Counting subgroups via Mirzakhani's curve counting

佐々木　東容　(城西大学)*

概　要

Mirzakhani は閉双曲曲面上の閉測地線の数え上げ問題に関して次のような明快な解を与えた：種数 g (≥ 2) の閉双曲曲面上の閉測地線 γ に対して，γ と同じタイプの閉測地線で長さ L 以下のものの個数は，$c_\gamma L^{6g-6}$ $(c_\gamma > 0)$ に漸近する．本研究では閉測地線が基本群の共役類に対応することに注目し，一般化として「基本群の有限生成部分群の共役類」の数え上げ問題を考えた．部分群の共役類の長さとして「部分群の凸核の境界の長さの和の半分」を用いると，同様に同じタイプで長さ L 以下のものの個数が cL^{6g-6} $(c > 0)$ に漸近することが分かった．加えて，重み付き有限生成部分群の共役類の完備化であるサブセットカレントの理論を用いることで，この長さが自然なものであることが分かった．

1 背景と主結果の簡易版

向き付け可能な閉曲面 Σ で種数 g が 2 以上であるものを考える．Σ 上の双曲構造を一つ固定しておく（Σ はこのとき閉双曲曲面と呼ばれる）．Σ 上の閉曲線の自由ホモトピー類にはただ一つの閉測地線が含まれるため，以後はこの二つは同一視して扱う．Σ の写像類群 $\mathrm{Map}(\Sigma) = \mathrm{Homeo}^+(\Sigma)/\mathrm{isotoppy}$ は，この同一視を利用することで，Σ 上の閉測地線全体の集合 $\mathrm{Geod}(\Sigma)$ に作用していると思える．なお，閉測地線の向きやパラメーターについては考えないものとする．また，閉測地線が素であるとは，他の閉測地線の何重巻きになっていない場合をいう．

素な閉測地線の数え上げ問題に関して，Huber の有名な結果を紹介したい（この結果は測地線の素数定理とも呼ばれている）．Huber[Hub61] の結果：

Σ 上の長さ L 以下の素な閉測地線の個数は，$\frac{e^L}{2L}$ に漸近する．

ここで，分母に 2 があるのは，閉測地線の向きを考えないからであり，向きを考えれば $\frac{e^L}{L}$ となる．驚くべきは，この漸近関数は種数 g に依らないということである（Σ の双曲構造にも依らない）．なお，この結果は Margulis によって一般のコンパクト負曲率多様体に拡張されている（[Mar04] を参照．ただし，未出版の 1970 年の学位論文が元）．

Huber による結果から，自己交差がない閉測地線，単純閉測地線についての数え上

* 〒350-0295 埼玉県坂戸市けやき台 1-1
e-mail: `dsasaki@josai.ac.jp`
web: `https://sites.google.com/view/dounnusasaki/`
本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:21J01271) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 57M50, 30F35, 37C85.
キーワード：counting subgroups, counting curves, hyperbolic surface, measured lamination, geodesic current, subset current.

げ問題を考えるのは自然である．二つの閉測地線 γ_1, γ_2 が同じタイプであるとは，ある $\phi \in \mathrm{Map}(\Sigma)$ が存在して $\phi(\gamma_1) = \gamma_2$ となることである．$\gamma_0 \in \mathrm{Geod}(\Sigma)$ を固定したとき，γ_0 と同じタイプの閉測地線を数え上げる（すなわち軌道 $\mathrm{Map}(\Sigma)(\gamma_0)$ の要素を数える）問題に関して，Mirzakhani は次の結果を得た：

> ある定数 $c > 0$ が存在して，長さ L 以下の γ_0 と同じタイプの閉測地線の個数は cL^{6g-6} に漸近する．

単純閉測地線は Σ を二つに切り分けるものとそうでないものの 2 つのタイプに分かれるため，系として次が従う：

> ある定数 $c > 0$ が存在して，長さ L 以下の単純閉測地線の個数は cL^{6g-6} に漸近する．

閉測地線は閉曲線の自由ホモトピー類に対応するが，さらに基本群 $\pi_(\Sigma)$ の共役類と対応することに講演者は着目した．そして，$\pi_1(\Sigma)$ **の共役類を数えるという問題から発想を得て，講演者は** $\pi_1(\Sigma)$ **の有限生成部分群の共役類を数えるという問題を考え**，以下の結果を得ることができた．

