Thompson 群と結び目

児玉 悠弥　(鹿児島大学)[*1]
高野 暁弘　(大阪大学)[*2]

概　　要

Jones は 2017 年, Thompson 群と呼ばれる群のユニタリ表現を研究する過程で, Thompson 群の元から結び目（絡み目）を構成する手法を発見し, 任意の結び目や絡み目がこの手法で得られることを示した [7]. 一方, どのような元が同じ結び目（絡み目）を与えるのかは, 現在でもあまりわかっていない. 我々は, Jones の手法をより深く理解するための足がかりとして, Thompson 群の部分集合, 特に部分群に着目し, そこから得られる結び目や絡み目の集合を調べてきた. 本稿では, 得られた一連の結果 [10–12] を紹介する.

1　Thompson 群 F

Thompson 群とは, 1965 年に R. Thompson によって定義された 3 つの群 F, T, V のことである. 本稿ではこの群のうち F のみを扱う. F の同値な定義は数多く知られているが, ここでは単位閉区間 $[0,1]$ 上の同相群の部分群として定義する.

定義 1.1　次の 3 条件を満たす閉区間 $[0,1]$ 上の同相写像全体からなる群を, **Thompson 群** F という.

(1) 各写像は向きを保つ区分線形写像.
(2) それぞれの線形な部分では, その傾きは 2 の冪.
(3) 折れる点 ($\in [0,1]\times[0,1]$) は $\mathbb{Z}[1/2]\times\mathbb{Z}[1/2]$ の元.

ただし, 二項演算は写像の合成で定める.

以降, F の $[0,1]$ への自然な右作用を考える. 図 1 の写像は F の元の例である.

F の各元は区分線形なので, 各写像は定義域 $[0,1]$ の分割と値域 $[0,1]$ の分割で表すことができる. 例えば図 1 の写像は, 定義域を $[0,1/4]$, $[1/4,1/2]$, $[1/2,1]$, 値域を $[0,1/2]$, $[1/2,3/4]$, $[3/4,1]$ と分割することで表される. ただし, この表し方は一意ではない. 例えば, 定義域を $[0,1/8]$, $[1/8,1/4]$, $[1/4,1/2]$, $[1/2,1]$, 値域を $[0,1/4]$, $[1/4,1/2]$, $[1/2,3/4]$, $[3/4,1]$ と分割したとしても, 得られる写像は再び図 1 の写像である.

F の元を表す際に必要な分割は, （根付き）2 分木による $[0,1]$ の分割で表すことができる. 以下, 2 分木における, ただひとつの次数 2 の頂点を**根**, 次数 1 の頂点を**葉**といい, 頂

[*1] 〒890-0065 鹿児島県鹿児島市郡元 1-21-35 鹿児島大学理学部 数理情報科学プログラム
e-mail: yuya@sci.kagoshima-u.ac.jp
[*2] 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: takano.akihiro.sci@osaka-u.ac.jp

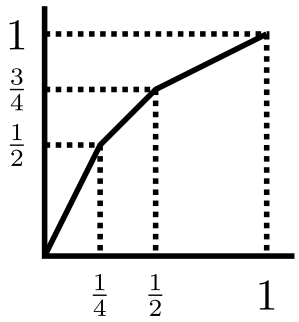


図 1　F の元の例

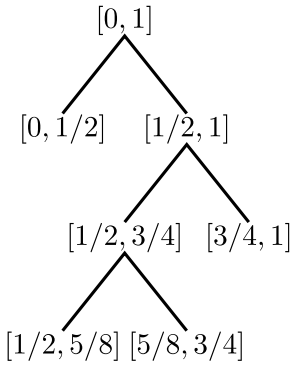


図 2　2 分木による $[0,1]$ の分割の例

点が根と 2 つの葉のみからなる 2 分木を **caret** という．まず, 根に区間 $[0,1]$ を対応させる．そして, 葉でない頂点に区間 $[a,b]$ が対応しているとき, その 2 つの子に $[a,(a+b)/2]$ と $[(a+b)/2,b]$ を対応させると決めることで, 全ての頂点に区間を対応させることができる．このとき, 葉に対応する区間をすべて集めることで, $[0,1]$ の分割を得ることができる．例えば, caret に対応する分割は $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ であり, 図 2 の 2 分木に対応する分割は $[0,1/2]$, $[1/2,5/8]$, $[5/8,3/4]$, $[3/4,1]$ である．

