

第70回
トポロジーシンポジウム
講演集

2023年（令和5年）8月11日～8月13日

於 奈良女子大学

はしがき

この講演集は 2023 年 8 月 11 日から 8 月 13 日までの 3 日間、奈良女子大学において開催された第 70 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。(ただし、一部の原稿についてはシンポジウム終了後から 9 月 20 日までの期間に修正版に差し替えをおこなっている。) その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことにより後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

令和 5 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究(A)
研究代表者 藤原耕二
研究課題名 幾何学的群論における新しい指導的理論の確立
研究課題番号 20H00114

研究種目 基盤研究(A)
研究代表者 大槻知忠
研究課題名 3次元双曲多様体上の量子トポロジー
研究課題番号 21H04428

研究種目 基盤研究(B)
研究代表者 鎌田聖一
研究課題名 グラフィクスとカンドル理論の観点からの 4次元トポロジーの研究
研究課題番号 19H01788

研究種目 基盤研究(C)
研究代表者 茂手木公彦
研究課題名 Dehn 手術の幾何と代数
研究課題番号 19K03502

世話人：小林毅(奈良女子大学)
鎌田聖一(大阪大学)
茂手木公彦(日本大学)
山下靖(中央大学)
張娟姫(奈良女子大学)
村井紘子(奈良女子大学)

主催： 日本数学会トポロジー分科会
協力： 奈良女子大学

第70回トポロジーシンポジウム プログラム

日程： 2023年8月11日（金）午前～8月13日（日）午後

会場： 奈良女子大学 総合研究棟 文学系S棟 2階 大講義室 (S235 教室)

〒630-8506 奈良市北魚屋東町

ホームページ： <https://sites.google.com/view/topologysymposium2023>

8月11日（金）

- 9:30～10:30 飯田 暢生（東京工業大学）
ゲージ理論とコンタクト構造.....1
- 10:50～11:50 Minkyu Kim (Korea Institute for Advanced Study)
Finite path integral model and toric code based on homological algebra15
- 13:30～14:30 山崎 薫里（高崎経済大学）
連続増加関数の拡張と経済学における応用.....25
- 14:50～15:50 大場 貴裕（大阪大学）
6次元シンプレクティック多様体とその部分多様体のトポロジー.....35

8月12日（土）

- 9:30～10:30 浅尾 泰彦（福岡大学）
フィルター付き集合で豊穡化した圏のマグニチュード.....45
- 10:50～11:50 佐藤 敬志（大阪公立大学）
Unicellular LLT polynomials and twins of regular semisimple Hessenberg varieties56
- 13:30～14:30 Sam Nelson (Claremont McKenna College)
Biquandle Brackets and Quivers66
- 14:50～15:50 大本 亨（早稲田大学）
21世紀のルネ・トム～生誕100周年に寄せて.....75
- 16:10～17:10 野澤 啓（立命館大学）
曲面群の円周への作用の剛性と調和測度について（足立真訓（静岡大），
松田能文（青山学院大）との共同研究）.....86

8月13日(日)

9:30~10:30	原子 秀一 (東京大学 JSPS 特別研究員 PD)	
	ρ -多様体の上のある Q コホモロジー類の構成.....	96
10:50~11:50	Dror Bar-Natan (University of Toronto)	
	Cars, Interchanges, Traffic Counters, and some Pretty Darned Good Knot Invariants	106
12:10~13:10	蔦谷 充伸 (九州大学)	
	Higher homotopy normalities in topological groups	119

ゲージ理論とコンタクト構造

飯田暢生 (東京工業大学)*

1 コンタクト構造

この予稿において、可微分多様体、ベクトル束やその切断、微分形式や接続といった場合、 C^∞ の範疇で考えることとする。まず、コンタクト構造 (接触構造) の定義を述べることから始める。

定義 1.1. 次元が奇数 $2n + 1$ である有向可微分多様体 Y を考える。 Y 上の余次元 1 接分布、すなわち、 Y の接束の実階数 $2n$ の部分束 $\xi \subset TY$ がコンタクト構造であるとは、 Y 上のある 1 形式 λ であって、次の 2 つの条件を満たすものである。

1. 多様体 Y の各点 $y \in Y$ において、接分布 ξ が与える接束の $2n$ 次元部分空間 $\xi_y \subset T_y Y$ は、 λ が定める線型写像 $\lambda : T_y Y \rightarrow \mathbb{R}$ の kernel に一致している:

$$\xi = \text{Ker} \lambda.$$

一般に、余次元 1 接分布 ξ に対し、この条件を満たす 1 形式 λ は ξ の法束の実直線束としての自明化 $\lambda : TY/\xi \rightarrow \mathbb{R}$ と等価である。^{*1} λ の取り方には Y 上の実数値可微分関数空間 $C^\infty(Y, \mathbb{R})$ 分の不定性がある。この予稿では商束 TY/ξ の向き (ξ の coorientation とよぶ) が固定されているとする。すると、 λ の不定性は Y 上の正値可微分関数空間 $C^\infty(Y, \mathbb{R}^{>0})$ に落ちる。^{*2}

2. 次の、コンタクト条件とよばれる条件が満たされている:

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n > 0.$$

すなわち、左辺の $2n + 1$ 形式が Y の向きについて正である。^{*3}

このとき、 λ をコンタクト形式とよぶ。

◇

一般に、可微分多様体上の余次元 1 接分布 $\xi = \text{Ker} \lambda$ に対する Frobenius の可積分条件は、 $\lambda \wedge d\lambda = 0$ であった。従って、コンタクト条件は、接分布 ξ がどの点の周りでも可積分でないことを意味している。このためしばしば、「コンタクト構造とは奇数次元多様体上の最大限非可積分な余次元 1 接分布のことである。」と言われる。

* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1

e-mail: iidanobuo1224@gmail.com

web: <https://sites.google.com/view/iidanobuo/home?authuser=0>

有益なコメントをくださった遠藤久顕先生、鎌田聖一先生、古田幹雄先生、今野北斗さん、谷口正樹さんに感謝を申し上げる。また、第 70 回トポロジーシンポジウムでの講演の機会をくださった、世話人の小林毅先生、鎌田聖一先生、茂手木公彦先生、山下靖先生、張娟姫先生、村井紘子先生に感謝申しあげる。本研究は科研費 (課題番号:22J00407) の助成を受けたものである。

キーワード: ゲージ理論, Seiberg-Witten 理論, シンプレクティック幾何学, コンタクト幾何学

^{*1} λ の存在を Y 全体で大域的には仮定しない場合もあるが、ここではそれを仮定する。大域的存在を仮定しない場合には Y の向きづけ可能性を仮定しない場合もある。

^{*2} Y が向き付けられていると仮定したので、 ξ に向きを与えると ξ の coorientation が定まる。 Y が奇数次元であることから、 $TY = \xi \oplus TY/\xi, TY = TY/\xi \oplus \xi$ どちらの流儀でも同じ coorientation になる。よって ξ の coorientation の代わりに ξ の向きを与えても等価である。

^{*3} $\lambda \wedge (d\lambda)^n > 0$ を満たすものを正のコンタクト構造、 $\lambda \wedge (d\lambda)^n < 0$ を満たすものを負のコンタクト構造という流儀もあるが、それらは Y の向きを逆にすれば違いに移り合うので、ここでは常に正のコンタクト構造を考えることにする。

例 1.2. 奇数次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^{2n+1} の座標を $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ と書く. その上の 1 形式 $\lambda_{\text{std}} = dz - y_1 dx_1 - \dots - y_n dx_n$ の kernel

$$\xi_{\text{std}} = \text{Ker} \lambda_{\text{std}}$$

は λ_{std} をコンタクト形式にもつコンタクト構造である. これは \mathbb{R}^{2n+1} の標準的コンタクト構造とよばれる.

◇

また, 「コンタクト構造は, シンプレクティック構造の奇数次元の兄弟である」ということもよくいわれる. 例えばコンタクト幾何とシンプレクティック幾何の共通点として, Darboux の定理によって局所的なモデルが与えられ, 従って, 局所的な不変量はなく, 大域的な現象に興味があるということが挙げられる. すなわち, 上で述べた $(\mathbb{R}^{2n+1}, \text{Ker} \lambda_{\text{std}})$ が $2n+1$ 次元コンタクト構造の局所的なモデルを与える. 文脈によって, 接分布であるコンタクト構造に興味がある場合と, 1 形式であるコンタクト形式に興味がある場合がある. 例えば, Reeb 力学系を考える場合に興味があるのは後者である. コンタクトトポロジーの主要な興味の一つは, コンタクト構造のアイソトピー類の分類であり, 現在までに多くの研究がある. (コンタクト同相による分類を考える場合もあり, 一般には異なる.) また, コンタクト構造はシンプレクティック多様体の境界に, さまざまな場面で現れる.

コンタクト構造全般についての基本的な教科書としては Geiges の [7], 3 次元コンタクト構造と 4 次元シンプレクティック構造に焦点を当てた教科書としては Ozbagci-Stipsicz による [25], h 原理に焦点を当てた教科書として Chelibak-Eliashberg による [3] が挙げられる.

1.1 歴史

Geiges の教科書 [7] の序文によると, コンタクト幾何学が初めて一つのテーマとして認識されたのは, 「Lie 群」にもその名を残す Sophus Lie の 1870 年代の論文「コンタクト変換の不変式論の基礎」においてである.*4

1983 年に Bennequin により発見された, \mathbb{R}^3 上には標準的なものとアイソトピックでないコンタクト構造が存在するという驚くべき事実は, しばしばコンタクトトポロジーのはじまりと言われる. 1989 年に Eliashberg は, 3 次元において, コンタクト構造は, 全く異なる挙動を示す二つのクラスに分けられるということを見出した (tight vs overtwisted dichotomy とよばれる). 一方は overtwisted とよばれるもので, overtwisted disk とよばれるある性質を持つ埋め込まれた 2 次元円板の存在により特徴づけられる. 他方は tight とよばれ, overtwisted でないものとして定義される. Eliashberg は, overtwisted なコンタクト構造のアイソトピー類は, h 原理的に分類されることを示した. ここで, h 原理とは, シンプレクティック構造やコンタクト構造という微分幾何的, 微分方程式的な対象が, 下部構造であるバンドルトポロジーのレベルで分類されるというタイプの一連の結果を指す. 具体的に Eliashberg が証明した事実は, 有効閉 3 次元多様体上の overtwisted コンタクト構造のアイソトピー類による分類は, 下部構造である有向 2 平面場のホモトピー類による分類と同じであるということである.

一方, tight なコンタクト構造に対してはそのような一般的な分類の結果は知られておらず, 1980 年代以降に発展したゲージ理論や擬正則曲線といった解析的手法が有効な場合がある. また, 3 次元コンタクト構造を埋め込まれた曲面を使って調べる理論も重要な役割を果たしており, convex surface theory は tight なコンタクト構造の分類理論において用いられる強力な手法である.

2002 年には 3 次元においてコンタクト構造のアイソトピー類が, オープンブック分解を正の安定化で同一視したものと 1 対 1 対応するという Giroux の対応が証明された. これは, 4 次元において, 微分幾何的対象であるシンプレクティック構造の存在が, トポロジカルな対象である Lefschetz ペンシルの存在と同値であるという Donaldson と Gompf 結

*4 Geiges の教科書「Geiges」の序文には 1896 年と書かれているがこの論文の出版は 1875 年であるようである. D.H.Delpheneich による英訳がインターネット上で読める. L.D. Kay による「Flex Klein, Sophus Lie, contact transformations, and connexes」により詳細な経緯が書かれている.

