \longrightarrow \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} = (-1)^{n-1} [n] \begin{array}{c} \square \end{array}, \quad [n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \vdots \end{array} \end{array} = (-q)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-q^{\frac{1-n}{n}})^{\ell(\sigma)} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \searrow \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \sigma_+ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \searrow \\ \searrow \\ \vdots \end{array} \end{array}, \quad (3)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} \end{array} \Big| = \mathfrak{a} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-q)^{\ell(\sigma)} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ \circ \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \sigma(n) \\ \sigma(2) \\ \sigma(1) \end{array} \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \downarrow \\ i \\ j \end{array} \end{array} = \delta_{j,i} \mathfrak{C}_i \begin{array}{c} \square \end{array} \Big|, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \downarrow \\ i \\ \bar{i} \end{array} \end{array} \Big| = \sum_{i=1}^n (\mathfrak{C}_{\bar{i}})^{-1} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ i \\ \bar{i} \end{array} \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \downarrow \\ i \\ j \end{array} \end{array} = q^{-\frac{1}{n}} \left(\delta_{j < i} (q - q^{-1}) \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ i \\ j \end{array} \end{array} + q^{\delta_{i,j}} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ j \\ i \end{array} \end{array} \right). \quad (6)$$

本稿の内容を理解する上で上記の関係式をしっかりと理解する必要はないが、これらが $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -Reshetikhin–Turaev 関手 [RT91] から自然に要請される関係式であることを強調しておく。

pb 曲面 Σ の境界穿孔 p に対し、状態付き角弧 (stated corner arc) $C(p)_{ij}$, $\bar{C}(p)_{ij}$ を図 1 で表される状態付き弧として定義する. Σ の 1 角形以外の連結成分の頂点 v に対し、集合

$$C_p = \{C(p)_{ij} \mid i < j\}, \quad \bar{C}_p = \{\bar{C}(p)_{ij} \mid i < j\}$$

を考え、 $C_p \cup \bar{C}_p$ の各元を p での**劣弧** (bad arc) と呼ぶ。

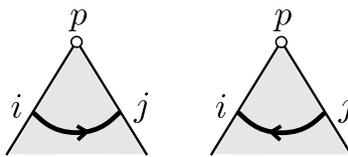


図 1: 左図は $C(p)_{ij}$ を、右図は $\bar{C}(p)_{ij}$ を表す。

すべての劣弧の生成するイデアル I^{bad} は両側イデアルであり、特に、量子トレース写像 (量子トーラスへの埋め込み) の核となることが知られている [CL22, LY23]. そのため、商代数

$$\bar{\mathcal{S}}_n(\Sigma) := \mathcal{S}_n(\Sigma) / I^{\text{bad}}$$

を考えることは自然であり、これを Σ の**被約状態付き $SL(n)$ スケイン代数** と呼ぶ [LY23].

2.4. 量子トーラスと単項部分代数

k 次反対称行列 Q に対して、 Q に付随した**量子トーラス**と**量子平面**とは、それぞれ

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(Q) &:= \mathbb{C}\langle x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1} \mid x_i x_j = \hat{q}^{2Q_{ij}} x_j x_i \rangle \\ \mathbb{T}_+(\mathbb{Q}) &:= \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_k \mid x_i x_j = \hat{q}^{2Q_{ij}} x_j x_i \rangle \end{aligned}$$

で与えられる非可換代数であった. これらは, 生成元の非可換性が \hat{q} の幕で与えられているという特徴がある.

部分モノイド $\Lambda \subset \mathbb{Z}^k$ に対し,

$$\mathbb{T}(\mathbb{Q}; \Lambda) := \mathbb{C}\text{-span}\{x^{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \Lambda\}$$

は $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ の \mathbb{C} 部分代数を成し, これを $\mathbb{T}(\mathbb{Q})$ の Λ 単項部分代数と呼ぶ.

\mathbb{C} 代数 A を考え, $\mathcal{Z}(A)$, $\mathcal{Z}(\mathbb{T}(\mathbb{Q}))$ で A , $\mathbb{T}(\mathbb{Q})$ の中心を表すとすると,

$$\mathbb{T}_+(\mathbb{Q}) \subset A \subset \mathbb{T}(\mathbb{Q}) \implies \mathcal{Z}(A) = A \cap \mathcal{Z}(\mathbb{T}(\mathbb{Q})) \tag{7}$$

が従う. この意味で, 我々は A の中心を抽象的に知っていると言える. より具体的に中心を知るために, まずは $\mathcal{Z}(\mathbb{T}(\mathbb{Q}))$ を理解したい. では, 本稿で扱う量子トーラスの非可換性はどんな反対称行列で統制されているのだろうか? それをこれから見ていく.

2.5. n -3 角形分割と籐

Σ の理想 3 角形分割 λ を固定し, これの更なる細分としての n -3 角形分割とそれから定まる重み付き籐を導入する.

\mathbb{P}_3 の重心座標を

$$\mathbb{P}_3 = \{(i, j, k) \in \mathbb{R}^3 \mid i, j, k \geq 0, i + j + k = n\} \setminus \{(0, 0, n), (0, n, 0), (n, 0, 0)\}, \tag{8}$$

とする. ここで, (i, j, k) (もしくは簡単のため ijk と書く) は重心座標を表し, 特に $v_1 = (n, 0, 0)$, $v_2 = (0, n, 0)$, $v_3 = (0, 0, n)$ とする. v_i と v_{i+1} を端点とする \mathbb{P}_3 の境界辺を e_i とする (図 2 参照).

\mathbb{P}_3 の n -3 角形分割とは, $i, j, k =$ 整数定数で表される平面による \mathbb{P}_3 の n^2 個の小さな 3 角形への分割のことである. この n -3 角形分割に対して, v_1, v_2, v_3 の以外の頂点と v_1, v_2, v_3 を頂点として持たない辺に対して, 辺に図 2 のように向きを付け, 有向グラフである籐 (quiver) $\Gamma_{\mathbb{P}_3}$ を考えることができる. ここで, 籐の矢 (arrow) とは小さな 3 角形の辺 e に与えられた向きのことであり, e が \mathbb{P}_3 の境界にあるときは \mathbb{P}_3 の反時計回りとなるように向きが与えられ, e が \mathbb{P}_3 の境界にないときは e と並行な \mathbb{P}_3 の境界辺の向きと一致するように向きが与えられている. さらに, \mathbb{P}_3 の境界上の矢に重み 1 を与え, それ以外の矢には重み 2 を与える. このように重みが与えられた籐を重み付き籐 (weighted quiver) と呼ぶ.

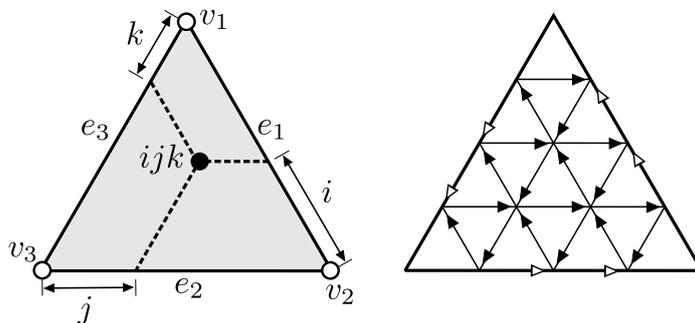


図 2: 左図: 重心座標 ijk , 右図: 4-3 角形分割と籐

$\bar{V}_{\mathbb{P}_3}$ で \mathbb{P}_3 の整数重心座標を表すことにする:

$$\bar{V}_{\mathbb{P}_3} = \{ijk \in \mathbb{P}_3 \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{9}$$

2.6. (拡大) Fock–Goncharov 代数とその平衡部分代数

3 角形 \mathbb{P}_3 はただ 1 つの 3 角形分割を持つので, \mathbb{P}_3 でその 3 角形分割も表すことにする.

Σ を 3 角形分割の辺に関して切ることで 3 角形という細かなピースに分割することができる. 得られた各 3 角形を λ の **面** と呼ぶことにする. このとき,

$$\Sigma = \left(\bigsqcup_{\tau \in \mathcal{F}_\lambda} \tau \right) / \sim, \quad (10)$$

と表せる. ここで, 各面 τ は \mathbb{P}_3 のコピーであり, \sim は Σ を復元するための λ の面の境界辺同士の貼り合わせを意味する. τ の内部および辺の内部への制限が同相写像であるような写像 $f_\tau: \mathbb{P}_3 \rightarrow \Sigma$ を **固有写像** と呼ぶことにすると, 各面 τ は固有写像によって特徴付けられることが分かる.

