

n 体問題の周期軌道の存在とその組み紐について

柴山允瑠 (京都大学大学院情報学研究科)

1 n 体問題の周期軌道

n 個の質点の Newton 的引力による相互作用のもとでの運動を調べる問題を n 体問題という。 n 体問題は微分方程式

$$m_k \frac{d^2 q_k}{dt^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{m_k m_j (q_k - q_j)}{|q_k - q_j|^3} \quad (k = 1, \dots, n, \quad q_k \in \mathbb{R}^d) \quad (1)$$

の解を調べる問題として定式化される。 $m_k > 0$ は質点の質量, $q_k \in \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ は質点の位置を表す。

2 体問題では, $m_1 q_1 + m_2 q_2$ が等速運動をし, $q_1 - q_2$ が Kepler 問題の解になる。従って, 2 体問題では衝突解以外の有界な軌道は楕円軌道になる (図 1)。

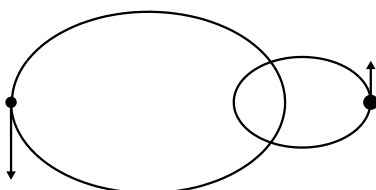


図 1: 2 体問題の楕円軌道

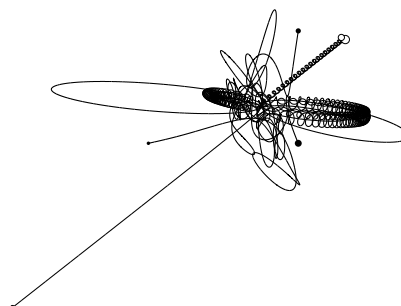


図 2: 3 体問題の 1 つの解

$n \geq 3$ の場合の n 体問題ははるかに難しい。図 2 の数値解^{*1}のように多くの解は複雑な振る舞いをする。実際, 様々な観点から 3 体問題は解けないこと (非可積分性) が証明されている。 [1, 2, 3, 19, 21, 27, 32, 33, 34, 35]。

3 体問題のほとんどの軌道が複雑な振る舞いをするなかで, 単純な振る舞いをする周期軌道も存在する。古典的に知られている周期軌道として Euler 解 (図 3) と Lagrange 解 (図 4) がある。Euler 解は 3 質点が常に 1 直線上に並び, 内分比を保ちながら運動する。Lagrange 解は, 3 質点が常に正三角形の頂点をなしながら運動をする。各質点は Kepler

^{*1} これは平面 3 体問題の数値解である。質量が 3,4,5 でその初期位置はそれぞれの対辺の長さが 3,4,5 となる直角三角形で, 初速度が 0 の解を数値計算したものである。この初期条件を満たす解を求める問題はピタゴラス 3 体問題と呼ばれている。この解を数値計算すると, しばらく複雑な振る舞いをした後, 1 体と 2 体に分かれ無限に離れていく。

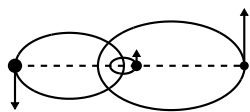


図 3: Euler 解

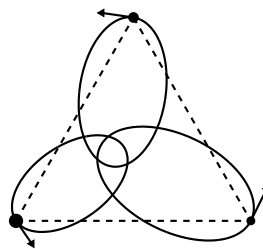


図 4: Lagrange 解

問題の解と同じ振る舞いをする。どちらも任意の質量に対して存在する。 $n \geq 4$ について n 体問題についても、このような自己相似解は多数存在する。

自己相似解でないが単純な振る舞いをする解として、3 体問題の 8 の字解と呼ばれる周期軌道が知られている。2000 年に変分法により 8 の字解 (図 5) の存在証明をした論文 [6] が出版され、その後、変分法により周期軌道の存在を示す研究が活発になされてきた。本講演では、8 の字解やその後発見された周期軌道の存在証明について、組み紐と関係にも触れながら述べていく。

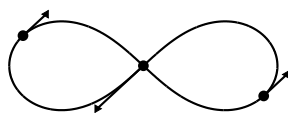


図 5: 8 の字解

2 8 の字解の発見に至るまでの経緯

n 体問題のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k |\dot{q}_k|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

である。ここで、 $q = (q_1, \dots, q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ($q_k \in \mathbb{R}^d$, $\dot{q}_k \in \mathbb{R}^d$) である。 n 体問題は作用積分

$$\mathcal{A}(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

に関する変分問題として定式化できる。

次節で述べるように、3体問題の8の字解は、等質量の仮定のもと、適切な対称性を課した閉曲線のクラスにおいて、作用積分を最小化するものとして得られる。その発見までの経緯について述べる。

変分法により3体問題の周期軌道の存在を示そうとした最初の論文はおそらくPoincaréによるものであろう。平面3体問題の配位空間は

$$\mathcal{X} = \{(q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0, q_i \neq q_j (i \neq j)\}$$

