多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores の定理

松下　尚弘　(信州大学)*

1 背景

本講演では，多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores 型の定理に関する，岸本大祐氏（九州大学）との共同研究 [15, 16] について述べる．特に断りがない場合，単体複体は有限幾何学的単体複体のことを意味し，しばしばその幾何学的実現と同一視する．また，埋め込みとは位相空間の間の位相的埋め込みのことを意味するものとする．

1.1 van Kampen-Flores の定理

van Kampen-Flores の定理とは，単体複体のユークリッド空間への埋め込みに関する定理である．まず，次の基本的な事実から始める．

事実 1. 任意の d 次元単体複体 K は，$\mathbb{R}^{2d+1}$ に埋め込むことができる．

実際，K の頂点集合 $V(K)$ から $\mathbb{R}^{2d+1}$ への写像を，頂点が一般の位置に配置されるように取り，それらを K の各単体上にアフィンに拡張した写像を $f\colon K \to \mathbb{R}^{2d+1}$ とすれば，f は埋め込みになっている．

一方で，次の van Kampen-Flores の定理は，任意の正の整数 d に対し，d 次元単体複体で，$\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができないものが常に存在することを示している．

定理 2 (van Kampen-Flores の定理 [5, 14])**.** $(2d+2)$-次元の単体 Δ^{2d+2} の d-骨格 Δ^{2d+2}_d は，$\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができない．

van Kampen-Flores の定理と関連する定理について述べる．

一般的に，$\mathbb{R}^2$ に埋め込むことができないグラフのことを非平面的グラフという． van Kampen-Flores の定理の $d=1$ の主張は，5 頂点完全グラフ K_5 が非平面的グラフであることを主張している．ここで，n 頂点完全グラフ K_n とは，n 個の頂点と，相異なる 2 頂点は辺で結ばれているようなグラフである．非平面的グラフの代表例として，もう一つ完全二部グラフ $K_{3,3}$（すなわち，三点離散空間二つのジョイン）がある．K_5 あるいは $K_{3,3}$ と同相な部分グラフを持つグラフは非平面的であるが，グラフ理論の古典的な定理である Kuratowski の定理（例えば [21]）によれば，グラフ G が非平面的であることと，

* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1
e-mail: `matsushita@shinshu-u.ac.jp`
本研究は科研費 (課題番号:23K12975) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 57Q35, 52A37
キーワード：三角形分割, van Kampen-Flores の定理, Stiefel-Whitney 類

K_5 あるいは $K_{3,3}$ と同相な部分グラフを持つことは同値である．

また，n 点からなる離散空間を $[\boldsymbol{n}]$ で表すことにすると，$K_{3,3}$ は $[\mathbf{3}]$ の二つのジョイン $[\mathbf{3}]*[\mathbf{3}]$ である．一般に，$[\mathbf{3}]$ の $(d+1)$-重のジョイン $[\mathbf{3}]^{*(d+1)}$ は d 次元単体複体 $\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができないということが知られている．この事実と定理 2 をまとめて van Kampen-Flores の定理ということもある．しかし，本稿では定理 2 のことを van Kampen-Flores の定理と呼ぶことにする．

最後に多様体の埋め込みとの比較について述べる．古典的な Whitney の埋め込み定理（例えば [1] 参照）によれば，第二可算公理を満たす任意の d 次元微分可能多様体は，$\mathbb{R}^{2d}$ に滑らかに埋め込むことができる．したがって，単体複体の場合はそれより 1 だけ評価が悪いということになる．

1.2 van Kampen-Flores の定理の一般化

van Kampen-Flores の定理にはいくつかの一般化の方法が考えられている（[3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 19, 20] などを参照）．ここでは，「単体複体 K の d-骨格が $\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込めない」というタイプの一般化について考え，このようなタイプの主張を，「van Kampen-Flores 型の定理」と呼ぶことにする．本講演では多様体の三角形分割に対する van Kampen-Flores 型の定理について，岸本大祐氏との共同研究 [15] と [16] から，結果を紹介する．ここで，$\mathbb{Z}/2$-ホモロジー n-球面とは，n 次元位相多様体 M で，任意の非負整数 k に対し $H_k(M;\mathbb{Z}/2) \cong H_k(S^n;\mathbb{Z}/2)$ が成立するもののことをいう．