3 角形分割 λ の $n-3$ **角形分割** とは, 各面 τ に制限すると $n-3$ 角形分割になっており, それらが貼り合わせ \sim において整合的になっているものを指す. つまり, \sim によって貼り合わせられる辺 b と b' に対し, b, b' それぞれの頂点が同一視されている. **簡約頂点集合** (reduced vertex set) を

$$\bar{V}_\lambda = \bigcup_{\tau \in \mathcal{F}_\lambda} \bar{V}_\tau, \quad \bar{V}_\tau = f_\tau(\bar{V}_{\mathbb{P}_3})$$

で定める. \bar{V}_λ の各元を **小頂点** と呼ぶ貼り合わせを用いると, f_τ による重み付き籐 Γ_τ の像たちから, Σ 上の重み付き籐 Γ_λ が構成される. ここで, 貼り合わせ \sim において b と b' の辺の向きは逆なので, これらの重みの寄与はキャンセルされる. つまり, 籐 Γ_λ において対応する辺の重みは 0 であることに注意されたい.

重み付き籐 Γ_λ の符号付き隣接行列 $\bar{Q}_\lambda: \bar{V}_\lambda \times \bar{V}_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ を次のように定める.

$$\bar{Q}_\lambda(v, v') = \begin{cases} w & v \text{ から } v' \text{ への重み } w \text{ の矢があるとき,} \\ 0 & v \text{ と } v' \text{ の間に矢がないとき.} \end{cases} \quad (11)$$

3 角形分割 λ に付随した **Fock–Goncharov 代数** とは, \bar{Q}_λ の量子トーラス, つまり,

$$\bar{\mathcal{X}}(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}(\bar{Q}_\lambda) = \mathbb{C}\langle x_v^{\pm 1}, v \in \bar{V}_\lambda \rangle / (x_v x_{v'} = \hat{q}^{2\bar{Q}_\lambda(v, v')} x_{v'} x_v \text{ for } v, v' \in \bar{V}_\lambda). \quad (12)$$

のことである. これが被約状態付き $SL(n)$ スケイン代数の埋め込み先となる.

\mathbb{P}_3 に付随した行列 $M_{\mathbb{P}_3}: \bar{V}_{\mathbb{P}_3} \times \bar{V}_{\mathbb{P}_3} \rightarrow \mathbb{Z}$ と固有写像から誘導された写像 $f_\tau: \bar{V}_{\mathbb{P}_3} \rightarrow \bar{V}_\lambda$ を考える. これらに対し, $M_{\mathbb{P}_3}$ の **零拡大** $M_\tau: \bar{V}_\lambda \times \bar{V}_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ を次で定義する:

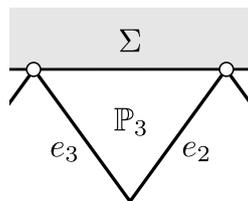
$$M_\tau(u, v) = \sum_{u' \in f_\tau^{-1}(u)} \sum_{v' \in f_\tau^{-1}(v)} M_{\mathbb{P}_3}(u', v'). \quad (13)$$

先ほど, Γ_λ を $\Gamma_{\mathbb{P}_3}$ の貼り合わせで定義したが, この観点から \bar{Q}_λ は $\bar{Q}_{\mathbb{P}_3}$ の零拡大 \bar{Q}_τ を用いて

$$\bar{Q}_\lambda = \sum_{\tau \in \mathcal{F}_\lambda} \bar{Q}_\tau \quad (14)$$

と表せる. \mathcal{F}_λ は λ のすべての面のなす集合である.

pb 曲面 Σ の各境界辺に 3 角形 \mathbb{P}_3 を貼り合わせることで, 新たな pb 曲面 Σ^* を構成する (図 3 参照). ここで, \mathbb{P}_3 の接着辺は e_1 であるとする. この手順により, Σ の 3 角形分割 λ から Σ^* の 3 角形分割 λ^* が得られる. この拡張された 3 角形分割 λ^* の $n-3$ 角形分割の簡約頂点集合を \bar{V}_{λ^*} で表す. 特に, 接着された \mathbb{P}_3 の e_3 上にないすべての小頂点のなす集合 $V_\lambda \subset \bar{V}_{\lambda^*}$ を **λ 頂点集合** と呼び, e_2 上にないすべての小頂点のなす集合 $V'_\lambda \subset \bar{V}_{\lambda^*}$ を **A 頂点集合** と呼ぶ.

図 3: Σ への 3 角形 \mathbb{P}_3 の接着

拡張された 3 角形分割 λ^* を用いて, Fock–Goncharov 代数を拡張する. まず, $Q_\lambda: V_\lambda \times V_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\bar{Q}_\lambda: \bar{V}_\lambda \times \bar{V}_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ の制限とする. **拡張 Fock–Goncharov 代数** (または **拡張 \mathcal{X} 代数**) とは, Q_λ の量子トーラス

$$\mathcal{X}(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}(Q_\lambda)$$

のことである. 包含関係 $\bar{\mathcal{X}}(\Sigma, \lambda) \subset \mathcal{X}(\Sigma, \lambda) \subset \bar{\mathcal{X}}(\Sigma^*, \lambda^*)$ が成り立つことに注意せよ.

重心座標の射影 $\text{pr}_i: \bar{V}_{\mathbb{P}_3} \rightarrow \mathbb{Z}$ ($i = 1, 2, 3$) を

$$\text{pr}_1(ijk) = i, \quad \text{pr}_2(ijk) = j, \quad \text{pr}_3(ijk) = k. \quad (15)$$

で定める. $\mathbb{Z}^{\bar{V}_{\mathbb{P}_3}}$ において, $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3$ と $(n\mathbb{Z})^{\bar{V}_{\mathbb{P}_3}}$ で生成される部分群を $\bar{\Lambda}_{\mathbb{P}_3}$ で表す. $\bar{\Lambda}_{\mathbb{P}_3}$ の各元を **平衡元** と呼ぶ. これを踏まえて, $\mathbb{Z}^{\bar{V}_\lambda}$ にも平衡という概念を導入する. ベクトル $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\bar{V}_\lambda}$ が **平衡である** とは, λ のすべての面に対して \mathbb{P}_3 への引き戻し $f_\tau^* \mathbf{k}$ が平衡元であるときをいう. ただし, 面 τ と固有写像 $f_\tau: \mathbb{P}_3 \rightarrow \Sigma$ に対し, 引き戻し $f_\tau^* \mathbf{k}$ は $f_\tau^* \mathbf{k}(v) = \mathbf{k}(f_\tau(v))$ で与えられる. すべての平衡ベクトルで生成される $\mathbb{Z}^{\bar{V}_\lambda}$ の部分群を $\bar{\Lambda}_\lambda$ で表す.

平衡ベクトルのなす部分群 $\Lambda_\lambda = \bar{\Lambda}_\lambda \cap \mathbb{Z}^{V_\lambda}$ を考える. このとき, **拡張平衡 Fock–Goncharov 代数** とは

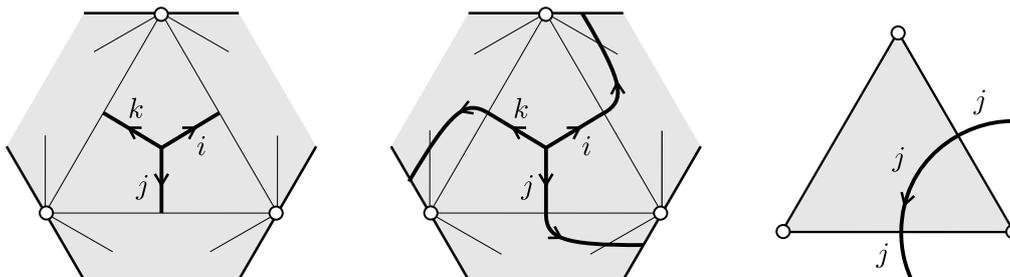
$$\mathcal{X}^{\text{bl}}(\Sigma, \lambda) := \mathbb{T}(Q_\lambda; \Lambda_\lambda)$$

のことである. 先ほど, 量子トレース写像 $\mathcal{S}_n(\Sigma) \rightarrow \bar{\mathcal{X}}^{\text{bl}}(\Sigma, \lambda) := \mathbb{T}(\bar{Q}_\lambda; \bar{\Lambda}_\lambda)$ の非自明な核 I^{bad} で状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数を割ることで被約状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数が得られると述べた. しかし, 受け皿である (平衡) Fock–Goncharov 代数を拡張することで, 状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数を量子トーラスに埋め込むことができることを後で見る.