である。Poincaréは、この配位空間における閉曲線のホモトピーを指定したもとの作用積分の最小点を求めることで、周期軌道を求めようとしたようである [5, 20]。

20世紀初頭にTonelli[31]により一般のラグランジュ系に対する作用積分の最小点の存在が証明され、さらに時間が経過して1970年代にGordon[8]によりケプラー問題の解について変分問題の観点から明らかにされた。1980-90年代には、田中 [29, 30], Terraciniらにより、ケプラー問題を一般化した特異点を持つポテンシャル系における周期軌道の存在証明が活発に研究された。

そして、1993年にMoore[17]が8の字解を数値計算により発見し、2000年にChencinerとMontgomery[6]はその結果を知らずに、8の字解の数学的な存在証明を与えた。

Mooreは質点の運動をもとに構成される組み紐を考えた。平面における n 個の連続な曲線 $\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t) (t \in [0, T])$ で、

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(t) &\neq \mathbf{q}_j(t) \quad (i \neq j) \\ \{\mathbf{q}_1(0), \dots, \mathbf{q}_n(0)\} &= \{\mathbf{q}_1(T), \dots, \mathbf{q}_n(T)\} \end{aligned}$$

を満たすものを考える。これらを t 軸を加えた3次元空間に描くことで組み紐が定まる(図6)。

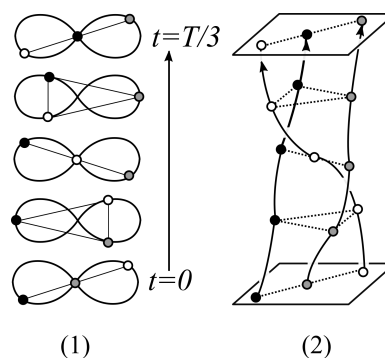


図6: 8の字解から構成される組み紐

$\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t)$ が平面 n 体問題の T -周期軌道とすると、それから組み紐が構成される。Mooreは与えられた組み紐をもつ曲線を取り、その組み紐を保ったまま作用積分を

小さくするように変形し、周期軌道を数値計算により求めた。その中で、8の字解も数値的に発見された。

また、8の字解の存在を証明した一人である Montgomery は、発見に至った経緯をいくつかの記事で述べている [16]。元々は3体問題における食の列の考察から始まったようである。平面3体問題において、3質点が同一直線上に並ぶ配置になった状態を食 (syzygy) という。日食や月食の「食」である。食は他の2質点の間に位置する質点の番号により3つに分類される (図7)。

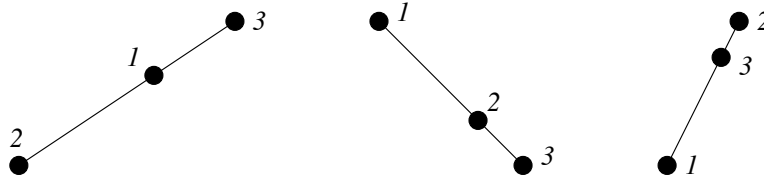


図7: 食配置1(左), 食配置2(真ん中), 食配置3(右),

そこで、Montgomery が考えた問題は次のようなものであった。

問題 1 (Montgomery [16]) 任意に与えられた 1,2,3 の数列に対し、その数列と同じ食のパターンをもつ軌道は存在するか？

Montgomery は...123123... というパターンになる軌道を考察しているうちに、8の字解の発見に至ったようである。

3 周期軌道の存在証明

3.1 変分構造と最小点の存在

n 体問題のラグランジアンは

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k |\dot{q}_k|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

である。ここで、 $q = (q_1, \dots, q_n), \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) (q_k \in \mathbb{R}^d, \dot{q}_k \in \mathbb{R}^d)$ である。 n 体問題は作用積分

$$\mathcal{A}(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

に関する変分問題として定式化できる。

$$\mathcal{X} = \left\{ (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \sum_{k=1}^n m_k q_k = 0 \right\}$$

とし、

$$\Delta_{ij} = \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{X} \mid q_i = q_j\}, \quad \Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}$$

とする。 Δ は衝突の配置全体の集合で、これに属する q は微分方程式 (1) の特異点である。配位空間を

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$$

とする。

$\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ 上の周期 2π の曲線全体を $\Lambda, \hat{\Lambda}$ とする:

$$\Lambda = H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad \hat{\Lambda} = H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \hat{\mathcal{X}}).$$

H^1 は Sobolev 空間で Sobolev ノルムを $\|\cdot\|$ で表す:

$$\|q\| = \left(\int_0^{2\pi} |q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$q \in H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \hat{\mathcal{X}})$ が \mathcal{A} の臨界点であれば、 $q(t)$ は C^2 級で微分方程式 (1) の解になる (例えば, [22] 参照).