定理 3 (岸本-松下 [15]). 任意の $\mathbb{Z}/2$-ホモロジー $(2d+1)$-球面の三角形分割の d-骨格は，$\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができない．

定理 4 (岸本-松下 [16]). M を $(2d+1)$-次元の境界を持たない微分可能多様体で，全 Stiefel-Whitney 類 $w(M)$ が自明でないものとする．このとき，M の任意の三角形分割 K に対し，K の d-骨格 K_d は $\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができない．

定理 5 (岸本-松下 [16]). M を $(2d)$-次元の微分可能閉多様体で，$\chi(M)$ は奇数でかつ向き付け可能であるとする．このとき，M の任意の三角形分割 K に対し，K の d-骨格 K_d は $\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができない．

本稿の残りの構成について述べる．第 2 節では， van Kampen-Flores の定理と関連するトピックとして， Sarkaria の彩色埋め込み定理について述べる．これは単体複体の埋め込みが，彩色数と関連していることを示す重要な定理であり，定理 3 の証明と関連している．第 3 節では位相的 Radon の定理を紹介し， Gromov [10] により考案された，位相的 Radon の定理から van Kampen-Flores の定理を導出する方法を紹介する．この導出法は制約法 (constraint method) と言われ，定理 4 および定理 5 の証明に関連している．

定理 3 および定理 4 の証明は，離散的除去積 (discretized deleted product) の Stiefel-Whitney 高さ (Stiefel-Whitney height) の評価により行われるが，離散的除去積と埋め

込み，Stiefel-Whitney 高さとの関係については第 4 章で説明する．また，第 5 章では主定理の証明の概要を述べる．

2 Sarkaria の彩色埋め込み定理

Sarkaria の彩色埋め込み定理は，van Kampen-Flores の定理とグラフの彩色問題における Lovász-Kneser の定理を系に持つ強力な定理である．彩色埋め込み定理は [24, 25] によって示された．[19] も参照．

彩色埋め込み定理を説明するために，いくつか用語を準備しておく．集合 X と非負整数 k に対し，$\binom{X}{k}$ で X の k-元部分集合全体のなす集合を表すものとする．本稿では，グラフとは有限集合 V と $\binom{V}{2}$ の部分集合 E の組 (V, E) を意味するものとする．グラフの n-彩色とは，写像 $f\colon V \to \{1, \cdots, n\}$ であって，$\{v, w\} \in E$ ならば $f(v) \neq f(w)$ となるもののことである．グラフ G に対して，G の n-彩色が存在するような最小の n を G の染色数 (chromatic number) といい，$\chi(G)$ で表す．染色数を求める問題をグラフの彩色問題という．

超グラフとは，有限集合 X と，X の部分集合族 H との組 (X, H) のことである．X のことを頂点集合というが，しばしば X の言及を省略して，「H は超グラフである」などということもある．超グラフ (X, H) からは，次のように単体複体とグラフを構成することができる：

(1) X の部分集合 σ で，$e \subset \sigma$ となる $e \in H$ が存在しないとき，σ を H の独立集合という．独立集合全体は抽象的単体複体となり，それを $I(H)$ と書いて H の独立複体 (independence complex) という．
(2) H に付随する Kneser 型のグラフ $\mathrm{KG}(H)$ とは，H を頂点集合とし，$\sigma, \tau \in H$ に対し，$\sigma \cap \tau = \emptyset$ となるとき隣接しているとして定義されるグラフである．

単体複体 K に対し，$e(K)$ で K から $\mathbb{R}^n$ に埋め込むことが出来る最小の n を表すものとする．Sarkaria の彩色埋め込み定理は次のように定式化される：