2.7. 量子 \mathcal{A} トーラス

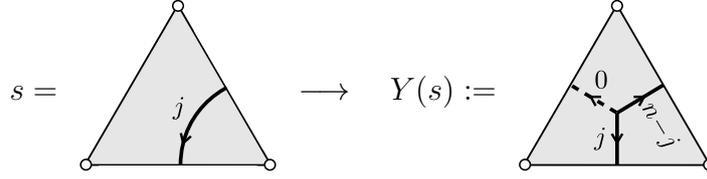
小頂点 $v \in \bar{V}_\lambda$ と面 $\nu \in \mathcal{F}_\lambda$ に対し, **骨格** $\text{sk}_\tau(v) \in \mathbb{Z}[\bar{V}_\tau]$ を次のように定義する.

$v = (ijk) \in V_\nu$ であるとし, ν にプロバーに埋め込まれた重み付き有向グラフ Y_ν を図 4 の左図のように描く. ただし, Y_ν の辺は重みは e_1, e_2, e_3 に端点をもつそれぞれの辺に対して i, j, k が割り当てられている.

図 4: 左図: 重み付きグラフ Y_ν , 中図: 延長 \tilde{Y}_ν , 右図: 左旋回

重み付き有向グラフ \tilde{Y}_v を得るために, Y_v の 0 でない重みを持つ辺を図 4 の中図のように延長していく. ただし, 各辺は 3 角形に入射する度に左に旋回すると約束する. 3 角形 τ に含まれる \tilde{Y}_v の一部を \tilde{Y}_v の τ における **区分** と呼ぶ. さらに, Y_v も \tilde{Y}_v の区分とみなし, **主区分** と呼ぶ.

主区分 $s = Y_v$ に対し, $Y(s) = v \in \bar{V}_v$ とする. 3 角形 τ における弧区分 s に対し $Y(s) \in \bar{V}_\tau$ を以下の図が表す重心座標で定める.



v の骨格を

$$\mathbf{sk}_\tau(v) = \sum_{s \subset \tau \cap \tilde{Y}_v} Y_v(s) \in \mathbb{Z}[\bar{V}_\tau] \quad (16)$$

で定義する. ただし, 和は \tilde{Y}_v の τ におけるすべての区分にわたってとる. $\mathbf{sk}_\tau(v)$ は well-defined であることが知られている [LY23, Lemma 11.4].

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 不変写像

$$\bar{K}_{\mathbb{P}_3}: \bar{V}_{\mathbb{P}_3} \times \bar{V}_{\mathbb{P}_3} \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $v = ijk$ と $v' = i'j'k'$ が $i' \leq i$ かつ $j' \geq j$ を満たすとき,

$$\bar{K}_{\mathbb{P}_3}(v, v') = jk' + ki' + i'j. \quad (17)$$

と定める. \mathbb{P}_3 と 3 角形分割 λ の面 τ の同一視の下で, $\bar{K}_{\mathbb{P}_3}$ を \bar{K}_τ とも表す.

$u, v \in \bar{V}_\lambda$ と v を含む面 $\tau \in \mathcal{F}_\lambda$ に対し,

$$\bar{K}_\lambda(u, v) = \bar{K}_\tau(\mathbf{sk}_\tau(u), v) = \sum_{s \subset \tau \cap \tilde{Y}_u} \bar{K}_\tau(Y(s), v) \quad (18)$$

と定義する. この \bar{K}_λ は well-defined であることが知られている [LY23, 補題 11.5].

反対称行列 $\bar{P}_\lambda, P_\lambda$ を

$$\bar{P}_\lambda := \bar{K}_\lambda \bar{Q}_\lambda \bar{K}_\lambda^t, \quad P_\lambda = K_\lambda Q_\lambda K_\lambda^t$$

で (天下りの的に) 定義する [LY23, 補題 11.9].

(Σ, λ) の量子 \mathcal{A} トーラスと量子 \mathcal{A} 平面およびそれらの拡張は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}(\Sigma, \lambda) &= \mathbb{T}(\bar{P}_\lambda), & \bar{\mathcal{A}}_+(\Sigma, \lambda) &= \mathbb{T}_+(\bar{P}_\lambda), \\ \mathcal{A}(\Sigma, \lambda) &= \mathbb{T}(P_\lambda), & \mathcal{A}_+(\Sigma, \lambda) &= \mathbb{T}_+(P_\lambda). \end{aligned}$$

この定め方から, 拡張 Fock–Goncharov 代数と拡張量子 \mathcal{A} トーラスの間には写像があることが分かるが, より詳しくは次のようになっている.

定理 1 ([LY23, 定理 11.7]). \mathbb{C} 線型写像

$$\psi_\lambda: \mathcal{A}(\Sigma, \lambda) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma, \lambda), \quad a^{\mathbf{k}} \mapsto x^{\mathbf{k}K_\lambda}, \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{V'_\lambda}) \quad (19)$$

は \mathbb{C} 代数埋め込みであり, その像は $\mathcal{X}^{\text{bl}}(\Sigma, \lambda)$ である. ただし, $a^{\mathbf{k}} = \prod_{v \in V'_\lambda} a_v^{k(v)}$, $x^{\mathbf{k}} = \prod_{v \in V_\lambda} x_v^{k(v)}$ である.

中心を求める上で重要な事実は次である.

定理 2.1 ([LY23, 定理 13.1]). 3 三角形分割 λ をもつ本質的 pb 曲面 Σ に対し, 以下が成り立つ.

1. 拡張量子トレース写像と呼ばれる, ある単射 \mathbb{C} 代数準同型写像

$$\mathrm{tr}_\lambda^A: \mathcal{S}_n(\Sigma) \rightarrow \mathcal{A}(\Sigma, \lambda) \quad (20)$$

が存在し, これは 3 三角形分割の取り替え (フリップ) と整合的である.

2. 次の包含関係が成り立つ:

$$\mathcal{A}_+(\Sigma, \lambda) \subset \mathrm{tr}_\lambda^A(\mathcal{S}_n(\Sigma)) \subset \mathcal{A}(\Sigma, \lambda). \quad (21)$$

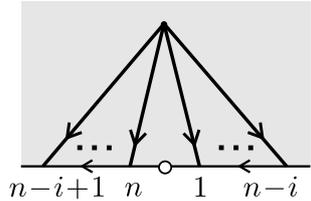
(7) から, 状態付き $SL(n)$ スケイン代数の中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{S}_n(\Sigma))$ を求める代わりに, $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ の中心を求めれば良いことが分かる.

3. スケイン代数の中心・PI 次数・Azumaya 表現

3.1. 新たな中心元と中心の全体像

冒頭で m' 乗写像の像以外の中心元があるかどうかは非自明な問題であることを述べた. しかし, $n = 2$ における [Yu23, KQ22] の結果から, 境界周りの中心元があることが期待される. 実際に, 一般の n でも境界中心元が見つかるというのが以下である.

v を pb 曲面 Σ の境界穿孔とする. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, ある状態付き n ウェブ図 $\mathbf{g}_i^v \in \mathcal{S}_n(\Sigma)$ が定まるのだが, \mathbf{g}_i^v は q 冪の差を除いて



$$(22)$$

と等しい (描かれている白点が v). 主結果を語る上では, この程度の情報が分かっているだけで問題ない. このとき, 次の境界中心元の存在が分かる.

補題 3.1 ([KW24]). $\bar{\Sigma}$ は偶境界 ∂ をもち, その偶境界上の境界穿孔は $\partial\bar{\Sigma}$ の向きに沿って v_1, v_2, \dots, v_r とラベル付けされているとする (r は偶数). このとき, 任意の $0 \leq k \leq m'$ と $1 \leq i \leq n-1$ に対し,

$$(\mathbf{g}_i^{v_1})^k (\mathbf{g}_i^{v_2})^{m'-k} \dots (\mathbf{g}_i^{v_{r-1}})^k (\mathbf{g}_i^{v_r})^{m'-k} \quad (23)$$

は $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の中心元である.

補題 3.1 における中心元全体の集合を B で表す. さらに, 次の集合を考える:

$$\Lambda_{m'} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{V_\lambda} \mid \mathbf{k}K_\lambda = \mathbf{0} \text{ in } \mathbb{Z}_{m'}\}. \quad (24)$$

これらを踏まえて, 今回の主結果の 1 つは次である.

定理 2 ([KW24]). 本質的 pb 曲面 Σ と奇数 m'' に対して, $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ の中心は $\mathrm{tr}_\lambda^A(B)$ と $\{a^{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \Lambda_{m''}\}$ によって生成される.

