同変漸近次元の不等式による評価について

知念　直紹　(防衛大学校)*

概　要

本稿では，Gromov によって導入された漸近次元，Farrell-Jones 予想，Borel 予想に関連が深い同変漸近次元について述べる。また，ここで述べていることの大部分は山内貴光氏（愛媛大学）との共同研究 [9][10][11] を基にしている。

1　はじめに

本稿では， X は位相空間，Γ は非自明な離散群，写像はすべて連続，$\Gamma \curvearrowright X$ は同相写像による非自明な (左) 作用を表すものとする。Bartels, Lück，Reich [6, Theorem 1.2], [5, Assumption 1.4] によって双曲群の Farrell-Jones 予想の解決のために導入された N-$\mathcal{F}$-amenability を用いて，コンパクト Hausdorff 空間上の作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の $\mathcal{F}$-同変漸近次元 (equivariant asymptotic dimension) $\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ が Sawicki [19] よって定義された。双曲群の Farrell-Jones 予想の証明の中で，同変漸近次元の有限性が証明の主要なステップとなっている。この特性の一般化は，CAT(0) 群の Farrell-Jones 予想を証明するためにも使用され，さらに双曲群と CAT(0) 群を含む群のクラスに対して Borel 予想を導いた [4]。Gromov (1993) よって, 被覆次元の類似概念として擬等長において不変な漸近次元 [*1]は導入された。次第に，Novikov 予想，さらに強い coarse Baum-Connes 予想 との関係性が明らかになるにつれて，漸近次元は多くの研究者によって調べられ現在でも盛んに研究されている。また，$\mathcal{F}$-同変漸近次元 $\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ は Γ の漸近次元 asdim Γ にも関連が深いことが知られ [16]，上述のこれらの予想たちの研究が進んでいく中，同変漸近次元の重要性は益々増していくに違いないが，新しい次元が定義されると最初に次のような次元の有限性問題，決定問題が考えられる。

問題 1.1（有限性問題）　$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ あるいは eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ が有限であるための作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の十分条件を与えよ。[*2]

問題 1.2（決定問題）　作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し，$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ あるいは eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ を決定せよ。特に，Γ がよく知られた群，X が多様体あるいは位相群のときどうか。

---

* 〒238-8686 神奈川県 横須賀市走水 1-10-20　防衛大学校総合教育学群数学教育室
e-mail: naochin@nda.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 54F45; Secondary 37B02, 37C85, 20F69
キーワード：equivariant asymptotic dimension, asymptotic dimension, Farrell-Jones conjecture, Borel conjecture, locally finite group

[*1] 漸近次元 asdim に関しては [7] を参照。

[*2] 注意 2.8 より、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$(eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$) $\Rightarrow$ asdim $\Gamma < \infty$。

現在筆者が知る限り，有限性・決定問題に関して多くのことは知られていない。例えば，任意の 0 次元コンパクト距離空間 X への自由 [*3]な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し，eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X) \in \{\operatorname{asdim}\Gamma, \infty\}$ が知られているが [20]，1 次元以上の空間への作用の同変漸近次元に関しては殆ど知られていない (注意 3.2 も参照)。そこで，4 章で局所有限群からいくつかの 1 次元以上の空間へ自由な作用の同変漸近次元と有限性・決定問題の部分的解決を紹介する。

まず，2 章で同変漸近次元の定義とその定義の非コンパクト空間への作用への拡張，3 章で決定問題を解決するための Sawick の不等式 [20] を紹介する。4 章で局所有限群からの自由な作用の同変漸近次元を議論する。また 4 章の結果から eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ の Sawick の不等式の $\operatorname{asdim}\Gamma$ による下限の評価は精密ではないことが分かる。そこで非コンパクト空間への作用の同変漸近次元による下からの評価を提案し，非コンパクト空間への自由かつ proper cocompact 作用のいくつかの結果を紹介する。

