スケイン代数の有限次元表現の理解に向けて

軽尾浩晃 (学習院大学)*

1. はじめに

本稿の対象である「(被約) 状態付き SL(n) スケイン代数」を説明する前に, まずは SL(n) スケイン代数について説明する. SL(n) スケイン代数とは, 有向曲面に対して定まる非可換 $\mathbb{C}$ 代数であり, SL($n, \mathbb{C}$) 指標多様体の量子化であることが知られている [Sik05]. この代数は有向 n 価グラフで生成され, $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-Reshetikhin–Turaev 関手 [RT91] 由来の関係式が要請されている. 一般には非可換な代数であるが, 図的計算で理解できるというのが特徴である. SL(2) スケイン代数は Kauffman 括弧スケイン代数 [Prz99, Tur91] と同型であり, SL(3) スケイン代数は Kuperberg スケイン代数 [Kup96] と同型であることが知られている. 特に $n = 2$ の場合は, 量子 Teichmüller 空間 [BW16, Lê19]・位相的量子場の理論 [BHMV95]・量子クーロン枝 [AS24]・制限量子モジュライ代数 [BFR23] などと深く関係している.

SL(2) スケイン代数の一般化として, 状態付きスケインという元を導入して適切な関係式を課すことで, (被約) 状態付き SL(2) スケイン代数が導入された [Lê18, CL22]. これは Bonahon–Wong の量子トレース写像（量子 Teichmüller 空間への埋め込み）の構成 [BW16] から着想を得ており, 特に複雑な曲面を理想 3 角形という単純なピース上での議論に帰着させられるというメリットがある. さらに, このスケイン代数は量子団代数 [Mul16, LY23]・量子 Teichmüller 空間 [Lê19, CL22]・位相的量子場の理論 [CL22a]・因子化ホモロジー [Coo20, Coo23] と密接に関わっていることが知られている. スケイン代数を通して他分野の現象を図的に捉えることができ, その重要性は低次元トポロジーに収まらない. $n = 2$ の場合と同様にして, 一般の n に対しても, 状態付き 1-n 価グラフを考えることで（被約）状態付き SL(n) スケイン代数が導入された [LS21, LY23]. これも以下に挙げる例から筋の良い研究対象であることが伺える.

1. 2 角形の状態付き SL(n) スケイン代数は量子座標環 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}(n))$ と Hopf 代数として同型である（$n = 2$ は [CL22], 一般の n は [LS21]）.
2. ある特別な曲面族に対しては, Alekseev–Grosse–Schomerus が導入した数理物理由来の（非制限）量子モジュライ代数 [AGS95] と同型である [BFR23].
3. （量子）高階 Teichmüller 空間の文脈で現れる Fock–Goncharov 代数 [FG06, FG09] への準同型写像（量子トレース写像）が構成されており, ある条件下では単射である（$n = 2$ は [BW16, Lê19], $n = 3$ は [Kim20, Kim21, Dou24], 一般の n は [LY23]）.

状態付き SL(n) スケイン代数の構造の理解を通して他分野への寄与を図りたいのだが, そのための第一歩として

代数の有限次元表現を理解する

というのは基本的かつ重要である. 非可換代数の有限次元表現を理解する上で, 単一性定理は非常に有効であることが知られている [BG02, FKBL19]. 単一性定理は, $\mathbb{C}$ 代数が**概 Azumaya**（almost Azumaya）であるとき, つまり, 3 条件

1. $\mathbb{C}$ 代数として有限生成である

本研究は科研費（課題番号：23K12976）の助成を受けたものである.
キーワード：スケイン代数, 量子クラスター代数, 高階 Teichmüller 空間, Azumaya 表現
* e-mail: hiroaki.karuo@gakushuin.ac.jp

2. 素である (零因子を持たないことよりも弱い条件)

3. 中心 Z 上の加群として有限生成である

を満たすとき, その有限次元 (既約) 表現を Azumaya 集合 (MaxSpec(Z) の Zariski 稠密開集合) を用いて理解できることを意味している. (1), (2) は先行研究 [LY23] で既に示されているため, 残る問題は (3) を示すことである. （状態付き）SL(2) スケイン代数の中心を求める際, その基底と適切なフィルトレーションを用いることが本質的であった [FKBL19, Yu23]. しかし, この方針を（状態付き）SL(n) スケイン代数に適用するのは難しく, その原因の一端は

我々は（状態付き）SL(n) スケイン代数の (扱いやすい) 基底を知らない

ことにある（[SW07] の合流理論を適用するための複雑度が見つかっていない）.

Bonahon–Higgins [BH23] は一般の n に対し, $n=2$ のアナロジーとして高階 Chebyshev 多項式によるループの像が SL(n) スケイン代数の中心元であることを示した. しかし, これは漸化式で与えられる多変数多項式であり, スケイン代数の元として扱うには分かりづらさを孕んでいる.

一方で, Wang [Wan23] は $n=2$ のアナロジーとして, 弧（1 価グラフ）の m' 乗が状態付き SL(n) スケイン代数の中心元となることを示した. 後で紹介する関係式 (4) から, すべての n ウェブ（SL(n) スケイン代数の生成元）は弧の積と和で表されるため, 我々はすべての n ウェブのある種の像が中心に入っていることを知るに至ったのである. SL(n) スケイン代数の範疇ではなく, 状態付き SL(n) スケイン代数で考えると物事をより簡単に扱える状態になることを意味している.

本稿で述べる結果をまとめると, 以下のようになる（これらは共同研究 [KW24] に基づく）.

1. 量子パラメータのオーダーが奇数であるとき, 状態付き SL(n) スケイン代数の中心を求めた. 特に, m' 乗写像の像以外の中心元を特定した.

2. この中心上の加群としての生成元の個数（PI 次数）を具体的に与えた.

2. （被約）状態付き SL(n) スケイン代数と量子トーラス

2.1. pb 曲面

pb 曲面（punctured bordered surface）とは, 有向コンパクト曲面 $\overline{\Sigma}$ から有限個の点を取り除いて得られる曲面 Σ で, Σ のすべての境界が開区間に同相であるものとする. 取り除いた点を**穿孔**（puncture）と呼び, 特に $\overline{\Sigma}$ の内部に含まれている点を**内部穿孔**, $\partial\overline{\Sigma}$ 上の点を**境界穿孔**と呼ぶ. pb 曲面 Σ が**本質的である**（essentially bordered）とは, Σ のすべての連結成分が空でない境界を持つときという. $\overline{\Sigma}$ の**偶境界** (**奇境界**) とは, Σ の偶数個（奇数個）の境界穿孔を持つ $\overline{\Sigma}$ の境界連結成分のことである. 重要な設定として, 本稿では内部穿孔はないと仮定する.

pb 曲面 Σ の**理想弧** c とは, 埋め込み $c\colon (0,1)\to\Sigma$ であって, $c(0)$ と $c(1)$ が穿孔であるように, はめ込み $[0,1]\to\overline{\Sigma}$ に拡張できるときをいう. 以下では, 理想弧を Σ における像として扱う. 理想弧が**自明である**とはヌルホモトピックであるときをいう.

pb 曲面 Σ が 3 **角形分割可能**とは, すべての連結成分が少なくとも穿孔を 1 つ持ち, 1 点または 2 点穴あき球面, 1 角形, 2 角形のいずれも含まないときをいう. 3 角形分割可能な pb 曲面 Σ の **(理想)**3 **角形分割**とは, 互いにイソトピックでない非自明な理想弧のなす極大集合のことである.