定理 1.1（主結果の簡易版） $\pi_1(\Sigma)$ の "非自明な" 有限生成部分群の共役類 $[H]$ に対して，ある定数 $c > 0$ が存在して，適当な幾何学的尺度で測ったときの長さが L 以下の $[H]$ と同じタイプの共役類の個数は，cL^{6g-6} に漸近する．

$[H]$ と同じタイプの共役類 $[H']$ とは，ある $\phi \in \mathrm{Map}(\Sigma)$ が存在して，$\phi([H]) = [H'])$ となるもののことである．H が $\pi_1(\Sigma)$ の有限指数部分群であるときと自明群であるとき，またそのときに限り，$\mathrm{Map}(\Sigma)([H])$ は有限集合である．上で書いた非自明は，これらの場合を除外するという意味である．共役類 $[H]$ には Σ の被覆空間 Σ_H が対応するが，「Σ_H の凸核 C_H の境界の長さの和の半分」がこの場合の尺度である．

2 Mirzakhani と Erlandsson–Souto の結果

Mirzakhani の得た結果は，簡単には上のように述べられるが，実際にはより強い結果を得ている．そのことについて説明する．まず，閉測地線 γ_0 は重み付きのマルチカーブに変えることができる．この重み付きマルチカーブとは

$$a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m \ (a_1, \ldots, a_m > 0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\text{: 閉測地線})$$

のように表わされる形式的線形和のことである．重み付きマルチカーブに対する $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の作用は，通常の作用を線形に拡張したもので定義される．

重み付きマルチカーブが単純であるとは，それを構成する全ての閉測地線が単純で互いに交わらないことを言う．単純な重み付きマルチカーブを測度論的に完備化した空間は測度付き測地線層（Measured lamination）の空間 $\mathrm{ML}(\Sigma)$ と呼ばれ，双曲曲面の研究

では非常に大きな役割を果たしてきた．Mirzakhani の初期の結果 [Mir08] においては，単純な重み付きマルチカーブ γ_0 の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ による軌道を $\mathrm{ML}(\Sigma)$ の格子点とみなして数えるというのが基本的なアイデアであった．なお，$\mathrm{ML}(\Sigma)\setminus\{0\}$ は $\mathbb{R}^{6g-6}$ に同相であるが，この次元 $6g-6$ が個数の漸近関数 cL^{6g-6} の次数に直結している．

単純とは限らない一般の重み付きマルチカーブ全体を測度論的に完備化すると，測地カレント空間 $\mathrm{GC}(\Sigma)$ が得られる (定義は 5.3 小節参照)．$\mathrm{GC}(\Sigma)$ は $\mathrm{ML}(\Sigma)$ を部分空間として含み，単純とは限らない一般の重み付きマルチカーブの数え上げを考える際には，$\mathrm{Map}(\Sigma)$ による軌道を $\mathrm{GC}(\Sigma)$ の格子点と見なして数えるというアイデアを使う．

$\mathrm{GC}(\Sigma)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$-線形構造をもつ局所コンパクト完備距離空間であり，重み付きマルチカーブの自然な完備化となっている．たとえば，閉測地線にその長さを対応させる長さ関数 ℓ は，$\mathbb{R}_{\geq 0}$-線形かつ連続に $\mathrm{GC}(\Sigma)$ 上に拡張される．他にも，交点数などの様々な幾何学的尺度が $\mathrm{GC}(\Sigma)$ 上に連続拡張されることが知られている．

γ_0 と同じタイプというとき，$\mathrm{Map}(\Sigma)(\gamma_0)$ の要素を数えていることになるが，$\mathrm{Map}(\Sigma)$ の代わりに，その有限指数部分群 Γ に変えることができる．さらに，正定数 c についても，より細かな特徴付けが存在する．加えて，閉双曲曲面 Σ はカスプ付き双曲曲面とすることもできるが，カスプ周りに言及すると説明が長くなるため，本講演集では避ける．

以上をふまえると，Mirzakhani の結果は以下のように述べられる．

定理 2.1（[Mir08, Mir16]） 任意の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限指数部 Γ と，Σ 上の任意の重み付きマルチカーブ γ_0 に対して，ある正定数 $\mathfrak{c}_g^{\Gamma}(\gamma_0)$ が存在して，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\#\{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)\mid \ell(\gamma)\leq L\}}{L^{6g-6}}=\mathfrak{c}_g^{\Gamma}(\gamma_0)m_{\mathrm{Thu}}(\ell^{-1}([0,1])),$$