2 同変漸近次元 $\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ の定義と，この定義の非コンパクト空間への作用への拡張

定義 2.1 本稿では，Γ の部分群の族 $\mathcal{F}$ は空集合ではなく以下の 2 つの性質を持っているとする。

(1) (部分群に関して不変) $\Lambda \in \mathcal{F}$, $\Lambda' < \Lambda \Rightarrow \Lambda' \in \mathcal{F}$:

(2) (共役に関して不変) $\Lambda \in \mathcal{F}$, $\gamma \in \Gamma \Rightarrow \gamma\Lambda\gamma^{-1} \in \mathcal{F}$。

例えば，$\{\{1_\Gamma\}\}$，$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}} := \{\Lambda < \Gamma \mid \Lambda \Subset \Gamma\}$ は上述の 2 つの性質を持っている。ここで，$\Lambda < \Gamma$ は「Λ は Γ の部分群」，$\Lambda \Subset \Gamma$ は「Λ は Γ の有限集合」を表す。

この章では，Γ の群演算から導かれる標準的な (左) 作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ ともう 1 つの作用 $\Gamma \curvearrowright X$ との対角作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X : \gamma(\eta, x) := (\gamma\eta, \gamma x)$ と，Γ の部分群の族 $\mathcal{F}$ を考える。

定義 2.2 $\Gamma \times X$ の被覆 $\mathcal{U}$ が $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X$ の $\mathcal{F}$-被覆 とは，任意の $(\gamma, U) \in \Gamma \times \mathcal{U}$ に対し以下を満たす：(1) $\gamma U \in \mathcal{U}$ (2) $\gamma U \neq U \Leftrightarrow \gamma U \cap U = \emptyset$ (3) $\Gamma_U := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U = U\} \in \mathcal{F}$。

定義 2.3 ([19]) X はコンパクトとする。$\Gamma \curvearrowright X$ の $\mathcal{F}$ に関する同変漸近次元 (*equivariant asymptotic dimension*) $\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ とは，次の条件を満たす最小の非負整数 N とする：

任意の $E \Subset \Gamma$ に対し，ある $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X$ の開 $\mathcal{F}$-被覆 $\mathcal{U}$ が存在し以下を満たす [*4]:

(i) $\operatorname{ord}(\mathcal{U}) := \sup_{(\gamma,x)\in\Gamma\times X} \operatorname{card}\{U \in \mathcal{U} \mid (\gamma, x) \in U\} \leq N + 1$;

(ii) 任意の $x \in X$ に対し $U \in \mathcal{U}$ が存在し，$E \times \{x\} \subset U$ を満たす。

ただし，このような条件を満たす N が存在しないとき $\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X) = \infty$ とす

---

*3 $\Gamma \curvearrowright X$ が自由であるとは，「 ある $x \in X$ に対し，$\gamma x = x$ ならば $\gamma = 1_\Gamma$ 」を満たす。

*4 オリジナルの定義 [19] より条件が少ないが同値な定義である。

る。また $\{\{1_\Gamma\}\}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ の代わりに eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X)$ と書くことにする。

幾何学群論において，Cayley グラフ然り，多くの場合非コンパクト距離空間への作用を考える。定義 2.3 を非コンパクト距離空間への作用に直接適用，具体的には群 Γ の標準的な作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ に直接適用すると同変漸近次元がゼロとなり意図する次元にならない。被覆次元 dim の定義 [*5]の条件「有限開被覆」を匂わせつつの「有限個の開集合で $\mathcal{U}$ が生成される」を含むような新たな条件 (α) を定義 2.3 に加え，非コンパクト距離空間への作用でも意味をなすように，定義 2.3 を次のように拡張する [*6]。

定義 2.4（[11]）　X は位相空間とする。$\mathcal{F}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ を次の条件を満たす最小の非負整数 N とする：

