平面代数曲線補集合のトポロジー

菅原　朔見　(北海道大学大学院理学院数学専攻，JSPS 特別研究員 DC1)*

1 序

$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ を被約な複素二変数多項式とし，$C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ を f が定義する代数曲線とする．代数曲線は最も基本的な代数多様体であり，代数幾何，トポロジーの両観点から長く研究されてきた対象である．本稿では，補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ のトポロジーについて扱う．

平面代数曲線の補集合のトポロジーに関して最も注目すべき最初の結果は 1929 年の Zariski によるもの [22] であろう．Zariski は元々，与えられた平面曲線を分岐集合として持つ二変数関数の存在（分岐被覆の存在）問題を考えており，それを補集合の基本群の問題へと帰着させ，補集合の基本群を計算する手法について考察した．基本群を計算する手法は後に van Kampen[12] により完成され，現在 Zariski–van Kampen の方法として，代数曲線のトポロジーにおける基本的な技術として知られている（Zariski–van Kampen の方法については [17, 18] も参照）．

主題とはやや逸れるが，Zariski の論文 [22] において述べられたいくつかの問題は，その後長年の代数曲線のトポロジーにおける主要な研究対象となっていた．例えば，「通常二重点のみを特異点として持つ曲線の補集合の基本群は可換であるか」という問 *1は Zariski 予想として長年注目された．他にも，特異点の “組合せ的情報” が等しいが補集合のトポロジーが異なる曲線の組（現在 Zariski 対と呼ばれる）についても言及されていた．Zariski 対は 1990 年代以降多くの研究者により調べられ，現在も注目されている対象である [3].

さて，Zariski–van Kampen による補集合の基本群を求めるアルゴリズムは，1980 年頃 Moishezon により導入されたブレイドモノドロミーの概念へと発展する [15]．ブレイドモノドロミーにより得られる補集合の基本群の表示は Zariski–van Kampen の方法に比べて表れる関係式の数が少なく，「良い」表示である．実際 Libgober により，ブレイドモノドロミーにより得られる基本群の表示に付随して定まる 2 次元 CW 複体が，補集合とホモトピー同値となることが示されている [13]．さらにその後 Artal–Carmona–Cogolludo により，$\mathbb{C}^2$ 内の曲線の射影閉包として得られる $\mathbb{C}P^2$ 内の射影曲線の埋め込みの位相が，

---

* 〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目北海道大学大学院理学院数学専攻
e-mail: sugawara.sakumi.f5@elms.hokudai.ac.jp
web: https://sites.google.com/view/sakumisugawara/
本研究は科研費 (課題番号:22KJ0114) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32S50, 32Q55, 57K40, 57R65
キーワード：代数曲線，ブレイドモノドロミー，ハンドル分解，Kirby 図式

*1 Zariski は同論文でこの主張が正しいと述べたが，その証明にはギャップがあった．Zariski 予想は，1980 年頃 Fulton，Deligne により解決された [6, 9].

ブレイドモノドロミーによって決まることが示された [2]（彼らは補集合の微分同相型を具体的に記述したわけではないことに注意する）．このように代数曲線のトポロジーにおいてブレイドモノドロミーは強力な手法であった．そして著者は近年，ブレイドモノドロミーのアイデアに基づき，平面代数曲線補集合のハンドル分解や Kirby 図式の記述を得た [19]．本稿では，Libgober によるブレイドモノドロミーを用いたホモトピー型の記述から復習し，著者による研究で得られた結果について紹介したい．

2 基本的な例，1 次ホモロジー群

まず本題へ入る前に，代数曲線の補集合としてどのような空間が現れるか，基本的な例を通して紹介したい．

例 2.1 曲線 $C=\{y=0\}$ とする．このとき，補集合は $M=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid y\neq 0\}\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ となり，S^1 とホモトピー同値である．1 次ホモロジー群 $H_1(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ の生成元は複素直線 $y=0$ の周りを小さく回るループにより代表される．

例 2.2 曲線 $C=\{xy=0\}$ とする．このとき, 補集合は $M=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x,y\neq 0\}\cong\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ となり，$S^1\times S^1$ とホモトピー同値である．1 次ホモロジー群 $H_1(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^2$ の生成元はそれぞれ複素直線 $x=0,\ y=0$ の周りを小さく回るループにより代表される．

例 2.3 曲線 $C=\{x^p+y^q=0\}$ とする．ただし p,q はともに非負整数であるとする．原点中心とする球体 B^4 と曲線との交わり $B^4\cap C$ は，その境界との交わり $S^3\cap C$ の錐となる（[14], Theorem 2.10）ので，補集合は $(S^3\setminus(S^3\cap C))\times(0,\infty)$ と同相である．曲線 C が S^3 との交わりで作る絡み目は $T(p,q)$（(p,q)-トーラス絡み目）であるから，曲線の補集合は $S^3\setminus T(p,q)$ とホモトピー同値である．上記二つの例は，座標変換を行うことでそれぞれ $(p,q)=(0,1),(2,2)$ の場合とみなせる．

一般に，平面曲線の補集合の 1 次ホモロジー群について次が成り立つ．

命題 2.4 $\mathbb{C}^2$ 内で定義された代数曲線 C が r 個の既約成分を持つとする．このとき $H_1(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^r$ である．

これは Lefschetz 双対定理とホモロジー群の長完全列を使うことで証明できる．詳細は [7] の Proposition 4.1.3 などを参照されたい．これは S^3 内の絡み目の補集合の 1 次 Betti 数が絡み目の成分数と一致することに類似する結果である．

3 ブレイドモノドロミーによる基本群，ホモトピー型の記述

本節では，代数曲線のブレイドモノドロミーについて述べ，補集合の基本群やホモトピー型について紹介する．ブレイドモノドロミーに関する詳細は [4, 5, 15] を参照されたい．また，代数曲線補集合の基本群については，[18] の第一部に詳細な解説がある．そち

らも参照されたい．

$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ を複素二変数の被約な n 次多項式とし，y^n の係数が 0 でないと仮定する．多項式 $f(x,y)$ が定める代数曲線を $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ とし，その補集合を $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ とおく．第一成分への射影を $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ とし，各 $x \in \mathbb{C}$ に対し，$L_x = \pi^{-1}(x)$ とおく．射影の各ファイバーと曲線の交わり $L_x \cap C$ は高々 n 点集合であることに注意する．複素平面 $\mathbb{C}$ 内の部分集合 X を以下で定義する：

$$X = \{p \in \mathbb{C} \mid \#(L_p \cap C) < n\}.$$

これは L_p が C と接するか，C の特異点を含むような点 p の集まりである．別の言い方をすれば，各 $p \in \mathbb{C}$ を固定するごとに得られる y についての n 次多項式 $f(p,y)$ が重根を持つような p の集まりである．X は有限集合であり，$X = \{p_1, \ldots, p_N\}$ と表す．任意の $p_i \in X$ に対して，L_{p_i} が C の特異点または C との接点を高々 1 点含むようにジェネリックに仮定できる．このとき以下が成り立つ．証明は例えば [7] の Lemma 3.3.5 などを参照．

命題 3.1　射影の制限 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \to \mathbb{C} \setminus X$ は $\mathbb{C} \setminus (n \text{ points})$ をファイバーに持つファイバー束である．