2.2. n **ウェブとその図**

pb 曲面 Σ に対して, 点 $(x,t) \in \Sigma \times (-1,1)$ の第 2 成分 t をこの点の**高さ**と呼ぶ.

$\Sigma \times (-1,1)$ の n **ウェブ** α とは, $\Sigma \times (-1,1)$ にプロパーに埋め込まれた有向閉曲面と有向 (有限) グラフの非交和であり, 以下の条件を満たすものである:

1. α は 1 価または n 価頂点のみをもつ. 各 n 価頂点 v では, α の辺の向きはすべて v に向かうか, v から出るかのいずれかである. 1 価頂点のなす集合を $\partial\alpha$ で表し, その元を α の**端点**と呼ぶ. Σ の各境界連結成分 c に対し, $\partial\alpha \cap (c \times (-1,1))$ は異なる高さを持つとする,
2. α のすべての辺は $\Sigma \times (-1,1)$ に埋め込まれた有向閉区間である,
3. α は (横断的) **枠**をもつ,
4. 各 n 価頂点の周りでは, 半辺は巡回順序をもつ.
5. $\partial\alpha \subset \partial\Sigma \times (-1,1)$ であり, 端点での枠（法ベクトル）は $(-1,1)$ の 1 の方向を指している.

空集合 $\emptyset$ も n ウェブとみなし, n ウェブの間のイソトピーは n ウェブのクラスにおいて適用する.

n ウェブ α に対し, 写像 $s\colon \partial\alpha \to \{1,2,\cdots,n\}$ を**状態**と呼び, 状態を備えた α を**状態付き** n **ウェブ**と呼ぶ.

（状態付き）n ウェブ α が**垂直な位置にある**とは, 以下の条件を満たすときをいう.

1. 枠の法ベクトルは, α の任意の点で $(-1,1)$ の 1 の方向を指している,
2. 射影 $\mathrm{pr}\colon \Sigma \times (-1,1) \to \Sigma \times \{0\}$ に関して α は一般の位置にある,
3. すべての n 価頂点において, pr による射影図の半辺の巡回順序は Σ の向きと整合的である（図を描くときは, 反時計まわりであると約束する）.

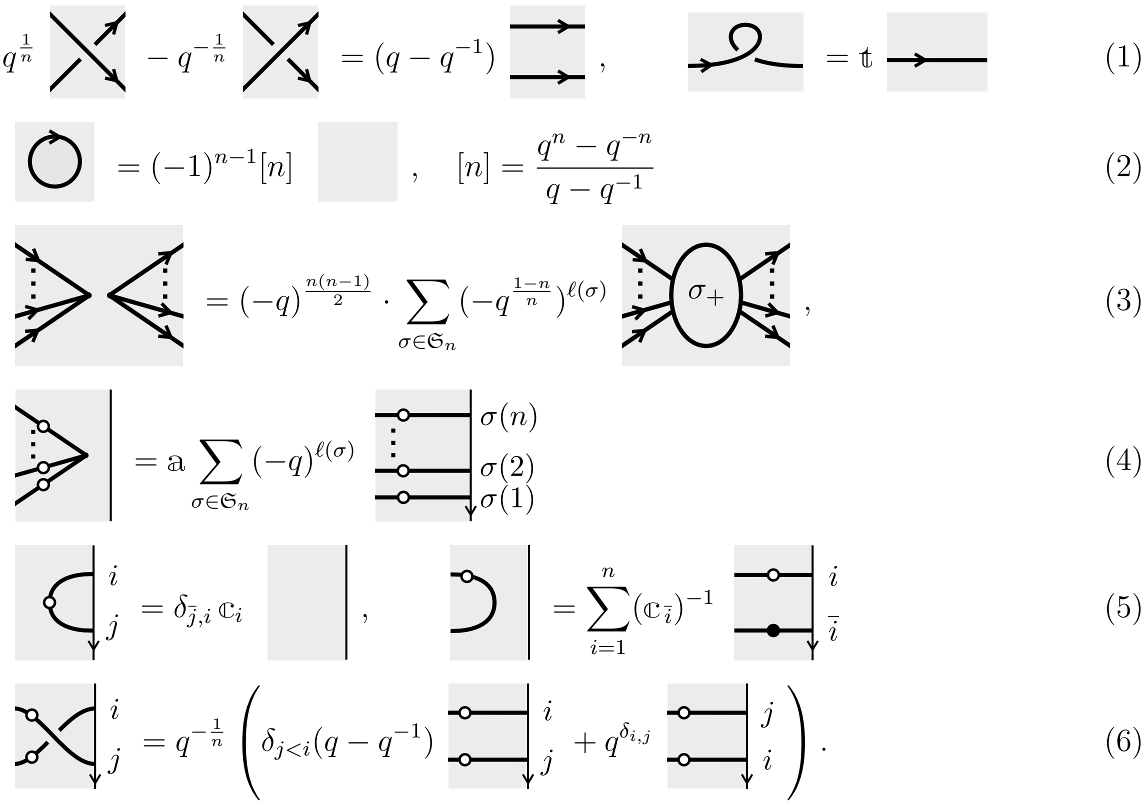
すべての（状態付き）n ウェブ α は垂直な位置にあるようにイソトピーで変形できる. Σ の境界連結成分 c に対して, $\partial\alpha \cap (c \times (-1,1))$ の高さは $c \cap \mathrm{pr}(\alpha)$ に全順序を与える. 各境界連結成分でこの全順序が, 各 2 重点で（結び目図における通常の）交差情報が与えられているとき, $\mathrm{pr}(\alpha)$ を α の**（状態付き）**n **ウェブ図**と呼ぶ.