任意の $E \Subset \Gamma$ に対し，ある $\Gamma \curvearrowright \Gamma \times X$ の開 $\mathcal{F}$-被覆 $\mathcal{U}$ が存在し定義 2.3 の条件 (i), (ii) とさらに次の条件 (α) を満たす [*7]:

(α) $\mathcal{U}[\{1_\Gamma\} \times X] := \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap (\{1_\Gamma\} \times X) \neq \emptyset\}$ は有限。

ただし，このような条件を満たす N が存在しないとき $\mathcal{F}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X) = \infty$ とする。また $\{\{1_\Gamma\}\}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ の代わりに ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ と書くことにする。

注意 2.5　(1) $\mathcal{U}[\{1_\Gamma\} \times X]$ が $\{1_\Gamma\} \times X$ の有限開被覆で，$\mathcal{F}$-被覆 $\mathcal{U}$ を生成している。
(2) X がコンパクトならば，$\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright X) = \mathcal{F}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ が成立 [11]。

正規空間 [*8]X の Stone-Čech コンパクト化 βX としたとき，$\dim X = \dim \beta X$ が知られている [15]。ead に関しても同様な次の結果が得られる。

命題 2.6（[11]）　X を正規空間とし，$\Gamma \curvearrowright \beta X$ を $\Gamma \curvearrowright X$ の Stone-Čech コンパクト化 βX への拡張した作用とする。このとき，以下が成立：

$$\mathcal{F}\text{-eq-asdim}(\Gamma \curvearrowright \beta X) = \mathcal{F}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright \beta X) = \mathcal{F}\text{-ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

注意 2.7　(1) 命題 2.6 は $\mathcal{F}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ を求めるにあたり，正規空間 X はコンパクトを仮定して良いことを示唆している。しかし，現在知られている同変漸近次元関連の多くの結果はコンパクト距離空間への自由な作用についてである。もちろん通常 βX は距離空間でないため，多くの周知の結果を適用・利用できない。

(2) $\Gamma \curvearrowright \beta X$ は $\Gamma \curvearrowright X$ の幾何的な性質を遺伝することは期待できない。例えば，$\Gamma \curvearrowright X$ は自由な作用であっても $\Gamma \curvearrowright \beta X$ は自由とは限らない (例 6.3 参照)。

(3) Stone-Čech コンパクト化はかなり複雑で大きなコンパクト化であるため，X がコンパクトでないとき具体的な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対して $\mathcal{F}$-eq-asdim$(\Gamma \curvearrowright \beta X)$ を直接求めるのは有効ではない。実際このとき $\mathcal{F}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ を求めることになる。

[*5] 被覆次元 dim の定義は [15] を参照。
[*6] 注意 5.1 にも $\mathcal{F}$-ead の定義の導入のその他の意義を書いている
[*7] [11] の定義より条件が少ないが同値な定義である
[*8] 本稿では正規空間は正規 Hausdorff 空間 T_4 を意味する。

注意 2.5(2) より，**これ以降 eq-asdim を ead に置き換えることにする。**

注意 2.8 上述の結果から，X が正規空間であるとき，[16, Theorems 1.3 and 4.7] を ead で書き直すと以下が得られる：

$$\operatorname{asdim}\Gamma = \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright \Gamma) \leq \mathcal{F}_{\text{fin}}\text{-}\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

$\mathcal{F}_{\text{fin}}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ と ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ には明確な差があることが知られ，$\mathcal{F}_{\text{fin}}$-ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ の方が asdim Γ により近いと考えられるが，ページの関係上，**これ以降，作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は自由，ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ を主に議論する。**

ead の定義から次の結果が簡単に導かれる。

命題 2.9 (1) Γ の部分群 Λ，$\Lambda \curvearrowright X$ を $\Gamma \curvearrowright X$ の制限した作用とするとき，

$$\operatorname{ead}(\Lambda \curvearrowright X) \leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