が成り立つ．m_{Thu} は $\mathrm{ML}(\Sigma)$ 上の Thurston 測度であり，Lebesgue 測度と同じクラスに属する測度で，$\mathrm{Map}(\Sigma)$ 不変な測度である．加えて，$\mathrm{Map}(\Sigma)$ の $\mathrm{ML}(\Sigma)$ への作用は，m_{Thu} に関してエルゴード的である（[Mas85] 参照）ことが重要な役割を果たす．

Erlandsson–Souto は Mirzakhani の結果を以下のように拡張した．

定理 2.2（[ES22, Theorem 9.1]） 上記の Mirzakhani の結果の設定で，長さ汎関数 ℓ を任意の正値等質な連続関数 $F\colon \mathrm{GC}(\Sigma)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に取り替えられる．すなわち，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\#\{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)\mid F(\gamma)\leq L\}}{L^{6g-6}}=\mathfrak{c}_g^{\Gamma}(\gamma_0)m_{\mathrm{Thu}}(F^{-1}([0,1])),$$

が成り立つ．F が正値であるとは，任意の $\mu\in\mathrm{GC}(\Sigma)\setminus\{0\}$ に対して，$F(\mu)>0$ が成り立つことであり，F が等質であるとは，任意の $a\geq 0$ と $\mu\in\mathrm{GC}(\Sigma)$ に対して，$F(a\mu)=aF(\mu)$ が成り立つことである．

この結果の単純な重み付きマルチカーブの場合は，Mirzakhani が [Mir08] で示しており，Elrandsson–Souto はそれを一般の重み付きマルチカーブに拡張した．文献 [ES22] は

双曲曲面上の閉測地線の数え上げ問題に関して非常によくまとめられた本である．この一般形の漸近公式を得るためのアイデアについて，次の章で解説する．

3 数え上げのアイデア：$\mathbb{R}^2$ の格子点の数え上げを例として

$\mathbb{R}^2$ の格子点 $\mathbb{Z}^2$ の数え上げ問題について考える（$\mathbb{R}^n$ でも同様）．原点中心の半径 L の閉円板を $B(0,L)$ と書くとき，$B(0,L)$ 内の格子点の個数

$$\#(B(0,L)\cap\mathbb{Z}^2)$$

が L を大きくしたとき，どのような関数に漸近するかを考える．次のアイデアがポイントである．

> 閉円板を大きくしていくのではなく，$\mathbb{Z}^2$ の方を $\frac{1}{L}$ にスケーリングしたときの，$B(0,1)$ 内の個数を数える．

すなわち，

$$\#(B(0,L)\cap\mathbb{Z}^2)=\#\left(B(0,1)\cap\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2\right).$$

ここで，点 $x\in\mathbb{R}^2$ における Dirac 測度を δ_x と書くことにする．δ_x は集合が x を含めば 1 で，含まなければ 0 を返す．さらに，$\mathbb{R}^2$ の離散集合 A に対して，

$$m_A=\sum_{x\in A}\delta_x$$

と定めれば，

$$\#\left(B(0,1)\cap\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2\right)=m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}(B(0,1))$$

が成り立つ．この形に着目すると，格子点の数え上げ問題は，

> $L\to\infty$ のとき，測度 $m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}$ がどのような測度に近づくか？

という問題に言い換えられる．

$\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度の列 μ_n が μ に汎弱収束するとは，任意のコンパクト台をもつ連続関数 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して，

$$\int f d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int f d\mu$$

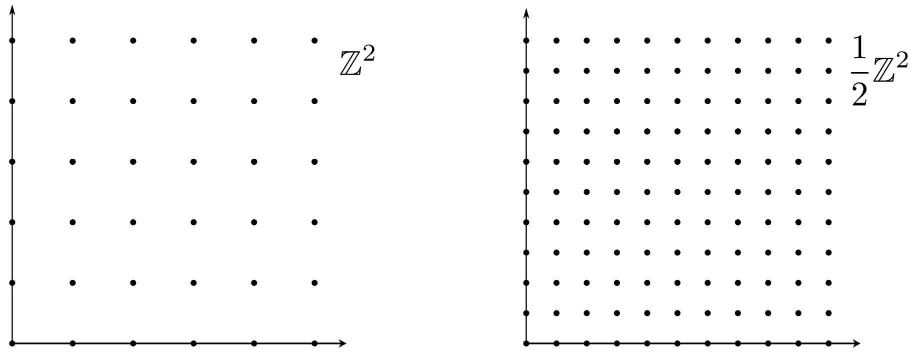
が成り立つことである．この条件は次と同値である（Portmanteau の補題と呼ばれる．[Sas22, Proposition 5.45.] を参照）：任意の $\mathbb{R}^2$ の相対コンパクトな Borel 集合 B に対して，境界 ∂B が $\mu(\partial B)=0$ を満たすならば，