このファイバー束のモノドロミーについて観察していく．各点 $p_i \in X$ を中心とする十分小さい円板 U_i とし，これの境界の円周から一点 $p'_i \in \partial U_i$ をとる．基点 $p_0 \in \mathbb{C} \setminus X$ をとり，p_0 と p'_i を結ぶ自己交叉のない道 s_i を，「$i \neq j$ ならば $s_i \cap s_j = \{p_0\}$」となるようにとる（このような道の集まり $(s_1, \ldots, s_N)$ を基点 p_0 と集合 $\{p'_1, \ldots, p'_N\}$ に関する Hurwitz 系と呼ぶことにする）．p_0 を基点とし，s_i, ∂U_i, s_i^{-1} を結んでできる道のホモトピー類を $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0)$ とおく．$\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ は $\pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \cong F_N$ (階数 N の自由群) の生成系をなす．各ループ γ_i に沿って，ファイバー束 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \to \mathbb{C} \setminus X$ を自明化することで，L_{p_0} 内の $L_{p_0} \cap C$ を保つような自己同相が得られる．そのためこのファイバー束からは準同型

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \to B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$$

を得る．ここで，$B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ は $L_{p_0} \cap C$ を保つような L_{p_0} の写像類群であり，n 本の紐からなるブレイド群 B_n と同型である．そのため，この準同型 Φ は代数曲線のブレイドモノドロミーと呼ばれる．各生成元 γ_i に対するモノドロミーを $\beta_i = \Phi(\gamma_i) \in B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ とおく．

基点のファイバーと曲線の交わりを $L_{p_0} \cap C = \{q_1, \ldots, q_n\}$ とおく．$L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C)$ から基点 q_0 をとり，基点 q_0 と集合 $\{q_1, \ldots, q_n\}$ に関する L_{p_0} 内の Hurwitz 系をとり，先と同様に対応する $\pi_1(L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C), q_0)$ の生成元を $e_1, \ldots, e_n$ とする．

また，$p \in \partial U_i$ に対して $L_p \cap C$ は n 点集合である．点 p が p_i に近づくとき，このうち m_i 点が一点に潰れる（L_{p_i} が C と横断的に交わるとき，m_i は特異点の重複度に一致

する）と仮定し，この潰れる m_i 点に対応する $L_{p_0} \cap C$ の点の集まりを $\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_{m_i}}\}$ とおく．対応する添字集合を $I_i = \{i_1, \ldots, i_{m_i - 1}\}$ とおく．

以上の準備のもと，以下が成り立つことが知られている．

定理 3.2 ([13]) 補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ は以下の基本群の表示から得られる 2 次元の CW 複体とホモトピー同値である：

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \cong \langle e_1, \ldots, e_n \mid \beta_i \cdot e_j = e_j,\, i = 1, \ldots, N, j \in I_i \rangle.$$

ここで $\cdot$ はブレイド群の自由群への Artin 作用を表す．

この定理は補集合を上記の表示を持つ 2 次元 CW 複体へとレトラクトさせていくことで証明される．ここで，「S^3 内の結び目群の Wirtinger 表示，そして Artin 表示が表す 2 次元 CW 複体は補集合とホモトピー同値である」という事実を局所的に用いている．添字集合 I_i が m_i 個ではなく $m_i - 1$ 個の元からなるのは，結び目群の Wirtinger 表示や Artin 表示の不足数が 1 であることに由来する．

さて著者の研究は，ここで得られた基本群の表示の生成元が 1-ハンドルに，関係式が 2-ハンドルに対応するようなハンドル分解を補集合が持つのではないか，という疑問が出発点であった．

4 補集合のハンドル分解

本節では，代数曲線の補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ のハンドル分解について述べる．本節と次節の内容について，詳細は著者のプレプリント [19] を参照されたい．

補集合 M は開多様体であるので，$\mathbb{C}^2$ 内の十分大きな半径を持つ多重円板 $D \times D$（角を解消すれば 4 次元球体と微分同相）と曲線に対する十分小さくジェネリックな正則近傍 $\nu(C)$ をとり，$M_0 = (D \times D) \setminus \nu(C)$ のハンドル分解を考えることにする．このとき M_0 はコンパクト境界付き 4 次元多様体であり，M_0 の内部は M と微分同相である．射影 π を M_0 へと制限したものを $\pi_0 : M_0 \to D$ とおく．このとき，π_0 の制限 $\pi_0 : M_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \pi_0^{-1}(U_i)\right) \to D \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i$ はやはりファイバー束であり，そのファイバーは $n+1$ 個の境界成分を持つ種数 0 の曲面（つまり，大きさのある穴を n 個開けた円板 D_n）であることに注意されたい．

基点 p_0 と ∂D を結ぶ自己交叉のない道 s_0 で，$s_0 \cap s_i = \{p_0\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ となるようなものをとり，各 $i = 0, 1, \ldots, N$ に対して道 s_i の十分小さい管状近傍 $\nu(s_i)$ とする．さらに $\nu(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^N U_i \cup \bigcup_{i=0}^N \nu(s_i)$ とおく（図 1 を参照）．

このとき，$D \setminus \nu(\Gamma)$ は円板と同相であり，したがって可縮である．よってこの上では，射影から得られるファイバー束は自明となり，ファイバーは n 個穴あき円板 D_n であるから，次を得る．

命題 4.1 $\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ は 1 ハンドル体 $\natural_n(S^1 \times D^3)$ $(\cong D_n \times D^2)$ と微分同相である．

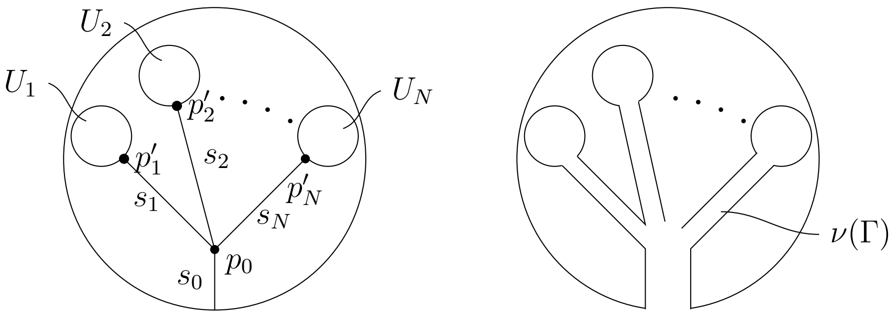

図 1　道の集まり $s_0, s_1, \ldots, s_N$ と $\nu(\Gamma)$

ハンドル分解を求めたい多様体は $M_0 = \pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cup \pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ であるから，後は上記の 1 ハンドル体に $\pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ がどのように接着されているかを見ればよい．

各 $i = 1, \ldots, N$ に対し，$V_i \subset U_i$ を p_i を中心とする円板で，任意の $p \in V_i$ が $L_p \cap C \cong D_{n-(m_i-1)}$ を満たすようにとる．点 p_i のまわりでパーツ分けし，A, B を図 2 のように定める．