(2) $\Gamma \curvearrowright X_i$ を作用，$f\colon X_0 \to X_1$ を Γ-同変 [*9] 写像に対し

$$\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X_0) \leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X_1)$$

また，漸近次元 asdim Γ ついて以下のことがよく知られ，ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ についても同様な結果が得られる。

定理 2.10（[14, Theorem 2.1]） Γ を可算群とする。このとき，

$$\operatorname{asdim}\Gamma = \sup_{F \Subset \Gamma} \operatorname{asdim}\langle F \rangle \text{ [*10]}$$

命題 2.11（[11]） $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき，

$$\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \sup_{F \Subset \Gamma} \operatorname{ead}(\langle F \rangle \curvearrowright X)$$

3 Sawicki の不等式 [20]

決定問題 1.2 の解決にあたり，重要になるのが ead$(\Gamma \curvearrowright X)$ の不等式による評価になる。まず，注意 2.8 による下からの asdim Γ の評価が知られているが，次の Sawicki [20] による上からの評価がある。

定理 3.1（Sawicki [20]） $\Gamma \curvearrowright X$ をコンパクト距離空間 X への自由な作用とする。もし ead$(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ ならば，

$$\operatorname{asdim}\Gamma \leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \operatorname{asdim}\Gamma + \dim X$$

が成立する。

注意 3.2 定理 3.1 の有限性条件「ead$(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$」について：

[*9] 任意の $(\gamma, x) \in \Gamma \times X_0$ に対し $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ を満たす。
[*10] ここで，$\langle F \rangle$ は F によって生成される Γ の部分群とする。

(1) Γ が有限生成実質的冪零群 (virtually nilpotent)，X が有限次元コンパクト距離空間ならば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ が成立する [2, Corollary 1.10][*11]。ここで，有限生成実質的冪零群は $\mathrm{asdim}\,\Gamma < \infty$ を満たす従順群 [*12]であることに注意する。

(2) [16, Theorem 6.6] の証明により，任意の可算群 Γ に対し，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright \Sigma) = \mathrm{asdim}\,\Gamma$ を満たす Cantor 集合 Σ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ が存在する。

(3) [8, Remark 3.10] の結果から， $\mathrm{ead}(\mathbb{F}_2 \curvearrowright \Sigma) = \infty$ を満たす Cantor 集合 Σ への自由な作用 $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \Sigma$ が存在する。ここで $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ は自由群 [*13]とする。同様な議論より以下が得られる：任意の可算非従順群 Γ に対し，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright \Sigma) = \infty$ を満たす Cantor 集合 Σ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ が存在する [10]。このことから，定理 3.1 において有限性条件「$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$」は削除できない。

4 局所有限群 Γ からの自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の同変漸近次元

定義 4.1 群 Γ が **局所有限**とは，すべての Γ の有限生成部分群が有限であるときにいう。例えば，すべての有限群，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [*14]は局所有限となる。[21, Theorem 2] より，次が知られている：可算群 Γ が局所有限である $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{asdim}\,\Gamma = 0$。また，局所有限群は従順群であることに注意する。

Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk の定理を拡張した genus の結果 [1] を用いると，以下の有限性問題 1.1 の部分的解決が得られる。

定理 4.2（[10]） Γ を局所有限，X を正規空間，$\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき，

$$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \dim X$$

特に，もし Γ が有限かつ X がコンパクトならば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ が成立する。

Γ を局所有限のとき，つまり $\mathrm{asdim}\,\Gamma = 0$ のとき，定理 4.2 から定理 3.1 の条件「$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$」が削除できることに注意する。定理 4.2 の後半部分に関して，もし局所有限群 Γ が無限あるいは X が非コンパクトならば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ とは限らないことにも注意する (例 4.9，6.3 を参照)。

次に，X の連結性と $\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の下限の評価の以下の関係が得られる。

定理 4.3（[10]） $\Gamma \curvearrowright X$ を $(n-1)$-連結空間 X への自由な作用とする。もし Γ が 2 以上の有限位数の元をもてば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \geq n$ が成立する。