以下、周期軌道を求めることを目的とするので、 $t_0 = 0, t_1 = 2\pi$ とし、 \mathcal{A} の定義域を $\hat{\Lambda}$ とする。なお、一般に、 $q(t)$ が n 体問題の解であれば、 $\lambda > 0$ に対し $\lambda^{-2/3}q(\lambda t)$ も解になるので、周期 2π の周期軌道が求まれば、任意の $T > 0$ に対して周期 T の周期軌道が求まったことになる。

$\hat{\Lambda}$ の部分集合 Ω を適当にとり、 \mathcal{A} の Ω における最小点として、周期軌道が得られる。

定義 2 $\Omega \subset \hat{\Lambda}$ とする。 $\|q\| \rightarrow \infty (q(t) \in \Omega)$ のとき $\mathcal{A}|_{\Omega}(q) \rightarrow \infty$ が成り立つならば、 $\mathcal{A}|_{\Omega}$ は coercive であるという。

最小点の存在を保証するのは次である。

命題 3 (Tonelli [31]) $\mathcal{A}|_{\Omega}$ が coercive ならば、

$$\mathcal{A}(q^*) = \inf_{q \in \Omega} \mathcal{A}(q)$$

となる $q^* \in \bar{\Omega}$ が存在する。

$\bar{\Omega}$ は Ω の閉包である。最小点の存在が示されても、 Ω の境界に属さないことを示さなければならない。通常の設定の場合、 Ω の境界に属する曲線は衝突を持つものになる。

3.2 対称性

G を有限群とし、 $\Lambda, \hat{\Lambda}$ に以下のように作用するとする。 $O(d)$ を d 次直交行列全体とし、 \mathfrak{S}_n を n 次の対称群とする。準同型

$$\tau : G \rightarrow O(2)$$

$$\rho : G \rightarrow O(d)$$

$$\sigma : G \rightarrow \mathfrak{S}_n$$

を与え, $g \in G, q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in \Lambda, \hat{\Lambda}$ に対し,

$$g \cdot ((q_1, \dots, q_n)(t)) = (\rho(g)q_{\sigma(g^{-1})(1)}, \dots, \rho(g)q_{\sigma(g^{-1})(n)})(\tau(g^{-1})t)$$

により作用を定める. t は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ に属するので, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を \mathbb{R}^2 内の単位円 \mathbb{S}^1 と同一視して, $O(2)$ が作用するとみなしている.

$$\Lambda^G = \{q \in \Lambda \mid g \cdot q = q \ (\forall g \in G)\}$$

$$\hat{\Lambda}^G = \{q \in \hat{\Lambda} \mid g \cdot q = q \ (\forall g \in G)\}$$

とし, $\mathcal{A}^G = \mathcal{A}|_{\Lambda^G}$ とする. また, ρ, σ により G は $\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ に作用するので, その作用で不変な $\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ の元全体を $\mathcal{X}^G, \hat{\mathcal{X}}^G$ と書く. G の作用を適当に与えて, \mathcal{A}^G を最小化する曲線の存在を示すことで, 様々な周期軌道が得られる.

\mathcal{A}^G を最小化する曲線であれば \mathcal{A}^G の臨界点であるが, これが \mathcal{A} についても臨界点である必要がある. そのことを保証するのが次の Palais 原理である.

命題 4 (Palais [18]) \mathcal{A} が G の作用で不変, つまり $\mathcal{A}(g \cdot q) = \mathcal{A}(q) (\forall q \in \hat{\Lambda}, g \in G)$ ならば, \mathcal{A}^G の臨界点は \mathcal{A} の臨界点である.

これより, \mathcal{A}^G の臨界点は \mathcal{A} の臨界点となるため Euler-Lagrange 方程式の解となる. この命題の仮定を満たすためには, σ で入れ替わる質点同士の質量は同じである必要がある.

また, 群作用により作用積分が制限されている場合に, coercive となるための簡潔な必要十分条件が得られている.

命題 5 (Ferrario & Terracini [7]) \mathcal{A}^G が coercive になるための必要十分条件は, $\mathcal{X}^G = \{0\}$ である.

以下では, 群作用とそのもとで \mathcal{A}^G の最小点として得られる周期軌道の例を挙げる.

例 6 3体問題の 8 の字解 (図 5) は次のような対称性である. $n = 3, d = 2, m_1 = m_2 = m_3$ とし

$$G = \langle a, b, c \rangle = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

の作用を

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(a) &= (1, 2, 3), & \tau(a) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \\ \rho(b) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(b) &= \text{Id}, & \tau(b) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \rho(c) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \sigma(c) &= (2, 3), & \tau(c) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定める. $\mathcal{X}^G = \{0\}$ は成立し \mathcal{A} の最小点が存在する. Chenciner と Montgomery [6] は \mathcal{A}^G を最小化する曲線として 8 の字解を得た.