証明については言及しないが、曲面の各境界の穿孔の数に依って、非可換性を統制する行列の性質が大きく変わる。重要な違いは、行列が可逆か可逆でないかという点である。行列は曲面の内部頂点集合と境界成分に関してブロック行列に分けることができ、非可逆性の原因は偶境界に対応するブロック行列である。

$\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ の中心が分かれば、 $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の中心も分かると述べた。 $\{g^{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \Lambda_m^+\}$ と B で生成される $\mathcal{S}_n(\Sigma, \mathfrak{v})$ の部分代数を \mathcal{Y}_λ で表すと、次が成り立つ。

系 3.2 ([KW24]). 本質的 pb 曲面 Σ と奇数 m' に対して、 $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ の中心は次で与えられる:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{S}_n(\Sigma, \mathfrak{v})) = \{x \in \mathcal{S}_n(\Sigma, \mathfrak{v}) \mid \exists \mathbf{k} \in \mathbb{N}^{V_\lambda} \text{ s.t. } [\prod_{v \in V_\lambda} g_v^{m' \mathbf{k}(v)}] x \in \mathcal{Y}_\lambda\}.$$

ただし、 $[\cdot]$ は *Weyl* 正規化と呼ばれる q 冪による補正を表す。

3.2. 有限次元既約表現の理解

概 Azumaya 代数 A とその中心 Z に対して、中心指標を考えることによって A の既約表現 (の同型類) から $\text{MaxSpec}(Z)$ への全射が存在する。特に、単一性定理 [BG02, FKBL19] から、**Azumaya 集合** ($\text{MaxSpec}(Z)$ の中の Zariski 稠密部分集合) の各点の逆像は 1 点から成り、その表現を **Azumaya 表現** と呼ぶ。特に、Azumaya 表現の次元は A の PI 次数と一致することも知られている [BG02, FKBL19, FKBL21]。

次の定理から、状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数は概 Azumaya であることが分かり、単一性定理を適用できることが分かる。

定理 3.3 ([KW24]). 状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数は中心上の加群として有限生成である。

実は、状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数は m' 乗写像の像の上の加群として有限生成であり、この事実の帰結として上記の結果が得られる。つまり、状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数の中心上の加群としての有限生成性を示すために、 m' 乗写像の像は十分大きいことを意味している。

この有限生成性を示すために、具体的な中心は必要としていない。では、定理 3.1 および系 3.2 の恩恵は何かというと、具体的な中心を用いて $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ および $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の PI 次数を求めることができるという点である。PI 次数が分かっているなければ Azumaya 表現を理解できたとは言えないので、PI 次数を特定したというのも今回の主結果の 1 つである。

$\mathcal{A}_+(\Sigma, \lambda) \subset \text{tr}_\lambda^A(\mathcal{S}_n(\Sigma)) \subset \mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ という関係から $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の PI 次数が $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$ の PI 次数と一致することが分かる。スケイン代数そのものを扱うのではなく、量子トーラスの議論に持ち込むことで PI 次数を見通しよく計算できる。

定理 3.4 ([KW24]). 本質的 pb 曲面 Σ とそのオイラー標数 $\chi(\Sigma)$ に対し、 $r(\Sigma) := \#(\partial\Sigma) - \chi(\Sigma)$ とおく。 $\bar{\Sigma}$ は b 個の偶境界を持つとする。このとき、2.3 節の冒頭で定義された d, m を用いて、状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数と拡張量子 \mathcal{A} トーラスの PI 次数は次で与えられる。

$$\text{PI-deg}(\mathcal{S}_n(\Sigma)) = \text{PI-deg}(\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)) = d^{r(\Sigma)-b} m^{|V_\lambda|-b(n-1)}.$$

特に、 $n = 2$ のとき、この結果は [Yu23] の結果と一致する。

4. 今後の研究と展望

被約状態付き $\text{SL}(n)$ スケイン代数 $\bar{\mathcal{S}}_n(\Sigma)$ に対しても量子トレース写像 $\bar{\text{tr}}_\lambda^A: \bar{\mathcal{S}}_n(\Sigma) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\Sigma, \lambda)$ が与えられている [LY23]。 $n = 3$ のときは単射であり、 $n > 3$ における単射性は $\bar{\Sigma}$ が円盤のときしか示されていないが一般の pb 曲面に対しても成り立つと期待されている。さらに、包含関係

$$\bar{\mathcal{A}}_+(\Sigma, \lambda) \subset \bar{\text{tr}}_\lambda^A(\bar{\mathcal{S}}_n(\Sigma)) \subset \bar{\mathcal{A}}(\Sigma, \lambda)$$

も知られている。[KW24]では、 $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma, \lambda)$ に対してもその中心・PI次数を与えており、 $\overline{\mathrm{tr}}_\lambda^A$ の単射性が正しければ[KW24]の $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma, \lambda)$ に関する結果から $\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma)$ の中心・PI次数・Azumaya表現が分かる。

今回の設定（内部穿孔がない場合）において、被約状態付きスケイン代数 $\overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma)$ は量子団代数と同型であることが知られている [Mul16, LY22]。同条件下で $\overline{\mathcal{S}}_3(\Sigma)$ が量子団代数に含まれることが知られており、特に一致することが予想されている [IY23, LY23]。これらの研究を踏まえて、量子高階団代数と同型であるだろう、というのが共通認識としてあるが、予想として書くには十分な結果は得られていない。

問い. 一般の n に対し、量子高階団代数と被約状態付き $SL(n)$ スケイン代数 $\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma)$ との関係はどのようなものか？特に、それらは同型か？

今後、本稿で扱っていない閉曲面についても単一性定理が適用できるようになると期待されるが、そうなった際の恩恵は $SL(n)$ 指標多様体のシンプレクティック葉 (symplectic leaf) への分解がスケイン代数の表現論的意味合いを持つという点である。このような先行研究として [GJS19, KK22, Yu23a, FKBL23] などがある。

今後もスケイン代数が多くの研究者を魅了する発展を遂げていくだろうという期待を胸に、筆を置くことにする。

参考文献

- [AGS95] A. Y. Alekseev, H. Grosse, V. Schomerus, *Combinatorial quantization of the Hamiltonian Chern-Simons theory. I*, Comm. Math. Phys. **172** (1995), no. 2, 317–358.
- [AS24] D. G. L. Allegretti, P. Shan, *Skein algebras and quantized Coulomb branches*, arXiv:2401.06737 (2024).
- [BFR23] S. Baseilhac, M. Faitg, P. Roche, *Unrestricted quantum moduli algebras, III: Surfaces of arbitrary genus and skein algebras*, arXiv:2302.00396 (2023).
- [BFR] S. Baseilhac, M. Faitg, P. Roche, *Structure and representations of quantum moduli and g -skein algebras at roots of unity*, in preparation.
- [BG02] K. A. Brown, K. R. Goodearl, *Lectures on algebraic quantum groups*, Adv. Courses Math. CRM Barcelona Birkhäuser Verlag, Basel (2002).
- [BHMV95] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology **34** (1995), no. 4, 883–927.
- [BH23] F. Bonahon, V. Higgins, *Central elements in the SL_d -skein algebra of a surface*, arXiv:2308.13691 (2023).
- [BW16] F. Bonahon and H. Wong, *Representations of the Kauffman bracket skein algebra I: invariants and miraculous cancellations*, Invent. Math. **204** (2016), no. 1, 195–243.
- [CL22] F. Costantino and T. T. Q. Lê, *Stated skein algebras of surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **24** (2022), no. 12, 4063–4142.
- [CL22a] F. Costantino and T. T. Q. Lê, *Stated skein modules of 3-manifolds and TQFT*, arXiv:2206.10906 (2022).
- [Coo23] J. Cooke, *Excision of skein categories and factorisation homology*, Adv. Math. **414** (2023), Paper No. 108848, 51 pp.
- [Coo20] J. Cooke, *Kauffman skein algebras and quantum Teichmüller spaces via factorization homology*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 14, 2050089, 54 pp.
- [Dou24] D. C. Douglas, *Quantum traces for $SL_n(\mathbb{C})$: the case $n = 3$* , J. Pure Appl. Algebra **228** (2024), no. 7, No. 107652, 50 pp.
- [FKBL21] C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, T. Lê, *Dimension and trace of the Kauffman bracket skein algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B8(2021), 510–547.