Γ が捩れのない群 (torsion-free group) のとき，定理 4.3 は必ずしも成立しない (定理

[*11] 有限性問題 1.1 の部分的解決を与えている。
[*12] 従順群 (amenable group) について [12] の 9 章を参照。
[*13] $\mathbb{F}_2$ は非従順群，$\mathrm{asdim}\,\mathbb{F}_2 = 1$ であることに注意。
[*14] $\mathbb{Q}$ は有理数群，$\mathbb{Z}$ は整数群。

5.6 を参照)。また，任意の群 Γ に対し，もし $\Gamma \curvearrowright X$ が連結空間 X への作用ならば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \geq 1$ が知られている [11]。

定理 4.2 と 4.3 より，以下の決定問題 1.2 の部分的解決を与えられる。これにより，局所有限群 Γ から n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright \mathbb{S}^n$ に対し，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright \mathbb{S}^n) = n$ が得られる。筆者が知る限り，高次元において同変漸近次元を決定した最初の結果である。

系 4.4（[10]） Γ を局所有限群，X を $(n-1)$-連結 n 次元正規空間，$\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = n$ が成立する。

以下のような存在問題は自然に考えられるが，局所有限群の部分的解決が得られる。

問題 4.5（Γ に関する存在問題） Γ を (局所有限群とは限らない) 群とする。このとき，任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq \mathrm{asdim}\,\Gamma}$ に対し，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = n$ を満たすコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が存在するか?

系 4.6（[10]） Γ を局所有限群とする。このとき，任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = n$ を満たす n 次元コンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が存在する。

また，定理 4.2 と 4.3 より，以下の結果が得られる。

系 4.7（[11]） Γ を 2 以上の有限位数の元をもつ群，X を $(\dim X)$-連結 [*15] な正規空間とする。もし $\dim X < \infty$ あるいは X がコンパクトならば，自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は存在しない。

定理 4.2 と系 4.6 により，有限群に関する以下の普遍性 $(\star)$ をもつ作用は存在しない。

系 4.8（[10]） Γ を有限群とする。このとき，Γ に関する次の普遍性$(\star)$ を持つコンパクト距離空間 U_Γ への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright U_\Gamma$ は存在しない。

$(\star)$ 任意のコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し，Γ-同変写像 $f\colon X \to U_\Gamma$ が存在する。

この章の最後に，無限同変漸近次元をもつ局所有限群から無限次元コンパクト距離空間への自由な作用を与えておく。

例 4.9（[10]） $\mathbb{S}^n$ を n 次元球面，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^n$ を対蹠的作用 [*16] とすると，系 4.4 より $\mathrm{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^n) = n$。$\Gamma := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を無限生成局所有限群，$X := \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}^n$ をコンパクト無限次元距離空間，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^n$ 達から自然に導かれる自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ を考える。このとき，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \infty$ が得られる。

[*15] X が有限次元ではないとき，$\dim X = \infty$ と表す。∞-連結とは，任意の $k \geq 0$ に対し，X は k-連結である。特に，可縮な空間は ∞-連結である。

[*16] $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \gamma \rangle$ のとき，同相写像 $\gamma\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto -x$ から定義される作用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^n$ とする。

5 非コンパクト空間への自由な作用の同変漸近次元

注意 5.1 Γ を局所有限群としたとき，$\operatorname{asdim}\Gamma = 0$ に注意すると，系 4.6 より，定理 3.1 の Sawicki の不等式の $\operatorname{asdim}\Gamma$ による下からの評価は精度が良くないことになる。定理 4.3 はある制限上の $\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の下からの評価を与えているが，決定問題 1.2 の解決にあたり，もっと一般的な条件による $\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ の下からのいい評価を与える必要がある。コンパクト多様体 X 上の作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し，被覆写像 $p\colon \widetilde{X} \to X$ とそれに伴う非コンパクト被覆空間 $\widetilde{X}$ への作用 $\Gamma \curvearrowright \widetilde{X}$ を考え，p が Γ-同変であることに注意すると，命題 2.9(2) から

$$\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright \widetilde{X}) \leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$$