$$\mu_n(B)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu(B).$$

$\mathbb{R}^2$ の Lebesgue 測度を m_{Leb} と書くことにする．任意のコンパクト台をもつ連続関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の Riemann 積分と Lebesgue 積分は一致するため，

$$\begin{aligned}\int f dm_{\mathrm{Leb}} &= \lim_{L\to\infty}\left(f \text{ の台を } \frac{1}{L} \text{ の幅の格子に細分したときの Riemann 和}\right)\\ &= \lim_{L\to\infty}\int fd\left(\frac{1}{L^2}m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，上の式の $\frac{1}{L^2}$ は $\frac{1}{L}$ の幅の格子の 1 マスの面積である．



以上より，$\frac{1}{L^2}m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}$ は $L\to\infty$ のとき，Lebesgue 測度 m_{Leb} に汎弱収束する．**この測度の汎弱収束こそが，格子点の数え上げの本質である**ことを以下で見ていく．

$m_{\mathrm{Leb}}(\partial B(0,1)) = 0$ であるから，Portmanteau の補題から次が成り立つ：

$$\frac{1}{L^2}m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}(B(0,1)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m_{\mathrm{Leb}}(B(0,1)).$$

すなわち，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\#(B(0,L)\cap\mathbb{Z}^2)}{L^2} = \pi$$

であり，$B(0,L)$ 内に含まれる格子点の個数は，πL^2 に漸近することが分かる．

正値等質な連続関数 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を与えたとき（例えば，$F(x,y) = |x|+|y|$ など），$F^{-1}([0,1])$ は星状領域であり，境界の Lebesgue 測度は 0 である．従って，

$$\frac{1}{L^2}m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}(F^{-1}([0,1])) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m_{\mathrm{Leb}}(F^{-1}([0,1]))$$

が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^2}m_{\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2}(F^{-1}([0,1])) =& \frac{1}{L^2}\#\left\{\left(\frac{1}{L}x,\frac{1}{L}y\right)\in\frac{1}{L}\mathbb{Z}^2 \,\middle|\, F\left(\frac{1}{L}x,\frac{1}{L}y\right)\leq 1\right\}\\ =& \frac{1}{L^2}\#\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid F(x,y)\leq L\right\}\end{aligned}$$

なので，尺度 F に関する $\mathbb{Z}^2$ 格子の数え上げ漸近公式：

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^2}\#\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid F(x,y)\leq L\right\} = m_{\mathrm{Leb}}(F^{-1}([0,1])).$$

が得られた．

4 測度の収束に関する Erlandsson–Souto の結果とアイデア

前の節におけるアイデアは Mirzakhani と Erlandsson-Souto の結果にも使われている．定理 2.2 は次の定理の系として得られる．

定理 4.1（[ES22, Theorem 8.1]） 任意の Σ 上の重み付きマルチカーブ γ_0 と任意の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ に対して，正定数 $\mathfrak{c}_g^\Gamma(\gamma_0)$ が存在して，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{6g-6}}\sum_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}\delta_{\frac{1}{L}\gamma}=\mathfrak{c}_g^\Gamma(\gamma_0)m_{\mathrm{Thu}}$$

が成り立つ．ただし，左辺の $\delta_{\frac{1}{L}\gamma}$ は測地カレント空間 $\mathrm{GC}(\Sigma)$ 上における Dirac 測度であり，収束は $\mathrm{GC}(\Sigma)$ 上の測度の汎弱収束である．

上の定理において，m_{Thu} はもともと $\mathrm{ML}(\Sigma)$ 上の測度であり，$\mathrm{GC}(\Sigma)\setminus\mathrm{ML}(\Sigma)$ においてはゼロ測度であることに注意する．γ_0 が単純である場合は，$\Gamma(\gamma_0)\subset\mathrm{ML}(\Sigma)$ であり，この場合は [Mir08] で示されている．Elrandsson-Souto の結果の新しさは，γ_0 が単純とは限っていない点である．この場合，$\delta_{\frac{1}{L}\gamma}$ は $\mathrm{ML}(\Sigma)$ から離れた点における Dirac 測度であるため，$L\to\infty$ のときにそれらが “集積” して m_{Thu} に収束するのは不思議に思われるかもしれない．[ES22] の証明では図 1 のアイデアが使われている．