2.3.（被約）状態付き $\mathrm{SL}(n)$ **スケイン代数**

以下では, 次の設定・記号を用いる. まず, 整数 $n \geq 2$ とし, $\hat{q} \in \mathbb{C}^\times$ とする. ここで, $\hat{q}^2$ は 1 の原始 m'' 乗根である. d' を n と m'' の最大公約数とし, $m' = m''/d'$ とおく. d を $2n$ と m' の最大公約数とし, $m = m'/d$ とおく. $q = \hat{q}^{2n^2}$ を $q^{1/2n^2} = \hat{q}$ を満たすように取り, 次の記号を導入する:

$$\mathbb{c}_i = (-q)^{n-i} q^{\frac{n-1}{2n}}, \quad \mathbb{t} = (-1)^{n-1} q^{\frac{n^2-1}{n}}, \quad \mathbb{a} = q^{\frac{n+1-2n^2}{4}}.$$

有向 pb 曲面 Σ に対し, Σ の**状態付き** $\mathrm{SL}(n)$ **スケイン代数** $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ とは, $\Sigma \times (-1,1)$ 内のすべての状態付き枠付き n ウェブのイソトピー類で生成される $\mathcal{R}$ 加群を次の関係式 (1)–(6) で割って得られる商加群に, $(-1,1)$ 方向の重ね合わせによって積構造を定めた $\mathcal{R}$ 代数である. ただし, 図は状態付きウェブ図（の一部）を $(-1,1)$ の 1 側から見ているとし, 各関係式のウェブ図は灰色部分の外側は全く同じであるとする. 楕円の中の σ_+ は $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ から定まる正ブレイドを表し, $\ell(\sigma) = \#\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$ は $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の転倒数を表す. さらに, $\delta_{j<i} = \begin{cases} 1 & j < i \\ 0 & j \geq i \end{cases}$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ であり, 白丸と黒丸は状態付き n ウェブの向きを表している（ただし, 白丸と黒丸の表す向きは互いに逆であるとする）.



本稿の内容を理解する上で上記の関係式をしっかりと理解する必要はないが, これらが$U_q(\mathfrak{sl}_n)$-Reshetikhin–Turaev 関手 [RT91] から自然に要請される関係式であることを強調しておく.

pb 曲面Σの境界穿孔pに対し, 状態付き角弧（stated corner arc）$C(p)_{ij}$, $\overleftarrow{C}(p)_{ij}$を図 1 で表される状態付き弧として定義する. Σの 1 角形以外の連結成分の頂点vに対し, 集合

$$C_p=\{C(p)_{ij}\mid i<j\},\quad \overleftarrow{C}_p=\{\overleftarrow{C}(p)_{ij}\mid i<j\}$$

を考え, $C_p\cup\overleftarrow{C}_p$の各元を$p$での**劣弧**（bad arc）と呼ぶ.

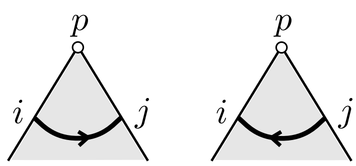


図 1: 左図は$C(p)_{ij}$を, 右図は$\overleftarrow{C}(p)_{ij}$を表す.

すべての劣弧の生成するイデアルI^{bad}は両側イデアルであり, 特に, 量子トレース写像（量子トーラスへの埋め込み）の核となることが知られている [CL22, LY23]. そのため, 商代数

$$\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma):=\mathcal{S}_n(\Sigma)/I^{\mathrm{bad}}$$

を考えることは自然であり, これをΣの**被約状態付き**SL(n) **スケイン代数**と呼ぶ [LY23].

2.4. 量子トーラスと単項部分代数

k次反対称行列Qに対して, Qに付随した**量子トーラス**と**量子平面**とは, それぞれ

$$\mathbb{T}(\mathsf{Q}):=\mathbb{C}\langle x_1^{\pm1},\dots,x_k^{\pm1}\mid x_ix_j=\hat{q}^{2\mathsf{Q}_{ij}}x_jx_i\rangle$$
$$\mathbb{T}_+(\mathsf{Q}):=\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_k\mid x_ix_j=\hat{q}^{2\mathsf{Q}_{ij}}x_jx_i\rangle$$

で与えられる非可換代数であった．これらは, 生成元の非可換性が $\hat{q}$ の冪で与えられているという特徴がある．

部分モノイド $\Lambda \subset \mathbb{Z}^k$ に対し,

$$\mathbb{T}(\mathsf{Q};\Lambda) := \mathbb{C}\text{-span}\{x^{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \Lambda\}$$

は $\mathbb{T}(\mathsf{P})$ の $\mathbb{C}$ 部分代数を成し, これを $\mathbb{T}(\mathsf{Q})$ の Λ **単項部分代数**と呼ぶ．

$\mathbb{C}$ 代数 A を考え, $\mathcal{Z}(A)$, $\mathcal{Z}(\mathbb{T}(\mathsf{Q}))$ で A, $\mathbb{T}(\mathsf{Q})$ の中心を表すとすると,

$$\mathbb{T}_+(\mathsf{Q}) \subset A \subset \mathbb{T}(\mathsf{Q}) \implies \mathcal{Z}(A) = A \cap \mathcal{Z}(\mathbb{T}(\mathsf{Q})) \tag{7}$$

が従う．この意味で, 我々は A の中心を抽象的に知っていると言える．より具体的に中心を知るために, まずは $\mathcal{Z}(\mathbb{T}(\mathsf{Q}))$ を理解したい．では, 本稿で扱う量子トーラスの非可換性はどんな反対称行列で統制されているのだろうか？それをこれから見ていく．

2.5. n-3 角形分割と箙

Σ の理想 3 角形分割 λ を固定し, これの更なる細分としての n-3 角形分割とそれから定まる重み付き箙を導入する．

$\mathbb{P}_3$ の重心座標を

$$\mathbb{P}_3 = \{(i,j,k) \in \mathbb{R}^3 \mid i,j,k \geq 0,\ i+j+k=n\} \setminus \{(0,0,n),(0,n,0),(n,0,0)\}, \tag{8}$$

とする．ここで, (i,j,k)（もしくは簡単のため ijk と書く）は重心座標を表し, 特に $v_1 = (n,0,0)$, $v_2 = (0,n,0)$, $v_3 = (0,0,n)$ とする．v_i と v_{i+1} を端点とする $\mathbb{P}_3$ の境界辺を e_i とする（図 2 参照）．

$\mathbb{P}_3$ の n-3 **角形分割**とは, $i,j,k =$ 整数定数で表される平面による $\mathbb{P}_3$ の n^2 個の小さな 3 角形への分割のことである．この n-3 角形分割に対して, v_1,v_2,v_3 の以外の頂点と v_1,v_2,v_3 を頂点として持たない辺に対して, 辺に図 2 のように向きを付け, 有向グラフである**箙**（quiver）$\Gamma_{\mathbb{P}_3}$ を考えることができる．ここで, 箙の**矢**（arrow）とは小さな 3 角形の辺 e に与えられた向きのことであり, e が $\mathbb{P}_3$ の境界にあるときは $\mathbb{P}_3$ の反時計回りとなるように向きが与えられ, e が $\mathbb{P}_3$ の境界にないときは e と並行な $\mathbb{P}_3$ の境界辺の向きと一致するように向きが与えられている．さらに, $\mathbb{P}_3$ の境界上の矢に重み 1 を与え, それ以外の矢には重み 2 を与える．このように重みが与えられた箙を**重み付き箙**（weighted quiver）と呼ぶ．