果と比較されるべきものである。オープンブック分解は Heegaard Floer 理論と相性がよいという事情と合わせて、コンタクト構造のトポロジカル・組み合わせ的な観点からの理解が急激に進んだ。

現在発展途上である研究として、高次元のコンタクト構造に対しても、3次元同様の手法がどれほど通用するか、3次元では見られなかった現象があるかという観点で様々な結果がある。例えば、convex surface theory や Heegaard Floer ホモロジー、オープンブック分解の高次元版が本田公氏らにより展開されている。また大場貴裕氏により、ホモトピー型が異なる無限個の Stein 充填を持つ高次元接触多様体が与えられた。

1.2 シンプレクティック多様体の境界としてのコンタクト多様体

コンタクト構造はシンプレクティック多様体の境界に、さまざまな場面で現れ、シンプレクティック多様体を余次元 1 部分多様体に沿って切り貼りする際の、自然な切り口やのりしろになる。とはいえ、シンプレクティック多様体の境界や、余次元 1 部分多様体に、勝手にコンタクト構造が誘導されるわけではない。Liouville ベクトル場とよばれるベクトル場がその近傍上にあるとき、コンタクト構造が誘導される。

定義 1.3. (X, ω) をシンプレクティック多様体とする。

1. X の開集合上定義されたベクトル場 v が Liouville ベクトル場であるとは、

$$\mathcal{L}_v \omega = \omega$$

を満たすことをいう。ここで、 \mathcal{L}_v はベクトル場 v についての Lie 微分を表す。

2. Y を X の余次元 1 閉部分多様体がコンタクト型 (あるいはコンタクト超曲面) であるとは、 Y の環状近傍上定義された Liouville ベクトル場 v であって、 Y に横断的なものが存在することをいう。このとき、シンプレクティック形式に v による内部積を施して定義される 1 形式の制限

$$\lambda_v := \iota_v \omega|_Y$$

は Y 上のコンタクト形式を与える。コンタクト条件が満たされていることは、Cartan の公式とシンプレクティック形式が定義から閉形式であることを用いて確かめられる。

3. Y が X の境界成分一つであるとする。同様に、 Y のカラー近傍上定義された Liouville ベクトル場 v であって、 Y に横断的なものは Y 上のコンタクト形式を与えることが確かめられる。そのような Liouville ベクトル場 v であって、 Y に横断的かつ外向きであるものが存在するとき、コンタクト多様体 $(Y, \text{Ker} \lambda_v)$ は (X, ω) の凸境界である、あるいは (X, ω) は $(Y, \text{Ker} \lambda_v)$ の強シンプレクティック充填であるという。「外向き」を「内向き」に変えて同じ条件を満たす Liouville ベクトル場 v が存在するとき、コンタクト多様体 $(Y, \text{Ker} \lambda_v)$ は (X, ω) の凹境界である、あるいは (X, ω) は $(Y, \text{Ker} \lambda_v)$ のシンプレクティックキャップであると言われる。

◇

Liouville ベクトル場の内向きと外向きという違いは、非対称である。例えば、任意の閉コンタクト 3 次元多様体に対しシンプレクティックキャップが存在することが Etnyre-Honda により証明されている。一方、Gromov-Eliashberg の定理によれば、overtwisted コンタクト 3 次元多様体は強シンプレクティック充填を持たない^{*5}。

閉コンタクト多様体 (Y, ξ) があるシンプレクティック多様体 X_1 の凸な境界でありかつあるシンプレクティック多様体 X_2 の凹な境界でもあるとき、貼り合せ $X_1 \cup_Y X_2$ をシンプレクティック構造込みで構成することができる。正確なステイメントは例えば Etnyre によるサーベイ [4] [5] を見よ。

1.2.1 Stein 充填

コンタクト多様体を一つ固定したとき、それを境界を持つようなどうい種類シンプレクティック多様体がありうるかという問題が考えられる。これに対しては、シン

^{*5}より強く、弱シンプレクティック充填を持たないということが示された。

プレクティック多様体にどのような付加構造を考えるか、境界のコンタクト構造との compatibility 条件としてどういうもの考えるかに応じて、さまざまな結果がある。ここでは、多くの文脈で最も良いクラスとみなされる、Stein 充填というものを定義する。Stein 充填は特に強シンプレクティック充填である。コンタクトトポロジーの視点からの Stein 充填の比較的新しい解説として、Ozbagci の [24] がある。Stein 充填は、トポロジーの文脈だけでなく、複素幾何解析の文脈でも多くの研究がある対象である。

定義 1.4. (X', J) を非コンパクト複素多様体, $f : X' \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 関数であって, exhausting (i.e. 固有かつ下に有界) かつ J -凸であるものとする。ここで, f が J -凸であるとは,

$$\omega := -d(df \circ J) \in \Omega^2(X'), \quad g := \omega(\bullet, J\bullet)$$

と定義するとき, g が Riemann 計量の定義を満たすことをいう。このとき, X' を Stein 多様体という。 f の正則値 $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}^{\leq c}), \quad Y = \partial X$$

と書くと $\xi = TY \cap JTY$ (complex tangency とよばれる) は $\lambda := -df \circ J|_Y$ をコンタクト形式とする Y 上のコンタクト構造であり, $(X, \omega = d\lambda)$ を強シンプレクティック充填にもつ。Liouville ベクトル場は $\nabla_g f$ により与えられる。このとき (X, J) は (Y, ξ) の Stein 充填であるという。

◇

例 1.5. $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

と定義する。 $D^{2n} = f^{-1}(\mathbb{R}^{\leq 1})$ の境界 $S^{2n-1} = f^{-1}(1)$ に上の構成により定まるコンタクト構造を S^{2n-1} の標準的コンタクト構造とよび, ξ_{std} と書く。これは D^{2n} を Stein 充填にもつ。

他にも, Brieskorn 球面が Milnor ファイバーを Stein 充填に持つというのも基本的な例である。

2 ゲージ理論

Donaldson による対角化定理の証明は, ASD 方程式の解空間の考察に基づく, これがゲージ理論の低次元トポロジーへの応用の起源である。ASD 方程式を用いて Donaldson 不変量が構成された。物理学者 Seiberg と Witten は, 素粒子物理学における超対称ゲージ理論の考察に基づき, Seiberg-Witten 方程式を導入し, そこから構成される Seiberg-Witten (SW) 不変量が Donaldson 不変量とある意味で等価になることを予想した。

2.1 Seiberg-Witten 不変量

ここでは, Seiberg-Witten 不変量の定義を概説する。詳細は, Morgan の教科書 [22] (二本氏による邦訳もある) を参照。^{*6}

2.1.1 Seiberg-Witten 不変量のインプットとアウトプット

まず, インプットとアウトプットを数学的に正確に述べる。インプットは次の二つのデータである。

1. 連結有向閉 4 次元多様体であって, $b^+(X) \geq 2$ であるもの。
2. 実ベクトル空間

$$H^0(X; \mathbb{R}) \oplus H^1(X; \mathbb{R}) \oplus H^+(X; \mathbb{R})$$

^{*6} Salamon による未出版の pdf 「Spin Geometry and Seiberg-Witten Invariants」や Perutz によるレクチャーノートもある。

の向き. これは homology orientation とよばれ, Seiberg-Witten 不変量の符号を定めるためのデータである.

アウトプットとして X 上の $Spin^c$ 構造の各同型類に対し, 整数を与える関数が定まる

$$SW_X : Spin^c(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

これが Seiberg-Witten 不変量である. ここで定義域は X 上の $Spin^c$ 構造の同型類の集合である.

2.1.2 Seiberg-Witten 不変量の構成のあらすじ

まず, 連結有向閉 4 次元多様体 X を固定する. X 上に Riemann 計量 g と $Spin^c$ 構造 $\mathfrak{s} = [(S, \rho)]$ を固定する.*7 そして, Seiberg-Witten 方程式 (微分幾何的な記号の定義は説明しない)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(F_{A^+}^+) - (\Phi\Phi^*)_0 = \eta \\ D_A^+\Phi = 0 \end{cases}$$

の, いわゆる「解の数え上げ」により Seiberg-Witten 不変量 $SW_X(\mathfrak{s})$ が定義される.

「解の数え上げ」と言った部分をより詳しく説明する. Seiberg-Witten 方程式は, $Spin^c$ 接続 A と正のスピンル Φ の組 (A, Φ) を未知変数とする方程式である. 解 (A, Φ) の空間には $U(1)$ ゲージ変換群 $C^\infty(X, U(1))$ が作用する. その商を Seiberg-Witten 方程式の解のモジュライ空間とよびここでは

$$\mathcal{M}(g, (S, \rho), \eta) = \{(A, \Phi) \mid \text{摂動項}\eta\text{付きの Seiberg-Witten 方程式の解}\} / C^\infty(X, U(1))$$

と書く. $b^+(X) \geq 1$ であれば, generic な η に対しこれは実次元が

$$d(X, \mathfrak{s}) := \frac{1}{4}(c_1^2(\mathfrak{s}) - 2\chi(X) - 3\sigma(X)) = e(S^+) = \text{index}_{\mathbb{R}}(d^+ + d^* + D_A^+)$$

(これをモジュライ空間の virtual dimension という) である閉 C^∞ 多様体の構造を持つ. この上で適切なコホモロジー類を積分することで $SW_X(\mathfrak{s})$ が定義される. $b^+(X) \geq 2$ であれば, Riemann 計量 g , 固定された同型類内の $Spin^c$ 構造 $(S, \rho) \in \mathfrak{s}$, および, Seiberg-Witten 方程式の摂動項 η を取り替える操作の下で $SW_X(\mathfrak{s})$ の値は不変であることが示せる.

2.2 Seiberg-Witten 理論とシンプレクティック・コンタクト幾何学

この節では, Seiberg-Witten 理論と 4 次元シンプレクティック構造・3 次元コンタクト構造に関する結果を説明する.

2.2.1 シンプレクティック多様体に対する Taubes の SW 不変量の非消滅定理

SW 方程式が発見された 1994 年のうちに, Taubes は, 閉 4 次元多様体 X がシンプレクティック構造 ω を持つ場合の, SW 不変量の非消滅定理を示した.

定理 2.1. X を有向閉 4 次元多様体とする. X 上のシンプレクティック構造 ω であって X の向きと整合する (すなわち $\omega \wedge \omega > 0$ である) ものが存在するならば, ω からカノニカルに定まる $Spin^c$ 構造の同型類 \mathfrak{s}_ω に対し

$$SW_X(\mathfrak{s}_\omega) = \pm 1$$

である. □

*7 Seiberg-Witten 方程式を考えるためには Riemann 計量を固定し, $Spin^c$ 構造を同型類レベルではなくバンドルレベルで固定することが必要である (\mathfrak{s} という記号は一つの文献の中でも, 同型類を指すときもあれば同型類をとる前のものを指すときもあるということが通常であり, どちらであるかは文脈から読み取る必要がある.)

この非消滅定理の証明を説明する前に、 ω からカノニカルに定まる $Spin^c$ 構造の同型類 \mathfrak{s}_ω について説明する. ω と compatible な概複素構造 J を一つとる. スピノル束を

$$S^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}, \quad S^- = \Lambda^{0,1},$$

Cliford 積 $\rho : T^*X \oplus S^+ \rightarrow S^-$ を

$$\rho = (\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^* : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \rightarrow \Omega^{0,1})) \text{ の主表象}$$

として定義する (ここで adjoint は ω と J が定める Riemann 計量 g_J についてとる) ことで, $Spin^c$ 構造の同型類 \mathfrak{s}_ω が定まる. Taubes の非消滅定理の証明のポイントは, 概 Kähler 4 次元多様体上では, Taubes の摂動項とよばれる摂動項 (具体形は後述の KM 不変量の構成中の SW 方程式を参照) を付した SW 方程式に対するカノニカルな解 (A_0, Φ_0) が明示的に構成されることである.

Taubes はシンプレクティック 4 次元多様体上の Seiberg-Witten 方程式の解析をさらに発展させ, 埋め込まれた擬正則曲線の数え上げにより定義される Gromov-Taubes 不変量と Seiberg-Witten 不変量が等しくなるといういわゆる「Gr=SW」定理を証明した [28]. 後に Taubes は, そこで用いられたテクニックの 3 次元版として, Reeb 力学系の重要問題であった Weinstein 予想を, 閉 3 次元の場合に肯定的に解決した. Embedded contact homology (ECH) は Gr=SW の Gr 側の 3 次元版とみなされる. Weinstein 予想の解決の議論をさらに発展させ, Taubes は Gr=SW の 3 次元版である ECH=HM を証明した.