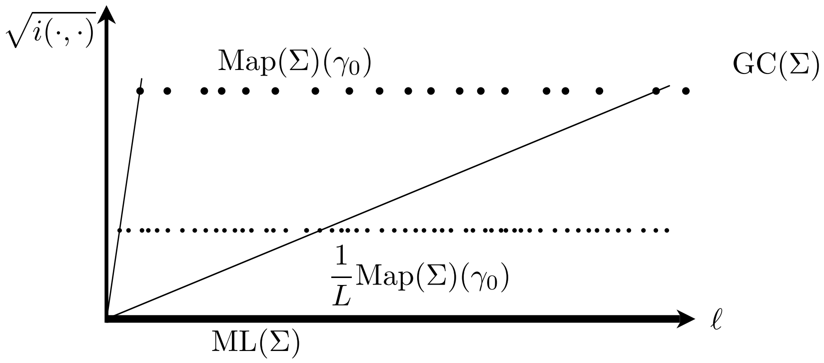


図 1 $\frac{1}{L}\mathrm{Map}(\Sigma)(\gamma_0)$ が $L\to\infty$ のとき $\mathrm{ML}(\Sigma)$ 上に “集積” していく様子.

2 つの閉測地線（閉曲線の自由ホモトピー類）についての交点数 i は $\mathrm{GC}(\Sigma)$ 上に $\mathbb{R}_{\geq 0}$-双線形かつ連続に拡張されるのだが，これが重要な役割を果たす．一つの閉測地線 γ に対して，その自己交点数 $i(\gamma,\gamma)$（通常はその半分を自己交点数とよぶ）は Σ の写像類群の作用で不変である．すると，i の $\mathbb{R}_{\geq 0}$-双線形性により，$\phi\in\mathrm{Map}(\Sigma)$ に対して，

$$i\left(\frac{1}{L}\phi(\gamma),\frac{1}{L}\phi(\gamma)\right)=\frac{1}{L^2}i(\gamma,\gamma)\xrightarrow{L\to\infty}0$$

である．また，$\mathrm{ML}(\Sigma)$ は $\mathrm{GC}(\Sigma)$ の部分空間として，

$$\mathrm{ML}(\Sigma)=\{\mu\in\mathrm{GC}(\Sigma)\mid i(\mu,\mu)=0\}$$

と特徴付けられることから，$\frac{1}{L}\phi(\gamma)$ は $L \to \infty$ のとき，一様に $\mathrm{ML}(\Sigma)$ に近づくと分かる．

図 1 では，ℓ と $\sqrt{i(\cdot,\cdot)}$ の二つの座標軸で $\mathrm{GC}(\Sigma)$ を表わしているが，次元という観点では $\mathrm{GC}(\Sigma)$ は局所的に無限次元と見なせる．

5 主結果

閉測地線の数え上げの場合，重み付きマルチカーブの完備化空間である測地カレント空間 $\mathrm{GC}(\Sigma)$ が重要な役割を果たした．有限生成部分群の共役類の数え上げ問題を考える場合，[KN13] で導入されたサブセットカレント空間 $\mathrm{SC}(\Sigma)$ が同様の重要な役割を果たす．[KN13] においては，主に自由群上のサブセットカレント空間が扱われているが，これは境界付きコンパクト双曲曲面上のサブセットカレント空間と見なせる．閉双曲曲面上のサブセットカレント空間の理論については，[Sas22] で基礎理論がまとめられている（定義は 5.3 小節参照）．$\mathrm{SC}(\Sigma)$ は有限生成部分群の共役類の線形和の測度論的完備化と見なせるような空間であり，多くの面で $\mathrm{GC}(\Sigma)$ と同様の役割を果たすことができる．