- [FKBL23] C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, T. Lê, *Sliced skein algebras and geometric Kauffman bracket*, arXiv:2310.06189 (2023).
- [FKBL19] C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, T. Lê, *Unicity for representations of the Kauffman bracket skein algebra*, *Invent. Math.* **215** (2019), no.2, 609–650.
- [FG09] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), no. 6, 865–930.
- [FG06] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory* *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*(2006), no. 103, 1–211.
- [GJS19] I. Ganev, D. Jordan, P. Safronov, *The quantum Frobenius for character varieties and multiplicative quiver varieties*, arXiv:1901.11450 (2019).
- [IY23] T. Ishibashi, W. Yuasa, *Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for \mathfrak{sl}_3* , *Math. Z.* **303** (2023), no. 3, No. 72, 60 pp.
- [KK22] H. Karuo, J. Korinman, *Azumaya loci of skein algebras*, arXiv:2211.13700 (2022).
- [KW24] H. Karuo, Z. Wang, *Center of stated $SL(n)$ -skein algebras*, arXiv:2408.12520 (2024).
- [Kim20] H. K. Kim, *SL_3 -laminations as bases for PGL_3 cluster varieties for surfaces*, arXiv:2011.14765 (2020).
- [Kim21] H. K. Kim, *Naturality of SL_3 quantum trace maps for surfaces*, arXiv:2104.06286 (2021).
- [Kor21] J. Korinman, *Unicity for representations of reduced stated skein algebras*, *Topology Appl.* **293** (2021), No. 107570, 28 pp.
- [KQ19] J. Korinman, A. Quesney, *Classical shadows of stated skein representations at roots of unity*, arXiv:1905.03441 (2019).
- [KQ22] J. Korinman, A. Quesney, *The quantum trace as a quantum non-abelianization map*, *J. Knot Theory Ramifications* **31** (2022), no. 6, No. 2250032, 49 pp.
- [Kup96] G. Kuperberg, *Spiders for rank 2 Lie algebras*, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), no. 1, 109–151.
- [Lê18] T. T. Q. Lê, *Triangular decomposition of skein algebras*, *Quantum Topol.* **9** (2018), no.3, 591–632.
- [Lê19] T. T. Q. Lê, *Quantum Teichmüller spaces and quantum trace map*, *J. Inst. Math. Jussieu* **18** (2019), no.2, 249–291.
- [LS21] T. T. Q. Lê, A. S. Sikora, *Stated $SL(n)$ -Skein Modules and Algebras*, arXiv:2201.00045 (2021).
- [LY23] T. T. Q. Lê, T. Yu, *Quantum traces for SL_n -skein algebras*, arXiv:2201.00045 (2023).
- [LY22] T. T. Q. Lê, T. Yu, *Quantum traces and embeddings of stated skein algebras into quantum tori*, *Selecta Math. (N.S.)* **28** (2022), no. 4, Paper No. 66, 48 pp.
- [Mul16] G. Muller, *Skein and cluster algebras of marked surfaces*, *Quantum Topol.* **7** (2016), no. 3, 435–503.
- [Sik05] A. S. Sikora, *Skein theory for $SU(n)$ -quantum invariants*, *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005), 865–897.
- [SW07] A. S. Sikora, B. W. Westbury, *Confluence theory for graphs*, *Algebr. Geom. Topol.* **7** (2007), 439–478.
- [Wan23] Z. Wang, *On stated $SL(n)$ -skein modules*, arXiv:2307.10288. (2023).
- [Yu23] T. Yu, *Center of the stated skein algebra*, arXiv:2309.14713 (2023).
- [Yu23a] T. Yu, *Explicit representations and Azumaya loci of skein algebras of small surfaces*, arXiv:2312.00446 (2023).
- [Prz99] J. H. Przytycki, *Fundamentals of Kauffman bracket skein modules*, *Kobe J. Math.* **16** (1999), no. 1, 45–66.
- [RT91] N. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, *Invent. Math.* **103** (1991), no. 3, 547–597.
- [Tur91] V. G. Turaev, *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **24** (1991), no. 6, 635–704.

同変漸近次元の不等式による評価について

知念 直紹 (防衛大学校)*

概 要

本稿では, Gromov によって導入された漸近次元, Farrell-Jones 予想, Borel 予想に関連が深い同変漸近次元について述べる。また, ここで述べていることの大部分は山内貴光氏 (愛媛大学) との共同研究 [9][10][11] を基にしている。

1 はじめに

本稿では, X は位相空間, Γ は非自明な離散群, 写像はすべて連続, $\Gamma \curvearrowright X$ は同相写像による非自明な (左) 作用を表すものとする。Bartels, Lück, Reich [6, Theorem 1.2], [5, Assumption 1.4] によって双曲群の Farrell-Jones 予想の解決のために導入された N - \mathcal{F} -amenability を用いて, コンパクト Hausdorff 空間上の作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の \mathcal{F} -同変漸近次元 (equivariant asymptotic dimension) $\mathcal{F}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ が Sawicki [19] によって定義された。双曲群の Farrell-Jones 予想の証明の中で, 同変漸近次元の有限性が証明の主要なステップとなっている。この特性の一般化は, CAT(0) 群の Farrell-Jones 予想を証明するためにも使用され, さらに双曲群と CAT(0) 群を含む群のクラスに対して Borel 予想を導いた [4]。Gromov (1993) によって, 被覆次元の類似概念として擬等長において不変な漸近次元 *1 は導入された。次第に, Novikov 予想, さらに強い coarse Baum-Connes 予想 との関係性が明らかになるにつれて, 漸近次元は多くの研究者によって調べられ現在でも盛んに研究されている。また, \mathcal{F} -同変漸近次元 $\mathcal{F}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ は Γ の漸近次元 $\text{asdim } \Gamma$ にも関連が深いことが知られ [16], 上述のこれらの予想たちの研究が進んでいく中, 同変漸近次元の重要性は益々増していくに違いないが, 新しい次元が定義されると最初に次のような次元の有限性問題, 決定問題が考えられる。

問題 1.1 (有限性問題) $\mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ あるいは $\text{eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ が有限であるための作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の十分条件を与えよ。 *2

問題 1.2 (決定問題) 作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し, $\mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ あるいは $\text{eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ を決定せよ。特に, Γ がよく知られた群, X が多様体あるいは位相群のときどうか。

* 〒238-8686 神奈川県 横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校総合教育学群数学教育室

e-mail: naochin@nda.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 54F45; Secondary 37B02, 37C85, 20F69

キーワード: equivariant asymptotic dimension, asymptotic dimension, Farrell-Jones conjecture, Borel conjecture, locally finite group

*1 漸近次元 asdim に関しては [7] を参照。

*2 注意 2.8 より, $\mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ ($\text{eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$) $\Rightarrow \text{asdim } \Gamma < \infty$ 。

現在筆者が知る限り、有限性・決定問題に関して多くのことは知られていない。例えば、任意の 0 次元コンパクト距離空間 X への自由^{*3}な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し、 $\text{eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X) \in \{\text{asdim } \Gamma, \infty\}$ が知られているが [20]、1 次元以上の空間への作用の同変漸近次元に関しては殆ど知られていない (注意 3.2 も参照)。そこで、4 章で局所有限群からいくつかの 1 次元以上の空間へ自由な作用の同変漸近次元と有限性・決定問題の部分的解決を紹介する。

まず、2 章で同変漸近次元の定義とその定義の非コンパクト空間への作用への拡張、3 章で決定問題を解決するための Sawick の不等式 [20] を紹介する。4 章で局所有限群からの自由な作用の同変漸近次元を議論する。また 4 章の結果から $\text{eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ の Sawick の不等式の $\text{asdim } \Gamma$ による下限の評価は精密ではないことが分かる。そこで非コンパクト空間への作用の同変漸近次元による下からの評価を提案し、非コンパクト空間への自由かつ proper cocompact 作用のいくつかの結果を紹介する。

2 同変漸近次元 \mathcal{F} -eq-asdim($\Gamma \curvearrowright X$) の定義と、この定義の非コンパクト空間への作用への拡張

定義 2.1 本稿では、 Γ の部分群の族 \mathcal{F} は空集合ではなく以下の 2 つの性質を持っているとする。

- (1) (部分群に関して不変) $\Lambda \in \mathcal{F}$, $\Lambda' < \Lambda \Rightarrow \Lambda' \in \mathcal{F}$;
- (2) (共役に関して不変) $\Lambda \in \mathcal{F}$, $\gamma \in \Gamma \Rightarrow \gamma\Lambda\gamma^{-1} \in \mathcal{F}$ 。

例えば、 $\{\{1_\Gamma\}\}$, $\mathcal{F}_{\text{fin}} := \{\Lambda < \Gamma \mid \Lambda \in \Gamma\}$ は上述の 2 つの性質を持っている。ここで、 $\Lambda < \Gamma$ は「 Λ は Γ の部分群」、 $\Lambda \in \Gamma$ は「 Λ は Γ の有限集合」を表す。