葉の数が等しい 2 分木の組 (T_+,T_-) を考える．このとき, T_+ と T_- それぞれに $[0,1]$ の分割が対応する．T_+ に対応する区間の分割を定義域の分割, T_- に対応する区間の分割を値域の分割と定めることで, $[0,1]$ 上の区分線形写像が得られる．実は, この写像はいつでも F の元である [*1]．さらに, 次が成り立つ．

命題 1.2（[5]）　任意の F の元 f に対して, 得られる写像が f であるような 2 分木の組 (T_+,T_-) が存在する．また, F の各元に対して, その写像を与える, 葉の数が最も少ない 2 分木の組 [*2]が一意に存在する．

葉の数が最も少ない 2 分木の組を, **reduced** な 2 分木の組という．

上の事実は（少なくとも筆者らには）明らかではない．そこで, 前半の主張を Burillo による note[*3]に基づき証明する．後半の主張については, 群の表示や各元を一意に表す語（normal form）等を経由する大掛かりな説明が必要なため, 本稿では解説しない．

さて, f を F の元とし, $(a_1,b_1),\dots,(a_k,b_k)\in\mathbb{Z}[1/2]\times\mathbb{Z}[1/2]$ を, f の全ての折れる座標を小さい順に並べたものとする．全ての a_i,b_i は $\mathbb{Z}[1/2]$ の元なので, ある n および m が存在して, $a_1=a'_1/2^n,\dots,a_k=a'_k/2^n$, $b_1=b'_1/2^m,\dots,b_k=b'_k/2^m$ と表すことができ

[*1] 条件 1 は明らかである．各葉に対応する区間の長さが $1/2^k$ という形をしていることから, 条件 2 も容易に確かめられる．条件 3 についても, 折れる点の候補が各葉に対応する区間の端点であることから明らかである．

[*2] 一般に, 区分線形の “折れる点の数 +1” と葉の数が一致するとは限らない．例えば, 定義域の区間の分割が $[0,3/4]$, $[3/4,13/16]$, $[13/16,7/8]$, $[7/8,1]$ で, 値域の区間の分割が $[0,3/4]$, $[3/4,7/8]$, $[7/8,15/16]$, $[15/16,1]$ である写像を表すのに必要な葉の数は, 少なくとも 5 である．

[*3] https://web.mat.upc.edu/pep.burillo/book_en.php

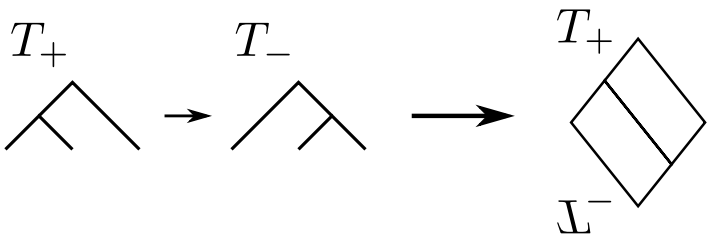


図 3　2 分木の組から tree diagram を作る方法

る. 自然数 j に対して T_j を, どの葉から根までの辺の数も j であるような 2 分木とする. T_n に対応する区間の分割は, 分割 $[0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{k-1}, a_k], [a_k, 1]$ の細分であることに注意する. T_m についても同様である.

区間 $[a_i, a_{i+1}]$ と, その f による像 $[b_i, b_{i+1}]$ に着目する. この区間上では f の傾きが一定であるので, その傾きを 2^{r_i} とおく. n の定め方から, ある自然数 l_i を $l_i = a'_{i+1} - a'_i$ としたとき, $a_{i+1} - a_i = l_i/2^n$ が成り立つ. この区間上では f の傾きが 2^{r_i} であったので, $b_{i+1} - b_i = (l_i 2^{r_i})/2^n$ が成り立つ. 一方 m の定め方から, ある自然数 l'_i を $l'_i = b'_{i+1} - b'_i$ としたとき, $b_{i+1} - b_i = l'_i/2^m$ も成り立つ. 以上をまとめると, $l'_i = l_i \times 2^{(r_i+m-n)}$ を得る.

