A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic P^2-knots

京都大学数理解析研究所
宮澤 仁 (Jin MIYAZAWA) *

概要

4 次元多様体に埋め込まれた曲面に関する情報は, 4 次元多様体の微分構造の情報を反映しており, 微分トポロジーの観点から興味深い対象である. 曲面 Σ の 4 次元多様体への埋め込み f, g がエキゾチックであるとは, f, g が連続的に ambient isotopic だが滑らかにはそうでないことをいう. エキゾチックな曲面の埋め込みの研究は 4 次元多様体論において現在盛んに研究されている話題であるが, 最も基本的な閉 4 次元多様体である S^4 の中のエキゾチックな曲面に関する研究は多くない.

本講演の主定理は S^4 への $\mathbb{R}P^2$ の埋め込みの無限族であって互いにエキゾチックであるものの存在である. 滑らかに同値でないことの証明が既存の方法では難しいが, 講演者によって構成された新たな不変量を用いて示すことができる. 不変量の構成にはゲージ理論を用いる.

1 導入

以下, 単に多様体と言ったら可微分多様体であり, 微分構造を考えないときは位相多様体ということにする.

1.1 エキゾチック曲面

4 次元多様体に埋め込まれた曲面の種数や isotopy 類の情報は 4 次元多様体の微分構造の情報を反映しており, 4 次元多様体の微分トポロジーを調べるうえで基本的な対象である. 4 次元多様体 X への曲面 Σ の滑らかな埋め込み

$$f, g\colon \Sigma \to X$$

がエキゾチックであるとは連続的には ambient isotopic だが滑らかにはそうでないことをいう.

4 次元多様体論においてエキゾチック曲面の研究は盛んなトピックであり, エキゾチックな曲面埋め込みに関する研究自体は列挙することが困難なほど数多くの研究がある. 特に近年, D^4 内の D^2 で, 境界の特定の結び目を張るようなエキゾチック Disk が Khovanov homology を用いて発見されるなど大きな進展を迎えている. 一方, 閉 4 次元多様体の中で最も基本的な S^4 の中の閉曲面に関するエキゾチック曲面の研究は多くない.

* E-mail:miyazawa.jin.5a@kyoto-u.ac.jp

S^4 内のエキゾチックな曲面に関する背景を述べる．最も基本的な閉 4 次元多様体である S^4 内のエキゾチックな曲面埋め込みの例はあまり多くない．実際, S^4 内の向き付け可能な曲面によるエキゾチックな曲面埋め込みは発見されていない．向き付け不可能な例については Finashin–Kreck–Viro [2] や Finashin [3], Matić–Öztürk–Stipsicz [14] による例などがあるが多くはない．さらに, 向き付け不可能なエキゾチック曲面で今まで知られていた例の種数はいずれも 5 以上であり, 種数が小さい例は知られていなかった.

1.2 4 次元多様体とゲージ理論

4 次元多様体の微分トポロジーは 5 次元以上の多様体とは全く異なった振る舞いを示す．コンパクトな n 次元位相多様体に対して $n \neq 4$ なら入りうる微分構造は高々有限個なことがわかっているが, 4 次元位相多様体で複数の微分構造が見つかっているものはほとんど無限個の微分構造が見つかっている．さらに n 次元ユークリッド空間は $n \neq 4$ のときには微分構造は一意だが, R^4 には非加算無限個の微分構造がある．4 次元多様体論は単に低次元から順に多様体を調べていく過程の途中にある分野ではなく, 微分トポロジーに残されたフロンティアである.

上で述べた, 4 次元多様体の微分構造の特異な性質はどのようにして調べられたのであろうか．3 次元以下では滑らかな多様体と位相多様体の差はない．一方, 5 次元以上の微分トポロジーで重要な役割を果たす h-同境定理の証明ではホイットニーの手品と呼ばれる手法が用いられる．ホイットニーの手品の鍵となる部分は, D^2 からの写像を (境界部分を変えず) 少し変形し自己交差を消すことであるが, これができるのは $2+2$ より大きい 5 次元以上の多様体である．したがって 4 次元多様体の微分構造を調べるには他の次元とは異なる手法が必要となる.