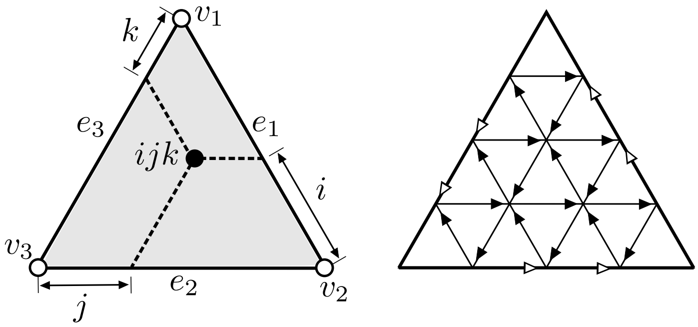


図 2: 左図: 重心座標 ijk,　　右図: 4-3 角形分割と箙

$\overline{V}_{\mathbb{P}_3}$ で $\mathbb{P}_3$ の整数重心座標を表すことにする:

$$\overline{V}_{\mathbb{P}_3} = \{ijk \in \mathbb{P}_3 \mid i,j,k \in \mathbb{Z}\}. \tag{9}$$

2.6. （拡大）Fock–Goncharov 代数とその平衡部分代数

3角形$\mathbb{P}_3$はただ1つの3角形分割を持つので, $\mathbb{P}_3$でその3角形分割も表すことにする.

Σを3角形分割の辺に関して切ることで3角形という細かなピースに分割することができる. 得られた各3角形をλの**面**と呼ぶことにする. このとき,

$$\Sigma = \Big(\bigsqcup_{\tau\in\mathcal{F}_\lambda}\tau\Big)/\sim, \tag{10}$$

と表せる. ここで, 各面τは$\mathbb{P}_3$のコピーであり, $\sim$はΣを復元するためのλの面の境界辺同士の貼り合わせを意味する. τの内部および辺の内部への制限が同相写像であるような写像$f_\tau\colon \mathbb{P}_3\to\Sigma$を**固有写像**と呼ぶことにすると, 各面$\tau$は固有写像によって特徴付けられることが分かる.

3角形分割λのn-3**角形分割**とは, 各面τに制限するとn-3角形分割になっており, それらが貼り合わせ$\sim$において整合的になっているものを指す. つまり, $\sim$によって貼り合わせられる辺bとb'に対し, b,b'それぞれの頂点が同一視されている. **簡約頂点集合**（reduced vertex set）を

$$\overline{V}_\lambda = \bigcup_{\tau\in\mathcal{F}_\lambda}\overline{V}_\tau,\quad \overline{V}_\tau = f_\tau(\overline{V}_{\mathbb{P}_3})$$

で定める. $\overline{V}_\lambda$の各元を**小頂点**と呼ぶ貼り合わせを用いると, f_τによる重み付き箙Γ_τの像たちから, Σ上の重み付き箙Γ_λが構成される. ここで, 貼り合わせ$\sim$においてbとb'の辺の向きは逆なので, これらの重みの寄与はキャンセルされる. つまり, 箙Γ_λにおいて対応する辺の重みは0であることに注意されたい.

重み付き箙Γ_λの符号付き隣接行列$\overline{\mathsf{Q}}_\lambda\colon \overline{V}_\lambda\times\overline{V}_\lambda\to\mathbb{Z}$を次のように定める.

$$\overline{\mathsf{Q}}_\lambda(v,v') = \begin{cases} w & v\text{から}v'\text{への重み}w\text{の矢があるとき},\\ 0 & v\text{と}v'\text{の間に矢がないとき}.\end{cases} \tag{11}$$

3角形分割λに付随した**Fock-Goncharov 代数**とは, $\overline{\mathsf{Q}}_\lambda$の量子トーラス, つまり,

$$\overline{\mathcal{X}}(\Sigma,\lambda) = \mathbb{T}(\overline{\mathsf{Q}}_\lambda) = \mathbb{C}\langle x_v^{\pm1}, v\in\overline{V}_\lambda\rangle/(x_v x_{v'} = \hat{q}^{\,2\overline{\mathsf{Q}}_\lambda(v,v')}x_{v'}x_v \text{ for } v,v'\in\overline{V}_\lambda). \tag{12}$$

のことである. これが被約状態付き$\mathrm{SL}(n)$スケイン代数の埋め込み先となる.

$\mathbb{P}_3$に付随した行列$M_{\mathbb{P}_3}\colon \overline{V}_{\mathbb{P}_3}\times\overline{V}_{\mathbb{P}_3}\to\mathbb{Z}$と固有写像から誘導された写像$f_\tau\colon \overline{V}_{\mathbb{P}_3}\to\overline{V}_\lambda$を考える. これらに対し, $M_{\mathbb{P}_3}$の**零拡大**$M_\tau\colon \overline{V}_\lambda\times\overline{V}_\lambda\to\mathbb{Z}$を次で定義する:

$$M_\tau(u,v) = \sum_{u'\in f_\tau^{-1}(u)}\sum_{v'\in f_\tau^{-1}(v)} M_{\mathbb{P}_3}(u',v'). \tag{13}$$

先ほど, Γ_λを$\Gamma_{\mathbb{P}_3}$の貼り合わせで定義したが, この観点から$\overline{\mathsf{Q}}_\lambda$は$\overline{\mathsf{Q}}_{\mathbb{P}_3}$の零拡大$\overline{\mathsf{Q}}_\tau$を用いて

$$\overline{\mathsf{Q}}_\lambda = \sum_{\tau\in\mathcal{F}_\lambda}\overline{\mathsf{Q}}_\tau \tag{14}$$

と表せる. $\mathcal{F}_\lambda$はλのすべての面のなす集合である.

pb曲面Σの各境界辺に3角形$\mathbb{P}_3$を貼り合わせることで, 新たなpb曲面Σ^*を構成する（図 3 参照）. ここで, $\mathbb{P}_3$の接着辺はe_1であるとする. この手順により, Σの3角形分割λからΣ^*の3角形分割λ^*が得られる. この拡張された3角形分割λ^*のn-3角形分割の簡約頂点集合を$\overline{V}_{\lambda^*}$で表す. 特に, 接着された$\mathbb{P}_3$のe_3上にないすべての小頂点のなす集合$V_\lambda\subset\overline{V}_{\lambda^*}$を$\mathcal{X}$**頂点集合**と呼び, e_2上にないすべての小頂点のなす集合$V'_\lambda\subset\overline{V}_{\lambda^*}$を$\mathcal{A}$**頂点集合**と呼ぶ.