定理 6 (Sarkaria の彩色埋め込み定理)**.** $H = (X, H)$ を超グラフとする．このとき次の不等式が成立する：

$$\chi(\mathrm{KG}(H)) + e(I(H)) \geq |X| - 1.$$

例えば，$X = \{1, \cdots, 2d+3\}$ とし，$H = \binom{X}{d+2}$ とする．このとき，H の相異なる二つの元が交わりを持たないことはあり得ないから，$\mathrm{KG}(H)$ は辺を持たず，$\chi(\mathrm{KG}(H)) = 1$ である．一方で $I(H) \cong \Delta_d^{2d+2}$ となるから，

$$e(I(H)) \geq 2d + 1$$

となり，van Kampen-Flores の定理が得られる．

注意 7. $X = \{1, \cdots, n\}$，$H = \binom{X}{k}$ のとき，$\mathrm{KG}(H)$ のことを $\mathrm{KG}(n,k)$ で表し，このようなグラフを Kneser グラフという． Kneser グラフ $\mathrm{KG}(n,k)$ の彩色数は，$n \geq 2k$ のときに $n-2k+2$ であることが Kneser によって [17] で予想され， Lovász によって [18] で示された（Lovász-Kneser の定理）． Lovász による証明はグラフ G に対して近傍複体という単体複体 $N(G)$ を対応させ，$N(G)$ の連結度と G の染色数との関係を論じて示すものである．一方で， Sarkaria の彩色埋め込み定理からも Lovász-Kneser の定理を示すことができる．実際，彩色埋め込み定理から

$$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) \geq n-1-e(I(H))$$

が成立するが，このとき $I(H)$ の次元は $k-2$ であるから，$e(I(H)) \leq 2k-3$．したがって，

$$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) \geq n-1-e(I(H)) \geq n-1-(2k-3) = n-2k+2$$

が成立する．逆の不等式は容易にわかる． Sarkaria の彩色埋め込み定理はグラフの彩色問題と単体複体の埋め込みとを関連付ける定理であり，このような文脈で組合せ論の文脈において van Kampen-Flores の定理は興味が持たれている（例えば [6, 19] 等を参照）．

3 位相的 Radon の定理と制約法

Radon の定理 [23] とは $\mathbb{R}^d$ の $(d+2)$-元部分集合 X に対し，交わりのない X の部分集合 Y_1, Y_2 で $\mathrm{conv}(Y_1) \cap \mathrm{conv}(Y_2) \neq \emptyset$ となるものが存在することをいう．アフィン写像 $f\colon \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ で Δ^{d+1} の $d+2$ 個の頂点を X のそれぞれの点に移すようなものを考えれば， Radon の定理とは Δ^{d+1} の面 σ と τ で $\sigma \cap \tau = \emptyset$ かつ $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$ となるものが存在することをいう．アフィン写像だけでなく，一般の連続写像に対しても成立すると主張するものが，以下に述べる位相的 Radon の定理である．

定理 8 (位相的 Radon の定理 [2])**.** Δ^{d+1} から $\mathbb{R}^d$ への任意の連続写像 f に対し，Δ^{d+1} の交わりのない面 σ と τ で，$\sigma \cap \tau = \emptyset$ かつ $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$ となるものが存在する．

位相的 Radon の定理は， Borsuk-Ulam の定理から直接証明することができる（例えば [8] や 4.4 節を参照）．

位相的 Radon の定理から， van Kampen-Flores の定理を導くことができる．次に示す証明は，2010 年に Gromov [10] によって考案されたものであり，これにより，様々な van Kampen-Flores 型の定理が，位相的 Radon （型）の定理から，導出する手法が本分野において標準的な手法となった（例えば [3] を参照）．

位相的 Radon の定理から van Kampen–Flores の定理を導く方法 背理法で示す．$f\colon \Delta_d^{2d+2} \to \mathbb{R}^{2d}$ を位相的埋め込みとする．$\tilde{f}\colon \Delta^{2d+2} \to \mathbb{R}^{2d}$ を連続写像としての拡張とする．また，連続写像 $\varphi\colon \Delta^{2d+2} \to \mathbb{R}$ で，$\varphi^{-1}(0) = \Delta_d^{2d+2}$ となるものを取る．このとき，