1982 年, Atiyah の学生であった Donaldson はそれまでトポロジストが予期しない方法を 4 次元多様体論に持ち込んだ．素粒子物理学に端を発するゲージ理論である．Donaldson が [1] で示した定理は次である.

Theorem 1.1 (Donaldson [1])**.** 任意の向き付けられたコンパクト単連結可微分 4 次元多様体 X の交差形式が負定値 *(negative definite)* であるとする．このとき, 交差形式は $\mathbb{Z}$ 係数の範囲で対角化可能である.

この定理の単連結性の仮定は現在では外されている．4 次元多様体 X の交差形式というのは, 二次のコホモロジーに対して定まる次の二次形式である:

$$H^2(X;\mathbb{Z})/Tor \times H^2(X;\mathbb{Z})/Tor \to \mathbb{Z};\ (\alpha,\beta) \mapsto \langle \alpha \cup \beta, [X] \rangle.$$

X が閉向き付け可能ならポアンカレ双対から交差形式は非退化である．この定理がなぜ驚くべき定理なのかを説明する．まず, 前年の 1981 年に示された Freedman の定理 [5] によって, 任意のユニモジュラー形式に対してそれを交差形式に持つような単連結位相的 4 次元多様体が存在することがわかる．また, 負定値のユニモジュラー形式で $\mathbb{Z}$ 係数の範囲で対角化できないものは無数にあることが知られている．したがって, Donaldson の定理によって無数の位相的 4 次元多様体に対して微分構造が入らないことが示されたのである.

この Donaldson の対角化定理は, 反自己双対方程式 (ASD 方程式) と呼ばれる非線形偏微分方程式

の解のモジュライ空間を観察することによって示された．ASD 方程式は Yang–Mills 方程式というゲージ理論 (素粒子物理学) に出てくる方程式の解の特別な場合である．このようにして, 素粒子物理学の偏微分方程式の 4 次元トポロジーへの応用が始まった．第一段落で述べた 4 次元多様体の奇妙な性質はこのゲージ理論を用いて調べられたものである．

1.3 SW 方程式の反線形な対称性

4 次元多様体の微分トポロジーを調べる強力な手段にゲージ理論がある．ゲージ理論は素粒子物理学に由来する非線形偏微分方程式の解のモジュライ空間の情報から 3 次元あるいは 4 次元多様体の微分トポロジー的情報を調べる手法である．ゲージ理論の微分トポロジーへの応用で用いられる方程式に Seiberg–Witten(SW) 方程式がある．SW 方程式は, 常にモジュライ空間がコンパクトであり, 解析的に扱いが容易なうえに, SW 方程式を用いた証明しか知られていない結果もある．代表的なものは古田幹雄 [6] による, 10/8-不等式である．

Theorem 1.2 (Furuta [6])**.** X を可微分閉スピン 4 次元多様体で交差形式が不定値であるとする．このとき第二ベッチ数 $b_2(X)$ と符号数 $\sigma(X)$ の間に不等式

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\sigma(X)| + 2$$

が成り立つ．

この定理から単連結位相 4 次元多様体で交差形式が不定値かつ even(つまり, 任意の元 $\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ について $\langle \alpha \cup \alpha, [X] \rangle \in 2\mathbb{Z}$) なもので微分構造が入らないものが無数に存在することがわかる．

この定理の証明で重要なのは (スピン構造に対する)SW 方程式がもつ「反線形な変換」である．このことを説明するために, 4 次元多様体上の SW 方程式の説明をもう少し詳しく行う．X を可微分有向閉 4 次元多様体とする．X のリーマン計量を固定する．X 上のスピン c 構造とは, TX の構造群 SO(4) の,

$$\mathrm{Spin}^c(4) \cong \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{U}(1)/(-1,-1,-1)$$