この章では、 Γ の群演算から導かれる標準的な (左) 作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ ともう 1 つの作用 $\Gamma \curvearrowright X$ との対角作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X : \gamma(\eta, x) := (\gamma\eta, \gamma x)$ と、 Γ の部分群の族 \mathcal{F} を考える。

定義 2.2 $\Gamma \times X$ の被覆 \mathcal{U} が $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X$ の \mathcal{F} -被覆とは、任意の $(\gamma, U) \in \Gamma \times \mathcal{U}$ に対し以下を満たす: (1) $\gamma U \in \mathcal{U}$ (2) $\gamma U \neq U \Leftrightarrow \gamma U \cap U = \emptyset$ (3) $\Gamma_U := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U = U\} \in \mathcal{F}$ 。

定義 2.3 ([19]) X はコンパクトとする。 $\Gamma \curvearrowright X$ の \mathcal{F} に関する同変漸近次元 (equivariant asymptotic dimension) \mathcal{F} -eq-asdim($\Gamma \curvearrowright X$) とは、次の条件を満たす最小の非負整数 N とする:

任意の $E \in \Gamma$ に対し、ある $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X$ の開 \mathcal{F} -被覆 \mathcal{U} が存在し以下を満たす^{*4}:

- (i) $\text{ord}(\mathcal{U}) := \sup_{(\gamma, x) \in \Gamma \times X} \text{card}\{U \in \mathcal{U} \mid (\gamma, x) \in U\} \leq N + 1$;
- (ii) 任意の $x \in X$ に対し $U \in \mathcal{U}$ が存在し、 $E \times \{x\} \subset U$ を満たす。

ただし、このような条件を満たす N が存在しないとき \mathcal{F} -eq-asdim($\Gamma \curvearrowright X$) = ∞ とす

^{*3} $\Gamma \curvearrowright X$ が自由であるとは、「ある $x \in X$ に対し、 $\gamma x = x$ ならば $\gamma = 1_\Gamma$ 」を満たす。

^{*4} オリジナルの定義 [19] より条件が少ないが同値な定義である。

る。また $\{\{1_\Gamma\}\}$ -eq-asdim($\Gamma \curvearrowright X$) の代わりに $\text{eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright X)$ と書くことにする。

幾何学群論において、Cayley グラフ然り、多くの場合非コンパクト距離空間への作用を考える。定義 2.3 を非コンパクト距離空間への作用に直接適用、具体的には群 Γ の標準的な作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ に直接適用すると同変漸近次元がゼロとなり意図する次元にならない。被覆次元 \dim の定義^{*5}の条件「有限開被覆」を匂わせつつの「有限個の開集合で U が生成される」を含むような新たな条件 (α) を定義 2.3 に加え、非コンパクト距離空間への作用でも意味をなすように、定義 2.3 を次のように拡張する^{*6}。

定義 2.4 ([11]) X は位相空間とする。 \mathcal{F} -ead($\Gamma \curvearrowright X$) を次の条件を満たす最小の非負整数 N とする：

任意の $E \in \Gamma$ に対し、ある $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X$ の開 \mathcal{F} -被覆 \mathcal{U} が存在し定義 2.3 の条件 (i), (ii) とさらに次の条件 (α) を満たす^{*7}:

(α) $\mathcal{U}[\{1_\Gamma\} \times X] := \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap (\{1_\Gamma\} \times X) \neq \emptyset\}$ は有限。

ただし、このような条件を満たす N が存在しないとき \mathcal{F} -ead($\Gamma \curvearrowright X$) = ∞ とする。また $\{\{1_\Gamma\}\}$ -ead($\Gamma \curvearrowright X$) の代わりに $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ と書くことにする。

注意 2.5 (1) $\mathcal{U}[\{1_\Gamma\} \times X]$ が $\{1_\Gamma\} \times X$ の有限開被覆で、 \mathcal{F} -被覆 \mathcal{U} を生成している。
(2) X がコンパクトならば、 \mathcal{F} -eq-asdim($\Gamma \curvearrowright X$) = \mathcal{F} -ead($\Gamma \curvearrowright X$) が成立 [11]。

正規空間^{*8} X の Stone-Čech コンパクト化 βX としたとき、 $\dim X = \dim \beta X$ が知られている [15]。ead に関しても同様な次の結果が得られる。

命題 2.6 ([11]) X を正規空間とし、 $\Gamma \curvearrowright \beta X$ を $\Gamma \curvearrowright X$ の Stone-Čech コンパクト化 βX への拡張した作用とする。このとき、以下が成立：

$$\mathcal{F}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright \beta X) = \mathcal{F}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright \beta X) = \mathcal{F}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

注意 2.7 (1) 命題 2.6 は \mathcal{F} -ead($\Gamma \curvearrowright X$) を求めるにあたり、正規空間 X はコンパクトを仮定して良いことを示唆している。しかし、現在知られている同変漸近次元関連の多くの結果はコンパクト距離空間への自由な作用についてである。もちろん通常 βX は距離空間でないため、多くの周知の結果を適用・利用できない。

(2) $\Gamma \curvearrowright \beta X$ は $\Gamma \curvearrowright X$ の幾何的な性質を遺伝することは期待できない。例えば、 $\Gamma \curvearrowright X$ は自由な作用であっても $\Gamma \curvearrowright \beta X$ は自由とは限らない (例 6.3 参照)。

(3) Stone-Čech コンパクト化はかなり複雑で大きなコンパクト化であるため、 X がコンパクトでないとき具体的な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対して \mathcal{F} -eq-asdim($\Gamma \curvearrowright \beta X$) を直接求めるのは有効ではない。実際このとき \mathcal{F} -ead($\Gamma \curvearrowright X$) を求めることになる。

^{*5} 被覆次元 \dim の定義は [15] を参照。

^{*6} 注意 5.1 にも \mathcal{F} -ead の定義の導入のその他の意義を書いている

^{*7} [11] の定義より条件が少ないが同値な定義である

^{*8} 本稿では正規空間は正規 Hausdorff 空間 T_4 を意味する。

注意 2.5(2) より、**これ以降** eq-asdim を ead に置き換えることにする。

注意 2.8 上述の結果から、 X が正規空間であるとき、[16, Theorems 1.3 and 4.7] を ead で書き直すと以下が得られる：

$$\text{asdim } \Gamma = \text{ead}(\Gamma \curvearrowright \Gamma) \leq \mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

$\mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ と $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ には明確な差があることが知られ、 $\mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の方が $\text{asdim } \Gamma$ により近いと考えられるが、ページの関係上、**これ以降**、作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は自由、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ を主に議論する。

ead の定義から次の結果が簡単に導かれる。

命題 2.9 (1) Γ の部分群 Λ 、 $\Lambda \curvearrowright X$ を $\Gamma \curvearrowright X$ の制限した作用とすると、

$$\text{ead}(\Lambda \curvearrowright X) \leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

(2) $\Gamma \curvearrowright X_i$ を作用、 $f: X_0 \rightarrow X_1$ を Γ -同変 ^{*9}写像に対し

$$\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X_0) \leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X_1)$$

また、漸近次元 $\text{asdim } \Gamma$ について以下のことがよく知られ、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ についても同様な結果が得られる。

定理 2.10 ([14, Theorem 2.1]) Γ を可算群とする。このとき、

$$\text{asdim } \Gamma = \sup_{F \in \Gamma} \text{asdim} \langle F \rangle \text{ } ^{*10}$$

命題 2.11 ([11]) $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき、

$$\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \sup_{F \in \Gamma} \text{ead}(\langle F \rangle \curvearrowright X)$$

3 Sawicki の不等式 [20]

決定問題 1.2 の解決にあたり、重要になるのが $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の不等式による評価になる。まず、注意 2.8 による下からの $\text{asdim } \Gamma$ の評価が知られているが、次の Sawicki [20] による上からの評価がある。

定理 3.1 (Sawicki [20]) $\Gamma \curvearrowright X$ をコンパクト距離空間 X への自由な作用とする。もし $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ ならば、

$$\text{asdim } \Gamma \leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \text{asdim } \Gamma + \dim X$$

が成立する。

注意 3.2 定理 3.1 の有限性条件「 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ 」について：

^{*9} 任意の $(\gamma, x) \in \Gamma \times X_0$ に対し $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ を満たす。

^{*10} ここで、 $\langle F \rangle$ は F によって生成される Γ の部分群とする。

(1) Γ が有限生成実質的冪零群 (virtually nilpotent), X が有限次元コンパクト距離空間ならば, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ が成立する [2, Corollary 1.10]^{*11}。ここで, 有限生成実質的冪零群は $\text{asdim } \Gamma < \infty$ を満たす従順群^{*12}であることに注意する。