例 7 等質量の平面上の $2n$ 体問題を考える. つまり, $d = 2, m_1 = m_2 = \dots = m_{2n}$ の場合を考える. $p = 1, 2, \dots, [n/2]$ ($[\cdot]$ はガウス記号) を固定し, 2 つの元で生成される群 $G_{n,p} = \langle g_n, h_{n,p} \rangle$ をとり, 作用を

$$\begin{aligned}\rho(g_n) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \\ \sigma(g_n) &= (1, 2, \dots, 2n) \\ \tau(g_n) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \rho(h_{n,p}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma(h_{n,p}) &= (1, 3, \dots, 2n-1)^{-p}(2, 4, \dots, 2n)^p \\ \tau(h_{n,p}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi j}{n} & -\sin \frac{2\pi j}{n} \\ \sin \frac{2\pi j}{n} & \cos \frac{2\pi j}{n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で決める. ここで, j は n と p の最大公約数である. $\mathcal{X}^{G_{n,p}} = \{0\}$ が成立するので最小点が存在する. $p \neq p'$ であっても

$$\Lambda^{G_{n,p}} \cap \Lambda^{G_{n,p'}} \neq \emptyset$$

となりうるので, p ごとに最小点が異なることを示す必要がある. その証明については, [23, 26] を参照されたい. $\mathcal{A}^{G_{n,p}}$ を最小化する曲線により, 図 8 のような周期軌道が得られる.

例 8 等質量の平面 4 体問題を考える. 群を

$$G = \mathbb{Z}_2 \times D_8 = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1^2 = g_2^2 = g_3^4 = (g_1 g_2)^2 = g_1 g_3 g_1 g_3^{-1} = (g_2 g_3)^2 = 1 \rangle,$$

準同型を

$$\begin{aligned}\tau(g_1) &= \text{Id}_2, & \rho(g_1) &= -\text{Id}_2, & \sigma(g_1) &= (1 \ 3)(2 \ 4), \\ \tau(g_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \rho(g_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(g_2) &= (2 \ 4), \\ \tau(g_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho(g_3) &= \text{Id}_2, & \sigma(g_3) &= (1 \ 2 \ 3 \ 4).\end{aligned}\tag{2}$$

とする.

このもとでの, 作用積分 \mathcal{A}^G の最小点は, 自明な回転する正方形解になる. そこで, $\hat{\Lambda}^G$ を

$$P_y q_1(0) > 0, \quad P_x q_2(0) > 0, \quad P_x q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, \quad P_y q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