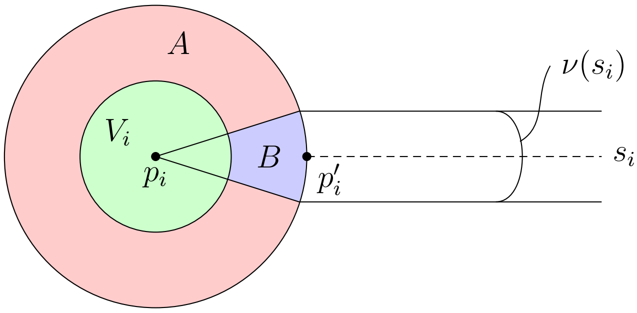

図 2　領域 A と B

このとき，実は $\pi_0^{-1}(A)$，$\pi_0^{-1}(V_i)$ を順に接着しても多様体の微分同相型が変わらないことがわかる [*2]．そして，残る部分 $\pi_0^{-1}(B)$ をこれに接着することが，$m_i - 1$ 個の 2-ハンドル接着になっている．この 2-ハンドル接着の概要を，簡単のために $m_i = 2$ と仮定して見てみよう．B の両端の連結成分について，∂U_i 側では $L_p \cap C$ から得られる二つの連結成分があるが，V_i 側では，V_i に対する仮定より $L_p \cap C$ から得られる連結成分は一つになっている（図 3）．さらに図のように，∂U_i 側から V_i 側へ近づくにつれ，$L_p \cap C$ から得られる連結成分が二つから一つへ真っ直ぐに減っていることがわかる [*3]．B を放物線状の孤で区切っていき，そのファイバーの様子を見ていくと，孤 α_2 のファイバー上にある青色の円が孤を右に進めていくと消えていく様子がわかる（図 4）．このとき，この青い円がハンドルの接着円となるような，2-ハンドルの接着が行われていることがわかる [*4]．

[*2] 詳細は [19] の 6 ページの議論を参照．

[*3] これは C の正則近傍を十分小さくとることにより可能になっている．

[*4] 実際に 2-ハンドルの接着になっていることは，境界の 3 次元多様体へ制限して得られる安定写像が不定値折

また，$m_i \geq 3$ の場合もこの操作を繰り返していくことで，同様の 2-ハンドルの接着が行われることがわかる．残りの部分 $\pi_0^{-1}(\nu(s_i))$ の接着は全て多様体の微分同相型をかえず，結局各 i に対して，$m_i - 1$ 個の 2-ハンドルが接着されるようなハンドル分解を M_0 は持つことがわかる．

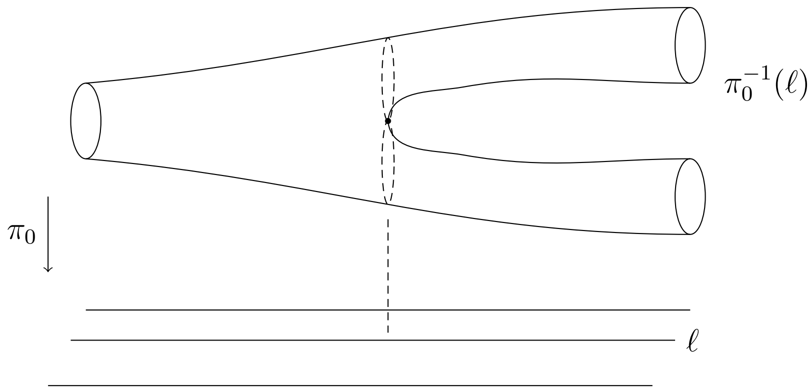

図 3　$\pi_0^{-1}(B)$ の様子．ℓ は B 内の半径方向に伸びる直線である．

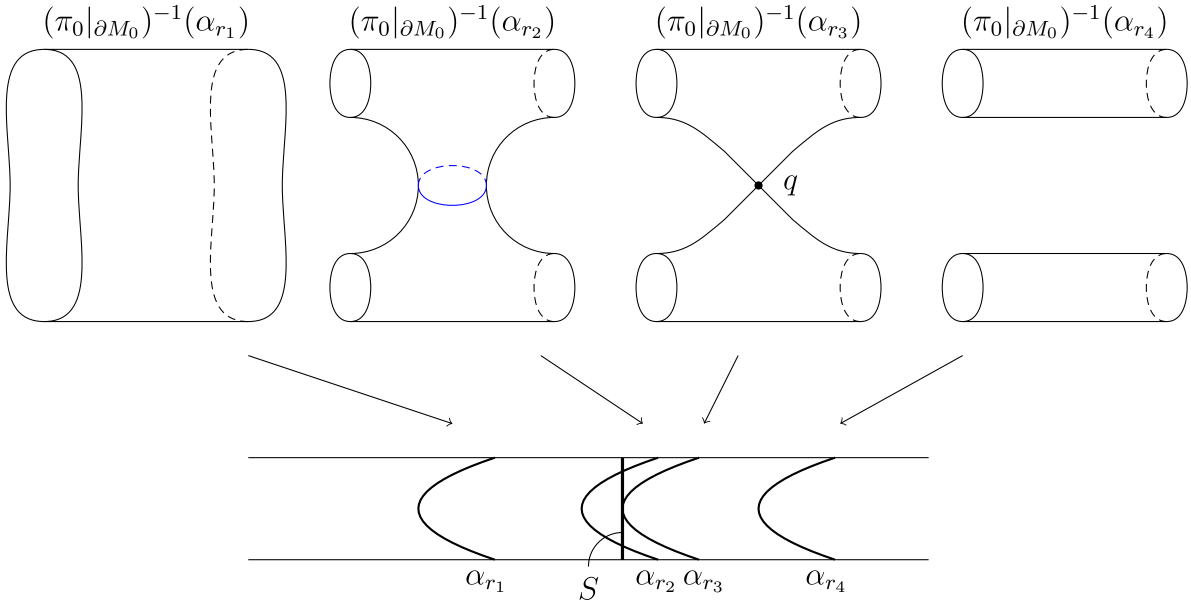

図 4　B 内の孤とその上のファイバー

5　補集合の Kirby 図式

本節では，前節で得られたハンドル分解を表す Kirby 図式の記述方法について述べる．4 次元多様体のハンドル分解や Kirby 図式については，[1, 8, 11] を参照．

補集合 M_0 は 2-ハンドル体であることがわかったので，1-ハンドルの接着を表す点付き円，2-ハンドルの接着を表す枠付き絡み目を描ければよい．まず初めに，1-ハンドル

り目のみを特異点にもつことを用い，具体的に座標を表示することからわかる．

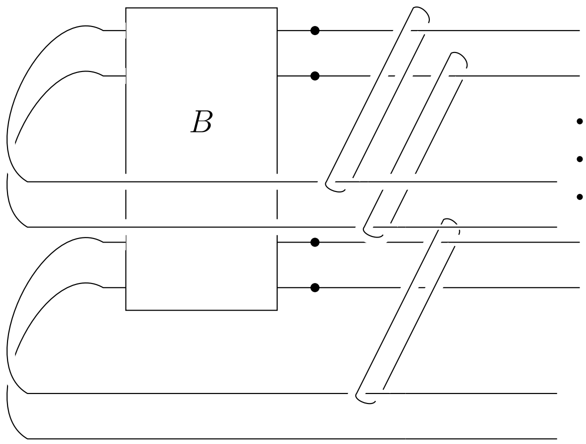

図 5　Kirby 図式の局所的な様子

の接着は，適切に埋め込まれた円板 D^2 を取り除くこと（キャンセリング 2-ハンドルの除去）によっても得られることを思い出す．このようにして得られる 1-ハンドル接着の Kirby 図式における点付き円は，取り除かれる円板の境界 ∂D^2 そのものであった（キャンセリング 2-ハンドルのベルト球面に対応）．現在ハンドル分解を考えている多様体の 1-ハンドル体は，$\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ である．そして，これは 4 次元球体 $\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ から $\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cap C$ が作る n 個の互いに交わらない適切に埋め込まれた円板を除くことにより得られている．よって 1-ハンドル接着を表す点付き円は $\pi^{-1}(\partial(D \setminus \nu(\Gamma))) \cap C$ となる．