(2) [16, Theorem 6.6] の証明により, 任意の可算群 Γ に対し, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright \Sigma) = \text{asdim } \Gamma$ を満たす Cantor 集合 Σ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ が存在する。

(3) [8, Remark 3.10] の結果から, $\text{ead}(\mathbb{F}_2 \curvearrowright \Sigma) = \infty$ を満たす Cantor 集合 Σ への自由な作用 $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \Sigma$ が存在する。ここで $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ は自由群^{*13}とする。同様な議論より以下が得られる: 任意の可算非従順群 Γ に対し, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright \Sigma) = \infty$ を満たす Cantor 集合 Σ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ が存在する [10]。このことから, 定理 3.1 において有限性条件「 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ 」は削除できない。

4 局所有限群 Γ からの自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の同変漸近次元

定義 4.1 群 Γ が **局所有限**とは, すべての Γ の有限生成部分群が有限であるときにいう。例えば, すべての有限群, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ^{*14}は局所有限となる。[21, Theorem 2] より, 次が知られている: 可算群 Γ が局所有限である $\iff \text{asdim } \Gamma = 0$ 。また, 局所有限群は従順群であることに注意する。

Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk の定理を拡張した genus の結果 [1] を用いると, 以下の有限性問題 1.1 の部分的解決が得られる。

定理 4.2 ([10]) Γ を局所有限, X を正規空間, $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき,

$$\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \dim X$$

特に, もし Γ が有限かつ X がコンパクトならば, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ が成立する。

Γ を局所有限のとき, つまり $\text{asdim } \Gamma = 0$ のとき, 定理 4.2 から定理 3.1 の条件「 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ 」が削除できることに注意する。定理 4.2 の後半部分に関して, もし局所有限群 Γ が無限あるいは X が非コンパクトならば, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ とは限らないことにも注意する (例 4.9, 6.3 を参照)。

次に, X の連結性と $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の下限の評価の以下の関係が得られる。

定理 4.3 ([10]) $\Gamma \curvearrowright X$ を $(n-1)$ -連結空間 X への自由な作用とする。もし Γ が 2 以上の有限位数の元をもてば, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \geq n$ が成立する。

Γ が振れない群 (torsion-free group) のとき, 定理 4.3 は必ずしも成立しない (定理

^{*11} 有限性問題 1.1 の部分的解決を与えている。

^{*12} 従順群 (amenable group) について [12] の 9 章を参照。

^{*13} \mathbb{F}_2 は非従順群, $\text{asdim } \mathbb{F}_2 = 1$ であることに注意。

^{*14} \mathbb{Q} は有理数群, \mathbb{Z} は整数群。

5.6 を参照)。また、任意の群 Γ に対し、もし $\Gamma \curvearrowright X$ が連結空間 X への作用ならば、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \geq 1$ が知られている [11]。

定理 4.2 と 4.3 より、以下の決定問題 1.2 の部分的解決を与えられる。これにより、局所有限群 Γ から n 次元球面 S^n への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright S^n$ に対し、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright S^n) = n$ が得られる。筆者が知る限り、高次元において同変漸近次元を決定した最初の結果である。

系 4.4 ([10]) Γ を局所有限群、 X を $(n-1)$ -連結 n 次元正規空間、 $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = n$ が成立する。

以下のような存在問題は自然に考えられるが、局所有限群の部分的解決が得られる。

問題 4.5 (Γ に関する存在問題) Γ を (局所有限群とは限らない) 群とする。このとき、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq \text{asdim} \Gamma}$ に対し、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = n$ を満たすコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が存在するか?

系 4.6 ([10]) Γ を局所有限群とする。このとき、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = n$ を満たす n 次元コンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が存在する。

また、定理 4.2 と 4.3 より、以下の結果が得られる。

系 4.7 ([11]) Γ を 2 以上の有限位数の元をもつ群、 X を $(\dim X)$ -連結^{*15}な正規空間とする。もし $\dim X < \infty$ あるいは X がコンパクトならば、自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は存在しない。

定理 4.2 と系 4.6 により、有限群に関する以下の普遍性 (*) をもつ作用は存在しない。

系 4.8 ([10]) Γ を有限群とする。このとき、 Γ に関する次の普遍性(*) を持つコンパクト距離空間 U_Γ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright U_\Gamma$ は存在しない。

(*) 任意のコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し、 Γ -同変写像 $f: X \rightarrow U_\Gamma$ が存在する。

この章の最後に、無限同変漸近次元をもつ局所有限群から無限次元コンパクト距離空間への自由な作用を与えておく。

例 4.9 ([10]) S^n を n 次元球面、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ を対蹠的作用^{*16}とすると、系 4.4 より $\text{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n) = n$ 。 $\Gamma := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を無限生成局所有限群、 $X := \prod_{n=1}^{\infty} S^n$ をコンパクト無限次元距離空間、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ 達から自然に導かれる自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ を考える。このとき、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \infty$ が得られる。

^{*15} X が有限次元ではないとき、 $\dim X = \infty$ と表す。 ∞ -連結とは、任意の $k \geq 0$ に対し、 X は k -連結である。特に、可縮な空間は ∞ -連結である。

^{*16} $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \gamma \rangle$ のとき、同相写像 $\gamma: S^n \rightarrow S^n: x \mapsto -x$ から定義される作用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ とする。

5 非コンパクト空間への自由な作用の同変漸次元

注意 5.1 Γ を局所有限群としたとき, $\text{asdim } \Gamma = 0$ に注意すると, 系 4.6 より, 定理 3.1 の Sawicki の不等式の $\text{asdim } \Gamma$ による下からの評価は精度が良くないことになる。定理 4.3 はある制限上の $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の下からの評価を与えているが, 決定問題 1.2 の解決にあたり, もっと一般的な条件による $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の下からのいい評価を与える必要がある。コンパクト多様体 X 上の作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し, 被覆写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ とそれに伴う非コンパクト被覆空間 \tilde{X} への作用 $\Gamma \curvearrowright \tilde{X}$ を考え, p が Γ -同変であることに注意すると, 命題 2.9(2) から

$$\text{ead}(\Gamma \curvearrowright \tilde{X}) \leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

が成立する。つまり, コンパクト空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{asdim } \Gamma &\leq \sup\{\text{ead}(\Gamma \curvearrowright Z) \mid \text{非コンパクト } Z \text{ からの } X \text{ への } \Gamma\text{-同変写像が存在}\} \\ &\leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \end{aligned}$$

が成立し, 中辺は $\text{asdim } \Gamma$ による下からの評価よりは精度が良いことが期待できる。これにより, 非コンパクト空間への作用の同変漸次元 eq-asdim の拡張 ead は重要であり, さらに非コンパクト空間への作用の ead は元々の同変漸次元 eq-asdim の決定に重要な役割を担う可能性がある。また, これまでの幾何学群論での非コンパクト空間への作用の研究を利用することによって非コンパクト空間への作用の ead を決定できる可能性も期待できる。よって以下の問題を考える。

問題 5.2 (proper^{*17} cocompact^{*18} な作用の決定問題) 非コンパクト空間 X への proper cocompact かつ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ を決定せよ。

まず, 局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用の同変漸次元の有限性, つまり有限性問題 1.1 の部分的解決を与える。

定理 5.3 ([11]) $\Gamma \curvearrowright X$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき,

$$\text{asdim } \Gamma < \infty \iff \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$$

が成立する。さらに, 以下が成立する:

$$\text{asdim } \Gamma \leq \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \text{asdim } \Gamma + \dim X$$

注意 5.4 (1) 定理 5.3 は Sawicki の不等式の proper cocompact かつ自由な作用版ともいえる。ただし, 条件「 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ 」が必要ないことに注意する。

(2) $\Gamma \curvearrowright X$ を定理 5.3 の条件を満たす作用とする。もし X がコンパクトならば, $\Gamma \curvearrowright X$ が proper より, Γ は有限となり, 定理 4.2 から $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ が分かる。また, $\Gamma \curvearrowright X$ から proper の条件を外すと, 注意 3.2(3) より $\text{asdim } \Gamma = 1$ で X が

*17 任意の X のコンパクト部分集合 C に対し, $\{\gamma \in \Gamma \mid C \cap \gamma C \neq \emptyset\}$ が有限。

*18 ある X のコンパクト部分集合 K が存在し, $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ を満たす。

Cantor 集合のときでさえ同変漸近次元は有限とは限らない。また、局所コンパクト非コンパクト距離空間 X への cocompact でない proper かつ自由な作用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X$ で、 $\text{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X) = \infty$ を満たすものが存在することに注意する (例 6.3 参照)。