まず, $r_i + m - n > 0$ の場合を考える. このとき, l_i 個の葉が区間 $[a_i, a_{i+1}]$ に対応していて, l'_i 個の葉が区間 $[b_i, b_{i+1}]$ に対応しているから, T_n の l_i 個の葉全てに, T_{r_i+m-n} を貼り付ける. このとき, これらの葉は $[a_i, a_{i+1}]$ と $[b_i, b_{i+1}]$ に対応し, かつ葉の数がともに l'_i となる. そして, 得られる写像の各葉に対応する区間上での傾きは,

$$\frac{\frac{1}{2^m}}{\frac{1}{2^{n+(r_i+m-n)}}} = 2^{r_i}$$

である. $r_i + m - n < 0$ であったときには, 同様のことを T_m の l'_i 個の葉に対して行う. また, $r_i + m - n = 0$ であったときには, 何も行わない.

以上の操作を全ての区間で行えば, 葉の数が等しい 2 分木の組 (T_+, T_-) で, f を与えるものを得ることができる.

2　Jones の構成法

本節では, Jones 自身によるレビュー論文 [9] に基づき, F の元から結び目（絡み目）を構成する方法を概説する. 以降, 結び目と絡み目を区別せず, 全て結び目と呼ぶ.

葉の数が等しい（reduced とは限らない）2 分木の組を (T_+, T_-) とする. T_- を上下反転させて, T_+ と T_- の葉同士をくっつけて得られる図を **tree diagram** という. 例えば図 3 は, 図 1 に対応する 2 分木の組から得られる tree diagram である. 結び目（の図式）は, 以下の方法で構成される.

Step 1: tree diagram は（平面に埋め込まれていると思うと）領域の分割を与えていることに注意する. このとき, 各有界な領域に対して, T_+ 及び T_- のある頂点がひとつずつ

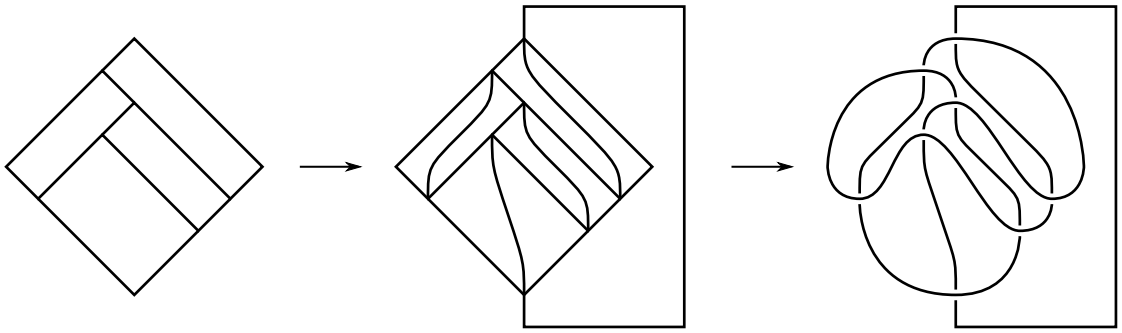


図 4　tree pair から結び目を作る方法

存在して, その頂点を根とする caret が有界な領域を構成する辺の一部となる. 領域内でこの 2 点を辺で結ぶ操作を, 全ての有界な領域で行う. さらに, T_+ と T_- の根を, 外側の非有界な領域内でも辺で結ぶ. こうして得られたグラフは, 葉以外の全ての頂点の次数が 4 であることに注意する.

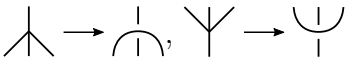
Step 2: 次数が 4 の頂点を,  というルールに従って書き換える. すなわち, 元々の caret が over crossing となるように書き換える. 合わせて, T_+ と T_- のそれぞれの葉を共有している 2 本の辺を（葉を頂点とみなさず）1 本の辺とみなすことで, 結び目の図式を得る.