続いて 2-ハンドルの接着を考える．2-ハンドルの接着は，各 $p_i \in X$ に対し，L_{p_i} の周りで局所的に行われていた．このとき，Kirby 図式において 2-ハンドルの接着を表す接着円は，ブレイドに橋をかけるように，図 5 のように表される．ここで，B は p_i に付随する局所的なモノドロミーを表すブレイドである．これらをつなぎ合わせていくことで，M_0 の Kirby 図式を得る．また，フレーミング係数はどのような場合でも全て 0 であることもわかる．

例 5.1　定義式を $f(x,y) = x^p - y^q$ とする．このとき $X = \{0\}$ である．グラフ Γ を図 6 のようにすると，そこから得られる Kirby 図式は図 7 のようになる．ここで，$B_{p,q}$ は q 本の紐からなるブレイド群 B_q の元で，隣り合う i 番目と $i+1$ 番目の紐の半捻りを表す標準的な生成元 σ_i とした時に，$B_{p,q} = (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{q-1})^p$ と表される元である．

6　今後の展望

6.1　Stein 構造

複素多様体が複素ユークリッド空間に双正則埋め込みができるとき，Stein 多様体と呼ばれる．代数曲線の補集合は，対応 $\mathbb{C}^2 \ni (x,y) \mapsto (x,y,1/f(x,y)) \in \mathbb{C}^3$ により $\mathbb{C}^3$ に埋め込まれ，Stein 多様体となる（M は複素 2 次元のため，特に Stein 曲面である）．Stein

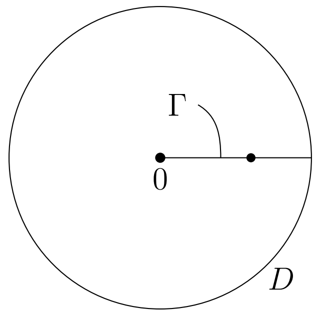

図 6　定義式 $f(x,y)=x^p-y^q$ に対して定まるグラフ Γ

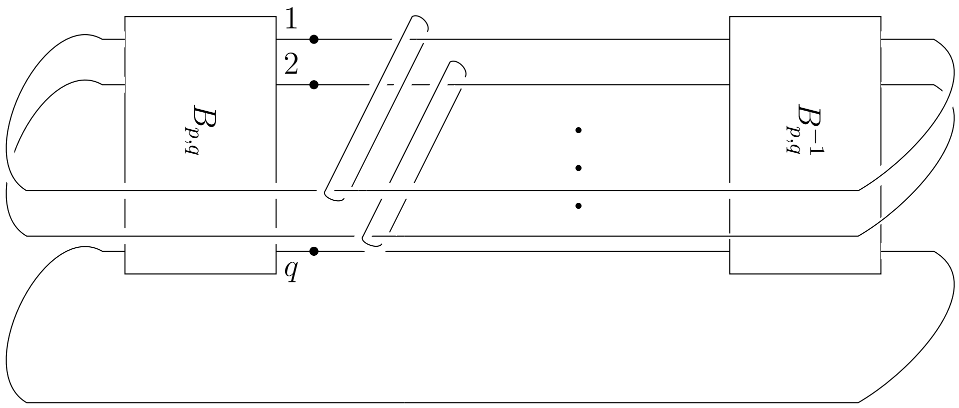

図 7　曲線 $x^p-y^q=0$ の補集合の Kirby 図式

曲面は複素解析だけでなく，4 次元トポロジーの観点からも盛んに研究されている対象である [10, 16]．複素多様体が Stein 構造を許容する同値条件として，その多様体の上に狭義多重劣調和（strictly plurisubharmonic, spsh と略す）関数が存在するというものが知られている．spsh 関数が存在したとき，ジェネリックにそれは Morse 関数と仮定してよい．したがって，この spsh 関数からハンドル分解を得ることができる．このように得られたハンドル分解を Stein 構造に適合するハンドル分解という．

本研究では，代数曲線の補集合を具体的なパーツに分解することでハンドル分解を得ており，spsh 関数を用いて構成されているものではない．そこで M の Stein 構造と適合するハンドル分解を求めることは自然な問題である．（ちなみに，[20] において，複素化実直線配置の補集合のハンドル分解が記述されているが，これは [21] において多重劣調和 Morse 関数を用いて得られたホモトピー型を元に構成されており，Stein 構造に適合するハンドル分解である．）

6.2　射影曲線

本稿ではアフィン空間 $\mathbb{C}^2$ 内の平面曲線の補集合のトポロジーを扱った．そこで，射影空間 $\mathbb{C}P^2$ 内の射影平面曲線の補集合のトポロジーを調べることは自然な問いであろう（アフィン曲線は，既約成分の一つに直線を持つような射影曲線だとみなせる）．Zariski–van Kampen の方法により，基本群は「すべての生成元の積 $=1$」を追加すれば

得られる．しかしながら著者の知る限りでは，Libgober の定理のようなホモトピー型や同相型を具体的に記述する一般的な方法はまだ知られていない（[4] の Question 3.2.2 も参照）．射影空間 $\mathbb{C}P^2$ は $\mathbb{C}^2$ に無限遠直線 $\mathbb{C}P^1$ を貼り合わせて得られるが，これに対応する曲線の補集合の貼り合わせの記述が問題である．

他にも，代数曲線のトポロジーにおいては，モジュライ空間の連結性や，Zariski 対の存在やその判別などの基本的で重要な問題がある．これらに対しても，ハンドル分解や Kirby 図式を用いた新たなアプローチができることを期待したい．

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招きいただきました，世話人の宮澤康行先生，茂手木公彦先生，佐藤進先生に心より御礼を申し上げます．

参考文献

[1] S. Akbulut, 4-manifolds. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 25. *Oxford University Press, Oxford*, (2016), xii+262 pp.

[2] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, and J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy and topology of plane curves, *Duke Math. J.* **118** (2003), 261–278.

[3] E. Artal Bartolo, J. I. Cogolludo Agustín, A survey on Zariski pairs, *Algebraic geometry in East Asia–Hanoi 2005*, *Adv. Stud. Pure Math.* 50, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2008), 1–100.

[4] J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy of algebraic curves, *Ann. Math. Blaise Pascal* **18** (2011), no. 1, 141–209.

[5] D. C. Cohen, A. Suciu, The braid monodromy of plane algebraic curves and hyperplane arrangements. *Comment. Math. Helvetici* **72** (1997), no. 2, 285–315.

[6] P. Deligne, Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d'aprés W. Fulton), *Bourbaki Seminar*, Vol. 1979/80, Springer, Berlin, 1981, pp. 1-10

[7] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Universitext, *Springer-Verlag, New York*, (1992), xvi+263 pp.

[8] 遠藤久顕，早野健太，4 次元多様体とファイバー構造 –レフシェッツ束のトポロジー–，ひろがるトポロジー，共立出版（2024）

[9] W. Fulton, On the fundamental group of the complement of a node curve, *Ann. of Math.*, **111**, No. 2 (1980), 407–409.

[10] R. E. Gompf, Handlebody construction of Stein surfaces, *Ann. of Math.* **148** (1998), no. 2, 619–693.

[11] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, Graduate Studies in Mathematics, 20. *American Mathematical Society, Providence, RI*, (1999), xvi+558 pp.

[12] E. R. van Kampen, On the fundamental group of an algebraic curve, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 255–260.

[13] A. Libgober, On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves, *J.*

Reine Angew. Math., **367** (1986), 103-114.