系 5.5 ([11]) Γ を 2 以上の有限位数の元をもつ群, X を $(\dim X)$ -連結局所コンパクト Hausdorff 空間とする。もし $\text{asdim } \Gamma < \infty$ ならば, proper cocompact かつ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は存在しない。

このことより振れない群について述べる。まず自由群 \mathbb{F} に関して, 以下の結果が得られる。

定理 5.6 ([11]) \mathbb{F} を自由群 ^{*19}, $\mathbb{F} \curvearrowright X$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき, $\text{ead}(\mathbb{F} \curvearrowright X) \in \{1, 2\}$ が成立する。

注意 3.2(3) より, アーベル群でない自由群 \mathbb{F} からコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\mathbb{F} \curvearrowright X$ で $\text{ead}(\mathbb{F} \curvearrowright X) = \infty$ を満たすものが存在する, すなわち定理 5.6 の条件「proper」は削除できない。また, 振れないアーベル群に関して, 以下の結果が得られる。ただし, 系 4.6 より定理 5.7 の Γ をアーベル群に変えることはできない。

定理 5.7 ([11]) Γ を振れないアーベル群, X を局所コンパクト Hausdorff 空間, $\Gamma \curvearrowright X$ を proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \in \{\text{asdim } \Gamma, \text{asdim } \Gamma + 1\}$ が成立する。

上述を鑑みると以下の問題が考えられる。

問題 5.8 Γ を振れない群, $\Gamma \curvearrowright X$ を連結な局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \text{asdim } \Gamma + 1$ は成立するか?

6 いくつかの結果と問題

定理 5.7 より, 自由な作用 $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ に対し, $\text{ead}(\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n) \in \{n, n+1\}$ が分かる。 n 次元コンパクト距離空間への自由な作用で類似した次の結果が得られる。

定理 6.1 ([11]) 以下を満たす自由な作用 $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \prod_{j=1}^n \mathbb{S}^1$ が存在する:

$$\text{ead}(\mathbb{Z}^n \curvearrowright \prod_{j=1}^n \mathbb{S}^1) \in \{n, n+1\}$$

$\text{asdim } \mathbb{Z}^n + \dim \prod_{j=1}^n \mathbb{S}^1 = 2n$ より以下の問題が考えられる。

問題 6.2 Sawicki の不等式「 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \text{asdim } \Gamma + \dim X$ 」の右辺の項 $\dim X$ を,

^{*19} $\text{asdim } \mathbb{F} = 1$ に注意。

より良い上限の評価ができるように変えることができるか？

例 6.3 [13] より以下の重要な結果が知られている：

- (1) $\Gamma \curvearrowright X$ を巡回群 Γ からパラコンパクト Hausdorff 空間 X への自由な作用とする。もし $\dim X < \infty$ ならば、 $\Gamma \curvearrowright X$ の拡張 $\Gamma \curvearrowright \beta X$ も自由な作用となる。
- (2) 拡張 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \beta X$ が自由でない、局所コンパクト非コンパクト無限次元距離空間 X への自由な作用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X$ が存在する *20。

系 6.4 ([11]) $\Gamma \curvearrowright X$ を正規空間 X への自由な作用とする。もし $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ ならば、 $\Gamma \curvearrowright X$ の拡張 $\Gamma \curvearrowright \beta X$ も自由な作用となる。特に、もし Γ が有限ならば、逆も成立する。

以上のことから Stone-Ćech コンパクト化に関して以下の問題が考えられる。

問題 6.5 X は非コンパクト正規空間、 $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用、 $\text{asdim} \Gamma < \infty$ とする。

- (1) もし $\Gamma \curvearrowright \beta X$ が自由ならば、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ は成立するか？ [11]
- (2) もし $\Gamma \curvearrowright X$ が cocompact ならば、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright \beta X \setminus X) = \text{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ は成立するか？

実質的幕零群と局所有限群は従順群であることに再度注意して、注意 3.2 と定理 4.2 により、次の興味深い問題がある：

問題 6.6 (従順群の有限性問題 [10]) Γ を $\text{asdim} \Gamma < \infty$ を満たす無限従順群、 X を有限次元コンパクト距離空間、 $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ を満たすか？

問題 6.6 の双対的な問題として以下が考えられる。

問題 6.7 (従順群の無限性問題 [10]) Γ を $\text{asdim} \Gamma < \infty$ を満たす無限従順群とする。このとき、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \infty$ を満たす無限次元コンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は存在するか？特に、 $\Gamma = \mathbb{Z}$ あるいは \mathbb{Q}/\mathbb{Z} はどうか？

被覆次元に関する普遍性と同様に、同変漸近次元における以下の普遍性が考えられる。

問題 6.8 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ を群とする。このとき、 ead に関するコンパクト距離空間への次の普遍性 $(\star)_{\leq n}$ を持つ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright U_{\Gamma}$ は存在するか？：

$(\star)_{\leq n}$ 任意のコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し、 $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq n$ を満たすならば、 Γ -同変写像 $f: X \rightarrow U_{\Gamma}$ が存在する。

また、このときの $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright U_{\Gamma})$ を決定せよ *21

*20 $\text{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X) = \text{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \beta X) = \infty$ が成立。定理 5.3 を参照。

*21 Γ を有限群のとき、普遍性 $(\star)_{\leq n}$ をもつ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright U_{\Gamma}$, $\text{ead}(\Gamma \curvearrowright U_{\Gamma}) = n$ が知られている [10]。

参考文献

- [1] J. M. Aarts, G. A. Brouwer, R. J. Fokkink and J. Vermeer, *Intersection properties for coverings of G -spaces*, *Topology Appl.* 125 (2002), no. 2, 249–261.
- [2] A. Bartels, *Coarse flow spaces for relatively hyperbolic groups*, *Compos. Math.* 153 (2017), no. 4, 745–779.
- [3] A. Bartels and M. Bestvina, *The Farrell-Jones conjecture for mapping class groups*, *Invent. Math.* 215 (2019), no. 2, 651–712.
- [4] A. Bartels, W. Lück, *The Borel conjecture for hyperbolic and $CAT(0)$ -groups*, *Ann. of Math. (2)* 175 (2012), no. 2, 631–689.
- [5] A. Bartels, W. Lück and H. Reich, *The K -theoretic Farrell-Jones conjecture for hyperbolic groups*, *Invent. Math.* 172 (2008), no. 1, 29–70.
- [6] A. Bartels, W. Lück and H. Reich, *Equivariant covers for hyperbolic groups*, *Geom. Topol.* 12 (2008), no. 3, 1799–1882.
- [7] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, *Topology Appl.* 155 (2008), 1265–1296.
- [8] C. Bönicke, *On the dynamic asymptotic dimension of étale groupoids*, *Math. Z.* 307 (2024), no.1, Paper No. 16.
- [9] N. Chinen and T. Yamauchi, *On a characterization of N - \mathcal{F} -amenability*, preprint.
- [10] N. Chinen and T. Yamauchi, *Equivariant asymptotic dimension for free actions of locally finite discrete groups*, in preparation.
- [11] N. Chinen and T. Yamauchi, *Equivariant asymptotic dimension for actions on non-compact spaces*, in preparation.
- [12] M. Coornaert, *Topological dimension and dynamical systems*, Translated and revised from the 2005 French original. Universitext. Springer, Cham, 2015.
- [13] E. K. van Douwen, *βX and fixed-point free maps*, *Topology Appl.* 51 (1993), 191–195.
- [14] A. Dranishnikov and J. Smith, *Asymptotic dimension of discrete groups*, *Fund. Math.* 189 (2006), no. 1, 27–34.
- [15] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10. Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- [16] E. Guentner, R. Willett, and G. Yu, *Dynamic asymptotic dimension: relation to dynamics, topology, coarse geometry, and C^* -algebras*, *Math. Ann.* 367 (2017), 785–829.
- [17] M. A. Krasnosel’skiĭ, *On special coverings of a finite-dimensional sphere*, (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 103 (1955), 961–964.
- [18] M. A. Krasnosel’skiĭ and P. P. Zabreĭko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 263. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [19] D. Sawicki, *On equivariant asymptotic dimension*, *Groups Geom. Dyn.* 11 (2017) 977–1002.
- [20] D. Sawicki, *Warped cones, (non-)rigidity, and piecewise properties. With an appendix by Dawid Kielak and Sawicki*, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 118 (2019), 753–786.
- [21] J. Smith, *On asymptotic dimension of countable abelian groups*, *Topology Appl.* 153 (2006), no. 12, 2047–2054.