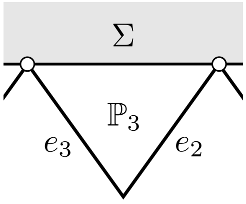


図 3: Σ への 3 角形 $\mathbb{P}_3$ の接着

拡張された 3 角形分割 λ^* を用いて, Fock–Goncharov 代数を拡張する. まず, $\mathsf{Q}_\lambda\colon V_\lambda \times V_\lambda \to \mathbb{Z}$ を $\overline{\mathsf{Q}}_{\lambda^*}\colon \overline{V}_{\lambda^*} \times \overline{V}_{\lambda^*} \to \mathbb{Z}$ の制限とする. **拡張 Fock–Goncharov 代数**（または拡張 $\mathcal{X}$ 代数）とは, Q_λ の量子トーラス

$$\mathcal{X}(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}(\mathsf{Q}_\lambda)$$

のことである. 包含関係 $\overline{\mathcal{X}}(\Sigma, \lambda) \subset \mathcal{X}(\Sigma, \lambda) \subset \overline{\mathcal{X}}(\Sigma^*, \lambda^*)$ が成り立つことに注意せよ.

重心座標の射影 $\mathbf{pr}_i\colon \overline{V}_{\mathbb{P}_3} \to \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, 3)$ を

$$\mathbf{pr}_1(ijk) = i, \quad \mathbf{pr}_2(ijk) = j, \quad \mathbf{pr}_3(ijk) = k. \tag{15}$$

で定める. $\mathbb{Z}^{\bar{V}_{\mathbb{P}_3}}$ において, $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3$ と $(n\mathbb{Z})^{\bar{V}_{\mathbb{P}_3}}$ で生成される部分群を $\overline{\Lambda}_{\mathbb{P}_3}$ で表す. $\overline{\Lambda}_{\mathbb{P}_3}$ の各元を**平衡元**と呼ぶ. これを踏まえて, $\mathbb{Z}^{\overline{V}_\lambda}$ にも平衡という概念を導入する. ベクトル $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\overline{V}_\lambda}$ が**平衡である**とは, λ のすべての面に対して $\mathbb{P}_3$ への引き戻し $f_\tau^*\mathbf{k}$ が平衡元であるときをいう. ただし, 面 τ と固有写像 $f_\tau\colon \mathbb{P}_3 \to \Sigma$ に対し, 引き戻し $f_\tau^*\mathbf{k}$ は $f_\tau^*\mathbf{k}(v) = \mathbf{k}(f_\tau(v))$ で与えられる. すべての平衡ベクトルで生成される $\mathbb{Z}^{\overline{V}_\lambda}$ の部分群を $\overline{\Lambda}_\lambda$ で表す.

平衡ベクトルのなす部分群 $\Lambda_\lambda = \overline{\Lambda}_{\lambda^*} \cap \mathbb{Z}^{V_\lambda}$ を考える. このとき, **拡張平衡 Fock-Goncharov 代数**とは

$$\mathcal{X}^{\mathrm{bl}}(\Sigma, \lambda) := \mathbb{T}(\mathsf{Q}_\lambda; \Lambda_\lambda)$$

のことである. 先ほど, 量子トレース写像 $\mathcal{S}_n(\Sigma) \to \overline{\mathcal{X}}^{\mathrm{bl}}(\Sigma, \lambda) := \mathbb{T}(\overline{\mathsf{Q}}_\lambda; \overline{\Lambda}_\lambda)$ の非自明な核 I^{bad} で状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数を割ることで被約状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数が得られると述べた. しかし, 受け皿である（平衡）Fock–Goncharov 代数を拡張することで, 状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数を量子トーラスに埋め込むことができることを後で見る.

2.7. 量子 $\mathcal{A}$ トーラス

小頂点 $v \in \overline{V}_\lambda$ と面 $\nu \in \mathcal{F}_\lambda$ に対し, **骨格** $\mathbf{sk}_\tau(v) \in \mathbb{Z}[\overline{V}_\tau]$ を次のように定義する.

$v = (ijk) \in V_\nu$ であるとし, ν にプロパーに埋め込まれた重み付き有向グラフ Y_v を図 4 の左図のように描く. ただし, Y_v の辺は重みは e_1, e_2, e_3 に端点をもつそれぞれの辺に対して i, j, k が割り当てられている.

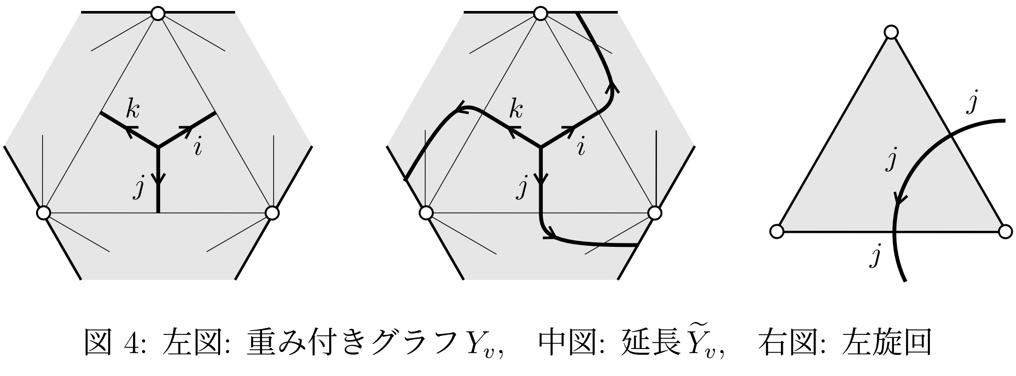
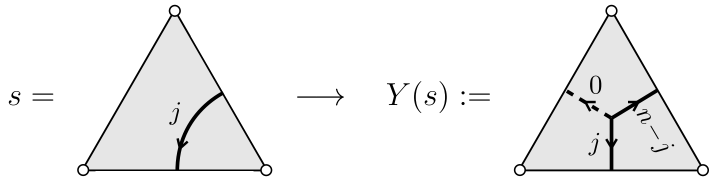


図 4: 左図: 重み付きグラフ Y_v, 中図: 延長 $\widetilde{Y}_v$, 右図: 左旋回

重み付き有向グラフ$\widetilde{Y}_v$を得るために, Y_vの0でない重みを持つ辺を図4の中図のように延長していく. ただし, 各辺は3角形に入射する度に左に旋回すると約束する. 3角形τに含まれる$\widetilde{Y}_v$の一部を$\widetilde{Y}_v$のτにおける**区分**と呼ぶ. さらに, Y_vも$\widetilde{Y}_v$の区分とみなし, **主区分**と呼ぶ.