が成立する。つまり，コンパクト空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し，

$$\begin{aligned}\operatorname{asdim}\Gamma &\leq \sup\{\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright Z) \mid \text{非コンパクト } Z \text{ からの } X \text{ への } \Gamma\text{-同変写像 が存在 }\} \\ &\leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)\end{aligned}$$

が成立し，中辺は $\operatorname{asdim}\Gamma$ による下からの評価よりは精度が良いことが期待できる。これにより，非コンパクト空間への作用の同変漸近次元 eq-asdim の拡張 ead は重要であり，さらに非コンパクト空間への作用の ead は元々の同変漸近次元 eq-asdim の決定に重要な役割を担う可能性がある。また，これまでの幾何学群論での非コンパクト空間への作用の研究を利用することによって非コンパクト空間への作用の ead を決定できる可能性も期待できる。よって以下の問題を考える。

問題 5.2（proper[*17] cocompact[*18]な作用の決定問題） 非コンパクト空間 X への proper cocompact かつ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し，$\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ を決定せよ。

まず，局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用の同変漸近次元の有限性，つまり有限性問題 1.1 の部分的解決を与える。

定理 5.3（[11]） $\Gamma \curvearrowright X$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき，

$$\operatorname{asdim}\Gamma < \infty \iff \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$$

が成立する。さらに，以下が成立する：

$$\operatorname{asdim}\Gamma \leq \operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \operatorname{asdim}\Gamma + \dim X$$

注意 5.4 (1) 定理 5.3 は Sawicki の不等式の proper cocompact かつ自由な作用版ともいえる。ただし，条件「$\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$」が必要ないことに注意する。

(2) $\Gamma \curvearrowright X$ を定理 5.3 の条件を満たす作用とする。もし X がコンパクトならば，$\Gamma \curvearrowright X$ が proper より，Γ は有限となり，定理 4.2 から $\operatorname{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ が分かる。また，$\Gamma \curvearrowright X$ から proper の条件を外すと，注意 3.2(3) より $\operatorname{asdim}\Gamma = 1$ で X が

[*17] 任意の X のコンパクト部分集合 C に対し，$\{\gamma \in \Gamma \mid C \cap \gamma C \neq \emptyset\}$ が有限。
[*18] ある X のコンパクト部分集合 K が存在し，$X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma K$ を満たす。

Cantor 集合のときでさえ同変漸近次元は有限とは限らない。また，局所コンパクト非コンパクト距離空間 X への cocompact でない proper かつ自由な作用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X$ で，$\mathrm{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X) = \infty$ を満たすものが存在することに注意する (例 6.3 参照)。

系 5.5（[11]） Γ を 2 以上の有限位数の元をもつ群，X を $(\dim X)$-連結局所コンパクト Hausdorff 空間とする。もし $\mathrm{asdim}\,\Gamma < \infty$ ならば，proper cocompact かつ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は存在しない。

このことより捩れのない群について述べる。まず自由群 $\mathbb{F}$ に関して，以下の結果が得られる。

定理 5.6（[11]） $\mathbb{F}$ を自由群 [*19]，$\mathbb{F} \curvearrowright X$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき，$\mathrm{ead}(\mathbb{F} \curvearrowright X) \in \{1, 2\}$ が成立する。

注意 3.2(3) より，アーベル群でない自由群 $\mathbb{F}$ からコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\mathbb{F} \curvearrowright X$ で $\mathrm{ead}(\mathbb{F} \curvearrowright X) = \infty$ を満たすものが存在する，すなわち定理 5.6 の条件「proper」は削除できない。また，捩れのないアーベル群に関して，以下の結果が得られる。ただし，系 4.6 より定理 5.7 の Γ をアーベル群に変えることはできない。