[14] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton (1968).

[15] B. Moishezon, Stable branch curves and braid monodromies, Lectures Notes in Math., 862, *Springer-Verlag*, (1981), 107–192.

[16] B. Ozbaci, A. Stipsicz, Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces, Bolyai Soc. Math. Stud., 13, *Spreinger-Verlag, Berlin; János Bolyai Mathematical Society, Budapest*, 2004, 281 pp.

[17] I. Shimada, Lecture on Zariski van Kampen theorem, Lecture Notes, 2007. (https://home.hiroshima-u.ac.jp/ichiro-shimada/lectures.html)

[18] 石川剛郎，徳永浩雄，島田伊知朗，齋藤幸子，福井敏純，代数曲線と特異点，特異点の数理 4，共立出版（2001）

[19] S. Sugawara, Handle decompositions and Kirby diagrams for the complement of plane algebraic curves, arXiv:2306.10519, preprint.

[20] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, *Topology and its Applications*, **313** (2022), 107989.

[21] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem, *Kodai Math. J.* **30** (2007) no. 2, 157–194.

[22] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic function of two variables possessing a given branch curve, *Amer. J. Math.*, **51** (1929), 305–328.

佐々木多様体の非可換Hodge対応とUniformization

糟谷　久矢　(大阪大学)*

概　　要

1. Introduction

負のオイラー数を持つコンパクトリーマン面は上半平面 H(単位円盤 B) の $PSL_2(\mathbb{R})$ ($PSU(1,1)$) の離散群商 $\Gamma\backslash H$ ($\Gamma\backslash B$) で表される．この古典的な一意化定理 (Uniformmization) の Higgs 束を用いた別証明が Hitchin[7] により与えられている．Hitchin の方法により一意化される流れについて概観しよう．コンパクトリーマン面 M 上の正則ベクトル束 $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ 上に恒等写像 $T^{1,0}M \to T^{1,0}M$ から定まる Higgs 場 θ を与える．この Higgs 束 (E,θ) が安定であることと M のオイラー数が負であることは同値である．この時, 安定な Higgs 束は M の基本群 $\pi_1(M)$ の $SU(1,1)$ 表現に対応する (非可換 Hodge 対応 [10, 12])．この対応する表現 $\pi_1(M) \to SU(1,1)$ が一意化 $M = \Gamma\backslash B$ を与える．

もう少し Hitchin の構成について詳しくみよう．Hitchin の定理 [7](より一般に Simpson の Higgs 束の小林-Hitchin 対応 [10]) により, 上記 Higgs 束 (E,θ) が安定 ($\Leftrightarrow$ オイラー数が負) であれば E にはエルミート計量が存在して, Hitchin の (自己双対) 方程式

$$R^2 + \left[\theta, \overline{{}^t\theta}\right] = 0$$

$$\bar{\partial}_E\theta + \theta\bar{\partial}_E = 0$$

を満たす (R はエルミート計量から定まる曲率).

さらに, (E,θ) の S^1 対称性からエルミート計量は $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ を直交とするものであり, さらに Hitchin の方程式は

$$R^2 + \left[\theta, \overline{{}^t\theta}\right] = 0$$

$$D\theta + \theta D = 0$$

と書くことができる (D はエルミート計量から定まる接続)．これらの式は $SU(1,1)$ を構造群とする Maurer-Cartan 方程式と見ることができて, その Monodromy 表現として表現 $\pi_1(M) \to SU(1,1)$ が得られる．

話を (実)2 次元から 3 次元に持ち上げてみよう．リーマン面 M にエルミート計量を取り, それに関する単位円周束を $S(M)$ とする．この時, M の正則接束を $S(M)$ に引き戻した $S(M)$ 上の複素線束は, $(v,v) \in S(M) \times T^{1,0}M$ が大域的なフレームとなり $\mathcal{C}^\infty$ 自明化される．この自明化より, M の Levi-Civita 接続の接続形式は $S(M)$ 上大域的に定義された実微分形式 η を定める．また考えていた Higgs 場 θ は $S(M)$ 上の複素微分形式 w を定める．これに関して, 上記 Hitchin の構成を考える．得られたエルミート計量は $K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ を直交としているため, $K^{-1/2}$ にエルミート計量を定めていることになり

本研究は科研費 (課題番号:19H01787, 24K00524) の助成を受けたものである。
* 〒560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: kasuya@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: https://sites.google.com/site/hisashikasuyamath/home

$T^{1,0}M = \left(K^{-1/2}\right)^2$ に (つまり M に) エルミート計量を定める．Hitchin の方程式から得られた方程式

$$R^2 + \left[\theta, \overline{{}^t\theta}\right] = 0$$
$$D\theta + \theta D = 0$$

はこの M のエルミート計量から定まる $S(M)$ 上の自明化を考えることによって, $S(M)$ 上の微分形式に関する方程式

$$\sqrt{-1}d\eta + w \wedge \bar{w} = 0$$
$$dw + 2\sqrt{-1}\eta \wedge w = 0$$

と表すことができる．この式は Lie 代数 $\mathfrak{su}(1,1)$ の構造関係式である．これによって, $S(M)$ がコンパクトであることから, $S(M)$ は $\widetilde{SU(1,1)}$($SU(1,1)$ の普遍被覆群) を普遍被覆に持つことがわかる．つまり, $S(M)$ は幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ を持つ 3 次元多様体である [9].

このような議論を 2 次元（複素 1 次元) から出発せずに 3 次元多様体上の幾何学として展開することが今回発表する理論の基本的発想である．

本稿のねらい

本稿では, 佐々木多様体の非可換 Hodge 対応と Uniformization に関して, 一般論を展開することよりも, トポロジー的に特に興味深いと思われる 3 次元佐々木多様体の場合にフォーカスしてより具体的に理解することを目指す. 同テーマについて, 次元の高い場合も含めたより概説的な記事, “ 佐々木多様体の Higgs 束、現状とこれから ”(2024 年日本数学会特別講演予稿) を Reseachmap で公開しているので, そちらも参照されたい.

2. 3 次元佐々木多様体:定義と例

ここでは, 3 次元の場合に限定して佐々木多様体について考える．一般の場合については Boyer-Galicki のテキスト [5] を参照されたい．M を実 3 次元可微分多様体とする．M の接触形式とは M 上の一次微分形式 η であって, $\eta \wedge d\eta$ が M の各点で 0 ではないものである．接触形式 η に対し M のベクトル場 ξ であって, $\eta(\xi) = 1$ かつ $\iota_\xi d\eta = 0$ を満たすものが一意に定まる (Reeb ベクトル場)．この時, $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker\eta$ である．佐々木構造 $(\eta, T^{1,0})$ とは, 接触形式 η と複素ベクトル束 $\ker\eta \otimes \mathbb{C}$ の複素部分線束 $T^{1,0} \subset \ker\eta \otimes \mathbb{C}$ で $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}}$ とおくと $T^{1,0} \cap T^{0,1} = 0$ となるもの (CR 構造) でありさらに以下を満たす:

- $T^{1,0} \ni \forall W \neq 0, \sqrt{-1}d\eta(W, \overline{W}) > 0;$
- $[\xi, \Gamma(T^{1,0})] \subset \Gamma(T^{1,0}).$

M のリーマン計量であって, $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker\eta$ は直交であり, ξ の長さは 1 かつ $\ker\eta$ 上では $d\eta$ から定まるエルミート計量となるものを考える．この計量は佐々木計量と呼ばれる．佐々木計量は計量錐をとるとケーラー計量になる．このような性質のリーマン計量として佐々木構造を定義することも可能である．