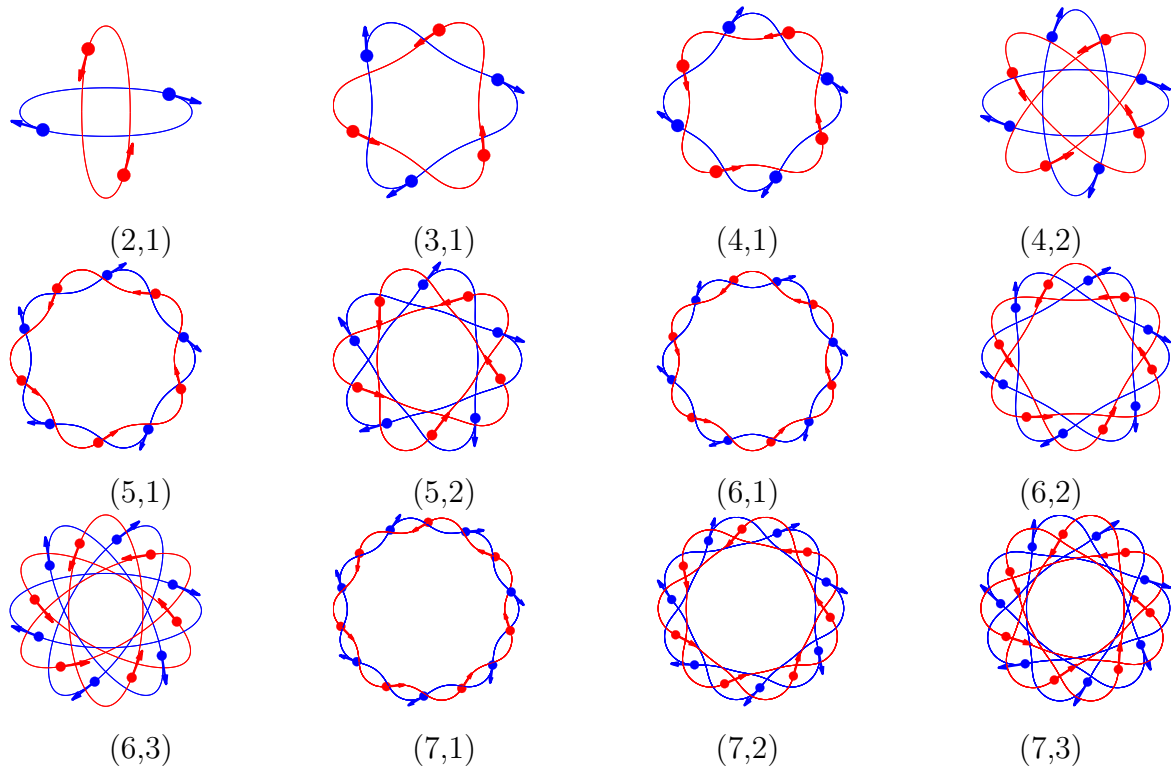


図 8: $2n$ 体問題の周期軌道: 対応する (n, p) を各図の下に記している.

を満たすものに制限して, その集合上で \mathcal{A}^G を考える. ここで,

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

この最小点として, 図 9 のような超 8 の字解が得られる [24].

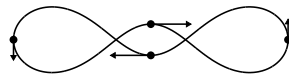


図 9: 超 8 の字解

3.3 衝突の除去

群 G とその作用をうまく設定することで \mathcal{A}^G の最小点 q^* が得られる. q^* は $\hat{\Lambda}^G$ の閉包である Λ^G に属する. そのため, q^* は衝突する可能性がある. 変分法により n 体問題の周期解の存在を示す際に最も困難な部分は, 衝突の可能性を除去することである.

衝突を持つ曲線の作用積分はある程度大きいことを示し、最小点の作用積分はより小さな値を持つことで、最小点が衝突しないことを示すことになる。この部分は、技術的になるので、ここでは省略する。[7, 25, 26] を参照されたい。

4 3 体問題の形状空間

等質量の平面 3 体問題を考える。3 質点の運動を表すのに適切な形状空間を導入する。これは、8 の字解の存在証明の際にテスト曲線と呼ばれるものを構成する際に用いられている。 \mathbb{R}^2 を \mathbb{C} と同一視し、重心 $q_1 + q_2 + q_3$ を原点に固定した配位空間を

$$\mathcal{X} = \{(q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{C})^3 \mid q_1 + q_2 + q_3 = 0, q_i \neq q_j (i \neq j)\}$$

とする。Jacobi 変換 $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$(z_1, z_2) = J(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(q_3 - q_2), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(q_1 - \frac{1}{2}(q_2 + q_3) \right) \right)$$

で定める。これにより、3 体問題の作用積分は

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (|\dot{z}_1|^2 + |\dot{z}_2|^2) + \frac{1}{\sqrt{2}|z_1|} + \frac{1}{\left| \sqrt{\frac{3}{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 \right|} + \frac{1}{\left| \sqrt{\frac{3}{2}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 \right|} dt$$

と表せる。 $z_1 \wedge \dot{z}_1 + z_2 \wedge \dot{z}_2$ は角運動量に相当する。実際、

$$z_1 \wedge \dot{z}_1 + z_2 \wedge \dot{z}_2 = q_1 \wedge \dot{q}_1 + q_2 \wedge \dot{q}_2 + q_3 \wedge \dot{q}_3$$

が成り立つことが容易に分かる。ここで、 \wedge は外積 (の第 3 成分) である。つまり、 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して、 $z \wedge w = xv - yu = \text{Im}(\bar{z}w)$ である。

\mathbb{S}^1 を \mathbb{C} の単位円として、 $\omega \in \mathbb{S}^1$ の $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ への作用を $(\omega z_1, \omega z_2)$ で定める。 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上に $(z_1, z_2) \sim (\omega z_1, \omega z_2)$ により同値関係を定め、この商空間 $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{S}^1$ を考える。この空間を形状空間と呼ぶ。

$(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{S}^1$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ と同相になる。 \mathbb{C}^2 から $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ への写像を与えるものとして、Hopf 写像がある^{*2}。天体力学では、Kustaanheimo-Stiefel 変換とも呼ばれる。Hopf 写像は

$$F: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{C}) \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto (u_1, u_2 + iu_3) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$$

で与えられる。 $u_2 + iu_3 \in \mathbb{C}$ は $(u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$ と同一視する。 $(z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対して、 $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2)$ と $F(z_1, z_2) = F(z'_1, z'_2)$ が同値である。これにより形状空間への自然な写像が実現されたことになる。

^{*2} 多様体論で出てくる Hopf 写像は、これを単位球面 \mathbb{S}^3 に制限して得られる写像 $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ に対応する。

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad E_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad E_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$L_+ = (0, 0, 1), \quad L_- = (0, 0, -1)$$

とおく. E_k の張る直線は 1 質点が他の 2 質点の midpoint に位置する直線配置 (Euler 配置) である. L_{\pm} は正三角形の配置 (Lagrange 配置) を表している. L_+ と E_1 で張られる 2 次元空間は二等辺三角形配置全体の集合になる.