定理 5.7（[11]） Γ を捩れのないアーベル群，X を局所コンパクト Hausdorff 空間，$\Gamma \curvearrowright X$ を proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \in \{\mathrm{asdim}\,\Gamma, \mathrm{asdim}\,\Gamma + 1\}$ が成立する。

上述を鑑みると以下の問題が考えられる。

問題 5.8 Γ を捩れのない群，$\Gamma \curvearrowright X$ を連結な局所コンパクト Hausdorff 空間 X への proper cocompact かつ自由な作用とする。このとき，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \mathrm{asdim}\,\Gamma + 1$ は成立するか？

6 いくつかの結果と問題

定理 5.7 より，自由な作用 $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathrm{ead}(\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n) \in \{n, n+1\}$ が分かる。n 次元コンパクト距離空間への自由な作用で類似した次の結果が得られる。

定理 6.1（[11]） 以下を満たす自由な作用 $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \prod_{j=1}^n \mathbb{S}^1$ が存在する：

$$\mathrm{ead}(\mathbb{Z}^n \curvearrowright \prod_{j=1}^n \mathbb{S}^1) \in \{n, n+1\}$$

$\mathrm{asdim}\,\mathbb{Z}^n + \dim \prod_{j=1}^n \mathbb{S}^1 = 2n$ より以下の問題が考えられる。

問題 6.2 Sawicki の不等式「$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq \mathrm{asdim}\,\Gamma + \dim X$」の右辺の項 $\dim X$ を，

[*19] $\mathrm{asdim}\,\mathbb{F} = 1$ に注意。

より良い上限の評価ができるように変えることができるか？

例 6.3 [13] より以下の重要な結果が知られている：

(1) $\Gamma \curvearrowright X$ を巡回群 Γ からパラコンパクト Hausdorff 空間 X への自由な作用とする。もし $\dim X < \infty$ ならば，$\Gamma \curvearrowright X$ の拡張 $\Gamma \curvearrowright \beta X$ も自由な作用となる。

(2) 拡張 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \beta X$ が自由でない，局所コンパクト非コンパクト無限次元距離空間 X への自由な作用 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X$ が存在する [*20]。

系 6.4（[11]） $\Gamma \curvearrowright X$ を正規空間 X への自由な作用とする。もし $\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ ならば，$\Gamma \curvearrowright X$ の拡張 $\Gamma \curvearrowright \beta X$ も自由な作用となる。特に，もし Γ が有限ならば，逆も成立する。

以上のことから Stone-Čech コンパクト化に関して以下の問題が考えられる。

問題 6.5 X は非コンパクト正規空間，$\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用，$\mathrm{asdim}\,\Gamma < \infty$ とする。

(1) もし $\Gamma \curvearrowright \beta X$ が自由ならば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ は成立するか？ [11]

(2) もし $\Gamma \curvearrowright X$ が cocompact ならば，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright \beta X \setminus X) = \mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X)$ は成立するか？

実質的冪零群と局所有限群は従順群であることに再度注意して，注意 3.2 と定理 4.2 により，次の興味深い問題がある：

問題 6.6（従順群の有限性問題 [10]） Γ を $\mathrm{asdim}\,\Gamma < \infty$ を満たす無限従順群，X を有限次元コンパクト距離空間, $\Gamma \curvearrowright X$ を自由な作用とする。このとき, $\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) < \infty$ を満たすか？

問題 6.6 の双対的な問題として以下が考えられる。

問題 6.7（従順群の無限性問題 [10]） Γ を $\mathrm{asdim}\,\Gamma < \infty$ を満たす無限従順群とする。このとき，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) = \infty$ を満たす無限次元コンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ は存在するか？特に，$\Gamma = \mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ はどうか？