例 1 (標準的佐々木多様体) $M = \mathbb{R}^3$ とする．座標 $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\eta = dt + xdy$ とすると $\mathbb{R}^3$ の接触形式である．Reeb ベクトル場は ∂t である．$w = dx + \sqrt{-1}dy$ とおくと,

$$d\eta = \frac{\sqrt{-1}}{2} w \wedge \bar{w}.$$

$$dw = 0$$

が成立する. $T\mathbb{R}^{3*} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}w \oplus \mathbb{C}\bar{w}$ について, $\mathbb{C}w$ が双対になるように, $T^{1,0}$ を定めれば, $(\eta, T^{1,0})$ は $\mathbb{R}^3$ の佐々木構造である. (注: $T^{1,0} \neq \mathbb{C}\left(\partial x - \sqrt{-1}\partial y\right)$)

例 2 (Moving frame) Σ をリーマン面とする. Σ は各点で曲率が 0 にならないエルミート計量を持つとし, その単位円周束 $S(\Sigma)$ を考える. 正則接束を $S(\Sigma)$ に引き戻した $S(\Sigma)$ 上の複素線束は, $(v,v) \in S(\Sigma) \times T^{1,0}\Sigma$ が大域的なフレームとなり $\mathcal{C}^\infty$ 自明化される. この自明化より, Σ の Levi-Civita 接続の接続形式は $S(\Sigma)$ 上大域的に定義された実微分形式 η を定める. $d\eta$ は Σ の曲率である. (v,v) の双対となる $S(\Sigma)$ 上の複素微分形式を w とすると, 構造方程式

$$dw = -\sqrt{-1}\eta \wedge w,$$

$$d\eta = -\frac{\sqrt{-1}}{2} K w \wedge \bar{w}$$

を満たす (K はガウス曲率). よって, $\pm\eta$ と w によって $S(\Sigma)$ の佐々木構造が与えられる. Σ がケーラーであることから, Σ がコンパクトかつ第一 Chern 類 $c_1(\Sigma)$ が非自明ならば常にこのような構成によって佐々木多様体 $S(\Sigma)$ が得られる.

例 3 (Seifert ファイバー空間) Σ をコンパクトオービフォールドリーマン面とする. 通常のリーマン面の場合と同様にして, オービフォールドエルミート計量に対し, 単位円周束 $S(\Sigma)$ を考えると. $S(\Sigma)$ は Σ 上の Seifert 円周束であり, 滑らかな 3 次元多様体である. 第一 Chern 類 $c_1(\Sigma)$ が非自明ならば通常のリーマン面同様適切なエルミート計量によって $S(\Sigma)$ に佐々木構造が定まる.

例 4 (3 次元 Lie 群) 実 3 次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその双対 $\mathfrak{g}^*$ を考える. $\mathfrak{g}$ の佐々木構造は $\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\eta \oplus w \oplus \bar{w}$, $\eta \in \mathfrak{g}^*$ および構造方程式

$$d\eta = -\sqrt{-1}w \wedge \bar{w},$$

$$dw = C\eta \wedge w$$

により特徴づけられる. $\mathfrak{g}$ が佐々木構造を持つ時, $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするリー群 G は左不変佐々木構造を持つ. $\Gamma \subset G$ を離散群とすると $\Gamma\backslash G$ は佐々木多様体である. 佐々木構造を持つ Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は以下の三種に限られる.

($\mathfrak{n}_3$) abel ではない 3 次元冪零 Lie 代数 (3 次元 Heisenberg algebra)$\mathfrak{n}_3$ には

$$d\eta = \frac{\sqrt{-1}}{2} w \wedge \bar{w},$$

$$dw = 0$$

により佐々木構造が入る. 3 次元 Heisenberg 群 N_3 が対応する Lie 群である. N_3 の左不変佐々木構造を入れたものは3-次元ユークリッド空間に標準佐々木構造を入れたものである. 佐々木計量を考えると, 幾何 Nil_3 に対応する.

($\mathfrak{su}_{1,1}$) $\mathfrak{s}u_{1,1} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ には

$$d\eta = \sqrt{-1}w \wedge \bar{w},$$

$$dw = -2\sqrt{-1}\eta \wedge w$$

により佐々木構造が入る. $PSU(1,1)$, $SU(1,1)$ およびこれらの普遍被覆群 $\widetilde{SU(1,1)}$ は対応するリー群である. 佐々木計量を考えると, 幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ に対応する.

($\mathfrak{su}(2)$) $\mathfrak{su}(2)$ には

$$d\eta = \sqrt{-1}w \wedge \bar{w},$$
$$dw = \sqrt{-1}\eta \wedge w$$

により佐々木構造が入る. $SU(2)$, $SO(3)$ は対応するリー群である. 佐々木計量を考えると, 幾何 S^3 に対応する. $SU(2)$ の $\mathbb{C}^2$ への線形作用の軌道を考えることにより, $SU(2)$ は S^3 と同一視できる.

$(M, \eta, T^{1,0})$ をコンパクト3次元佐々木多様体とする. $\mathfrak{g}$ を上記三種のいづれかとする. 佐々木構造が $\mathfrak{g}$-構造であるとは $T^{1,0*}$ の大域フレーム w であって, η, w が上記の $\mathfrak{g}$ に対応する構造方程式を満たすことである. この時, Frobenius の定理より, M は佐々木多様体として $\Gamma\backslash G$ と表される. Σ をコンパクトリーマン面とする.

- Σ が正定曲率計量を持てば, 円周束 $S(\Sigma)$ は $\mathfrak{su}(2)$-構造を持ち,
- Σ が負定曲率計量を持てば, 円周束 $S(\Sigma)$ は $\mathfrak{su}(1,1)$-構造を持つ. (Introduction の議論を参照)

Σ が0曲率計量を持つ場合, $T^{1,0*}$ の円周束 $S(\Sigma)$ 自明となり佐々木多様体にはならない. この場合, 非自明な複素線束に関する単位円周束が $\mathfrak{n}_3$-構造を持つ.

3. 佐々木多様体のベクトル束と Higgs 束

$(M, \eta, T^{1,0})$ を3次元佐々木多様体とする. ξ をその Reeb ベクトル場とする. $(A^*(M), d)$ を M の de Rham 複体とする. 微分形式 α が

$$\iota_\xi \alpha = \iota_\xi d\alpha = 0$$

を満たす時, basic であるといい, basic な微分形式がなす $A^*(M)$ の部分空間を $A_B^*(M)$ で表す. $(A_B^*(M), d)$ は $(A^*(M), d)$ の部分複体である. そのコホモロジーを $H_B^*(M)$ で表し, basic コホモロジーと呼ぶ.

ξ が生成するフローを考えると, $T^{1,0}$ によって横断的正則 foliation が定まる. 本稿では $TM_{\mathbb{C}}$ の部分束 $\mathbb{C}\xi \oplus T^{1,0}$ を佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ の正則構造と考える. 例えば, 正則関数 f とは $\xi(f) = \overline{Z}(f) = 0$ $(\forall \overline{Z} \in T^{0,1})$ を満たす複素関数であり, 特に $f \in A_B^0(M)$ である. 正則一次微分形式 φ とは, $\varphi(\xi) = \varphi(\overline{Z}) = \iota_\xi d\varphi = \iota_{\overline{Z}} d\varphi = 0$ を満たす複素一次微分形式であり, 特に $\varphi \in A_B^1(M)$ である.