これを並べた写像

$$F = (\tilde{f}, \varphi) \colon \Delta^{2d+2} \to \mathbb{R}^{2d+1}, \quad x \mapsto (\tilde{f}(x), \varphi(x))$$

を考える．このとき，位相的 Radon の定理から，Δ^{2d+2} の交わりを持たない面 σ と τ で，$F(\sigma) \cap F(\tau) \neq \emptyset$ となるものが存在する．$x \in \sigma$ と $y \in \tau$ で，$F(x) = F(y)$ となるものが存在する．このとき，$\varphi(x) = \varphi(y)$ であるが，この値が 0 か否かで場合分けを行い，いずれにしても矛盾することを見る．

(1) $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ とする．このとき，$\varphi^{-1}(0) = \Delta_d^{2d+2}$ だから，$x, y \in \Delta_d^{2d+2}$ が成立する．一方で，$F(x) = F(y)$ だから $f(x) = f(y)$ となるが，これは $f \colon \Delta_d^{2d+2} \to \mathbb{R}^{2d}$ が埋め込みであることに反する．
(2) $\varphi(x) = \varphi(y) \neq 0$ とする．このとき，$\varphi^{-1}(0) = \Delta_d^{2d+2}$ から σ と τ は Δ_d^{2d+2} に含まれない．したがって，σ と τ の次元は $d+1$ 以上である．しかし，Δ^{2d+2} の $d+1$ 以上の次元の面二つは，必ず交わりを持つ．これは σ と τ が交わりを持たないことに反する．

以上により，Δ_d^{2d+2} が $\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができないということがわかる． □

上記の証明のような手法は**制約法 (constraint method)** と呼ばれ，その応用範囲はかなり広い．制約法に関する詳細な研究は Blagovic-Frick-Ziegler [3] を参照.

4 離散的除去積

4.1 除去積

二つの位相空間 X と Y が与えられたとき，X から Y への埋め込みが存在しないことを示す基本的な手法として，2 点配置空間の間の同変写像の非存在性に着目するという方法がある（例えば [1] 参照）．ここで，位相空間 X の 2 点配置空間とは,

$$\mathrm{Conf}_2(X) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \neq x_2\}$$

のことである．位相的組合せ論の文脈では，2 点配置空間のことを除去積 (discretized product) ということもある（例えば [19] 参照）．$f \colon X \to Y$ が連続な単射であるならば，連続写像

$$\mathrm{Conf}_2(X) \to \mathrm{Conf}_2(Y), \quad (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$$

が存在する．ここで，$\mathrm{Conf}_2(X)$ への $\mathbb{Z}/2$ の作用を $(x_1, x_2) \leftrightarrow (x_2, x_1)$ とすることで考えると，$\mathrm{Conf}_2(f) \colon \mathrm{Conf}_2(X) \to \mathrm{Conf}_2(Y)$ は $\mathbb{Z}/2$-連続写像であることがわかる．したがって，まとめると次がわかる：

補題 9. X と Y を位相空間とする．$\mathrm{Conf}_2(X)$ から $\mathrm{Conf}_2(Y)$ への $\mathbb{Z}/2$-同変連続写像が存在しないならば，X から Y への連続な単射は存在しない.

4.2 離散的除去積と概埋め込み

K を単体複体とする．このとき離散的除去積 $\mathrm{Conf}_2^\Delta(K)$ を

$$\mathrm{Conf}_2^\Delta(K)=\bigcup\{\sigma\times\tau \mid \sigma \text{ と } \tau \text{ は } K \text{ の単体で } \sigma\cap\tau=\emptyset\}$$

と定義する．離散的除去積を用いると，次の概埋め込みの非存在性がわかることがある．

定義 10 (概埋め込み)**.** K を単体複体とし，X を位相空間とする．K から X への概埋め込み (almost embedding) とは，K の交わりを持たない任意の単体 σ と τ に対し，$f(\sigma)\cap f(\tau)=\emptyset$ が成立することをいう．