2.2.2 コンタクト境界を持つ 4 次元多様体に対する Kronheimer-Mrowka の不変量

Kronheimer-Mrowka は, 境界にコンタクト構造が与えられた有向コンパクト 4 次元多様体 (X, ξ) に対し, Seiberg-Witten 不変量の変種

$$KM_{(X, \xi)} : Spin^c(X, \xi) \rightarrow \mathbb{Z} / \pm 1$$

を構成した [17]. ここで, $Spin^c(X, \xi)$ は X 上の $Spin^c$ 構造であって, 境界上でコンタクト構造から定まる 3 次元 $Spin^c$ 構造との同型が与えられたものの同型類である. この空間には, $H^2(X, \partial X; \mathbb{Z})$ が自由かつ推移的に作用する. この不変量の構成は次の手順でなされる. X の境界を Y と書く. ξ の複素構造 J とコンタクト形式 λ と ξ を固定すると, Y 上に $g_Y = \lambda \otimes \lambda + \frac{1}{2}d\lambda(\bullet, J\bullet)$ という Riemann 計量が定まる. 直積 $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ を考え, それにシンプレクティック構造 $\omega_0 = \frac{1}{2}(t^2\lambda)$ および Riemann 計量 $g_0 = dt^2 + t^2g_Y$ を付与する. ここで $\mathbb{R}^{\geq 1}$ の座標を t と書いた. 計量は, コーン上に広がっている. このコーン状の端を X に取り付けた

$$X^+ = X \cup (\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y)$$

という多様体を考える.

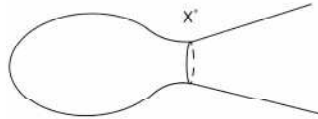


図 1 コーン状の端を取り付けた多様体 X^+

端 $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ には g_0, ω_0 から概 Kähler 構造が定まり, 従ってカノニカルな $Spin^c$ 構造および, Taubes の解 (A_0, Φ_0) がある.

Riemann 計量 g_0 を X^+ 全体に滑らかに拡張する. カノニカルな $Spin^c$ 構造は $\mathfrak{s} \in Spin^c(X, \xi)$ と貼り合わさって X^+ 上の $Spin^c$ 構造を定める. (A_0, Φ_0) の内部への滑らかな拡張をとる. $g_0, (A_0, \Phi_0)$ の内部への拡張の取り方の可能性は可縮であるという事

実を, 不変量の well-definedness を保証するのに使う. X^+ 上の, Taubes の摂動項付き Seiberg-Witten 方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(F_{A_t}^+) - (\Phi\Phi^*)_0 = \frac{1}{2}\rho(F_{A_0}^+) - (\Phi_0\Phi_0^*)_0 \\ D_A^+\Phi = 0 \end{cases}$$

の解 (A, Φ) であって, 端において (A_0, Φ_0) に「漸近する」ものを, 端において 1 に「漸近する」ゲージ変換の下で同一視した解のモジュライ空間 \mathcal{M}^{KM} を考える. ここで, 「漸近する」の定義はそれぞれ,

$$A - A_0, \Phi - \Phi_0 \in L_{l, A_0}^2, \quad u : X^+ \rightarrow U(1), 1 - u \in L_{l+1}^2$$

である. ただし, 整数 $l \geq 4$ を固定し, Sobolev ノルムを

$$\|s\|_{L_{l, A}^2}^2 = \int_{X^+} |\nabla_A^k s|^2 + \cdots + |\nabla_A s|^2 + |s|^2$$

と定義し, このノルムでコンパクト台を持つ C^∞ 切断のなす空間を完備化した Sobolev 空間 $L_{k, A}^2$ を考えている. 非コンパクトな端を持つため解析的議論が必要となるが, 結論としては, \mathcal{M}^{KM} は滑らかな閉多様体となり^{*8}, その次元は相対 Euler 数

$$d(\xi, \mathfrak{s}) := \langle e(S^+, \Phi_0), [X, \partial X] \rangle$$

で与えられることが示せる. また, モジュライ空間の向きづけは overall の符号を除いて定まる (例えば, \mathcal{M}^{KM} が 0 次元で n 個の点であったとすると, 2^n 通りの向きのうち, あるやり方で, ある向きとその逆の 2 通りにまで絞られる.) Kronheimer-Mrowka(KM) 不変量 $KM_{X, \xi}(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}/\pm 1$ が

$$KM_{X, \xi}(\mathfrak{s}) := \#\mathcal{M}^{KM}$$

と定義される. ただし, $d(\xi, \mathfrak{s}) \neq 0$ のときには, 右辺はゼロと解釈する.

(A_0, Φ_0) を固定するゲージ変換は 1 しかない (すなわち (A_0, Φ_0) が既約である) ため, $U(1)$ 対称性はない. そのため evaluate されるべきコホモロジー類にあたるもないというのがない. これが閉 4 次元多様体の SW 不変量と異なり, モジュライ空間の次元が 0 でないときに不変量の値を 0 とする理由である. また, 閉のときに SW 不変量についていた制約 $b^+ \geq 2$ にあたるものがないのも, 漸近条件を与える (A_0, Φ_0) が既約であるため可約解が存在しないからである.

3 Floer ホモロジー理論

3.1 ゲージ理論における Floer ホモロジー: 閉 4 次元多様体の不変量の (3+1)TQFT 化

Floer ホモロジー理論は, 1980 年代に Floer によって導入されて以来, 様々な変種が構成され, 現在なお, 低次元トポロジーやシンプレクティック, コンタクト幾何学に新しい成果をもたらしている. Floer ホモロジー理論は, ゲージ理論におけるもの (インスタントン Floer ホモロジー, SW モノポール Floer ホモロジー) とシンプレクティック幾何学におけるもの (Hamiltonian, Lagrangian intersection) の二種類に大別できる. Floer ホモロジー理論の構成は, 一言で言うと, Morse ホモロジーの構成をシンプレクティック

^{*8} 正確にはここで, 横断性を確保するため, SW 方程式の第一式に, さらなる摂動項 η であって C^r 指数的減衰 ($r \geq l$) を持つものを generic に選んで足したものを考える.

多様体上のループや path の空間や、3次元多様体上の接続の空間といった ∞ 次元の空間に対して行ったものである。

ゲージ理論における Floer ホモロジーとして、インスタントン Floer ホモロジー、SW モノポール Floer ホモロジーの二つがあり、それぞれ Donaldson 不変量、SW 不変量の (3+1)TQFT 化を与えている。これは閉 4次元多様体の不変量の境界つき 4次元多様体への拡張であって、4次元多様体の余次元 1 閉部分多様体に沿った切り貼りによる不変量の振る舞いを系統的に扱う方法を与えるものである。Z が (3+1)TQFT であることは次を意味する:

有向閉 3次元多様体 Y に対し加群 $Z(Y)$ が与えられる。 $Z(Y)$ と $Z(-Y)$ の間にはペアリングがあり、「数」を返す。閉 4次元多様体 X に対しては「数」 $Z(X)$ が与えられる。 $X = X_1 \cup_Y X_2$ という余次元 1 閉部分多様体に沿った分割があるとき、元 $Z(X_1) \in Z(Y)$, $Z(X_2) \in Z(-Y)$ が定まり、それらのペアリングにより $Z(X)$ が復元される。このように境界つき 4次元多様体に対しては、その境界の閉 3次元多様体に対して定まる加群の元が定まる。このようなものを、「数」として定まる閉多様体の不変量と対比して、「相対不変量」という。

ただし実際のインスタントン、モノポール Floer ホモロジーはゲージ対称性に由来する群作用について同変理論として定式化されるという事情のため、複数種類の Floer ホモロジー群を組み合わせて閉 4次元多様体の不変量が扱われる場合がある。そのためここで説明した TQFT は Floer 理論の説明としては簡略化されすぎたものである。

3.2 KMOS コンタクト不変量: SW モノポール Floer ホモロジー類としてのコンタクト不変量

境界にコンタクト構造を持つ 4次元多様体 (X, ξ) に対し、Kronheimer-Mrowka の不変量が、符号を除いて定まる整数として定義されるのであった。TQFT としての SW モノポール Floer ホモロジーの枠組みから見ると、KM 不変量は、境界付き 4次元多様体 X の情報と境界 $Y = \partial X$ 上のコンタクト構造 ξ の情報の混合物である。言い換えると、 X, ξ に対しそれぞれ $Y, -Y$ の Floer ホモロジー群に値を持つ不変量が定まり、そのペアリングとして KM 不変量が復元される。コンタクト構造 ξ に対して定まるのが KMOS コンタクト不変量

$$c_{HM}(\xi) \in \check{H}M_\bullet(-Y, \mathfrak{s}_\xi)$$

である [15]。その構成は、相対 SW 不変量の構成と並行している。境界付き多様体 X の相対 SW 不変量を、シリンダー状に延びた端を境界に沿って X に取り付けて、Chern-Simon-Dirac(CSD) 汎関数の臨界点 (=3d SW 解のゲージ同値類) の線型結合 (係数とその臨界点に漸近する 4dSW 解の個数の数え上げ) として与えられる。それと同様に、KMOS コンタクト不変量はコーン $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ にシリンダー状に延びた端 $\mathbb{R}^{\leq 1} \times Y$ を境界に沿って取り付けて、CSD 臨界点の線型結合として定義される。各臨界点の係数は、シリンダー状の端でその臨界点に漸近し、コーンの方では Taubes のに漸近するような 4dSW 解の個数の数え上げである。正確には、Kronheimer-Mrowka による SW モノポール Floer ホモロジーの構成 [18] では、 $U(1)$ 同変理論を実現するために、実ブローアップされた SW 方程式を考える。

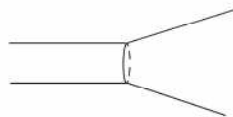


図 2 KMOS コンタクト不変量の構成

3.3 HM=ECH=HF とコンタクト不変量

SW モノポール Floer ホモロジー (HM) には、それと同型であることが知られている Floer ホモロジーがもう二つある。一つが、Gr=SW のところから出てきた embedded contact homology(ECH) である。これは、Reeb 力学系の周期軌道の形式的積を生成元とし、埋め込まれた擬正則曲線の数えあげで微分を定義することで構成される。もう一つが、Ozsváth-Szabó の展開した Heegaard Floer ホモロジー (HF) である。Heegaard Floer ホモロジーは、Atiyah-Floer 予想の SW 版のシンプレクティック側に当たるものとして、そ

して SW モノポール Floer ホモロジーのよりトポロジカル・組み合わせ的な記述を与えることを念頭において導入された。

HM と同じく ECH, HF にもコンタクト不変量が定義される。HM ではコンタクト構造を微分幾何的に扱い、コーン状の端を持つ多様体上の SW 方程式の解析により KMOS コンタクト不変量が定義されるのだった。ECH のコンタクト不変量は「空集合」が定める生成元により与えられる。HF のコンタクト不変量は、オープンブック分解を用いて与えられ、いくつかの等価な定義がある。

同型 $HM=ECH$ およびその下でのコンタクト不変量の対応は Taubes により証明された。同型 $ECH=HF$ およびその下でのコンタクト不変量の対応は Colin-Ghiggini-Honda により証明された:

$$HM \stackrel{\text{Taubes}}{=} ECH \stackrel{CGH}{=} HF$$

$$c_{HM}(\xi) \stackrel{\text{Taubes}}{=} c_{ECH}(\xi) \stackrel{CGH}{=} c_{HF}(\xi).$$

同型 $HM=HF$ の別の証明が Kutulhan-Lee-Taubes により与えられており、その証明においても途中で embedded contact homology の変種を経由する。コボルディズム写像のレベルでの一致は未だ示されていない。

4 Floer ホモトピー理論

4.1 古田の有限次元近似と Bauer-Furuta 不変量

1994 年に SW 理論が登場して数年のうちに、古田は、SW 方程式の有限次元近似という手法を導入し、それをを用いて有名な $10/8$ 不等式を証明した [6]。この有限次元近似の手法を用いて、Bauer と古田の共著論文において閉 4 次元多様体に対する Bauer-Furuta (BF) 不変量が構成された [2]。