被覆次元に関する普遍性と同様に，同変漸近次元における以下の普遍性が考えられる。

問題 6.8 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\Gamma$ を群とする。このとき，ead に関するコンパクト距離空間への次の普遍性$(\star)_{\leq n}$ を持つ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright U_\Gamma$ は存在するか？：

$(\star)_{\leq n}$ 任意のコンパクト距離空間 X への自由な作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対し, $\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright X) \leq n$ を満たすならば，Γ-同変写像 $f\colon X \to U_\Gamma$ が存在する。

また，このときの $\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright U_\Gamma)$ を決定せよ [*21]

[*20] $\mathrm{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright X) = \mathrm{ead}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \beta X) = \infty$ が成立。定理 5.3 を参照。

[*21] Γ を有限群のとき，普遍性 $(\star)_{\leq n}$ をもつ自由な作用 $\Gamma \curvearrowright U_\Gamma$，$\mathrm{ead}(\Gamma \curvearrowright U_\Gamma) = n$ が知られている [10]。

参考文献

[1] J. M. Aarts, G. A.Brouwer, R. J. Fokkink and J. Vermeer, *Intersection properties for coverings of G-spaces*, Topology Appl. 125 (2002), no. 2, 249–261.

[2] A. Bartels, *Coarse flow spaces for relatively hyperbolic groups*, Compos. Math. 153 (2017), no. 4, 745–779.

[3] A. Bartels and M. Bestvina, *The Farrell-Jones conjecture for mapping class groups*, Invent. Math. 215 (2019), no. 2, 651–712.

[4] A. Bartels, W. Lück, *The Borel conjecture for hyperbolic and CAT(0)-groups*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 2, 631–689.

[5] A. Bartels, W. Lück and H. Reich, *The K-theoretic Farrell-Jones conjecture for hyperbolic groups*, Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 29–70.

[6] A. Bartels, W. Lück and H. Reich, *Equivariant covers for hyperbolic groups*, Geom. Topol. 12 (2008), no. 3, 1799–1882.

[7] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. 155 (2008), 1265–1296.

[8] C. Bönicke, *On the dynamic asymptotic dimension of étale groupoids*, Math. Z. 307 (2024), no.1, Paper No. 16.

[9] N. Chinen and T. Yamauchi, *On a characterization of N-$\mathcal{F}$-amenability*, preprint.

[10] N. Chinen and T. Yamauchi, *Equivariant asymptotic dimension for free actions of locally finite discrete groups*, in preparation.

[11] N. Chinen and T. Yamauchi, *Equivariant asymptotic dimension for actions on non-compact spaces*, in preparation.

[12] M. Coornaert, *Topological dimension and dynamical systems*, Translated and revised from the 2005 French original. Universitext. Springer, Cham, 2015.

[13] E. K. van Douwen, *βX and fixed-point free maps*, Topology Appl. 51 (1993), 191–195.

[14] A. Dranishnikov and J.Smith, *Asymptotic dimension of discrete groups*, Fund. Math. 189 (2006), no. 1, 27–34.

[15] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10. Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[16] E. Guentner, R. Willett, and G.Yu, *Dynamic asymptotic dimension: relation to dynamics, topology, coarse geometry, and C^*-algebras*, Math. Ann. 367 (2017), 785–829.

[17] M. A. Krasnosel'skiĭ, *On special coverings of a finite-dimensional sphere*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955), 961–964.

[18] M. A. Krasnosel'skiĭ and P. P. Zabreĭko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 263. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[19] D. Sawicki, *On equivariant asymptotic dimension*, Groups Geom. Dyn. 11 (2017) 977–1002.

[20] D. Sawicki, *Warped cones, (non-)rigidity, and piecewise properties. With an appendix by Dawid Kielak and Sawicki*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 118 (2019), 753–786.

[21] J. Smith, *On asymptotic dimension of countable abelian groups*, Topology Appl. 153 (2006), no. 12, 2047–2054.