基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の非自明な有限生成部分群 H に対しては，被覆空間 Σ_H が対応させられる．H が $\pi_1(\Sigma)$ の有限指数部分群でない場合，Σ_H は面積無限の双曲曲面であるが，その凸核 C_H は境界付きコンパクト双曲曲面になる．凸核とは，包含写像がホモトピー同値写像となるような最小の凸閉部分集合のことであるが，実際には，Σ_H のいくつかの漏斗状に無限に広がる部分を，その根元の閉測地線で切って取り除くことで C_H が得られる．**凸核 C_H は共役類 $[H]$ の幾何学的表示と見なせ，共役類の数え上げ問題は凸核の数え上げ問題と見なせる．**

H が巡回部分群の場合，C_H は S^1 と同相であり，普遍被覆写像から自然に誘導される射影 $p_H\colon C_H \to \Sigma$ によって，C_H は H の生成元の閉測地線表示と同一視できる．すなわち，主結果の定理 1.1 を巡回部分群の場合に制限すれば Mirzakhani の結果になる．また，**H が巡回部分群でなく，p_H が単射な場合は，C_H は Σ の部分曲面と見なせる．**

5.1 長さ ℓ を使った場合の主結果

Σ 上のサブセットカレント空間 $\mathrm{SC}(\Sigma)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$-線形構造をもつ位相空間で，$\mathrm{GC}(\Sigma)$ と $\mathrm{ML}(\Sigma)$ をその部分空間に含む．有限生成部分群の共役類 $[H]$（あるいは凸核 C_H）に対して，$\eta_H \in \mathrm{SC}(\Sigma)$ を対応させることができるが，この対応は有限 : 1 の対応であることには注意が必要である．ただし，数え上げという観点では，最終的に定数倍をすればよいため，以後は η_H の方をメインに扱っていく．

$\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類の集合への作用は，連続かつ $\mathbb{R}_{\geq 0}$-線形に $\mathrm{SC}(\Sigma)$ 上に拡張される．さらに，$\eta_H \in \mathrm{SC}(\Sigma)$ に対して，C_H の境界成分全体を $\mathrm{Comp}(\partial C_H)$ と書くとき，

$$\eta_H \mapsto \left(\frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathrm{Comp}(\partial C_H)} \gamma \right) \in \mathrm{GC}(\Sigma)$$

という写像は，$\mathcal{B}\colon \mathrm{SC}(\Sigma) \to \mathrm{GC}(\Sigma)$ に連続，$\mathbb{R}_{\geq 0}$-線形かつ $\mathrm{Map}(\Sigma)$-同変に拡張される．

この写像 $\mathcal{B}$ は数え上げ問題において極めて重要な役割を果たす．なお，$\frac{1}{2}$ が付いているのは，連続性を維持しつつ $\mathcal{B}|_{\mathrm{GC}(\Sigma)}$ が恒等写像になるようにするためである．このために，H が巡回部分群の場合には，$\mathrm{Comp}(C_H)$ は C_H の二つのコピーからなる集合としておく．

次の補題が共役類の数え上げにおいて基本的である：

補題 5.1　任意の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$（あるいはそれらの線形和）に対して，

$$\mathcal{B}\colon \Gamma(\eta_H) \to \mathrm{GC}(\Sigma)$$

は有限 : 1-写像である．

$\ell_{\mathrm{SC}} = \ell \circ \mathcal{B}$ を共役類を数える際の幾何学的尺度とすると，上の補題から直ちに次の結果が得られる．

定理 5.2（ℓ_{SC} に関する数え上げ）　任意の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$（あるいはそれらの線形和）に対して，$\mathcal{B}(\eta_H) \neq 0$ のとき，ある正整数 $s_\Gamma(H) > 0$ が存在して，

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\eta \in \Gamma(\eta_H) \mid \ell_{\mathrm{SC}}(\eta) \leq L\}}{L^{6g-6}} = s_\Gamma(H)\mathfrak{c}_g^\Gamma(\mathcal{B}(\eta_H))m_{\mathrm{Thu}}(\ell^{-1}([0,1]))$$

が成り立つ．

5.2　一般形の主結果とそのアイデア

一般の正値等質な関数 $F\colon \mathrm{SC}(\Sigma) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を尺度とした際の数え上げ定理を得るには，定理 4.1 と同様に測度に関する収束結果を得ればよい．実際，同様の設定で以下の定理が得られた：

定理 5.3（一般形の主結果）　任意の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$（あるいはそれらの線形和）に対して，$\mathcal{B}(\eta_H) \neq 0$ のとき，

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{6g-6}} \sum_{\eta \in \Gamma(\eta_H)} \delta_{\frac{1}{L}\eta} = s_\Gamma(H)\mathfrak{c}_g^\Gamma(\mathcal{B}(\eta_H))m_{\mathrm{Thu}}$$