定義から埋め込みは概埋め込みである．したがって，「概埋め込みが存在しない」という主張は，「埋め込みが存在しない」という主張より強い．位相的 Radon の定理は「Δ^{d+1} から $\mathbb{R}^d$ への**概**埋め込みは存在しない」ということを意味し，第 3 節において紹介した制約法の証明においては，概埋め込みが存在しないという点が本質的に効いている．

補題 9 と同様の議論で，次のことがわかる．

補題 11. K を単体複体，X を位相空間とする．$\mathrm{Conf}_2^\Delta(K)$ から $\mathrm{Conf}_2(X)$ への $\mathbb{Z}/2$-同変連続写像が存在しないならば，K から X への概埋め込みは存在しない．

定義から，離散的除去積 $\mathrm{Conf}_2^\Delta(K)$ は除去積 $\mathrm{Conf}_2(K)$ の $\mathbb{Z}/2$-同変部分空間である．離散除去積と通常の除去積との間には，次の関係がある．

補題 12 (Shapiro [26])**.** K を単体複体とするとき，包含 $\mathrm{Conf}_2^\Delta(K)\hookrightarrow\mathrm{Conf}_2(K)$ は $\mathbb{Z}/2$-ホモトピー同値である．

上記の補題について一つ注意をする．本稿では除去積 $\mathrm{Conf}_2(X)$ は 2 点の配置空間のこととしたが，明らかなやり方で，k 重の除去積（k 点配置空間）$\mathrm{Conf}_k(X)$ や，k 重の離散除去積 $\mathrm{Conf}_k^\Delta(K)$ なども同様に定義することができる．$k\geq 3$ の場合，これらのホモトピー型は一般には異なることがある．

4.3 Stiefel-Whitney 高さ

4.1 節および 4.2 節で述べたように，二つの空間 X と Y とが与えられたとき，X から Y への（概）埋め込みの非存在性を，（離散）除去積の間の $\mathbb{Z}/2$-同変写像の非存在から導けることがある．$\mathbb{Z}/2$-同変写像の非存在を示す基本的な方法として，以下に述べる Stiefel-Whitney 高さ (Stiefel-Whitney height) を比べるというものがある．

Z を自由な $\mathbb{Z}/2$-空間とし，その軌道空間を $\overline{Z}$ で表すとする．このとき，$\mathbb{Z}/2\cong O(1)$ であるから，被覆写像 $Z\to\overline{Z}$ は主 $O(1)$-束である．その第一 Stiefel–Whitney 類を $w_1(Z)\in H^1(\overline{Z};\mathbb{Z}/2)$ とする．このとき，Z の Stiefel-Whitney 高さ (Stiefel-Whitney height) を

$$\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(X)=\sup\{n \mid w_1(X)^n\neq 0\}$$

と定義する．Stiefel-Whitney 類の自然性から，次の事実が直ちに導かれる．

補題 13. Z と W を自由 $\mathbb{Z}/2$-空間とする．Z から W への $\mathbb{Z}/2$-連続写像が存在するならば，$\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(Z) \le \mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(W)$ が成立する．すなわち，$\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(Z) > \mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(W)$ なら，Z から W への $\mathbb{Z}/2$-同変写像は存在しない．

二重被覆 $Z \to \overline{Z}$ に関する Gysin 列から次が成立する．

補題 14. Z を自由 $\mathbb{Z}/2$-空間，n を非負整数とする．任意の $i \le n$ に対し $\tilde{H}^i(Z;\mathbb{Z}/2) = 0$ であるならば，$\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(Z) \ge n+1$ である．

位相的 Radon の定理の証明　位相的 Radon の定理は Δ^{d+1} が $\mathbb{R}^d$ に概埋め込みできないという定理だが，これは $\partial\Delta^{d+1}$ が $\mathbb{R}^d$ に概埋め込みできないという主張と同値である．$\partial\Delta^{d+1}$ は S^d に同相で，射影 $\mathrm{Conf}_2(S^d) \to S^d$ は可縮なファイバーを持つファイブレーションだからホモトピー同値であり，補題 12 より $\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}\mathrm{Conf}_2^{\Delta}(\partial\Delta^d) = \mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}\mathrm{Conf}_2(\partial\Delta^d) = d$ を得る．一方で $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^d) \simeq_{\mathbb{Z}/2} S^{d-1}$ だから，補題 11 から $\partial\Delta^d$ から $\mathbb{R}^d$ への概埋め込みは存在しない．□