への持ち上げのことである．4 次元多様体上にはいつでもスピン c 構造は存在し, ひとつスピン c 構造を固定するとその同型類は $H^2(X,\mathbb{Z})$ の分だけある．スピン c 構造 $\mathfrak{s}$ を定めると, $\mathfrak{s}$ に対し, ふたつの階数 2 の複素ベクトル束 S^+, S^- が定義される．これらを $\mathfrak{s}$ のスピノル束という．SW 方程式は $\det S^+$ の U(1)-connection A と S^+ の切断 $\phi \in \Gamma(S^+)$ を未知関数にした

$$F_A^+ = (\phi\phi^*)_0, D_A^+\phi = 0. \tag{1}$$

という方程式である．

いま, スピン c 構造構造がスピン構造, すなわち, TX の構造群 SO(4) の, $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)$ への持ち上げから来ているとしよう．このとき, スピノル束には四元数の右作用が存することが知られており, SW 方程式は

$$(A, \phi) \mapsto (j \circ A \circ j^{-1}, \phi j)$$

なる変換で不変である．これが, SW 方程式の, 反線形な変換である．この変換は, ゲージ理論にでてくる方程式がもつゲージ変換による対称性とは異なる, SW 方程式特有の対称性である．

1.4 Real SW 理論

4 次元多様体 X に滑らかな $\mathbb{Z}/2$ の作用 (involution) があるとしよう．さらに, その involutionι が X のあるスピン c 構造 $\mathfrak{s}$ を裏返す, すなわち,

$$\iota^*\mathfrak{s} \cong \bar{\mathfrak{s}}$$

をみたす状況を考える．ここで, $\bar{\mathfrak{s}}$ は $\mathfrak{s}$ に対して, $\mathrm{Spin}^c(4)$ の $\mathrm{U}(1)$ 成分の向きを裏返すことで得られるスピン c 構造で, 特に $\bar{\mathfrak{s}}$ のスピノル束は $\mathfrak{s}$ のスピノル束の複素構造を裏返したものである．

involution がしかるべき位相的な条件を満たしていればこの作用の情報と元から SW 方程式にあった反線形な変換を用いて, SW 方程式の解のモジュライ空間に「反線形な involution」を定めることができる．この反線形な involution の固定部分を見ることで, 4 次元多様体 X と X 上の involution に関する不変量を得ることができる．この SW 理論の変種を Real SW 理論という．これが本講演の主役である．

X と X 上の involutionι の組 (X, ι) を自然に調べたくなるのはどのようなときであろうか．

ひとつは単連結でない 4 次元多様体の二重被覆空間として X が現れ, ι が被覆変換である場合, Real SW は X/ι の微分構造の情報を持っている．このような場合の Real SW は中村信裕によって $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole [15, 16] として, X/ι 上の局所系でねじった SW 理論として定式化されている．さらに, 局所系のコホモロジーの 10/8-型不等式や連結和で保たれるエキゾチックな 4 次元多様体の検出など $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole をもちいないと得られないトポロジーへの応用が得られている．

involution が固定点を持つ状況が自然に出てくるのは, 4 次元多様体 X' の中の曲面 S について, S に沿った二重分岐被覆 $\Sigma_2(X', S) =: X$ を考えるときである．このとき X と被覆変換 ι に関する Real SW 理論を考えると X' に埋め込まれた S についての不変量ができる．講演者と今野北斗氏, 谷口正樹氏との共同研究 [8, 9] はこのような場合の Real SW 理論を用いて (境界付き)10/8 型不等式や Frøyshov 型不等式と呼ばれる constraint を考察し, ある条件を満たす曲面の種数の下からの評価を得ている．4 次元多様体の $\mathbb{Z}/2$ 作用そのものに興味がある場合もある．加藤祐矢は [7] で閉 4 次元多様体の involution で固定点がある場合の 10/8 型不等式を示し, 滑らかには実現できない位相的な群作用を検出している．時系列でいえばこの加藤の不等式の方が [8] より先で, [8] の不等式は加藤のそれの境界付き版である．

Real SW の関係した研究でいえば, Li による 3 次元多様体に involution がある場合の monopole floer homology がある [11, 12].