が成り立つ．収束は $\mathrm{SC}(\Sigma)$ 上の測度の汎弱収束である．

さらにその系として：

系 5.4（一般形の主結果の系）　$F\colon \mathrm{SC}(\Sigma) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を任意の正値等質な関数とする．ただし，F は $\mathrm{GC}(\Sigma)$ 上で正値であればよい．任意の $\mathrm{Map}(\Sigma)$ の有限指数部分群 Γ と任意の $\pi_1(\Sigma)$ の有限生成部分群の共役類 $[H]$（あるいはそれらの線形和）に対して，$\mathcal{B}(\eta_H) \neq 0$ のとき，

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\eta \in \Gamma(\eta_H) \mid F(\eta) \leq L\}}{L^{6g-6}} = s_\Gamma(H)\mathfrak{c}_g^\Gamma(\mathcal{B}(\eta_H))m_{\mathrm{Thu}}(\mathcal{F}^{-1}([0,1]))$$

が成り立つ．なお，η_H の代わりに，$[H]$ を数え上げる場合も，$s_\Gamma(H)$ を変えることで，同様の公式が成り立つ．

主結果における測度の収束について考える際，Elrandsson-Souto の定理 4.1 の場合と同様，$\frac{1}{L}\eta$ は H が巡回部分群でかつその閉測地線表示が単純でなければ，$\mathrm{ML}(\Sigma)$ から離れた点である．逆に言えば，$L \to \infty$ のときに，$\frac{1}{L}\eta$ がそのような状態に近づいていくか？，ということが問題となる．

ここで，面積汎関数 $\mathrm{Area}\colon \mathrm{SC}(\Sigma) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が重要な役割を果たす．Area は，η_H に対して凸核 C_H の面積を対応させる写像を，連続かつ $\mathbb{R}_{\geq 0}$-線形に拡張したものである（一意的）．自己交点数のときの類似で，Area を用いると，

$$\mathrm{GC}(\Sigma) = \{\mu \in \mathrm{SC}(\Sigma) \mid \mathrm{Area}(\mu) = 0\}$$

と表わすことができる．加えて，面積は写像類群の作用によって不変であるため,，任意の $\phi \in \mathrm{Map}(\Sigma)$ に対して，

$$\mathrm{Area}\left(\frac{1}{L}\phi(\eta_H)\right) = \frac{1}{L}\mathrm{Area}(\eta_H) \xrightarrow{L\to\infty} 0$$

が成り立つ．

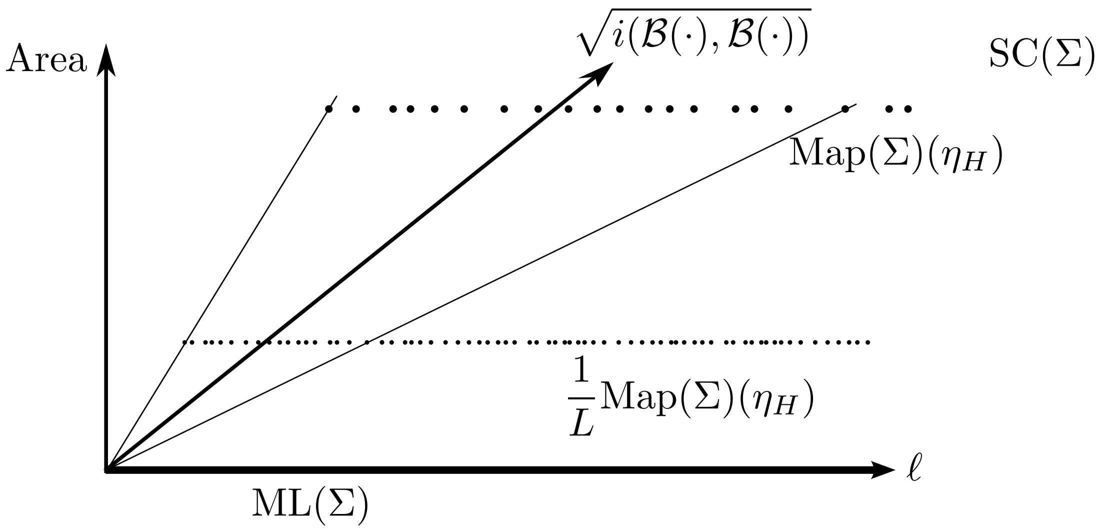


図 2　$\frac{1}{L}\mathrm{Map}(\Sigma)(\eta_H)$ が $L \to \infty$ のとき $\mathrm{ML}(\Sigma)$ 上に “集積” していく様子．