図 4 は各 step の具体例であり, この tree pair から得られる結び目は三葉結び目である. 前節で述べたように, F の同じ元を表す区間の分割は一意ではなく, 対応する 2 分木の組も一意ではない. ただし, reduced な 2 分木の組は一意に存在するのであった. そこで, F の元に対して, その reduced な 2 分木の組から定まる tree diagram により得られる結び目を対応させる写像を $\mathcal{L}$ とする. このとき次が成り立つ.

定理 2.1（[7, Theorem 5.3.1]）　$\mathcal{L}\colon F \to \{\text{ 全ての結び目 }\}$ は全射.

この事実は, 組み紐群と結び目の関係にちなんで, **Alexander の定理**と呼ばれる. また, 任意の結び目 K に対して, 逆像 $\mathcal{L}^{-1}(\{K\})$ は無限集合であることがわかっている. この事実は, 例えば [11, Lemma 2.5] より従う.

3　固定部分群と結び目の関係

我々は, Jones の理論をより深く理解するために, Thompson 群 F の部分群に注目して, 次のような問題を考えた.

問題 3.1　Thompson 群 F の部分群 G に対して, 制限写像

$$\mathcal{L}|_G\colon G \to \{\text{ 全ての結び目 }\}$$

の像を特定せよ.

この節では, F の $[0,1]$ への自然な作用に関する固定部分群に対して得られた結果を紹介する. S を $[0,1]$ の部分集合とし, S の固定部分群を, $\mathrm{Stab}(S) := \{f \in F \mid f(S) = S\}$ と表す.

3.1 1 点の固定部分群

r を $[0,1]$ の元とし, $\mathrm{Stab}(\{r\})$ を単に $\mathrm{Stab}(r)$ と書く.

定理 3.2（[11, Theorem 1.2]） 1 点の固定部分群については, 以下が成り立つ.

(1) $r \neq 1/2$ のとき, $\mathcal{L}|_{\mathrm{Stab}(r)}\colon \mathrm{Stab}(r) \to \{$ 全ての結び目 $\}$ は全射である.
(2) $r = 1/2$ のとき, $\mathrm{Im}(\mathcal{L}|_{\mathrm{Stab}(r)}) = \{L \sqcup \bigcirc \mid L$ は全ての結び目 $\} \cup \{\bigcirc\}$.

ここで, $\bigcirc$ は自明な結び目を表す.

なお, $r = 0, 1$ のときは, 作用の定義より $\mathrm{Stab}(0) = \mathrm{Stab}(1) = F$ となり, 全射性は明らかである. $r = 1/2$ のときは, 1 成分の自明な結び目が必ず現れてしまい, 全射とはならないが, この自明な結び目の違いを無視すれば, “ほとんど全射” と思うことができる. また, $r, r' \in (0,1)$ が 2 進有理数のとき, $\mathrm{Stab}(r')$ は $\mathrm{Stab}(r)$ の共役部分群である. 従って, F の部分群の $\mathcal{L}$ による像は, その埋め込み写像に依存して定まることがわかる.

この定理は, 各 $r(\neq 1/2)$ に対して, $\mathrm{Stab}(r)$ の非自明な元でありながら 1 成分の自明な結び目を与えるものを見つけることで示される. このような元は人工的に構成されており, 現時点では, 2 点以上の有限集合に関する固定部分群の考察はほとんど進んでいない. 詳細は [11] を参照していただきたい.

問題 3.3 $S \subset [0,1]$ を有限集合とする. このとき, 制限写像 $\mathcal{L}|_{\mathrm{Stab}(S)}$ の全射性を判定せよ.

3.2 無限集合の固定部分群

次に, $[0,1]$ の無限部分集合に関する結果を述べる. Jones は [7] 内で, oriented subgroup $\overrightarrow{F}$ という部分群を定義した. 紙面の都合上ここで詳細な定義は述べない（例えば [2] が詳しい）が, $\overrightarrow{F}$ は tree diagram から定まる Γ-graph が 2 部グラフとなるもの全体からなる部分群として定義される [*4]. 名前の通り, $\overrightarrow{F}$ の元から得られる結び目には自然に向きをつけることができる. そこで, 有向結び目に対しても, 写像 $\mathcal{L}$ の全射性の問題を考える.