5　主定理の証明の概要

5.1　定理 3 の証明について

定理 3 の証明について述べる．[15] には本定理の証明を二通り与えている．一つは蓮井-岸本-武田-蔦谷 [11] の次の位相的 Radon 型の定理に，制約法を適用する方法である．

定理 15 (蓮井-岸本-武田-蔦谷 [11])**.** K を d-次元の $\mathbb{Z}/2$-ホモロジー球面の三角形分割とする．このとき，任意の連続写像 $f\colon S^d \to \mathbb{R}^d$ に対し，$\sigma, \tau \in K$ で，

$$\sigma \cap \tau = \emptyset, \quad f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset, \quad \dim\sigma + \dim\tau \le d$$

となるものが存在する．

注意 16. [11] では K は単体的球面の場合のみを考え，さらに $\dim\sigma + \dim\tau \le d$ という条件は書かれていないが，証明を見ればこれらの条件で定理が成立することがわかる．

もう一つは [19] における彩色埋め込み定理の証明と類似した手法を用いることであり，この場合は定理 3 より次の（少なくとも見かけ上は）強い定理を導出することができる．

定理 17 (岸本-松下 [15])**.** M を $(2d+1)$-次元の $\mathbb{Z}/2$-ホモロジー球面とする．このとき，M の任意の三角形分割 K と，その d-骨格 K_d の $\mathbb{R}^{2d+1}$ への埋め込み $f\colon K_d \to \mathbb{R}^{2d+1}$ に対し，f と $\alpha \circ f$ はイソトピックではない．ここで α は $\mathbb{R}^{2d+1}$ の鏡映変換である．

5.2　定理 4 および定理 5 の証明の概要

定理 4 と定理 5 は，同じ手法で証明することができる．

まず，M を微分可能多様体とし，TM をその接束とする．M のリーマン計量 g を取る．M 上の連続関数 $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$S_\varepsilon M \subset TM$ で，T_xM 上で長さ $\varepsilon(x)$ となる接ベクトル全体のなす球面束とする．ε をうまく取って，exp を $S_\varepsilon M$ の各ファイバーに制限したとき単射であるようにとっておく．このとき，写像

$$f\colon S_\varepsilon M \to \mathrm{Conf}_2(M), \quad v \mapsto (\exp v, -\exp v)$$

を定義すると，f は $\mathbb{Z}/2$-同変写像になる．ここで，$S_\varepsilon M$ の $\mathbb{Z}/2$-作用は (-1) 倍によって定義している．以上により，

$$\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(S_\varepsilon M) \leq \mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Conf}_2(M))$$

を得る．$\mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(S_\varepsilon M)$ のことを $\alpha(M)$ と定義すると，次が成立することがわかる：

補題 18. $\alpha(M) \leq \mathrm{ht}_{\mathbb{Z}/2}(\mathrm{Conf}_2(M))$

ここで，$S_\varepsilon M$ の第 1 Stiefel-Whitney 類を α，M の次元を n とする． Leray-Hirsch の定理より，$S_\varepsilon M/(\mathbb{Z}/2)$ の $\mathbb{Z}/2$-係数コホモロジーは $1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}$ を基底に持つ自由 $H^*(M;\mathbb{Z}/2)$-加群であり，

$$\alpha^n = w_n(M)\cdot 1 + \cdots + w_1(M)\cdot \alpha^{n-1}$$

が成立する．ここで，$w_i(M) \in H^i(M;\mathbb{Z}/2)$ は M の第 i Stiefel-Whitney 類である．この記述から，定理 4 と定理 5 は，次の定理から示すことができる．

定理 19. $\alpha(M) \geq 2d+1$ ならば，M の任意の三角形分割 K に対し，K の d-骨格 K_d は $\mathbb{R}^{2d}$ に埋め込むことができない．

定理 19 を示すには，対応する位相的 Radon 型の定理を離散的除去積を用いて証明し，それに制約法を適用することで得られる．

参考文献

[1] 足立正久，埋め込みとはめ込み（数学選書），岩波書店，1984

[2] E.G. Bajmóczy, I. Bárány, A common generalization of Borsuk's and Radon's theorem, Acta. Math. Hungarica **34** (1979), 347-350.