定理 4.1. X を $b_1(X) = 0$ である有向閉 4 次元多様体とし、 \mathfrak{s} をその上の $Spin^c$ 構造とする。このとき、 X 上の SW 方程式の有限次元近似により、 $U(1)$ 同変基点付き安定ホモトピー類

$$BF(X, \mathfrak{s}) : (\mathbb{R}^{M-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{N+\frac{c_1^2(\mathfrak{s})-\sigma(X)}{8}})^+ \rightarrow (\mathbb{R}^M \oplus \mathbb{C}^N)^+$$

が定まる。ここで、 $U(1)$ は \mathbb{R} には自明に作用し、 \mathbb{C} には掛け算で作用する。 $+$ は一点コンパクト化を表す。 $U(1)$ 同変基点付き安定ホモトピー類が定まるとは、この写像が十分な大きな自然数 M, N に対して定義され、さらにそのような M, N の取り方を変えたとき、 $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ をサスペンションすることで up to $U(1)$ 同変ホモトピーで移り合うということを指す。□

さらに \mathfrak{s} が $Spin$ ならば、 $BF(X, \mathfrak{s})$ は $U(1)$ より大きな $Pin(2) = S^1 \cup jS^1 \subset Sp(1)$ の対称性を持ち、これに $Pin(2)$ 同変 K 理論を適用することで $10/8$ 不等式が示された。BF 不変量は、SW 不変量の (安定) ホモトピー論的精密化である。もう少しラフにいうと、SW 不変量と BF 不変量の関係は、写像度と写像のホモトピー類の関係に喩えられる。実際には $U(1)$ 作用込みで見ると必要があるためこの説明は簡略化しすぎである。一方、コンタクト境界の KM 不変量の設定では $U(1)$ 作用がないため、後述する筆者が構成した BF 型不変量の写像度が KM 不変量であるという主張はそのままの意味で正しい。

4.2 Manolescu の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプと相対 Bauer-Furuta 不変量

Floer ホモトピー理論の根幹にある問題は、「ホモトピー群あるいはホモロジー群が Floer ホモロジーになるような空間 (Floer ホモトピータイプ) を構成せよ。」というものがある。この空間が Floer ホモロジーの精密化を与える。そして、一般コホモロジー理論やコホモロジー作用素といったホモトピー論の道具を適用して、Floer ホモロジーでは届かない情報を取り出そうという目的意識がある。Floer ホモトピーという考え方を提唱したのは Cohen-Jones-Segal [6] である。現在、Floer ホモトピータイプの構成が実現された

ものとして, Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプ (Manolescu), Khovanov/odd Khovanov/Bar-Natan ホモトピータイプ (Lipshitz-Sarkar/Sarkar-Scaduto-Stoffregen/佐野岳人), Hamilton Floer ホモトピータイプ (Abouzaid-Blumberg), knot Floer ホモトピータイプ (Sarkar-Manolescu) がある.

この予稿で解説するのは Manolescu による Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプである. Manolescu は, Bauer-Furuta 不変量の TQFT 化として, Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプと相対 Bauer-Furuta 不変量を定式化した [20]. 技術詳細に目をつぶると, この枠組みは次を与える *9:

$Spin^c$ 構造が与えられた閉 3 次元多様体 (Y, \mathfrak{s}) *¹⁰ に対し, 「 S^1 作用つき ($Spin$ ならば $Pin(2)$ 作用付き) 基点付き空間」 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ であって, その (S^1 同変 reduced) ホモロジーが SW モノポール Floer ホモロジー $\check{HM}_\bullet(Y, \mathfrak{s})$ であるものを与える. 境界付き $Spin^c$ 4 次元多様体 (X, \mathfrak{s}_X) であって $b_1(X) = 0$ であるものに対し, 相対 BF 不変量

$$BF(X, \mathfrak{s}_X) : (\mathbb{R}^{-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_X) - \sigma(X)}{8}})^+ \rightarrow SWF(\partial X, \mathfrak{s}_X|_{\partial X})$$

が S^1 同変 ($Spin$ ならば $Pin(2)$ 同変) 基点つき安定ホモトピー類として定まる. さらに, 双対ペアリング

$$\eta : SWF(Y, \mathfrak{s}) \wedge SWF(-Y, \mathfrak{s}) \rightarrow S^0$$

があり, 閉 4 次元多様体の余次元 1 閉多様体に沿った分割 $X = X_1 \cup_Y X_2$ を考えるとき, X_1, X_2 の相対不変量のペアリングとして閉 4 次元多様体の BF 不変量が復元される. また, 相対 BF 不変量はコボルディズムに対しても定義され, 合成則が成り立つ.

Manolescu の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプの構成では, 古田の有限次元近似 (の 3 次元版) と Conley 指数理論が用いられる.

5 Floer ホモトピー理論とコンタクト構造: 筆者の周辺の研究

5.1 BF 版 KM 不変量 (筆者)

筆者は, KM 不変量の BF 版を構成した [8].

定理 5.1. (筆者 [8]). X をコンパクト有向 4 次元多様体であって, $b_3(X) = 0$ であるものとする. X の境界上にコンタクト構造 ξ が与えられているとする. \mathfrak{s} を X 上の $Spin^c$ 構造であって, 同型 $\mathfrak{s}|_{\partial X} \rightarrow \mathfrak{s}_\xi$ が与えられているものとする.

このとき, KM 不変量の設定での SW 方程式の有限次元近似により, 次の性質を持つ不変量

$$\Psi(X, \xi, \mathfrak{s}) \in \pi_d^{st}(\xi, \mathfrak{s})(S^0) / \pm 1$$

が構成される. ここで,

$$\pi_d^{st}(S^0) = \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \pi_{N+d}(S^N) = \text{colim}_{N \rightarrow \infty} [S^{N+d}, S^N]_*$$

は球面の d 次の安定ホモトピー群である.

*9 より正確な不変量の定式化には, $S^1/Pin(2)$ 同変版 Spanier-Whitehead 圏を考える. Spanier-Whitehead 圏とは, 基点付きホモトピータイプと, その形式的 desuspension の次元というデータの組を object とし, その間の連続写像の安定ホモトピー類を morphism とする圏であった. $SWF(Y, \mathfrak{s})$ はその object, 相対 BF 不変量はその morphism として定式化される. ここでは morphism は十分次元の大きなサスペンションを省略して表記する

*10 正確には $b_1(Y) = 0$ が課される. $b_1(Y)$ がゼロではない場合への拡張の試みとして, Kronheimer-Manolescu[19], Khandhawit-Lin-Sasahira [13][14], Sasahira-Stoffregen[27] がある. また, Khandhawit は, 相対 Bauer-Furuta 不変量の構成に slice の取り方に対するギャップを修正した (double-Coulomb スライス)[12].

1. (KM 不変量の回復). $d(\xi, \mathfrak{s}) = 0$ のとき, $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ の写像度は $KM_{(X, \xi)}(\mathfrak{s})$ である. すなわち, 写像度が与える同型 $\pi_0^{st}(S^0) \cong \mathbb{Z}$ の下で $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ と $KM_{(X, \xi)}(\mathfrak{s})$ は対応する.
2. (非消滅定理)*¹¹ (X, ω) が $(\partial X, \xi)$ の強シンプレクティック充填であるとする *¹². このとき, $d(\xi, \mathfrak{s}_\omega) = 0$ であり, さらに,

$$\Psi(X, \xi, \mathfrak{s}) = \pm[id] \in \pi_0^{st}(S^0)$$

である.

3. (連結和公式) (X_1, \mathfrak{s}_1) を閉 $Spin^c$ 4次元多様体であって $b_1(X_1) = 0$ であるものとし, $(X_2, \xi, \mathfrak{s}_2)$ を境界にコンタクト構造をもつ 4次元多様体であって, $b_3(X_2) = 0$ であり, $\mathfrak{s}_2 \in Spin^c(X_2, \xi)$ が与えられたものとする. このとき,

$$BF(X_1, \mathfrak{s}_1) \wedge \Psi(X_2, \xi, \mathfrak{s}_2) = \Psi(X_1 \# X_2, \xi, \mathfrak{s}_1 \# \mathfrak{s}_2)$$

が成り立つ. ここで $BF(X_1, \mathfrak{s}_1)$ は $U(1)$ 作用を忘れた BF 不変量であり,

$$\wedge : \pi_{d(\mathfrak{s}_1)+1}^{st}(S^0) \times \pi_{d(\xi, \mathfrak{s}_2)}^{st}(S^0) \rightarrow \pi_{d(\mathfrak{s}_1)+d(\xi, \mathfrak{s}_2)+1}^{st}(S^0) = \pi_{d(\xi, \mathfrak{s}_1 \# \mathfrak{s}_2)}^{st}(S^0)$$

はウェッジ積である.

□

ここで, \mathfrak{s}_ξ は平面場 ξ から定まる $Spin^c$ 構造である. 通常の BF 不変量は $U(1)$ 同変 ($Spin$ なら $Pin(2)$ 同変) であったが, コンタクト境界の設定ではそのような群作用はない. 漸近条件として端に置いている Taubes の解が既約だからである.

KM 不変量は自明であるが, 新しい不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ は非自明であるような例はこれらの性質から容易に与えることができる. たとえば $K3$ 曲面に穴を開けた $K3 \# D^4$ がそうである.

5.1.1 不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ の構成: 有限次元近似

不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ の構成は, 閉 4次元多様体上の SW 方程式の有限近似を, コーン状の端を持つ多様体 X^+ 上に適用できるように変更を加えたものである. あらすじを説明する. $l \geq 4$ とし, 十分小さい重み $\alpha > 0$ 付きの Sobolev 完備化の下で, X^+ 上で大域的スライス $d^{*\alpha}$ 付きの Seiberg-Witten 方程式 (KM 同様の Taubes の摂動項も付ける)

$$L_{l, \alpha}^2(X^+; i\Lambda^1 \oplus S^+) \rightarrow L_{l-1, \alpha}^2(X^+; i\Lambda^0 \oplus i\Lambda^+ \oplus S^-)$$

を考える. これを $L + C : V \rightarrow W$ と書く. L は linear part, C は quadratic part である. 解のモジュライ空間は, 値域の 1 点の逆像と同一視され, モジュライ空間のコンパクト性は, それが十分大きな半径 $R > 0$ を持つ球体に含まれることを意味する. ここで, スライス $d^{*\alpha}$ をつけることとゲージ変換群で割ることが等価であることをいうのに $b_3(X) = 0$ という技術的仮定を使う. 値域側の有限次元部分空間の増大列

$$\text{Im} L^\perp \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \cdots \subset W$$

を適切に選ぶ. 直交射影を $P_n : W \rightarrow W_n$ と書く. 増大列

$$\text{Ker} L \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \cdots \subset V$$

を逆像 $V_n = L^{-1}W_n$ として定義する.

*¹¹ これは, KM 不変量の対応する非消滅定理と 1. から直ちに従う.

*¹² より弱い条件である弱シンプレクティック充填に対しても成り立つ.

$L + P_n C : V_n \rightarrow W_n$ は SW 方程式の「有限次元近似」である. モジュライ空間のコンパクト性の帰結として, 十分大きな n および適切に選んだ点 $w \in W_n$ に対し,

$$L + P_n C : S_R(V_n) \rightarrow W_n \setminus w$$

は well-defined となる. ここで, $S_R(V_n)$ は V_n 内の半径 R の球面である. 番号 n を大きくして有限次元近似の精度を上げるとき, この写像の変化は恒等写像のサスペンションである. この写像 $L + P_n C$ の安定ホモトピー類が不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ である.

閉の場合にはなかった解析的困難がある. 有限次元近似のためには重み付き Sobolev 空間を使う (KM は重み付き Sobolev 空間を使っていなかった). quadratic part C のコンパクト性を保証するために必要な Rellich の定理が成り立たないからである. KM は解の指数的減衰を示しており, 重みを十分小さくしておけば, 重み付き Sobolev 空間を考えてもモジュライ空間は同じになる. また, $d^{*\alpha}$ が大域的スライスを与えることを示す議論も必要である.

5.2 不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ の応用 (筆者-Mukherjee-谷口, 筆者-今野-谷口)

ここでは KM 版 BF 型不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ の二つの幾何学的応用を述べる. ホモトピカルな不変量の強みとして, 次が挙げられる.