定理 3.4（[7, Theorem 5.3.15], [2, Theorem]） $\mathcal{L}|_{\overrightarrow{F}}\colon \overrightarrow{F} \to \{$ 全ての有向結び目 $\}$ は全射である.

上の定理について, もう少し詳しく説明すると, まず Jones [7] が弱い意味での全射性を示した. ここで, 「弱い意味」とは, 「いくつかの自明な結び目との非交和の違いを除い

[*4] なお, Γ-graph が Tait graph となるような結び目の図式を描くことができるが, その結び目は 2 節で得られた結び目と同じものになる. Jones は, この方法を用いて Alexander の定理を証明した.

て」という意味である．そして，後に Aiello [2] が，本来の意味での全射性を示した．

また，Golan–Sapir [6] は，oriented subgroup $\overrightarrow{F}$ を，F の $[0,1]$ への作用に関する固定部分群として特徴づけた．

定理 3.5（[6, Theorem 2]） 集合 $S \subset [0,1]$ を

$$S \coloneqq \left\{ r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap [0,1] \mid r \text{ を 2 進小数 } 0.a_1 \cdots a_m \text{ と表したとき, } \sum_{i=1}^{m} a_i \equiv 1 \mod 2 \right\}$$

で定める．このとき，$\overrightarrow{F} = \mathrm{Stab}(S)$ が成り立つ．

さらに，彼らは $\overrightarrow{F}$ を一般化し，2 以上の整数 n に対して n-oriented subgroup $\overrightarrow{F_n}$ を Γ-graph を用いて定義し，固定部分群としての解釈を与えた．

定理 3.6（[6, Theorem 5.11]） 集合 S_i を

$$S_i \coloneqq \left\{ r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap [0,1] \mid r \text{ を 2 進小数 } 0.a_1 \cdots a_m \text{ と表したとき, } \sum_{i=1}^{m} a_i \equiv i \mod n \right\}$$

と定める．このとき，$\overrightarrow{F_n} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Stab}(S_i)$ が成り立つ．

筆者らは，$\overrightarrow{F_n}$ に対して，次の結果を得た．

定理 3.7 制限写像 $\mathcal{L}|_{\overrightarrow{F_3}} \colon \overrightarrow{F_3} \to \{$ 全ての結び目 $\}$ は全射である．また，2 以上の整数 n に対して，$\mathcal{L}|_{\overrightarrow{F_{2n+1}}} \colon \overrightarrow{F_{2n+1}} \to \{$ 全ての結び目 $\}$ は弱い意味で全射である．

問題 3.8 4 以上の整数 n に対して，制限写像 $\mathcal{L}|_{\overrightarrow{F_n}} \colon \overrightarrow{F_n} \to \{$ 全ての結び目 $\}$ の（本来の意味での）全射性を判定せよ．

Golan–Sapir [6] は，n-oriented subgroup $\overrightarrow{F_n}$ に対して，さらに別の解釈も与えている．その説明のために，Brown–Thompson 群 $F(n)$ を導入する．

定義 3.9 2 以上の整数 n に対し，次の 3 条件を満たす閉区間 $[0,1]$ 上の同相写像全体からなる群を，**Brown–Thompson 群** $F(n)$ という．

(1) 各写像は向きを保つ区分線形写像．
(2) それぞれの線形な部分では，その傾きは n の冪．
(3) 折れる点 $(\in [0,1] \times [0,1])$ は $\mathbb{Z}[1/n] \times \mathbb{Z}[1/n]$ の元．

定義より，$F(2) = F$ である．また，F と同様に，$F(n)$ の元は，葉の数が等しい根付き n 分木の組で表すことができる．さらに，一般の n 分木は，頂点が根と n 個の葉のみからなる n 分木（n-caret，図 5 参照）を組み合わせて得られる．この n-caret を，葉の数が同じであるような 2 分木に置き換えたり，(2-)caret を m-caret に置き換えたりする操作