いま与えられた曲線に課された対称性は時間 $T' = 2\pi/12$ 毎に Euler 配置と二等辺三角形配置を通過することに対応する.

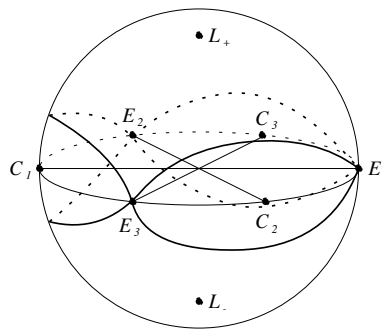


図 10: 形状空間における 8 の字解に対応する曲線

なお, 形状空間において, 食配置は赤道に対応し, C_1, C_2, C_3 により分けられた 3 つのいずれを通過するかで, 食のタイプが決まる.

5 3 体問題の解のなす組み紐や食の列に関する研究

問題 1 に戻ろう. 食の列の研究はその後も進められている. Montgomery は以下の結果を示している.

定理 9 (Montgomery [13]) 角運動量が 0 かつ軌道が有界かつ 3 体衝突をもたない平面 3 体問題の任意の解には, 無限回の食が現れる.

なお, 角運動量が 0 の解は, 3 質点が平面上を運動することが示されている ([28] 参照) ので, 空間で考えても, 結果は成立する.

与えられた食のパターンをもつ軌道を変分法により示そうとすると, 衝突の除去が困難な問題としてある. 万有引力をより強い力に変えるとその問題は回避できる. 互いの距離の 3 乗に反比例する引力で引き合う等質量の平面 3 体問題を考える:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^4} \quad (k = 1, 2, 3, \quad q_k \in \mathbb{R}^2). \quad (3)$$

定理 10 (Montgomery [14]) 同じ番号が連続して続かないもので, $\dots ijijij \dots$ 以外の任意の食の列に対して, それを実現する (3) の解が存在する.

証明は変分法によるもので, Jacobi–Maupertuis 汎関数が用いられている.

前節で述べたように Moore は 3 体の運動から構成される組み紐を考察している中で, 8 の字解を数値的に発見した. その進展として, 次の問題が考えられる.

問題 11 (Moore [17], Montgomery [11, 12]) 任意に与えられた 3 本の組み紐について, それを実現する平面 3 体問題の解は存在するか?

それに関連する結果として次の結果がある. 定理 9 は角運動量 0 のもつて示されているが, 十分 0 に近いという仮定で次が示されている.

定理 12 (Moeckel & Montgomery [10]) 等質量か等質量に近い平面 3 体問題において, 形状空間の曲線に対する任意のホモトピー型について, それを実現する解が存在する. その解の角運動量は 0 に近いが 0 ではない.

この証明では, 変分法は用いられていない. 3 体衝突に対応する特異点をブローアップし, そこに現れる平衡点間に多様なヘテロクリニック軌道が存在し, 与えられたヘテロクリニック軌道の族を追跡する軌道として実現される. 3 体衝突は角運動量が 0 の場合のみ起こる. 角運動量を 0 ではなく十分 0 に近いとすることで, 3 体衝突せずに衝突特異点のスレスレを通る軌道になる.

なお, 定理 9 に関連して 4 体問題について次が示されている.

定理 13 (Montgomery [15]) 角運動量が 0 でありかつ有界で 3 体衝突を持たない空間 4 体問題の任意の解には, 同一平面上の配置が無限回現れる.

これにより, 4 体問題についても平面配置のパターンによる軌道の分類や存在など様々な問題が考えられるが, まだほとんど解明されていない.

6 平面 $2n$ 体問題の周期軌道の組み紐型

組み紐の位相不変量はいくつかあるが, その中で拡大率 (stretch factor) は力学系と深い関係があるものとして, 特に重要である. B_m を m -組み紐群とする. $Z(B_m)$ を B_m の中心とし,

$$\mathcal{B}_m = B_m / Z(B_m)$$

とおく. この元の共役類を組み紐型という.