1. ホモトピー論, 一般コホモロジー理論を適用できる. 特に同変理論を考えることにより著しい応用が得られる (Donaldson の対角化定理の別証明, 古田の 10/8 不等式, Froyshov 型不変量, Manolescu の三角形分割可能予想の解決などはそのような例と見なすことができる).
2. 数的な不変量は自明だがホモトピカルな不変量は非自明な場合がある.
3. 横断性に関する技術的困難が回避できる. 例えば同変理論を展開するのが容易である.

ここで説明する応用はいずれも 2. にもとづく. 不変量の非自明性から SW 解の存在がわかり, SW 解の存在から埋め込まれた曲面の存在に対して障害を与えるという議論がポイントである. いずれも元の KM 不変量では証明が回らないものである.

一つ目の結果は筆者-Mukherjee-谷口 [10] による結び目の H-slice 性の障害である.

定理 5.2. (筆者-Mukherjee-谷口 [10]). $K \subset S^3$ を最大 Thurston-Bennequin 数 $TB(K)$ が正である結び目とする. このとき, K は $K3$ において H-slice でない. すなわち, $K3$ から小さな 4 次元円板を切り取って得られる多様体 $\overset{\circ}{K}3 = K3 \setminus \text{int}D^4$ に C^∞ かつ proper に埋め込まれた 2 次元円板 $D = D^2 \hookrightarrow \overset{\circ}{K}3$ であって, $\partial D = K$ かつ $[D] = 0 \in H_2(\overset{\circ}{K}3; \mathbb{Z})$ であるものは存在しない. \square

$K3$ の代わりに, 楕円曲面 $E(2n)$, およびその 3 個までの連結和 $E(2n_1) \# E(2n_2)$, $E(2n_1) \# E(2n_2) \# E(2n_3)$ やその任意回のブローアップでも同じ結果が成り立つ. 証明のアイデアは安井弘一氏の議論 [29] に触発されたものである.

二つ目の応用として, 筆者-今野-谷口 [9] は, 不変量 $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ を用いて, 種数評価の結果を与えた. $\Psi(X, \xi, \mathfrak{s})$ は境界にコンタクト構造をもつ 4 次元多様体に対する不変量であるが, この種数評価は閉 4 次元多様体に対するものである.

定理 5.3. (筆者-今野-谷口 [9]). X を有向閉 C^∞ 多様体であって $b_1(X) = 0$ であるものとし, \mathfrak{s} を X 上の $Spin^c$ 構造とする. $U(1)$ 作用を忘れた BF 不変量 $BF(X, \mathfrak{s})$ が非自明であるとする. $\Sigma \subset X$ を滑らかに埋め込まれた連結有向閉曲面であって, 種数 $g(\Sigma)$ が正であるものとする. このとき,

$$|c_1(\mathfrak{s})[\Sigma]| + [\Sigma]^2 \leq 2g(\Sigma)$$

が成り立つ \square

adjunction 不等式に比べ, 種数として 1 だけ評価が弱くなっている一方, 負の自己交叉を持つ曲面に対しても, SW 単純型の仮定なしに成り立つ. さらに, Bennequin 不等式の変種も与えた.

証明のアイデアは、Kronheimer-Mrowka の adjunction 不等式 [16], Mrowka-Rollin の一般化された Thurston-Bennequin 不等式 [23] の議論に触発されたものである。

5.3 SW 安定ホモトピーコンタクト不変量 (筆者-谷口)

筆者-谷口 [11] は, Manolescu の SW 安定ホモトピータイプの枠組みを用いることで, 安定ホモトピー版の KMOS コンタクト不変量を定式化した。

定理 5.4. (筆者-谷口 [11]) (Y, ξ) を閉 3 次元コンタクト多様体であって, $b_1(Y) = 0$ であるものとする. このとき, コーン $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ 上で APS 境界条件付きの SW 方程式の有限次元近似を行うことで, 不変量

$$\Psi(\xi) : S^0 \rightarrow \Sigma^{d_3(Y, \xi) + \frac{1}{2}} SWF(-Y, \mathfrak{s}_\xi)$$

が定まる. ここで $d_3(Y, \xi) \in \mathbb{Q}$ は有向 2 平面場に対する Gompf の有理数値不変量である.

さらに次の 貼り合せ公式が成り立つ. X を境界にコンタクト構造 ξ が与えられた有向コンパクト 4 次元多様体であって, $b_3(X) = 0$ かつ $b_1(\partial X) = 0$ であるものとする. X 上の $Spin^c$ 構造 \mathfrak{s}_X であった同型 $\mathfrak{s}_X|_{\partial X} \rightarrow \mathfrak{s}_\xi$ が与えられたものが固定されているとする. このとき,

$$\eta \circ (BF(X, \mathfrak{s}_X) \wedge \Psi(\xi)) = \Psi(X, \mathfrak{s}_X, \xi)$$

が成り立つ. η は Manolescu の双対ペアリングであり, $BF(X, \mathfrak{s}_X)$ は $U(1)$ 作用を忘れた相対 Bauer-Furuta 不変量, 右辺は筆者の不変量である. \square

構成の解析的困難として, 境界とコーン状の端の両方がある状況で, double Coulomb スライスの類似を構成することが挙げられる. 貼り合せ公式の証明は, Manolescu[21], Khandhawit-J.Lin-Sasahira[14] によるコンパクト 4 次元多様体に対する貼り合せ公式をコーン付きの場合に少し修正することで得られる.

5.4 SWF ホモトピー transverse knot 不変量 (筆者-谷口, in progress)

p を素数とする. Baraglia-Hekmati により \mathbb{Z}/p 同変 Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプの理論が展開された [1]. この枠組みを用いて, 筆者-谷口 (in progress) はコンタクト不変量の \mathbb{Z}/p 同変版として, 横断的結び目の不変量を構成した. コンタクト 3 次元多様体 (Y, ξ) 内の結び目の特別なクラスとして, コンタクト平面に常に接している Legendre 結び目と, コンタクト平面に常に横断的である横断的結び目があるが, ここで考えるのは後者である.

定理 5.5. (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体であって, $\mathbb{Z}HS^3$ であるものとする. $K \subset Y$ を transverse 結び目とする. このとき, 各素数 p に対し, ホモトピカルな transverse knot 不変量

$$\Psi_p(\xi, K) : S^0 \rightarrow \Sigma^{d_3(\Sigma_p(K), \tilde{\xi}) + \frac{1}{2}} SWF(-\Sigma_p(K), \mathfrak{s}_{\tilde{\xi}})$$

が定まる. ここで, $\Sigma_p(K)$ は \mathbb{Z}/p 巡回分岐被覆であり, $\tilde{\xi}$ はその上に Plamenevskaya の構成 [26] により ξ から誘導されるコンタクト構造である. $SWF(-\Sigma_p(K), \mathfrak{s}_{\tilde{\xi}})$ は Baraglia-Hekmati の \mathbb{Z}/p 同変 Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプである. \square

この不変量の性質および応用については講演で述べる予定である.

参考文献

- [1] David Baraglia and Pedram Hekmati, *Equivariant seiberg-witten-floer cohomology* (2021), available at [arXiv:2108.06855](https://arxiv.org/abs/2108.06855).
- [2] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, *Invent. Math.* **155** (2004), no. 1, 1–19. MR2025298
- [3] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. Symplectic geometry of affine complex manifolds. MR3012475

- [4] Yakov M. Eliashberg and William P. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series, vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR1483314
- [5] John Etnyre, *Lectures on contact geometry in low-dimensional topology* (2006), available at [arXiv:0610798](https://arxiv.org/abs/0610798).
- [6] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478
- [7] Hansjörg Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2397738
- [8] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta type refinement of Kronheimer-Mrowka's invariant for 4-manifolds with contact boundary* (2019), available at [arXiv:1906.07938](https://arxiv.org/abs/1906.07938).
- [9] Nobuo Iida, Hokuto Konno, and Masaki Taniguchi, *A note on generalized Thurston-Bennequin inequalities*, Internat. J. Math. **33** (2022), no. 14, Paper No. 2250089, 8. MR4536259
- [10] Nobuo Iida, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi, *An adjunction inequality for the bauer-furuta type invariants, with applications to sliceness and 4-manifold topology* (2021), available at [arXiv:2102.02076](https://arxiv.org/abs/2102.02076).
- [11] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-witten floer homotopy contact invariant* (2020), available at [arXiv:2010.02132](https://arxiv.org/abs/2010.02132).
- [12] Tirasan Khandhawit, *A new gauge slice for the relative Bauer-Furuta invariants*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 3, 1631–1655. MR3352245
- [13] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira, *Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2027–2114. MR3784516
- [14] ———, *Unfolded seiberg-witten floer spectra, ii: Relative invariants and the gluing theorem* (2018), available at [arXiv:1809.09151](https://arxiv.org/abs/1809.09151).
- [15] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, 457–546. MR2299739
- [16] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808. MR1306022
- [17] ———, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math. **130** (1997), no. 2, 209–255. MR1474156
- [18] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043
- [19] Peter B. Kronheimer and Ciprian Manolescu, *Periodic floer pro-spectra from the seiberg-witten equations*, 2002.
- [20] Ciprian Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$* , Geom. Topol. **7** (2003), 889–932. MR2026550
- [21] ———, *A gluing theorem for the relative Bauer-Furuta invariants*, J. Differential Geom. **76** (2007), no. 1, 117–153. MR2312050
- [22] John W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Mathematical Notes, vol. 44, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. MR1367507
- [23] Tomasz Mrowka and Yann Rollin, *Legendrian knots and monopoles*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1–69. MR2199446
- [24] Burak Ozbagci, *On the topology of fillings of contact 3-manifolds*, Interactions between low-dimensional topology and mapping class groups, 2015, pp. 73–123. MR3609904
- [25] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, Geom. Topol. **8** (2004), 311–334. MR2023281
- [26] Olga Plamenevskaya, *Transverse knots, branched double covers and Heegaard Floer contact invariants*, J. Symplectic Geom. **4** (2006), no. 2, 149–170. MR2275002
- [27] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen, *Seiberg-witten floer spectra for $b_1 > 0$* , 2021.
- [28] Clifford Henry Taubes, *Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds* (Richard Wentworth, ed.), First International Press Lecture Series, vol. 2, International Press, Somerville, MA, 2000. MR1798809
- [29] Kouichi Yasui, *Geometrically simply connected 4-manifolds and stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **23** (2019), no. 5, 2685–2697. MR4019901

Finite path integral model and toric code based on homological algebra

Minkyu Kim (Korea Institute for Advanced Study)

Abstract

本稿の目的は、有限経路積分という位相的場の理論の構成法とその局所的な描像を与えるトーリックコードのホモロジー代数的な観点による一般化を解説することである。

1 はじめに

Witten[13] は経路積分を用いる位相的場の理論の構成で3次元トポロジーの研究に貢献した。Dijkgraaf-Witten[2, 3] はその数学的な議論として有限経路積分を提案した。有限経路積分は有限群のゲージ理論から位相的場の理論を構成する数学的な方法論であり、次元の制約を受けないのが特徴である。一方、三次元では有限次元のホップ代数のゲージ理論 [9] (一般的には 6j-symbols) と関係する状態和モデルに拡張する [11]。その応用として、例えば、Drinfeld double (準三角ホップ代数の標準的な構成法) 及びその表現圏の位相的な解釈ができる。

トーリックコード [8] とは位相的量子計算における誤り訂正符号であり、位相的物性物理におけるエニオン統計の基本的な例を提供する。数学として、トーリックコードは有限群 (一般的に \mathbb{C} 上の半単純な有限次元のホップ代数) から多面体分割付き曲面に互いに可換な射影作用素の族を与える枠組である。アーベル群上のトーリックコードはチェイン複体から再構成できる [12]。トーリックコードの射影作用素の固有空間が上記の位相的場の理論を誘導することで有限経路積分モデルの局所的な描像を与える [1]。