[3] P.V.M. Blagojević, F. Frick, and G.M. Ziegler, Tverberg plus constraints, Bull. Lond. Math. Soc. **46**, (2014), 953-967.

[4] P.V.M. Blagojević and G.M. Ziegler, Beyond the Borsuk-Ulam theorem: The topological Tverberg story, A journey through discrete mathematics, 273-341, Springer, Cham, 2017.

[5] A. Flores, Über n-dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind, Ergeb. Math. Kolloq. **6** (1932/1934), 4-7.

[6] F. Frick, Chromatic Numbers of Stable Kneser Hypergraphs via Topological Tverberg-Type Theorems, International Mathematical Research Notices, Volume 2020, Issue 13, July 2020, 4037–4061.

[7] F. Frick and M. Harrison, Spaces of embeddings: Nonsingular bilinear maps, chirality, and their generalizations, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), no. 1, 423-437.

[8] Craig R. Guilbault, An Elementary Deduction of the Topological Radon Theorem from Borsuk–Ulam, Discrete & Computational Geometry, Volume 43, pages 951–954, (2010)

[9] X. Goaoc, I. Mabillard, P. Paták, Z. Patáková, M. Tancer, and U. Wagner, On generalized Heawood inequalities for manifolds: a van Kampen-Flores-type nonembeddability result. Israel J. Math. **222** (2017), no. 2, 841-866.

[10] M. Gromov, *Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry*, Geometric and Functional Analysis Vol. 20 (2010) 416–526.

[11] S. Hasui, D. Kishimoto, M. Takeda, and M. Tsutaya, *Tverberg's theorem for cell complexes, Bull. London. Math. Soc.,* Volume 55, Issue 4, (2023) 1944-1956.

[12] D. Jojić, G. Panina, R. Živaljević, *A Tverberg type theorem for collectively unavoidable complexes,* Israel J. Math. **241** (2021), no. 1, 17-36.

[13] D. Jojić, S.T. Vrećica, and R.T. Živaljević, *Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type,* J. Alg. Comb **46** (2017), 15-31.

[14] E.R. van Kampen, *Komplexe in euklidischen Räumen,* Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg **9** (1933), 72-78.

[15] D. Kishimoto, T. Matsushita, *Van Kampen-Flores theorem for cell complexes,* Discrete & Computational Geometry

[16] D. Kishimoto, T. Matsushita, *Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes,* Proceedings of the American Mathematical Society

[17] M. Kneser, Aufgabe 360, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 58:2 Abteilung, S. 27, 1955.

[18] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, Journal of Combinatorial Theory, Series A 25: 319-324, 1978.

[19] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, written in cooperation with A. Björner and G.M. Ziegler, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[20] L. Martínez-Sandoval and A. Padrol, The convex dimension of hypergraphs and the hypersimplicial Van Kampen-Flores Theorem, J. Comb. Theory B **149** (2021), 23-51.

[21] 中本敦浩，小関健太，曲面上のグラフ理論， SGC ライブラリ 172，サイエンス社

[22] E. Nevo and U. Wagner, On the embeddability of skeleta of spheres, Israel J. Math. **174** (2009), 381-402.

[23] J. Radon, "Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten", Mathematische Annalen, 83 (1–2): 113–115 (1921).

[24] K.S. Sarkaria, A generalized Kneser conjecture, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **49** 236-240, 1990.

[25] K.S. Sarkaria, A generalized van Kampen-Flores theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 2, 559-565.

[26] A. Shapiro, Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean space. I. The first obstruction, Ann. of Math. **99** (1957), No. 2, 256-269.