図 3 のオイラー解や図 4 のラグランジュ解はいずれも \mathcal{B}_3 が trivial になる.

m 個の穴の空いた 2 次元円盤を D_m とする. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $a_1, \dots, a_m \in D$ を互いに異なる点とする. $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$ とし, $D_m = D \setminus A_m$ とする. D_m 上の同相写像 $\text{Homeo}_+(D_m)$ のアイソトープを同値関係とする同値類を

$MCG(D_m)$ と書き, D_m 上の写像類群という. $MCG(D_m)$ の元に対し, その代表元となる写像の懸垂 (suspension) における A_m の軌道が組み紐をなす. この対応により, $MCG(D_m)$ と \mathcal{B}_m を対応させることができる. Nielsen-Thurston により, 写像類群は, 周期的, 可約, 擬 Anosov に分類される ([4]などを参照). 例えば, 8 の字解から構成される組み紐 (図 6) は擬 Anosov である.

擬 Anosov の場合, 対応する写像は安定/不安定葉層を持つ. ある定数 $\lambda > 1$ があって安定葉層上で λ^{-1} 倍に縮小し, 不安定葉層上で λ 倍に拡大する. この λ を拡大率という.

定理 14 (Kajihara-Kin-Shibayama [9]) 例 7 で, n, p について得られた周期軌道がなす組み紐は擬 Anosov であり, その拡大率は $(s_{2p})^{2n/j}$ である. ここで, s_k は k 番目の金属数

$$s_k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 4}) = k + \frac{1}{k + \frac{1}{k + \frac{1}{\ddots}}}$$

で, j は n と p の最大公約数である.

この証明では, $2n$ 体問題の形状空間での解の振る舞いと組み紐の関係を明らかにすることが鍵となる (図 11).

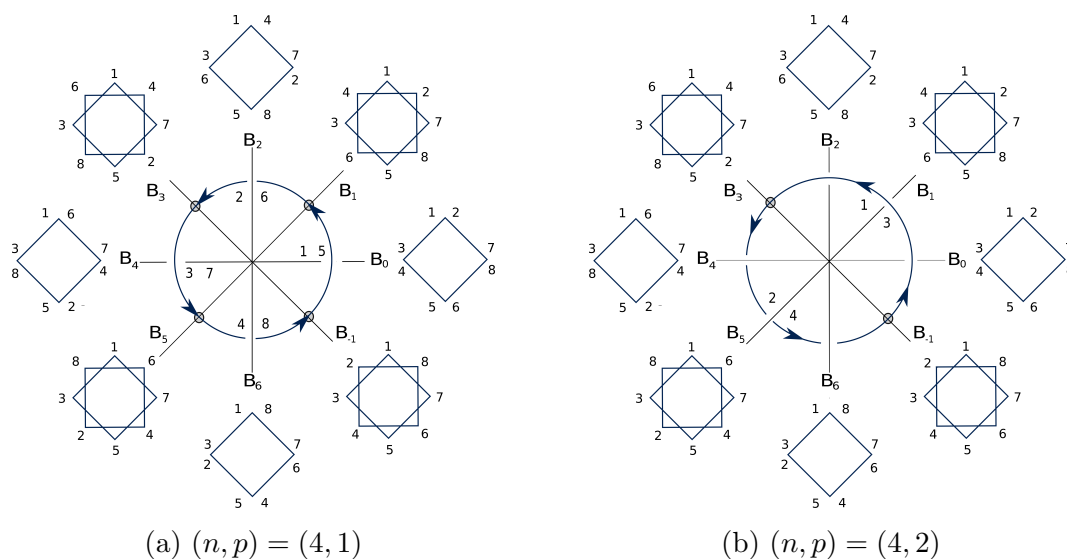


図 11: $2n$ 体問題の形状空間と, (1) $(n, p) = (4, 1)$ と (2) $(n, p) = (4, 2)$ の周期解に対応する曲線.

また, 超 8 の字解 (図 9) の組み紐は擬 Anosov で, 拡大率は $2 + \sqrt{3}$ である.

拡大率の対数をとったものは, 写像類に属する写像に対する位相的エントロピーの下限を与える. つまり, これが正ということは, 写像が力学系として複雑であることを意味する. 定理 14 が $2n$ 体問題の複雑さの評価に直ちに結びつくわけではないが, その点を

明らかにすることは今後の課題である。

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招きくださった先生方にお礼申し上げます。また、原稿について貴重なコメントをいただいた金英子氏 (大阪大学) に感謝致します。本研究は、科研費 (基盤 B, 23K25778) の助成を受けています。