体 K 上の双可換ホップ代数の圏 $\text{Hopf}_K^{\text{dc}}$ はアーベル圏であり [10]、アーベル群の線型化の役割を果たす。本稿では双可換ホップ代数上のホモロジー代数に注目して、ホモロジー (一般的に、マイヤー・ヴィートリス関手) とチェイン複体による有限経路積分とトーリックコードの拡張を解説する。Figure 1はその概略図を表す。

先行研究は「ギャップをもつハミルトニアン系は極低エネルギーで位相的場の理論で近似される」[14] という物理的な推測の一つの根拠である。本稿では、その部分的な定式化の試みとして局所的安定化モデルを導入及び正当化する。

2 トーリックコードとチェイン複体

この章ではトーリックコードの代数的な一般化を考え、双可換ホップ代数のチェイン複体と関連づける。トーリックコードの背後の代数的な原理を把握し、その抽象化に踏まえてトーリックコードを含む枠組の定式化を提案する。

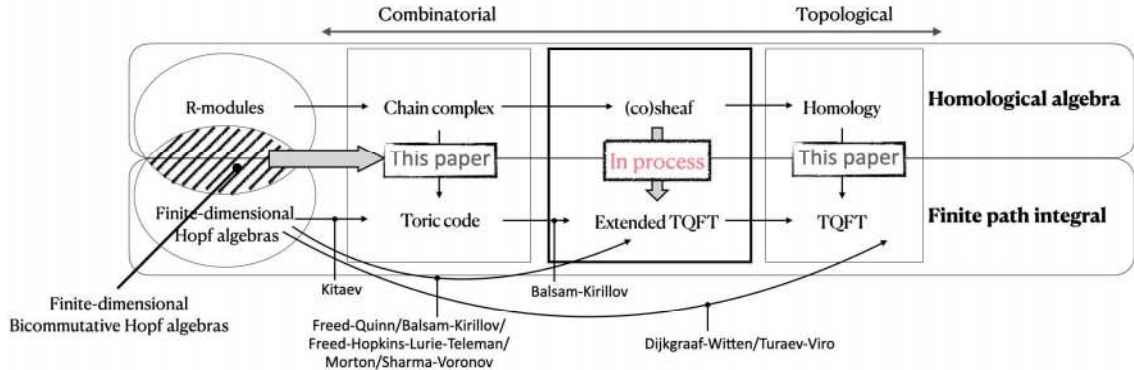


Figure 1: 本研究の概略図

2.1 代数的なモデル

ここでは空間の代わりにチェイン複体上のトーリックコードを定式化する。チェイン複体の情報からトーリックコードのハミルトニアンに該当する作用素を導入する。トーリックコードのハミルトニアンゼロ固有空間が位相的不変量であることが知られているが [1]、類似な定理としてその作用素のゼロ固有空間がチェイン複体のホモロジーと同型であることを述べる。

以下では単位元をもつ可換環 R を固定する。

定義 2.1. R 上の短い抽象的複体 (short abstract complex over R) とは 3 つの有限集合 X_+, X_0, X_- と 2 つの写像 $I_+ : X_+ \times X_0 \rightarrow R$, $I_- : X_0 \times X_- \rightarrow R$ で構成され、次の式を満たす。

$$\forall x_+ \in X_+, \forall x_- \in X_-, \sum_{x_0 \in X_0} I_+(x_+, x_0) \cdot I_-(x_0, x_-) = 0$$

$I_+(x_+, x_0), I_-(x_0, x_-) \in R$ はそれぞれ (x_+, x_0) の隣接数、 (x_0, x_-) の隣接数と呼び、混乱がなければ $[x_+ : x_0], [x_0 : x_-]$ と書く。隣接数を成分にする行列を考えるとチェイン複体 $RX_* := (RX_+ \rightarrow RX_0 \rightarrow RX_-)$ が得られる。 R 加群 M に対して $H(X; M) := H_0(RX_* \otimes_R M)$ と定義する。

定義 2.2. A を双可換ホップ代数とし、 A 上の R 作用 ϕ を考える。 X を R 上の短い抽象的複体とする。チェイン複体 RX_* に R 作用 ϕ を適用すると双可換ホップ代数のチェイン複体 $\otimes_{x_+ \in X_+} A \rightarrow \otimes_{x_0 \in X_0} A \rightarrow \otimes_{x_- \in X_-} A$ が得られる。我々は (アーベル圏 $\text{Hopf}_{\mathbb{K}}^{\text{bc}}$ の中の) 第 0 ホモロジーを $H(X; A, \phi)$ と書く。

例 2.3. 有限アーベル群 G に対して双可換ホップ代数 $A = \mathbb{K}G$ を考える。 G 上の $R = \mathbb{Z}$ 作用は $\mathbb{K}G$ 上の \mathbb{Z} 作用 ϕ を誘導する。するとホモロジー $H(X; A, \phi)$ はアーベル群 $H(X; G)$ の誘導するホップ代数 $\mathbb{K}H(X; G)$ と同型である。この事実は群環の構成がアーベル群の圏から双可換ホップ代数の圏への完全関手を誘導することから従う。

群論におけるハール積分の一般化としてホップ代数の積分及び余積分という概念がある。ホップ代数 A の右積分とは $\sigma \in A$ であり任意の $x \in A$ に対して $\sigma x = \varepsilon(x)\sigma$ を満たすものである。条件式を左右反転することで同様に左積分を定義し、右積分かつ左積分であるものを単に積分と呼ぶ。なお、 $\varepsilon(\sigma) = 1$ ならば積分 σ は正規化されたという。有限次元のホップ代数が半単純であるとき、そのときに限り、正規化された積分をもつことが古典的に知られている。双対的に (正規化された) 余積分を定義及び議論することができる。

定義 2.4. A を半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数とし、 σ_A と σ^A をそれぞれ A の正規化された積分と余積分とする。 $V(X; A) := \bigotimes_{x_0 \in X_0} A$ と定義する。 A に付属する内積、即ち対称的かつ非退化なペアリング、を用いて $V(X; A)$ を内積空間とみなす。

A 上の R 作用 ϕ を考える。 $V(X; A)$ 上の対称作用素 $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)$ と $\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$ を次のように定義する。まず A の余積分を繰り返して適用することで $a \in A$ は $V(X; A)$ の元を誘導する。その元を表すために以下の Sweedler 表記法を使う。 A が余可換なのでこの表記は well-defined である

$$\Delta^{X_0}(a) = (\cdots \otimes a^{(x_0)} \otimes \cdots) = \bigotimes_{x_0 \in X_0} a^{(x_0)}$$

この表記法に基づいて対称作用素 $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)$ は次のように定義する。

$$(\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)) \left(\bigotimes_{x_0 \in X_0} v_{x_0} \right) := \bigotimes_{x_0 \in X_0} \left((\phi([x_+ : x_0]) \sigma_A^{(x_0)}) \cdot v_{x_0} \right).$$

この定義はストリングダイアグラムを用いて Figure 2の左側のように表すことができる。それぞれのストリングは A を表し、上の頂点と下の頂点がそれぞれドメインとコドメインである。また、 Δ, ∇ はそれぞれ反復して施した余積と積を表す。双対的に対称作用素 $\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$ を定義する。

$$(\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)) \left(\bigotimes_{x_0 \in X_0} v_{x_0} \right) := \sigma^A \left(\prod_{x_0 \in X_0} (\phi([x_0 : x_-]) v_{x_0}^{(2)}) \right) \cdot \bigotimes_{x_0 \in X_0} v_{x_0}^{(1)}.$$

同様にこの定義は Figure 2の右側で説明できる。

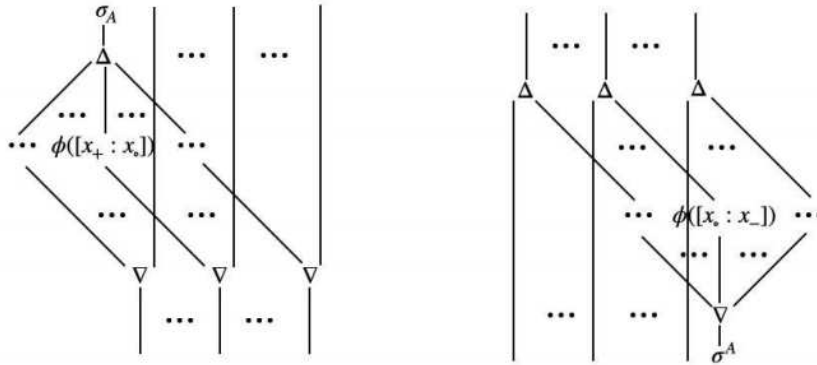


Figure 2: 作用素 $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)$ と $\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$

命題 2.5. $\{\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)\}_{x_+ \in X_+} \cup \{\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)\}_{x_- \in X_-}$ は互いに可換な射影作用素である。

定義 2.6. (A, ϕ) により誘導される X の基礎的作用素 (the elementary operator) $\mathbb{H}(X; A, \phi)$ は次のように定義する。

$$\mathbb{H}(X; A, \phi) := \sum_{x_+ \in X_+} (id - \mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)) + \sum_{x_- \in X_-} (id - \mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)).$$

なお、その核を $V_0(X; A, \phi) := \{\psi \in V(X; A) \mid \mathbb{H}(X; A, \phi)\psi = 0\}$ と定義する。

命題 2.5より $V_0(X; A, \phi)$ は $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi), \mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$ の (+1) における共通の固有空間である。

定理 2.7. ([5, Theorem 1.1]) R 上の短い抽象的複体 X に対して次が成り立つ。

1. 基礎的作用素 $\mathbb{H}(X; A, \phi)$ の固有空間は $V(X; A)$ の直和分解を与える。
2. $0 \in \mathbb{K}$ は $\mathbb{H}(X; A, \phi)$ の固有値である。さらにそのゼロ固有空間とホモロジーホップ代数 $H(X; A, \phi)$ の間に自然同型が存在する。

$$H(X; A, \phi) \cong V_0(X; A, \phi)$$

例 2.8. 有限アーベル群 G と標数ゼロの \mathbb{K} を考える。するとホップ代数 $A = \mathbb{K}G$ は半単純かつ余半単純である。例 2.3と定理 2.7により $\mathbb{K}H(X; G)$ を $V(X; \mathbb{K}G) \cong \mathbb{K}(GX_0)$ の部分空間 (詳しくは、基礎的作用素の核 $V_0(X; \mathbb{K}G)$) として実現できる。その埋め込み f の具体的な形をここで述べる。混乱を避けるために $\mathbb{K}G$ の生成元とみなした元 $g \in G$ を $|g\rangle$ と書く。またサイクル $\tau \in GX_0$ の誘導するホモロジー類を $[\tau] \in H(X; G)$ と表すと次が成り立つ。

$$f([\tau]) = \sum_{[\tau]=[\tau']} |\tau'\rangle \in V_0(X; \mathbb{K}G)$$

2.2 位相的局所的安定化モデル

本稿ではトーリックコードを代数的に拡張することで位相的局所的安定化モデルの定式化を提案する。以降の章の結果に踏まえると位相的局所的安定化モデルのゼロ固有空間が位相的場の理論に拡張することがわかる。この結論は双可換ホップ代数に基づく有限経路積分とトーリックコードの関係を一般化する。

まず短い抽象的複体の圏を定義する。

定義 2.9. R 上の短い抽象的複体 X, Y を考える。 X から Y への包含写像とは三つ組みの間の単射 $s: (X_+, X_0, X_-) \rightarrow (Y_+, Y_0, Y_-)$ であり、 $x_+ \in X_+, x_0 \in X_0, x_- \in X_-$ に対して $[s(x_+): s(x_0)] = [x_+: x_0]$ と $[s(x_0): s(x_-)] = [x_0: x_-]$ を満たすものである。さらに次の「閉集合」条件を満たす。

- $[s(x_0): y_-] \neq 0$ ならば、ある $x_- \in X_-$ が存在して $y_- = s(x_-)$ が成り立つ。
- $[s(x_+): y_0] \neq 0$ ならば、ある $x_0 \in X_0$ が存在して $y_0 = s(x_0)$ 。