この講演では, 4 次元多様体 X の中の曲面 S に沿った二重分岐被覆 $\Sigma_2(X, S)$ に対し Real SW 理論を用いた不変量を構成し, X の中のエキゾチックな曲面, すなわちふたつの曲面 $S, S' \subset X$ で位相的にはアイソトピックだが滑らかにはそうではない例を検出する．

2 主定理

本講演では, 以下の定理について説明する.

Theorem 2.1 ([13])**.** *$\mathbb{R}P^2$ の S^4 への埋め込みの無限族で, 互いに位相的には同値だが滑らかには互いに同値でないものが存在する.*

種数が小さい例を作る際, 既存の方法では困難があった. 今まで, S^4 内のエキゾチックな曲面埋め込みが実際に滑らかには同値でないことを検出する既存の方法は, 曲面に沿った二重分岐被覆が互いに微分同相でない 4 次元多様体であることを示すというものであった. この方法では, 例えば種数 1 の向き付け可能な曲面すなわち $\mathbb{R}P^2$ のエキゾチックな曲面埋め込みを検出しようとするとエキゾチックな $\mathbb{C}P^2$ を見つけねばならず, このようなものは見つかっていない. 種数が小さい向き付け可能な曲面の埋め込みの二重分岐被覆は二次のコホモロジーの次元が小さく, このような 4 次元多様体でエキゾチックな微分構造を見つけるのは困難であることが知られている.

さらに, [13] が提出されたあと, 以下のような定理が Hughes–Kim–Miller [4] によって示された.

Theorem 2.2. *Theorem 2.1 で与えられた P^2-knot の二重分岐被覆は $\mathbb{C}P^2$ と微分同相である.*

つまり, Theorem 2.1 と合わせると, $\mathbb{C}P^2$ にエキゾチックな $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用が無数に存在することがわかった. したがって, 今回与えたエキゾチック P^2-knot たちは単に二重分岐被覆を見るだけでは区別できず, 被覆変換の情報, すなわち $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用の情報まで込めてみないと区別出来ない.

[13] では, Real SW 理論を用いた, 4 次元多様体に埋め込まれた曲面の不変量を構成し, Theorem 2.1 を示した. つまり, 二重分岐被覆に対し, 被覆変換からくる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用が SW 方程式に反線形に持ち上がっている状況を考え, その作用で固定される解を数え上げるのである.

本講演ではその不変量の構成の概略と, エキゾチック P^2-knot の構成を説明する.

2.1 エキゾチック P^2-knot の構成

さて, Theorem 2.1 の P^2-knot の与え方を説明する. P^2-knot には S^4 の向きから決まる, 法束の局所系数のオイラー数, すなわち法オイラー数 (normal Euler number) が定義され, ± 2 のどちらかであることがわかる. ここでは 2 のものを考える. 注意すべきなのは, 法オイラー数が 2 の標準的な P^2-knot P_0 の二重分岐被覆は向きを込めて考えると $-\mathbb{C}P^2$ である. 法オイラー数が -2 の P^2-knot について考えたければ S^4 の向きを裏返す微分同相で移せばいい.

Definition 2.3. P_0 を法オイラー数が 2 の標準的な P^2-knot とする. また, S^3 内の通常の結び目 K に関して, $\tau_{k,\alpha}(K)$ で K の k-twist α-roll spun で与えられる 2-knot とする. このとき, P^2-knot P_n を

$$P_n := P_0 \# n\tau_{0,1}(P(-2,3,7))$$

で定める.