(E, h) を M 上の $\mathcal{C}^\infty$ エルミート束とし, ∇ をそのユニタリ接続とする. (E, h, ∇) が正則エルミート束であるとは, ∇ の曲率 R が

$$\forall \overline{Z} \in T^{0,1}, R(\xi, \overline{Z}) = 0$$

を満たすことである. この時 ∇_ξ について平行な局所フレームを取ることによって, $TrR \in A_B^*(M)$ がわかる. basic Chern 類

$$c_{B,1}(E) = \left[-\frac{TrR}{2\pi\sqrt{-1}} \right] \in H_B^2(M)$$

が定まる．M がコンパクトならば, $H_B^2(M) = \langle [d\eta] \rangle$ である．よって, この時, 実数 C によって, $c_{B,1}(E) = C[d\eta]$ と書ける．

正則エルミート束 (E, h, ∇) に対し, ∇ から定まる $\langle \xi \rangle \oplus T^{0,1}$ についての偏微分接続 ∇'' を E の正則構造 (Dolbeault 作用素) と呼ぶ．佐々木多様体の正則ベクトル束は (エルミート計量とは無関係に) ベクトル束と平坦な偏微分接続の組みとして定義できるが, 複素多様体の正則ベクトル束とは異なり, すべての正則ベクトル束が正則エルミート束の構造を持つわけではない．

例 5 C を実定数とする．$L_C = (M \times \mathbb{C}, h = 1, \nabla = d - 2C\pi\sqrt{-1}\eta)$ は正則エルミート束であり, $c_{B,1}(L_C) = C[d\eta] \in H_B^2(M)$ が成り立つ．

正則エルミート束 (E, h, ∇) に対し, 適切な C で L_C と E のテンソル積を取ることで, basic Chern 類を自明にすることができる．

正則ベクトル束 (E, ∇'') に対し, $\theta \in A^1(M, \mathrm{End}(E))$ が Higgs 場であるとは,

$$\theta(\xi) = \theta(\overline{Z}) = 0 \qquad \forall \overline{Z} \in T^{0,1},$$

$$(\nabla''\theta + \theta\nabla'')(\xi, X) = (\nabla''\theta + \theta\nabla'')(\overline{Z}, X) = 0 \qquad \forall \overline{Z} \in T^{0,1}, \forall X \in TM$$

を満たすことである．正則ベクトル束 (E, ∇'') と Higgs 場 θ の組 (E, θ) を Higgs 束と呼ぶ．

正則エルミート束 (E, h, ∇) で $c_{B,1}(E) = 0$ となるものを考える．Higgs 束 (E, θ) が stable であるとは, θ によって保たれる真の正則部分束 $F \subset E$ が常に $c_{B,1}(E) = -C[d\eta]$ $(C > 0)$ を満たすことである．Corlette-Simpson による非可換 Hodge 対応 [6, 10, 12] の佐々木版が Biswas-Kasuya[2, 3] によって与えられているので, それの 3 次元の場合について述べる．

定理 1 (佐々木多様体の非可換 Hodge 対応, Biswas-Kasuya[2, 3]**)** 3 次元コンパクト佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ 上で, 単純平坦複素ベクトル束と (上記の意味で)stable な Higgs 束 (E, θ) は 1 対 1 に対応する．

例 6 佐々木多様体 $(M, \eta, T^{1,0})$ の実接束 TM は以下の性質を満たす接続 ∇^{TW} を一意に持つことが知られている (Tanaka-Webster 接続 [13, 14])

1. ∇^{TW} は $T^{1,0}$ を保つ．

2. $\nabla^{TW} d\eta = \nabla^{TW}\eta = \nabla^{TW}\xi = 0$.

3. ∇^{TW} のトーションを T^{TW} とすると,

$$T^{TW}(X, Y) = -d\eta(X, Y)\xi.$$

∇^{TW}, $d\eta$ によって, $T^{1,0}$ は正則エルミート束となる．

正則エルミート束 $T^{1,0} \oplus \mathbb{C}$ に対し, $T^{1,0}M \to T^{1,0}M$ から定まる Higgs 場 θ を与える．$c_{B,1}(M) = -C[d\eta]$ とすると, $E = (T^{1,0} \oplus \mathbb{C}) \otimes L_{C/2}$ とおけば $c_{B,1}(E) = 0$. Higgs 束 (E, θ) の θ によって保たれる正則部分束は $T^{1,0} \otimes L_{C/2}$ であるので, Higgs 束 (E, θ) が stable であることと $C > 0$ は同値である．よってこの時, 非可換 Hodge 対応により, M の単純複素平坦束, よって基本群の単純線形表現が得られる．

さて, Introduction での議論を思い出して, 上記例の Higgs 束 (E,θ) の非可換 Hodge 対応による3次元佐々木多様体の一意化を考えよう. 定理を述べる前に準備をする.

佐々木多様体 $(M,\eta,T^{1,0})$ において, 佐々木構造の変形とは佐々木構造 $(\eta',T'^{1,0})$ であって, η,η' は定数倍を除いて同じ Reeb ベクトル場を持ち, さらに $T'^{1,0}\subset\mathbb{C}\xi\oplus T^{1,0}$ となるものである. ここで, $\mathbb{C}\xi\oplus T^{1,0}=\mathbb{C}\xi\oplus T'^{1,0}$ であることに注意するとこの変形によって正則構造は変化していないことがわかる (この点で Kodaira-Spencer の変形とは異質なものである). $(M,\eta,T^{1,0})$ 上の正則ベクトル束や Higgs 束であることと $(M,\eta',T'^{1,0})$ の正則ベクトル束や Higgs 束であることは同じである.

定理 2 (佐々木多様体の一意化定理 Kasuya-Miyatake[8]) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M,\eta,T^{1,0})$ が $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ $(C>0)$ を満たすとすると, 適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{su}(1,1)$ 構造に変形可能である. よって, 特に3次元多様体 M は幾何 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ を持つ.

定理の詳細を概観しよう. $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ という仮定から, M 上に ξ のフローが S^1 作用を生成することがわかる. また, 同変コホモロジーを用いると, $T^{1,0}$ は S^1-同変束として, L_{-C} に同型とみなせる. (ただしトーション線束を除くため, M は適切な有限被覆にとりかえる必要がある.) 特に $T^{1,0}$ は大域自明化できる. Higgs 束 (E,θ) は stable より, 非可換 Hodge 対応より, Hitchin の方程式

$$R^2+\left[\theta,\overline{{}^t\theta}\right]=0$$

を与える正則エルミート束 (E,h,∇) が得られる. (E,θ) は S^1 について対称性があることから, $T^{1,0}\otimes L_{C/2}$ に (よって $T^{1,0}$ に) エルミート計量が定まる. $T^{1,0}$ について, このエルミート計量による単位ベクトル W によって, $T^{1,0}$ を S^1-同変束として L_{-C} に同型となるように自明化する. W に対応する微分形式 w と接続形式 η' を考えると, Hitchin の方程式は行列値微分形式についての式となり, $\mathfrak{su}(1,1)$ の構造関係式

$$\sqrt{-1}d\eta'+w\wedge\bar{w}=0$$

$$dw+2\sqrt{-1}\eta'\wedge w=0$$

を導く. ここで, η' は接触構造であり, 元の η にしかるべき Rescaling をすることで $\eta-\eta'\in A^1_B(M)$ となる. $w\in T^{1,0*}$ より, $\mathfrak{su}(1,1)$-構造から定まる M の佐々木構造は元の佐々木構造の変形となっていることがわかる.