主区分$s = Y_v$に対し, $Y(s) = v \in \overline{V}_\nu$とする. 3角形$\tau$における弧区分$s$に対し$Y(s) \in \overline{V}_\tau$を以下の図が表す重心座標で定める.



vの骨格を

$$\mathbf{sk}_\tau(v) = \sum_{s \subset \tau \cap \widetilde{Y}_v} Y_v(s) \in \mathbb{Z}[\overline{V}_\tau] \tag{16}$$

で定義する. ただし, 和は$\widetilde{Y}_v$のτにおけるすべての区分にわたってとる. $\mathbf{sk}_\tau(v)$はwell-definedであることが知られている [LY23, Lemma 11.4].

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$不変写像

$$\overline{\mathsf{K}}_{\mathbb{P}_3} \colon \overline{V}_{\mathbb{P}_3} \times \overline{V}_{\mathbb{P}_3} \to \mathbb{Z}$$

を$v = ijk$と$v' = i'j'k'$が$i' \le i$かつ$j' \ge j$を満たすとき,

$$\overline{\mathsf{K}}_{\mathbb{P}_3}(v, v') = jk' + ki' + i'j. \tag{17}$$

と定める. $\mathbb{P}_3$と3角形分割λの面τの同一視の下で, $\overline{\mathsf{K}}_{\mathbb{P}_3}$を$\overline{\mathsf{K}}_\tau$とも表す.

$u, v \in \overline{V}_\lambda$と$v$を含む面$\tau \in \mathcal{F}_\lambda$に対し,

$$\overline{\mathsf{K}}_\lambda(u, v) = \overline{\mathsf{K}}_\tau(\mathbf{sk}_\tau(u), v) = \sum_{s \subset \tau \cap \widetilde{Y}_u} \overline{\mathsf{K}}_\tau(Y(s), v) \tag{18}$$

と定義する. この$\overline{\mathsf{K}}_\lambda$はwell-definedであることが知られている [LY23, 補題11.5].

反対称行列$\overline{\mathsf{P}}_\lambda$, P_λを

$$\overline{\mathsf{P}}_\lambda := \overline{\mathsf{K}}_\lambda \overline{\mathsf{Q}}_\lambda \overline{\mathsf{K}}_\lambda^t, \qquad \mathsf{P}_\lambda = \mathsf{K}_\lambda \mathsf{Q}_\lambda \mathsf{K}_\lambda^t$$

で（天下り的に）定義する [LY23, 補題11.9].

(Σ, λ)の**量子$\mathcal{A}$トーラス**と**量子$\mathcal{A}$平面**およびそれらの拡張は以下で与えられる:

$$\overline{\mathcal{A}}(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}(\bar{\mathsf{P}}_\lambda), \qquad \overline{\mathcal{A}_+}(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}_+(\bar{\mathsf{P}}_\lambda),$$
$$\mathcal{A}(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}(\mathsf{P}_\lambda), \qquad \mathcal{A}_+(\Sigma, \lambda) = \mathbb{T}_+(\mathsf{P}_\lambda).$$

この定め方から, 拡張Fock–Goncharov代数と拡張量子$\mathcal{A}$トーラスの間には写像があることが分かるが, より詳しくは次のようになっている.

定理 1 ([LY23, 定理11.7])**.** $\mathbb{C}$線型写像

$$\psi_\lambda \colon \mathcal{A}(\Sigma, \lambda) \to \mathcal{X}(\Sigma, \lambda), \quad a^{\mathbf{k}} \mapsto x^{\mathbf{k}\mathsf{K}_\lambda}, \ (\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{V'_\lambda}) \tag{19}$$

は$\mathbb{C}$代数埋め込みであり, その像は$\mathcal{X}^{\mathrm{bl}}(\Sigma, \lambda)$である. ただし, $a^{\mathbf{k}} = \prod_{v \in V'_\lambda} a_v^{k(v)}$, $x^{\mathbf{k}} = \prod_{v \in V_\lambda} x_v^{k(v)}$である.

中心を求める上で重要な事実は次である.

定理 2.1 ([LY23, 定理13.1])**.** 3角形分割λをもつ本質的pb曲面Σに対し, 以下が成り立つ.

1. **拡張量子トレース写像**と呼ばれる, ある単射$\mathbb{C}$代数準同型写像

$$\mathrm{tr}_\lambda^{\mathcal{A}}\colon \mathcal{S}_n(\Sigma) \to \mathcal{A}(\Sigma, \lambda) \tag{20}$$

が存在し, これは3角形分割の取り替え（フリップ）と整合的である.

2. 次の包含関係が成り立つ:

$$\mathcal{A}_+(\Sigma, \lambda) \subset \mathrm{tr}_\lambda^{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_n(\Sigma)) \subset \mathcal{A}(\Sigma, \lambda). \tag{21}$$

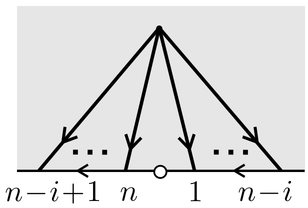
(7)から, 状態付き$\mathrm{SL}(n)$スケイン代数の中心$\mathcal{Z}(\mathcal{S}_n(\Sigma))$を求める代わりに, $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$の中心を求めれば良いことが分かる.

3. スケイン代数の中心・PI次数・Azumaya表現

3.1. 新たな中心元と中心の全体像

冒頭でm'乗写像の像以外の中心元があるかどうかは非自明な問題であることを述べた. しかし, $n = 2$における[Yu23, KQ22]の結果から, 境界周りの中心元があることが期待される. 実際に, 一般のnでも境界中心元が見つかるというのが以下である.

vをpb曲面Σの境界穿孔とする. $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$に対し, ある状態付き$n$ウェブ図$\mathsf{g}_i^v \in \mathcal{S}_n(\Sigma)$が定まるのだが, g_i^vはq冪の差を除いて



(22)

と等しい（描かれている白点がv）. 主結果を語る上では, この程度の情報が分かっていれば問題ない. このとき, 次の境界中心元の存在が分かる.

補題 3.1 ([KW24])**.** $\overline{\Sigma}$は偶境界∂をもち, その偶境界上の境界穿孔は$\partial\overline{\Sigma}$の向きに沿って$v_1, v_2, \cdots, v_r$とラベル付けされているとする（$r$は偶数）. このとき, 任意の$0 \leq k \leq m'$と$1 \leq i \leq n-1$に対し,

$$(\mathsf{g}_i^{v_1})^k (\mathsf{g}_i^{v_2})^{m'-k} \cdots (\mathsf{g}_i^{v_{r-1}})^k (\mathsf{g}_i^{v_r})^{m'-k} \tag{23}$$

は$\mathcal{S}_n(\Sigma)$の中心元である.