結び目 K に対して k-twist α-roll spun で与えられる 2-knot の構成法は講演中に述べることにす

る．この結び目の無限族が Theorem 2.1 で述べられたエキゾチック P^2-knot たちである．これらが互いに位相的には isotopic であることは次の補題を用いる．

Lemma 2.4. 任意の $n \geq 0$ に関して $\pi_1(P_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

この補題と, Lawson[10] の結果から P_n たちは互いに位相的にアイソトピックである．

2.2 不変量の性質

Real SW 理論を用いて構成される, 2-knot および P^2-knot の不変量の構成は講演中に述べる．ここでは, 不変量が満たす性質を述べる．

Theorem 2.5. *いま, $\Sigma \subset S^4$ を 2-knot か, 法オイラー数が 2 であるような P^2-knot とする．さらに, 簡単のため, ここでは Σ の二重分岐被覆は, Σ が 2-knot ならホモロジー S^4, P^2-knot ならホモロジー $-\mathbb{C}P^2$ とする．このとき, 以下の性質を満たす, 非負整数に値をとる不変量*

$$|deg(\Sigma)|$$

が存在する．

- (S^4, Σ_0) と (S^4, Σ_1) が組として微分同相なら
$$|deg(\Sigma_0)| = |deg(\Sigma_1)|.$$
- Σ_0 が 2-knot なら
$$|deg(\Sigma_0 \# \Sigma_1)| = |deg(\Sigma_0)||deg(\Sigma_1)|.$$
- Σ が unknot な 2-knot あるいは標準的な P^2-knot P_0 ならば
$$|deg(\Sigma)| = 1.$$
- k, α を整数とし, k は偶数で $\frac{k}{2} + \alpha$ は奇数であるとする．このとき,
$$|deg(\tau_{k,\alpha}(P(-2,3,7)))| = 3.$$

上の性質を用いると, P_n の不変量は 3^n と計算され, 互いに滑らかにはアイソトピックでないことが示される．

参考文献

[1] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. J. Differential Geom., Vol. 18, No. 2, pp. 279–315, 1983.

[2] S. M. Finashin, M. Kreck, and O. Ya. Viro. Nondiffeomorphic but homeomorphic knottings of surfaces in the 4-sphere. In Topology and geometry—Rohlin Seminar, Vol. 1346 of Lecture Notes in Math., pp. 157–198. Springer, Berlin, 1988.

[3] Sergey Finashin. Exotic embeddings of $\#6\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ in the 4-sphere. In Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2008, pp. 151–169. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2009.

[4] , Hughes, Mark and Kim, Seungwon and Miller, Maggie Branched covers of twist-roll spun knots, arXiv preprint arXiv:2402.11706,2024.

[5] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geometry, Vol. 17, No. 3, pp. 357–453, 1982.

[6] Mikio Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture. Mathematical Research Letters, Vol. 8, No. 3, pp. 279–291, 2001.

[7] Yuya Kato. Nonsmoothable actions of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ on spin four-manifolds. Topology Appl., Vol. 307, pp. Paper No. 107868, 13, 2022.

[8] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and floer k-theory. arXiv preprint arXiv:2110.09258, 2021.

[9] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, links, and floer cohomologies. arXiv preprint arXiv:2304.01115, 2023.

[10] , Lawson, Terry Normal bundles for an embedded RP2 in a positive definite 4-manifold, Journal of Differential Geometry, Vol 22, No.2, pp 215–231,1985.

[11] Jiakai Li. Monopole floer homology and real structures. arXiv preprint arXiv:2211.10768, 2022.

[12] Jiakai Li. Real monopole floer homology and skein exact triangles. arXiv preprint arXiv:2304.01742, 2023.

[13] Jin Miyazawa. A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic p^2-knots. arXiv preprint arXiv:2312.02041, 2023.

[14] Matić, Gordana and Öztürk, Ferit and Stipsicz, András . An exotic $5\mathbb{R}P^2$ in the 4-sphere arXiv preprint arXiv:2312.03617, 2023.

[15] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. Math. Ann., Vol. 357, No. 3, pp. 915–939, 2013.

[16] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole invariants. J. Differential Geom., Vol. 101, No. 3, pp. 507–549, 2015.

[17] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. Mathematical Research Letters, Vol. 1, No. 6, pp. 769–796, 1994.