注意 1 (リーマン面) 3次元コンパクト佐々木多様体 $(M,\eta,T^{1,0})$ が, リーマン面 Σ 上の円周束 $S(\Sigma)$ とする. この時, $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ $(C>0)$ は $c_1(\Sigma)$ 負であることと同値でありつまり Σ のオイラー数が負 $2-2g<0$ であることと同値である. ここで g は位相的種数. M を一意化する際に, 上で考えている Higgs 束 (E,θ) は $(K^{-1/2}\oplus K^{1/2},\theta)$ を引き戻したもの“ではない”ことに注意. 実際 $\Gamma\subset PSU(1,1)$ の“$SU(1,1)$ への自然なリフト”が (E,θ) に非可換 Hodge 対応する単純平坦束のモノドロミー表現である. つまり, その像は Γ ではなく, $\mathbb{Z}_2\times\Gamma$ に同型である. Γ の $SU(1,1)$ リフトの分解 $\mathbb{Z}_2\times\Gamma$ の取り方は 2^{2g} 個あり, 標準束のルート $K^{1/2}$ を取ることに対応している. ここで, $M=S(\Sigma)$ の基本群は $\Gamma\subset PSU(1,1)$ のリフト $\widetilde{\Gamma}\subset\widetilde{PSU(1,1)}$ であり, Γ の $\mathbb{Z}$ による中心拡大と同型である.

注意 2 (オービフォールド) 3次元コンパクト佐々木多様体$(M,\eta,T^{1,0})$が, オービフォールドリーマン面Σ上のSeifert円周束$S(\Sigma)$とする. この時, Σ上のオービフォールドde Rham複体はM上の$A_B^*(M)$に引き戻すことができ, $H_B^2(M)$は$H^2(\Sigma,\mathbb{R})$に同型である. Σ上の正則ベクトル“V”束はM上の正則エルミート束に引き戻すことができる. Σ上の正則Higgs“V”束はリーマン面上の特異的Higgs束であるRegular Filtered Higgs束([11])の一種である.

$T^{1,0}$はΣの正則接ベクトル“V”束$T^{1,0}\Sigma$を引き戻したものである. $c_{B,1}(M)=-C[d\eta]$ $(C>0)$は$T^{1,0}\Sigma$のオービフォールドChern類が負であることと同値であり, よってオービフォールドEuler数が負

$$2-2g-n-\sum_{i}^{n}\frac{1}{p_i}<0$$

であることに同値である. gは位相的な種数, nはオービフォールド点の数, p_iは各オービフォールド点の次数.

注意 3 (3次元佐々木多様体の分類) 上記一意化定理の主張は, Belgun[1]による3次元佐々木多様体の分類定理, “3次元コンパクト佐々木多様体は適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{n}_3,\mathfrak{su}(1,1),\mathfrak{su}_3$のいずれか一つの構造に変形できる”から導くことができる. Belgunの証明は複素曲面のEnriques-Kodairaの分類を用いている. 今回の証明は, 他の分類定理に依存しないものであり高次元化が可能である. $\mathfrak{n}_3$-構造に変形される場合に関しても, このような証明が可能であり高次元化もできる(Biswas-Kasuya[4]).

定理 3 (Biswas-Kasuya[4]) 3次元コンパクト佐々木多様体$(M,\eta,T^{1,0})$が$c_{B,1}(M)=0$を満たすとすると, 適切に有限被覆を取ると, $\mathfrak{n}_3$構造に変形可能である. よって, 特に3次元多様体Mは幾何Nil_3を持つ.

4. 3次元佐々木多様体のTeichmüller 空間論(今後の課題)

コンパクト3次元佐々木多様体$(M,\eta,T^{1,0})$が$\mathfrak{su}(1,1)$構造

$$\sqrt{-1}d\eta+w\wedge\bar{w}=0$$

$$dw+2\sqrt{-1}\eta\wedge w=0$$

から定まっているとする. この時, $T^{1,0}=L_{-1/\pi}$である. $E=L_{-1/2\pi}\oplus L_{1/2\pi}$とする, $\theta=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}w$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{C}^\infty(M))$とおくと, θがHiggs場であるための必要十分条件は以下等式を満たすことである:

$$\xi(\alpha)-2\sqrt{-1}(\alpha)=\overline{W}(\alpha)=0 \qquad (\text{正則一次微分}),$$

$$\xi(\beta)=\overline{W}(\beta)=0 \qquad (\text{正則関数}),$$

$$\xi(\gamma)-4\sqrt{-1}(\gamma)=\overline{W}(\gamma)=0 \qquad (\text{正則二次微分}).$$

Mはコンパクトなのでβは定数である. Higgs束(E,θ)がstableとなる必要十分条件は$\beta\neq 0$である.

$\alpha=0$, $\beta=1$と仮定する. (E,θ)の非可換Hodge対応を考える. M上の正値関数hを

$$h^4|\gamma|^2-h^{-4}+1=0$$

を満たすものとして定めると, $\eta' = \eta + d\log(h)$, $w' = h^{-2}w + h^2\bar{\gamma}\bar{w}$ とすると, $D' = d + \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\eta' & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\eta' \end{pmatrix}$, $\theta' = \begin{pmatrix} 0 & w' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, Hitchin の方程式

$$R'^2 + \left[\theta', \overline{{}^t\theta'}\right] = 0$$

が得られる. よって, 新たに $\mathfrak{su}(1,1)$ 構造

$$\sqrt{-1}d\eta' + w' \wedge \overline{w'} = 0$$

$$dw' + 2\sqrt{-1}\eta' \wedge w\,' = 0$$

が得られる.

よって, 正則二次微分に対し, $\mathfrak{su}(1,1)$ 構造を対応づけることができた. この対応によって, Hitchin[7] による Teichmüller 空間の構成の佐々木版が期待される.

予想 1 正則二次微分がなす空間と佐々木構造の変形同値類の空間は上記対応によって微分同相である.

参考文献

[1] F. A. Belgun, Normal CR structures on compact 3-manifolds, *Math. Zeit.* **238** (2001), 441–460.

[2] I. Biswas and H. Kasuya, Higgs bundles and flat connections over compact Sasakian manifolds, *Comm. Math. Phys.* **385** (2021), 267–290.

[3] I. Biswas and H. Kasuya, Higgs bundles and flat connections over compact Sasakian manifolds, II: quasi-regular bundles, arXiv:2110.10644. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (to appear).

[4] I. Biswas and H. Kasuya, Sasakian geometry and Heisenberg groups, arxiv-2310.12588.

[5] C. P. Boyer and K. Galicki, *Sasakian geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[6] K. Corlette, Flat G-bundles with canonical metrics, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 361–382.

[7] N. J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987), 59–126.

[8] H. Kasuya and N. Miyatake, Uniformizations of compact Sasakian manifolds, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2024, Issue 10, May 2024, Pages 8313–8328

[9] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 401–487.

[10] C. T. Simpson, Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 867–918.

[11] C. T. Simpson, Harmonic bundles on noncompact curves., *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1990), 713–770.

[12] C. T. Simpson, Higgs bundles and local systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **75** (1992), 5–95.

[13] N. Tanaka, A Differential Geometric Study on strongly pseudoconvex CR manifolds, Lecture Notes in Math., **9**, Kyoto University, 1975.

[14] S. Webster, Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface, *J. Differential Geom.* **13** (1978), 25–41.