閉測地線のときの自己交点数の代わりに，境界成分たちの $i(\mathcal{B}(\eta),\mathcal{B}(\eta))$ を考えることで，

$$i\left(\mathcal{B}\left(\frac{1}{L}\phi(\eta_H)\right), \mathcal{B}\left(\frac{1}{L}\phi(\eta_H)\right)\right) = \frac{1}{L^2}i(\mathcal{B}(\eta_H),\mathcal{B}(\eta_H)) \xrightarrow{L\to\infty} 0$$

が成り立つ．以上より，図 2 のような状況が想像できる．これにより，主結果の定理 5.3 の左辺が $\mathrm{ML}(\Sigma)$ 上の測度に収束していくことが分かる．実際に，m_{Thu} の定数倍に収束することはさらなる議論が必要であるが，そこでも $\mathcal{B}$ と Area が有効活用され，最終

的には Elrandsson–Souto の結果を用いる．なお，H が巡回部分群の場合は，まさしく，Elrandsson-Souto の結果そのものが得られる．

5.3 測地カレントとサブセットカレントの定義

閉双曲曲面 Σ の普遍被覆は双曲平面 $\mathbb{H}$ である．$\mathbb{H}$ の無限遠境界 $\partial\mathbb{H}$ の 2 点を決めると，それを結ぶ無限測地線が定まるため，$\partial_2\mathbb{H} \coloneqq \{S \subset \mathbb{H} \mid \#S = 2\}$ は $\mathbb{H}$ 上の無限測地線全体の集合と思える．測地カレントは，$\partial_2\mathbb{H}$ 上の $\pi_1(\Sigma)$-不変 Radon 測度として定義される．Σ 上の閉測地線 γ に対して，その $\mathbb{H}$ へのリフト全体を Dirac 測度として足し合わせると測地カレントができるが，これが γ と同一視される．

サブセットカレントは，超空間 $\mathcal{H}(\partial\mathbb{H}) \coloneqq \{S \subset \mathbb{H} \mid S \geq 2, S\colon$ コンパクト $\}$ 上の $\pi_1(\Sigma)$-不変 Radon 測度として定義される（$\mathcal{H}(\partial\mathbb{H}) \supset \partial_2\mathbb{H}$）．$\pi_1(\Sigma)$ の非自明な有限生成部分群 H に対して，その極限集合 $\Lambda(H) \in \mathcal{H}(\partial\mathbb{H})$ が考えられるが，その上の Dirac 測度を $\pi_1(\Sigma)/H$ の作用で動かすとサブセットカレント η_H が作れる．

面白いのは，測地カレント，サブセットカレントの定義にも数え上げの理論が使われており，閉測地線や部分群の数え上げはその空間上で再び測度を考えているのである．

測地カレントの基本的なことは [ES22] によくまとまっている．コンパクト双曲曲面上のサブセットカレントの理論は [Sas22] に基本的なことがまとまっており，[Sas22b] ではカスプ付きの場合が詳しく書かれている．

参考文献

[ES22] V. Erlandsson and J. Souto: *Mirzakhani's curve counting and geodesic currents*, Progress in Mathematics. **345**, Birkhäuser, 2022.

[Hub61] H. Huber: *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgrupen II*, Mathematische Annalen, **142**, 1961.

[KN13] I. Kapovich and T. Nagnibeda: *Subset currents on free groups*, Geom. Dedicata **166** (2013), 307–348.

[Mas85] H. Masure: *Ergodic actions of the mapping class group*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 455–459.

[Mar04] Grigoriy A. Margulis: *On some aspects of the theory of Anosov systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004. With a survey by R. Sharp: *Periodic orbits of hyperbolic flows*

[Mir08] M. Mirzakhani: *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Ann. of Math **168** (2008), 97–125.

[Mir16] M. Mirzakhani: *Counting mapping class group orbits on hyperbolic surfaces*, arXiv:1601.03342, 2016.

[Sas22] D. Sasaki: *Subset currents on surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **278** (1368), 2022, 165 pp.

[Sas22b] D. Sasaki: *Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property*, Groups Geom. Dyn. **16** (2022), no. 3, 1077-1117.