$\text{SAC}_R^{\text{inc}}$ は R 上の短い抽象的複体と包含写像のなす圏である。

定義 2.10. R 上の局所的安定化モデル (local stabilizer model over R) とは基点付き有限 CW 複体と埋め込みの圏から $\text{SAC}_R^{\text{inc}}$ への対称モノイド関手であり、押し出し (pushout) を保つものである。

押し出しを保つという条件は物理でのいわゆる「局所性」の役割を果たす。この条件は誘導された以下のチェイン複体が完全であるということと同等である。

$$0 \rightarrow C_*(\Xi(K_0 \cap K_1)) \rightarrow C_*(\Xi(K_0)) \oplus C_*(\Xi(K_1)) \rightarrow C_*(\Xi(K_0 \cup K_1)) \rightarrow 0.$$

定義 2.11. R 上の局所的安定化モデル Ξ を考える。 Ξ が位相的 (topological) であるとは任意の R 加群 M について次の条件を満たすことである。

- t 成分への埋め込み $i_t : K \hookrightarrow K \wedge [0, 1]^+$ に対して、 $H(\Xi(i_0); M) = H(\Xi(i_1); M)$ が成り立つ。
- ホモトピー同値を導く埋め込み $i : K_0 \hookrightarrow K_1$ が同型 $H(\Xi(i); M) : H(\Xi(K_0); M) \rightarrow H(\Xi(K_1); M)$ を誘導する。

命題 2.12. R 上の局所的安定化モデル Ξ が位相的であるための必要十分条件は任意の (\mathbb{K} 上の) 双可換ホップ代数 A と A 上の R 作用 ϕ をについて次の条件を満たすことである。

- t 成分への埋め込み $i_t : K \hookrightarrow K \wedge [0, 1]^+$ に対して、 $H(\Xi(i_0); A, \phi) = H(\Xi(i_1); A, \phi)$ が成り立つ。
- ホモトピー同値の埋め込み $i : K_0 \hookrightarrow K_1$ が同型 $H(\Xi(i); A, \phi) : H(\Xi(K_0); A, \phi) \rightarrow H(\Xi(K_1); A, \phi)$ を誘導する。

Proof. まず Ξ が位相的であると仮定する。双可換ホップ代数 A と A 上の R 作用 ϕ を考える。Hopf $_{\mathbb{K}}^{\text{bc}}$ のアーベル部分圏であり A を含む最小のものを \mathcal{A} とおく。すると \mathcal{A} は小さ (small) なアーベル圏である。よって Mitchell の埋め込み定理よりある可換環 \mathbb{L} と fully faithful かつ exact な関手 $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{L}}$ が存在する。忘却関手 $\text{Mod}_{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Ab}$ と合成すると faithful かつ exact な関手 $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ が得られる。特に R 作用 ϕ は $\tau(A)$ を R 加群に持ち上げる。 Ξ が位相的なので $\tau(H(\Xi(i_0); A, \phi)) = H(\Xi(i_0); \tau(A)) = H(\Xi(i_1); \tau(A)) = \tau(H(\Xi(i_1); A, \phi))$ が成り立つ。 τ は faithful なので一つ目の条件が導かれる。二つ目の条件も同様に確かめられる。ホモトピー同値の埋め込み $i : K_0 \hookrightarrow K_1$ は同型 $\tau(H(\Xi(i); A, \phi))$ を誘導する。忘却関手 $\text{Mod}_{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Ab}$ による同型の逆像は同型なので、 $\iota(H(\Xi(i); A, \phi))$ は同型であり、 ι が fully faithful なので $H(\Xi(i); A, \phi)$ は同型である。

逆に命題の条件を仮定する。 R 加群 M は群環の構成を通じて双可換ホップ代数 $A = \mathbb{K}M$ と A 上の R 作用 ϕ を誘導する。群環の構成は fully faithful かつ exact な関手 $\text{Ab} \rightarrow \text{Hopf}_{\mathbb{K}}^{\text{bc}}$ を誘導することに注意すると、その (A, ϕ) に対して仮定の条件を適用すると定義 2.11 の条件が導かれることがわかる。□

$\text{Vec}_{\mathbb{K}}^{\text{inn}}$ を \mathbb{K} 上の内積付きベクトル空間と線形写像のなす圏とする。

定理 2.13. ([5, Theorem 7.3.2]) 半単純かつ余半単純な双可換ホップ代数 A とその上の R 作用 ϕ を考える。 R 上の位相的局所的安定化モデル Ξ に対して、 (A, ϕ) 係数の Ξ のゼロ固有空間は位相的場の理論に拡張する。正確には、対称モノイド擬関手 $Z : \text{Cosp}^{\approx}(\text{CW}_*^{\text{fin}}) \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}^{\text{inn}}$ が存在して $Z(K) \cong V_0(\Xi(K); A, \phi)$ である。

Proof. 証明の概略を述べる。定理 2.7 より位相的局所的安定化モデルのゼロ固有空間はマイヤー・ヴィートリス関手を与える。実際 $V_0(\Xi(K); A, \phi) \cong H(\Xi(K); A, \phi)$ であり、命題 2.12 より $H(\Xi(K); A, \phi)$ は半単純かつ余半単純な双可換ホップ代数に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手である。一般にそのようなマイヤー・ヴィートリス関手は有限経路積分で位相的場の理論に拡張することを 4 章で説明する。□

4 章では上記の擬関手 (即ち、 \mathbb{K}^* のスカラーを除いて合成を保つもの) を関手に変形できるかの問題に注目する。

3 相対的な積分

本研究の目的は、有限群や有限次元ホップ代数のゲージ理論の代わりに双可換ホップ代数に基づくホモロジー代数に基づいて有限経路積分とトーリックコードの

拡張することである。その設定で有限経路積分を定式化するためにホップ代数のハール積分の相対版を導入する。

以下では \mathbb{K} を任意の体とする。状態和モデルではホップ代数の表現圏の議論のために代数的閉体 \mathbb{K} を扱うが、本研究では任意の \mathbb{K} 上の双可換ホップ代数に基づいて表現圏を迂回する議論を組み立てる。

3.1 ホップ準同型に沿う積分

この章ではホップ代数の積分及び余積分を同時に一般化して、ホップ準同型に対する相対的な概念を導入する。

定義 3.1. ([4, Definition 3.4]) A, B を \mathbb{K} 上のホップ代数とする。ホップ準同型 $\xi: A \rightarrow B$ に沿う右積分 (a right integral along ξ) とは次の条件を満たす線型写像 $\mu: B \rightarrow A$ である。

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \forall b \in B \quad (\mu(b)a = \mu(b\xi(a))), \\ \forall b \in B \quad (\mu(b_{(1)}) \otimes b_{(2)} = \mu(b)_{(1)} \otimes \xi(\mu(b)_{(2)})). \end{aligned}$$

ここで $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ は余積に関する Sweelder 表記である。条件式を左右反転することで同様に ξ に沿う左積分を定義する。 ξ に沿う積分とは ξ に沿う右積分かつ左積分のことである。

例 3.2. 任意の ξ に対して $\mu = 0$ は ξ に沿う積分である。

例 3.3. ホップ代数 A の積分 σ を考える。すると $\mu(1) = \sigma$ を満たす $\mu: \mathbb{K} \rightarrow A$ は余単位 $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{K}$ に沿う積分である。

例 3.4. 群の準同型 $\rho: G \rightarrow H$ を考える。 $\xi: \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}H$ を ρ の誘導したホップ準同型とする。すると $\forall h \in H \left(\mu(h) = \sum_{\rho(g)=h} g \right)$ を満たす $\mu: \mathbb{K}H \rightarrow \mathbb{K}G$ は ξ に沿う積分である。

定義 3.5. μ を ξ に沿う積分とする。 $\xi \circ \mu \circ \xi = \xi$ ならば μ は正規化されているという。任意の左または右積分 μ' に対して $\mu' \circ \xi \circ \mu = \mu' = \mu \circ \xi \circ \mu'$ ならば μ を生成元であるという。

定理 3.6. ([4, Theorem 1.1]) A, B を双可換ホップ代数、 $\xi: A \rightarrow B$ をホップ準同型とする。 ξ に沿う積分であり正規化された生成元のものが存在するとき、そのときに限り、次の2つの条件が満たされる。

1. ξ の核ホップ代数が正規化された積分をもつ。
2. ξ の余核ホップ代数が正規化された余積分をもつ。

なお、もし正規化された積分が存在すればそれは唯一である。

[4] ではもっと一般的な結果を示す。例えば、ホップ代数もしくはコンパクトリ一群に対するハール積分の存在性・一意性の類似な定理を得る。なお、積分の関手性、積分とホップ準同型の可換性等を一般的な設定で議論する。

3.2 半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数

定理 3.6で双可換ホップ代数の間のホップ準同型が特定の積分を持つための必要十分条件を与えた。特にホップ準同型のドメインとコドメインが半単純かつ余半単純な有限次元のものであれば自動的に成り立つ。次章で有限経路積分モデルを定式化するためにそのような双可換ホップ代数のなす圏 $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ を導入する。

定義 3.7. $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ を半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数の圏とする。

命題 3.8. ([7, Corollary 3.4.9]) $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ は $\text{Hopf}_{\mathbb{K}}^{\text{dc}}$ の部分アーベル圏である。なお、 $\text{Hopf}_{\mathbb{K}}^{\text{dc}}$ の短完全列 $A \rightarrow B \rightarrow C$ に対して $A, C \in \mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ ならば $B \in \mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ が成り立つ。

半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数に対しては次のような双対性がある。 \mathbb{L} を \mathbb{K} の分離閉包とする。そのとき $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ は拡張 \mathbb{L}/\mathbb{K} のガロア群 Γ の連続的作用を受ける有限アーベル群の圏と反変同値である。

$$(\Gamma - \text{FinAb})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathbb{K}} ; G \mapsto \text{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}.$$

ここで $\text{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}$ は G から \mathbb{L} への Γ 作用を保つ写像の集合である。この圏同値の下で上で導入した積分は具体的に表すことができる。 G, H を Γ 作用を受ける有限アーベル群とし、 $\rho : G \rightarrow H$ をその作用を保つ群準同型とする。 $\xi : \text{Map}(H, \mathbb{L})^{\Gamma} \rightarrow \text{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}$ を ρ が誘導するホップ準同型とする。すると ξ に沿う積分 $\mu : \text{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma} \rightarrow \text{Map}(H, \mathbb{L})^{\Gamma}$ は ρ に対する相対的なハール積分にすぎない。正確にはある $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在して $f \in \text{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}$ に対して $\mu(f)$ は次のように書ける。

$$(\mu(f))(h) = \lambda \cdot \sum_{\rho(g)=h} f(g), \forall h \in H.$$

4 有限経路積分

この章では $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手の位相的場の理論への拡張を説明する。一般にその位相的場の理論は $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ の元を除いて合成を保つ。そのような現象は群の射影表現のようにある種の障害問題を起こすが、我々はその障害類の消滅する十分条件をいくつか与える。

4.1 マイヤー・ヴィートリス関手の経路積分

$\text{CW}_{*}^{\text{fin}}$ を基点付き有限 CW 複体の圏とする。アーベル圏 $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手 $E : \text{CW}_{*}^{\text{fin}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ を考える。即ち、 E はホモトピー不変性とマイヤー・ヴィートリス公理を満たす。

空間のコスパン $(K_0 \xrightarrow{i_0} L \xleftarrow{i_1} K_1)$ (例えば、コボルディズムはコスパンを誘導する) はホップ代数のコスパン $(E(K_0) \rightarrow E(L) \leftarrow E(K_1))$ を誘導する。 $E(i_1)$ の積分と $E(i_0)$ を合成することで $E(K_0)$ から $E(K_1)$ への写像を得る。空間のコスパンのホモトピー同値類を射にする圏を $\text{Cosp}^{\simeq}(\text{CW}_{*}^{\text{fin}})$ と書くところの構成は対称モノイド擬関手 (symmetric monoidal pseudo-functor) を与える。つまりコスパンの貼り合わせと合成が $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ の元を除いて両立する。その対称モノイド擬関手を E の有限経路積分と呼び $\hat{\text{PI}}(E)$ と書く。その擬関手性のことを 4.3章で体系的に扱う。

$$\hat{\text{PI}}(E) : \text{Cosp}^{\simeq}(\text{CW}_{*}^{\text{fin}}) \dashrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}^{\text{inn}}$$