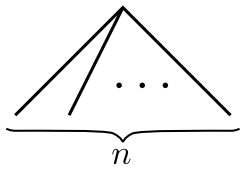


図 5　n-caret

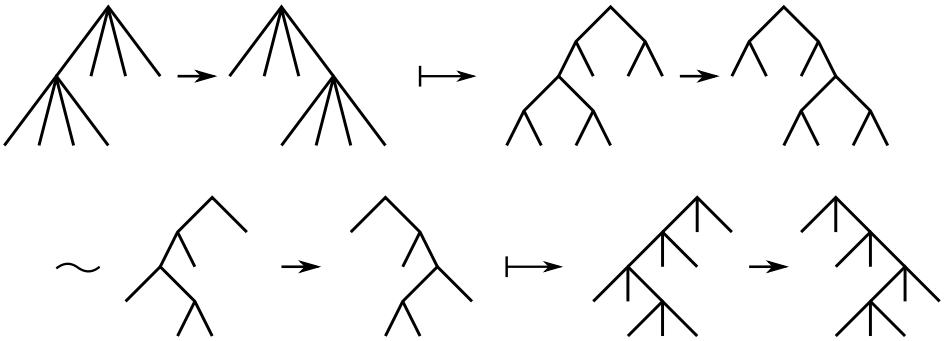


図 6　単射準同型 $F(4) \to F(3)$ の例

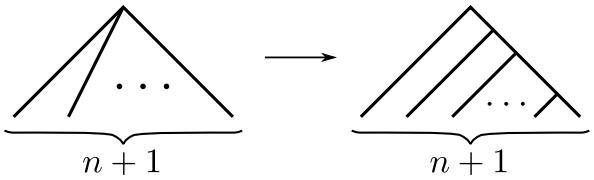


図 7　単射準同型 $F(n+1) \to F$ を誘導する置き換え

を組み合わせると, Brown–Thompson 群の間の単射準同型 $F(n) \to F(m)$ が得られる[*5]（m, n は 2 以上の整数, 図 6 参照）. Golan–Sapir は, 次の結果を示した.

定理 3.10（[6, Lemma 5.10]）　2 以上の整数 n に対して, 図 7 の置き換えで得られる単射準同型 $F(n+1) \to F$ の像は, $\overrightarrow{F_n}$ と一致する. 特に, $\overrightarrow{F_n} \cong F(n+1)$ である.

一方, Jones は [8] において, 3-colorable subgroup $\mathcal{F}$ という部分群も定義した. この部分群は, tree diagram が領域の彩色に関するある条件を満たすもの全体からなる部分群として定義される. この条件の正確な定義も述べない（例えば [11] が詳しい）が, 以下の特徴付けが知られている.

定理 3.11（[3, Lemma 2.7]）　$i \in \{0, 1, 2\}$ に対して, 集合 $T_i \subset [0, 1]$ を

$$T_i \coloneqq \{r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap (0, 1) \mid \omega(r) \equiv i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

[*5] 一般に, $F(n)$ から $F(m)$ への単射準同型は, n と m の大小に関わらず, 無数に存在する. また, このような caret を置き換えることで得られる写像は, 擬等長埋め込み写像であることが知られている [4, Theorem 6].

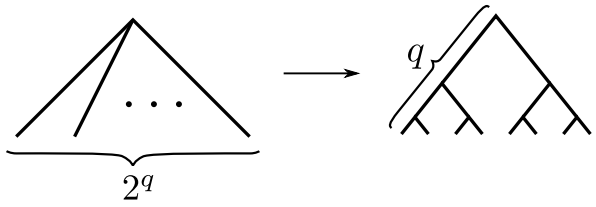


図 8　単射準同型 $F(2^q) \to F$ を誘導する置き換え

で定める. ただし, r を 2 進小数 $0.a_1 \cdots a_n$ としたとき, $\omega(r) = \Sigma_{i=1}^{n}(-1)^i a_i$ と定め, 自然に $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元とみなす. このとき, $\mathcal{F} = \bigcap_{i=0}^{2} \mathrm{Stab}(T_i)$ が成り立つ.

Aiello は [1] において, 「$\mathcal{L}|_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \{$ 全ての結び目 $\}$ は全射か？」という Question を挙げた. 次の定理は, この写像は全射ではないということを主張するものである.