補題 3.1における中心元全体の集合をBで表す. さらに, 次の集合を考える:

$$\Lambda_{m'} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{V'_\lambda} \mid \mathbf{k}\mathsf{K}_\lambda = \mathbf{0} \text{ in } \mathbb{Z}_{m'}\}. \tag{24}$$

これらを踏まえて, 今回の主結果の1つは次である.

定理 2 ([KW24])**.** 本質的pb曲面Σと奇数m''に対して, $\mathcal{A}(\Sigma, \lambda)$の中心は$\mathrm{tr}_\lambda^{\mathcal{A}}(\mathsf{B})$と$\{a^{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \Lambda_{m'}\}$によって生成される.

証明については言及しないが, 曲面の各境界の穿孔の数に依って, 非可換性を統制する行列の性質が大きく変わる. 重要な違いは, 行列が可逆か可逆でないかという点である. 行列は曲面の内部頂点集合と境界成分に関してブロック行列に分けることができ, 非可逆性の原因は偶境界に対応するブロック行列である.

$\mathcal{A}(\Sigma,\lambda)$ の中心が分かれば, $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の中心も分かると述べた. $\{\mathrm{g}^{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \Lambda^+_{m'}\}$ と B で生成される $\mathcal{S}_n(\Sigma,\mathbb{v})$ の部分代数を $\mathcal{Y}_\lambda$ で表すと, 次が成り立つ.

系 3.2 ([KW24])**.** 本質的 *pb* 曲面 Σ と奇数 m'' に対して, $\mathcal{A}(\Sigma,\lambda)$ の中心は次で与えられる:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{S}_n(\Sigma,\mathbb{v})) = \{x \in \mathcal{S}_n(\Sigma,\mathbb{v}) \mid \exists \mathbf{k} \in \mathbb{N}^{V'_\lambda} \ s.t.\ [\prod_{v \in V'_\lambda} \mathrm{g}_v^{m'\mathbf{k}(v)}]x \in \mathcal{Y}_\lambda\}.$$

ただし, $[\cdot]$ は *Weyl* 正規化と呼ばれる q 冪による補正を表す.

3.2. 有限次元既約表現の理解

概 Azumaya 代数 A とその中心 Z に対して, 中心指標を考えることによって A の既約表現（の同型類）から $\mathrm{MaxSpec}(Z)$ への全射が存在する. 特に, 単一性定理 [BG02, FKBL19] から, **Azumaya 集合**（$\mathrm{MaxSpec}(Z)$ の中の Zariski 稠密部分集合）の各点の逆像は 1 点から成り, その表現を **Azumaya 表現**と呼ぶ. 特に, Azumaya 表現の次元は A の PI 次数と一致することも知られている [BG02, FKBL19, FKBL21].

次の定理から, 状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数は概 Azumaya であることが分かり, 単一性定理を適用できることが分かる.

定理 3.3 ([KW24])**.** 状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数は中心上の加群として有限生成である.

実は, 状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数は m' 乗写像の像の上の加群として有限生成であり, この事実の帰結として上記の結果が得られる. つまり, 状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数の中心上の加群としての有限生成性を示すために, m' 乗写像の像は十分大きいことを意味している.

この有限生成性を示すために, 具体的な中心は必要としていない. では, 定理 3.1 および系 3.2 の恩恵は何かというと, 具体的な中心を用いて $\mathcal{A}(\Sigma,\lambda)$ および $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の PI 次数を求めることができるという点である. PI 次数が分かっていなければ Azumaya 表現を理解できたとは言えないので, PI 次数を特定したというのも今回の主結果の 1 つである.

$\mathcal{A}_+(\Sigma,\lambda) \subset \mathrm{tr}^A_\lambda(\mathcal{S}_n(\Sigma)) \subset \mathcal{A}(\Sigma,\lambda)$ という関係から $\mathcal{S}_n(\Sigma)$ の PI 次数が $\mathcal{A}(\Sigma,\lambda)$ の PI 次数と一致することが分かる. スケイン代数そのものを扱うのではく, 量子トーラスの議論に持ち込むことで PI 次数を見通しよく計算できる.

定理 3.4 ([KW24])**.** 本質的 *pb* 曲面 Σ とそのオイラー標数 $\chi(\Sigma)$ に対し, $r(\Sigma) := \#(\partial\Sigma) - \chi(\Sigma)$ とおく. $\overline{\Sigma}$ は b 個の偶境界を持つとする. このとき, 2.3 節の冒頭で定義された d, m を用いて, 状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数と拡張量子 $\mathcal{A}$ トーラスの *PI* 次数は次で与えられる.

$$\text{PI-deg}(\mathcal{S}_n(\Sigma)) = \text{PI-deg}(\mathcal{A}(\Sigma,\lambda)) = d^{r(\Sigma)-b} m^{|V_\lambda|-b(n-1)}.$$

特に, $n=2$ のとき, この結果は [Yu23] の結果と一致する.

4. 今後の研究と展望

被約状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数 $\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma)$ に対しても量子トレース写像 $\overline{\mathrm{tr}}^A_\lambda \colon \overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma) \to \overline{\mathcal{A}}(\Sigma,\lambda)$ が与えられている [LY23]. $n=3$ のときは単射であり, $n>3$ における単射性は $\overline{\Sigma}$ が円盤のときしか示されていないが一般の pb 曲面に対しても成り立つと期待されている. さらに, 包含関係

$$\overline{\mathcal{A}}_+(\Sigma,\lambda) \subset \overline{\mathrm{tr}}^A_\lambda(\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma)) \subset \overline{\mathcal{A}}(\Sigma,\lambda)$$

も知られている. [KW24] では, $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma,\lambda)$ に対してもその中心・PI 次数を与えており, $\overline{\mathrm{tr}}_\lambda^A$ の単射性が正しければ [KW24] の $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma,\lambda)$ に関する結果から $\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma)$ の中心・PI 次数・Azumaya 表現が分かる.

今回の設定（内部穿孔がない場合）において, 被約状態付きスケイン代数 $\overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma)$ は量子団代数と同型であることが知られている [Mul16, LY22]. 同条件下で $\overline{\mathcal{S}}_3(\Sigma)$ が量子団代数に含まれることが知られており, 特に一致することが予想されている [IY23, LY23]. これらの研究を踏まえて, 量子高階団代数と同型であるだろう, というのが共通認識としてあるが, 予想として書くには十分な結果は得られていない.