参考文献

- [1] D. Boucher. Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(5):391–394, 2000.
- [2] D. Boucher and J.-A. Weil. Application of J.-J. Morales and J.-P. Ramis’ theorem to test the non-complete integrability of the planar three-body problem. In *From combinatorics to dynamical systems*, Vol. 3 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pp. 163–177. de Gruyter, Berlin, 2003.
- [3] H. Bruns. über die Integrale des Vielkörper-Problems. *Acta Math.*, 11(1-4):25–96, 1887.
- [4] A. J. Casson and S. A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Vol. 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [5] A. Chenciner. A note by Poincaré. *Regul. Chaotic Dyn.*, 10(2):119–128, 2005.
- [6] A. Chenciner and R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math. (2)*, 152(3):881–901, 2000.
- [7] D. L. Ferrario and S. Terracini. On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem. *Invent. Math.*, 155(2):305–362, 2004.
- [8] W. B. Gordon. A minimizing property of Keplerian orbits. *Amer. J. Math.*, 99(5):961–971, 1977.
- [9] Y. Kajihara, E. Kin, and M. Shibayama. Braids, metallic ratios and periodic solutions of the $2n$ -body problem. *Topology Appl.*, 337:Paper No. 108640, 21, 2023.
- [10] R. Moeckel and R. Montgomery. Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem. *Nonlinearity*, 28(6):1919–1935, 2015.
- [11] R. Montgomery. *Four Open Questions for the N -body Problem*.
- [12] R. Montgomery. Some open questions in the n -body problem. <https://youtu.be/JItBND4phWk?si=Gub0g4N1Ay0M0Tws>. Sydney Dynamics Group Seminars.
- [13] R. Montgomery. Infinitely many syzygies. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 164(4):311–340, 2002.
- [14] R. Montgomery. Fitting hyperbolic pants to a three-body problem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(3):921–947, 2005.
- [15] R. Montgomery. Oscillating about coplanarity in the 4 body problem. *Invent. Math.*, 218(1):113–144, 2019.
- [16] R. Montgomery. The three-body problem. *Scientific American*, 321, 2019. 三体問題に進展 周期解に新たな予想 (柴山 允瑠 訳), 日経サイエンス 2020 年 3 月号, 別冊 254 「SF を

科学する 研究者が語る空想世界」2022年.

- [17] C. Moore. Braids in classical dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 70(24):3675–3679, 1993.
- [18] R. S. Palais. The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.*, 69(1):19–30, 1979.
- [19] H. Poincaré. *New methods of celestial mechanics. Vol. 1*, Vol. 13 of *History of Modern Physics and Astronomy*. American Institute of Physics, New York, 1993. Periodic and asymptotic solutions, Translated from the French, Revised reprint of the 1967 English translation, With endnotes by V. I. Arnol'd, Edited and with an introduction by Daniel L. Goroff.
- [20] H. Poincaré. *Œuvres. Tome VII. Les Grands Classiques Gauthier-Villars*. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1996. Masses fluides en rotation. Principes de mécanique analytique. Problème des trois corps. [Rotating fluid masses. Principles of analytic mechanics. Three-body problem], With a preface by Jacques Lévy, Reprint of the 1952 edition.
- [21] H. Poincaré. *The three-body problem and the equations of dynamics*, Vol. 443 of *Astrophysics and Space Science Library*. Springer, Cham, 2017. Poincaré's foundational work on dynamical systems theory, Translated from the 1890 French original and with a preface by Bruce D. Popp.
- [22] P. H. Rabinowitz. The calculus of variations and the forced pendulum. In *Hamiltonian dynamical systems and applications*, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., pp. 367–390. Springer, Dordrecht, 2008.
- [23] M. Shibayama. Multiple symmetric periodic solutions to the $2n$ -body problem with equal masses. *Nonlinearity*, 19(10):2441–2453, 2006.
- [24] M. Shibayama. Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 214(1):77–98, 2014.
- [25] 柴山 允瑠. n 体問題と変分法—周期解をめぐる—. 日本評論社. 2024年.
- [26] 柴山 允瑠. n 体問題の周期解とその性質について. 数学, 日本数学会. to appear.
- [27] 柴山 允瑠. 重点解説 ハミルトン力学系—可積分系と KAM 理論を中心に—. サイエンス社. 2016年.
- [28] C. L. Siegel and J. K. Moser. *Lectures on celestial mechanics*, Vol. Band 187 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971. (邦訳)『天体力学講義』, 伊藤 秀一・関口 昌由 訳, 丸善出版, 2024.
- [29] K. Tanaka. Noncollision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 10(2):215–238, 1993.
- [30] K. Tanaka. A note on generalized solutions of singular Hamiltonian systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(1):275–284, 1994.
- [31] L. Tonelli. The calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31(3-4):163–172, 1925.
- [32] A. Tsygvinsev. La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(3):241–244, 2000.
- [33] A. Tsygvinsev. The meromorphic non-integrability of the three-body problem. *J. Reine Angew. Math.*, 537:127–149, 2001.
- [34] K. Yagasaki. Non-integrability of the restricted three-body problem. *Ergodic Theory*

and Dynamical Systems, p. 1 – 29, 2024.

- [35] S. L. Ziglin. On involutive integrals of groups of linear symplectic transformations and natural mechanical systems with homogeneous potential. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 34(3):26–36, 96, 2000.