定理 3.12（[10, Theorem 1.2]）　f を $\mathcal{F}$ の非自明な元とする. このとき, $\mathcal{L}(f)$ は 3 彩色可能な結び目である.

筆者らはさらに, 3 以上の奇数 p に対し, $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}$ を満たす, p-colorable subgroup $\mathcal{F}_p$ を定義した. この群は, $p = 3$ のときと同様に, F の固定部分群として記述することができる.

定理 3.13（[12, cf. Theorem 4.14]）　$i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ に対して, 集合 $T_i \subset [0,1]$ を

$$T_i \coloneqq \{r \in \mathbb{Z}[1/2] \cap (0,1) \mid \rho(r) \equiv i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$$

で定める. ただし, r を 2 進小数 $0.a_1 \cdots a_n$ としたとき, $\rho(r) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i/2^i$ と定め, 自然に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元とみなす. このとき, $\mathcal{F}_p = \bigcap_{i=0}^{p-1} \mathrm{Stab}(T_i)$ が成り立つ.

また, Ren [13, Theorem 5.9] は, $\mathcal{F}$ が Brown–Thompson 群 $F(4)$ と同型であることを示した. 我々は, この結果を拡張し, 次を示した.

定理 3.14（[12, Proposition 4.1]）　3 以上の奇数 p に対して, 図 8 の置き換えで得られる単射準同型 $F(2^q) \to F$ の像は, $\mathcal{F}_p$ と一致する. 特に, $\mathcal{F}_p \cong F(2^q)$ である. ここで, $q = \min\{r \in \mathbb{Z}_{>0} \mid 2^r \equiv 1 \mod p\}$ である.

$\mathcal{F}_p$ もまた, 全ての結び目を与えない部分群の一例である.

定理 3.15（[12, Theorem 3.8]）　f を $\mathcal{F}_p$ の非自明な元とする. このとき, $\mathcal{L}(f)$ は p 彩色可能な結び目である.

問題 3.16　$\mathcal{L}|_{\mathcal{F}_p} \colon \mathcal{F}_p \to \{$ 全ての p 彩色可能な結び目 $\}$ の全射性を判定せよ.

参考文献

[1] V. Aiello, *An introduction to Thompson knot theory and to Jones subgroups*, to appear in J. Knot Theory Ramifications.

[2] ———, *On the Alexander theorem for the oriented Thompson group* $\overrightarrow{F}$, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 1, 429–438. MR4071378

[3] V. Aiello and T. Nagnibeda, *On the 3-colorable subgroup* $\mathcal{F}$ *and maximal subgroups of Thompson's group* F, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **73** (2023), no. 2, 783–828. MR4588965

[4] J. Burillo, S. Cleary, and M. I. Stein, *Metrics and embeddings of generalizations of Thompson's group* F, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1677–1689. MR1806724

[5] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256. MR1426438

[6] G. Golan and M. Sapir, *On Jones' subgroup of R. Thompson group* F, Journal of Algebra **470** (2017), 122–159.

[7] V. Jones, *Some unitary representations of Thompson's groups* F *and* T, J. Comb. Algebra **1** (2017), no. 1, 1–44. MR3589908

[8] V. F. R. Jones, *A no-go theorem for the continuum limit of a periodic quantum spin chain*, Comm. Math. Phys. **357** (2018), no. 1, 295–317. MR3764571

[9] ———, *On the construction of knots and links from Thompson's groups*, Knots, low-dimensional topology and applications **284** (2019), 43–66. MR3986040

[10] Y. Kodama and A. Takano, *The 3-colorable subgroup of Thompson's group and tricolorability of links*, J. Algebra **634** (2023), 336–344. MR4624435

[11] ———, *Alexander's theorem for stabilizer subgroups of Thompson's group*, arXiv preprint arXiv:2306.13398 (2023).

[12] ———, *The p-colorable subgroup of Thompson's group*, arXiv preprint arXiv:2302.10060 (2023). to appear in Groups Geom. Dyn.

[13] Y. Ren, *From skein theory to presentations for Thompson group*, J. Algebra **498** (2018), 178–196. MR3754410