問い. 一般の n に対し, 量子高階団代数と被約状態付き $\mathrm{SL}(n)$ スケイン代数 $\overline{\mathcal{S}}_n(\Sigma)$ との関係はどうなっているのか？特に, それらは同型か？

今後, 本稿で扱っていない閉曲面についても単一性定理が適用できるようになると期待されるが, そうなった際の恩恵は $\mathrm{SL}(n)$ 指標多様体のシンプレクティック葉（symplectic leaf）への分解がスケイン代数の表現論的意味合いを持つという点である. このような先行研究として [GJS19, KK22, Yu23a, FKBL23] などがある.

今後もスケイン代数が多くの研究者を魅了する発展を遂げていくだろうという期待を胸に, 筆を置くことにする.

参考文献

[AGS95] A. Y. Alekseev, H. Grosse, V. Schomerus, *Combinatorial quantization of the Hamiltonian Chern-Simons theory. I*, Comm. Math. Phys. **172** (1995), no. 2, 317–358.

[AS24] D. G. L. Allegretti, P. Shan, *Skein algebras and quantized Coulomb branches*, arXiv:2401.06737 (2024).

[BFR23] S. Baseilhac, M. Faitg, P. Roche, *Unrestricted quantum moduli algebras, III: Surfaces of arbitrary genus and skein algebras*, arXiv:2302.00396 (2023).

[BFR] S. Baseilhac, M. Faitg, P. Roche, *Structure and representations of quantum moduli and g-skein algebras at roots of unity*, in preparation.

[BG02] K. A. Brown, K. R. Goodearl, *Lectures on algebraic quantum groups*, Adv. Courses Math. CRM Barcelona Birkhäuser Verlag, Basel (2002).

[BHMV95] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology **34** (1995), no. 4, 883–927.

[BH23] F. Bonahon, V. Higgins, *Central elements in the SL_d-skein algebra of a surface*, arXiv:2308.13691 (2023).

[BW16] F. Bonahon and H. Wong, *Representations of the Kauffman bracket skein algebra I: invariants and miraculous cancellations*, Invent. Math. **204** (2016), no. 1, 195–243.

[CL22] F. Costantino and T. T. Q. Lê, *Stated skein algebras of surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **24** (2022), no. 12, 4063–4142.

[CL22a] F. Costantino and T. T. Q. Lê, *Stated skein modules of 3-manifolds and TQFT*, arXiv:2206.10906 (2022).

[Coo23] J. Cooke, *Excision of skein categories and factorisation homology*, Adv. Math.**414** (2023), Paper No. 108848, 51 pp.

[Coo20] J. Cooke, *Kauffman skein algebras and quantum Teichmüller spaces via factorization homology*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 14, 2050089, 54 pp.

[Dou24] D. C. Douglas, *Quantum traces for $SL_n(\mathbb{C})$: the case $n = 3$*, J. Pure Appl. Algebra **228** (2024), no. 7, No. 107652, 50 pp.

[FKBL21] C. Frohman, J. Kania-Bartoszynska, T. Lê, *Dimension and trace of the Kauffman bracket skein algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B8(2021), 510–547.

[FKBL23] C. Frohman, J. Kania-Bartoszynska, T. Lê, *Sliced skein algebras and geometric Kauffman bracket*, arXiv:2310.06189 (2023).

[FKBL19] C. Frohman, J. Kania-Bartoszynska, T. Lê, *Unicity for representations of the Kauffman bracket skein algebra*, Invent. Math. **215** (2019), no.2, 609–650.

[FG09] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 6, 865–930.

[FG06] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.(2006), no. 103, 1–211.

[GJS19] I. Ganev, D. Jordan, P. Safronov, *The quantum Frobenius for character varieties and multiplicative quiver varieties*, arXiv:1901.11450 (2019).

[IY23] T. Ishibashi, W. Yuasa, *Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for* $\mathfrak{sl}_3$, Math. Z. **303** (2023), no. 3, No. 72, 60 pp.

[KK22] H. Karuo, J. Korinman, *Azumaya loci of skein algebras*, arXiv:2211.13700 (2022).

[KW24] H. Karuo, Z. Wang, *Center of stated* $SL(n)$*-skein algebras*, arXiv:2408.12520 (2024).

[Kim20] H. K. Kim, SL_3*-laminations as bases for* PGL_3 *cluster varieties for surfaces*, arXiv:2011.14765 (2020).

[Kim21] H. K. Kim, *Naturality of* SL_3 *quantum trace maps for surfaces*, arXiv:2104.06286 (2021).

[Kor21] J. Korinman, *Unicity for representations of reduced stated skein algebras*, Topology Appl. **293** (2021), No. 107570, 28 pp.

[KQ19] J. Korinman, A. Quesney, *Classical shadows of stated skein representations at roots of unity*, arXiv:1905.03441 (2019).

[KQ22] J. Korinman, A. Quesney, *The quantum trace as a quantum non-abelianization map*, J. Knot Theory Ramifications **31** (2022), no. 6, No. 2250032, 49 pp.

[Kup96] G. Kuperberg, *Spiders for rank 2 Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), no. 1, 109–151.

[Lê18] T. T. Q. Lê, *Triangular decomposition of skein algebras*, Quantum Topol. **9** (2018), no.3, 591–632.

[Lê19] T. T. Q. Lê, *Quantum Teichmüller spaces and quantum trace map*, J. Inst. Math. Jussieu **18** (2019), no.2, 249–291.

[LS21] T. T. Q. Lê, A. S. Sikora, *Stated* $SL(n)$*-Skein Modules and Algebras*, arXiv:2201.00045 (2021).

[LY23] T. T. Q. Lê, T. Yu, *Quantum traces for* SL_n*-skein algebras*, arXiv:2201.00045 (2023).

[LY22] T. T. Q. Lê, T. Yu, *Quantum traces and embeddings of stated skein algebras into quantum tori*, Selecta Math. (N.S.) **28** (2022), no. 4, Paper No. 66, 48 pp.

[Mul16] G. Muller, *Skein and cluster algebras of marked surfaces*, Quantum Topol. **7** (2016), no. 3, 435–503.

[Sik05] A. S. Sikora, *Skein theory for SU(n) -quantum invariants*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 865–897.

[SW07] A. S. Sikora, B. W. Westbury, *Confluence theory for graphs*, Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 439–478.

[Wan23] Z. Wang, *On stated SL(n)-skein modules*, arXiv:2307.10288. (2023).

[Yu23] T. Yu, *Center of the stated skein algebra*, arXiv:2309.14713 (2023).

[Yu23a] T. Yu, *Explicit representations and Azumaya loci of skein algebras of small surfaces*, arXiv:2312.00446 (2023).

[Prz99] J. H. Przytycki, *Fundamentals of Kauffman bracket skein modules*, Kobe J. Math. **16** (1999), no. 1, 45-–66.

[RT91] N. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Invariants of 3 -manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597.

[Tur91] V. G. Turaev, *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **24** (1991), no. 6, 635–704.