4.2 関係圏の拡大

アーベル圏 \mathcal{A} に対して関係圏 (relation category) $\mathbf{Rel}(\mathcal{A})$ とは \mathcal{A} の対象の間の関係を射にする圏である。アーベル圏の双積 (biproduct) は圏 $\mathbf{Rel}(\mathcal{A})$ の上にモノイド圏の構造を誘導する。4.1章での障害問題が生ずる根本的な理由は、ホップ準同型に沿う積分が非自明な関係圏 $\mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})$ の拡大を誘導するためである。この章ではその圏拡大を導入する。まずホップ準同型に沿う積分とホップ準同型の生成する圏を定義する。

定義 4.1. $\mathbf{C}_{\mathbb{K}}$ を半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数の間のホップ準同型または正規化された積分から生成される圏とする。つまり、 $\mathbf{C}_{\mathbb{K}}$ は半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数と線型写像で生成される圏の部分圏であり全てのホップ準同型と正規化された積分を含む最小の部分圏である。

群 $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ は掛け算で $\mathbf{C}_{\mathbb{K}}$ の射に作用する。以下では $\mathbf{C}_{\mathbb{K}}$ が $\mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})$ の群 \mathbb{K}^* による圏の拡大になっていることを説明する。記号として、ホップ準同型 $f: A \rightarrow B$ の誘導する A から B 関係を R_f と書く。なお、関係 R に対してその転置を R^\dagger と書く。

命題 4.2. ([7, Section 8.4.2]) 次の条件で特徴付けられる対称モノイド関手 $\pi: \mathbf{C}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})$ が存在する。

1. π は対象に対して恒等写像である。
2. ホップ準同型 f と $\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して $\pi(\lambda \cdot f) = R_f$ かつ $\pi(\lambda \cdot \mu_f) = R_f^\dagger$ である。
3. 誘導される関手 $\bar{\pi}: \mathbf{C}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^* \rightarrow \mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})$ は圏同値を与える。

$H^2(\mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}^*)$ をモノイド圏 $\mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})$ の \mathbb{K}^* 係数の第2コホモロジーとする。(群の射影表現のように) 圏拡大 π は障害類 $\mathbb{O}_{\mathbb{K}} \in H^2(\mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}^*)$ を決める。

定理 4.3. ([6, Corollary 6.2]) 体 \mathbb{K} の標数が2であるとき、そのときに限り、 $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ は消滅する。

この定理より次の性質が直ちにわかる。

系 4.4. 体 \mathbb{K} の標数が2ではなければ $H^2(\mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}^*)$ は非自明である。

4.3 持ち上げ問題

E を $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手とする。空間のコスパン $K_0 \xrightarrow{i_0} L \xleftarrow{i_1} K_1$ は $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ の中で $E(K_0)$ から $E(K_1)$ への関係を誘導する。マイヤー・ヴィートリス公理よりコスパンの張り合わせが対応する関係の合成に保たれる。従って E の拡張として対称モノイド関手 $\hat{E}: \mathbf{Cosp}^\simeq(\mathbf{CW}_*^{\text{fin}}) \rightarrow \mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})$ が得られる。4.1章での位相的場の理論の構成は図式 (1) の持ち上げの問題を経由して考えることができる。ここで持ち上げとは以下の可換図式を満たす対称モノイド関手のことである。

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{C}_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\text{forgetful}} \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\text{inn}} \\
 & \nearrow & \downarrow \pi \\
 \mathbf{Cosp}^\simeq(\mathbf{CW}_*^{\text{fin}}) & \xrightarrow{\hat{E}} & \mathbf{Rel}(\mathbf{A}_{\mathbb{K}})
 \end{array} \tag{1}$$

定理 4.3より標数 2 の場合は持ち上げが存在するが、一般には不明である。その持ち上げの存在性を測るものが次の障害類である。

$$\hat{\mathcal{O}}(E) := \hat{E}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \in H^2(\mathrm{Cosp}^{\simeq}(\mathrm{CW}_*^{\mathrm{fin}}); \mathbb{K}^*)$$

例 4.5. 低次元の空間に制限すると第 2 コホモロジー、特に障害類 $\hat{\mathcal{O}}(E)$ 、が消滅する。実際、 $d = 0, 1$ に対して $H^2(\mathrm{Cosp}_{\leq d}^{\simeq}(\mathrm{CW}_*^{\mathrm{fin}}); \mathbb{K}^*)$ は自明である。なお、低次元のコボルディズムに引き戻すと同様な現象が起こる。 $n = 1, 2$ に対して $H^2(\mathrm{Cob}_n; \mathbb{K}^*)$ も自明である。この観察は各々の圏の生成元・関係の記述に基づいている。

我々は以下のように障害類の消滅するための E の十分条件を得る。

定理 4.6. ([6, Theorem 7.21, 7.33]) マイヤー・ヴィートリス関手 E が次の条件のどちらか一方を満たすならば $\hat{\mathcal{O}}(E)$ は消滅する。

1. E が上あるいは下に有界なホモロジー理論である。
2. E が次元簡約 (dimension reduction) である。つまり、ある $\mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手 F が存在して $E(K) \cong F(K \wedge (S^1)^+)$ である。

論文 [6] では d 次元以下の CW 複体の圏上で定義されている関手 E に対して上記の結果を拡張する。

定理 4.6の条件が満たされたとき障害類に付属するコバウンダリー方程式を具体的に解くことで次の例を得る。

例 4.7. ([6, Corollary 7.3.5]) 定理の一つ目の条件を満たす例を与える。下に有界な簡約ホモロジー理論 \tilde{E}_{\bullet} であって有限 CW 複体 K に対して $\tilde{E}_s(K) \in \mathbf{A}_{\mathbb{K}}$ を満たすものを考える。 $q \in \mathbb{Z}$ に対して対称モノイド関手 $Z : \mathrm{Cosp}^{\simeq}(\mathrm{CW}_*^{\mathrm{fin}}) \rightarrow \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{inn}}$ が存在して次を満たす。

1. 対象 K に対して $Z(K) \cong \tilde{E}_q(K)$ である。
2. 閉コスパン $(* \rightarrow L \leftarrow *)$ に対して次の不変量を与える。

$$Z(L) = \left(\prod_{i \geq 0} \dim \left(\tilde{E}_{q-i}(L) \right)^{(-1)^i} \right) \cdot 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}^*$$

例 4.8. 定理の二つ目の条件を満たす例を与える。 E が次元簡約であるとする。そのとき対称モノイド関手 $Z : \mathrm{Cosp}^{\simeq}(\mathrm{CW}_*^{\mathrm{fin}}) \rightarrow \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{inn}}$ が存在して次を満たす。

1. 対象 K に対して $Z(K) \cong E(K)$ である。
2. 閉コスパン $(* \rightarrow L \leftarrow *)$ に対して次の不変量を与える。ここで定理 4.6の記号を用いる。

$$Z(L) = \dim(F(L)) \cdot 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}^*$$

References

- [1] Benjamin Balsam. Turaev-Viro theory as an extended TQFT. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, 2012.
- [2] Robbert Dijkgraaf and Edward Witten. Topological gauge theories and group cohomology. *Communications in Mathematical Physics*, 129(2):393–429, 1990.

- [3] Daniel S Freed, Michael J Hopkins, Jacob Lurie, and Constantin Teleman. Topological quantum field theories from compact Lie groups. In CRM proceedings and Lecture notes, volume 50, pages 367–403, 2010.
- [4] Minkyu Kim. Integrals along bimonoid homomorphisms. *Applied Categorical Structures*, pages 1–51, 2021.
- [5] Minkyu Kim. Kitaev’s stabilizer code and chain complex theory of bicommutative Hopf algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 385(1):291–329, 2021.
- [6] Minkyu Kim. A pair of homotopy-theoretic version of TQFT’s induced by a Brown functor. *International Journal of Mathematics*, page 2150053, 2021.
- [7] Minkyu Kim. Finite path integral model and toric code based on homological algebra. PhD thesis, University of Tokyo, 2023.
- [8] A Yu Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1):2–30, 2003.
- [9] Catherine Meusburger. Kitaev lattice models as a Hopf algebra gauge theory. *Communications in Mathematical Physics*, 353(1):413–468, 2017.
- [10] Mitsuhiro Takeuchi. A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras. *manuscripta mathematica*, 7(3):251–270, 1972.
- [11] Vladimir G Turaev. Quantum invariants of knots and 3-manifolds. In *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. de Gruyter, 2016.
- [12] Péter Vrana and Máté Farkas. Homological codes and abelian anyons. *Reviews in Mathematical Physics*, 31(10):1950038, 2019.
- [13] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3):351–399, 1989.
- [14] Edward Witten. The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian. In *Geometry, Topology, & Physics, Conf. Proc. For R. Bott Including papers from the Geometry and Topology Conference, Harvard Univ., Cambridge, 1993*, pages 357–422. Int. Press, 1995.

連続増加関数の拡張と経済学における応用

山崎 薫里 (高崎経済大)¹

1 導入

位相空間に前順序構造を付加した空間の諸性質についての Nachbin の研究 [30] は、経済学における効用表現の基礎となっている。

本講演では、位相前順序空間における連続増加関数の拡張について、Nachbin の研究の背景、及び、その後の研究の発展を紹介するとともに、経済学における連続増加関数の拡張の役割について紹介する。本講演で必要な用語は、順序と位相に関しては Nachbin [30]、位相空間における一般的な概念については Engelking [12]、連続関数の拡張については Gillman-Jerison [16]、Alò-Shapiro [1]、保科 [21]、経済学における選好理論と順序の関係については Bridges-Mehta [6] を主に参照している。

以下、 \mathbb{R} を実数全体の集合で、通常の位相および通常的全順序 \leq をもつものとし、 $[0, 1] := \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 1\}$, $[a, \infty) := \{r \in \mathbb{R} : a \leq r\}$, $(-\infty, b] := \{r \in \mathbb{R} : r \leq b\}$ とする。

空でない集合 X 上の 2 項関係 \preceq として、以下を考える。

- $\forall x \in X (x \preceq x)$ (reflexive 反射律)
- $\forall x, y, z \in X ((x \preceq y \text{ かつ } y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z)$ (transitive 推移律)
- $\forall x, y \in X (x \preceq y \text{ または } y \preceq x)$ (complete 完備性)
- $\forall x, y \in X ((x \preceq y \text{ かつ } y \preceq x) \Rightarrow x = y)$ (antisymmetric 反対称律)

前順序, 全前順序, 順序, 全順序は、以下のように定義される。

- (1) \preceq は反射律と推移律をみたすとき、*前順序 (preorder)* と呼ばれる。
- (2) \preceq は反射律, 推移律と完備性をみたすとき、*全前順序 (total preorder, linear preorder)*, 特に経済学においては *選好 (preference)* と呼ばれる。
- (3) \preceq は反射律, 推移律と反対称律をみたすとき、*順序 (=半順序, order, partial order)* と呼ばれる。
- (4) \preceq は反射律, 推移律, 完備性と反対称律をみたすとき、*全順序 (total order, linear order)* と呼ばれる。

前順序 \preceq の入った空でない集合 X を (X, \preceq) または X で表し、*前順序集合* と呼ぶ。前順序集合 (X, \preceq) 上の実数値関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\forall x, x' \in X (x \preceq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$$

をみたすとき、 f は *増加 (increasing, isotone, order preserving)* と呼ばれる。空でない位相空間 $X = (X, \tau)$ が前順序 \preceq をもつとき、 X を (X, τ, \preceq) で表し、*位相前順序空間 (topological preordered space)* と呼ぶ。

¹本研究は科研費 (課題番号:19K03469) の助成を受けたものである。

〒 370-0801 群馬県高崎市上並榎町 1300 高崎経済大学 経済学部

E-mail: kaori@tcue.ac.jp

位相前順序空間 (X, τ, \preceq) における位相 τ と前順序 \preceq の関係について、以下のように定義される。

- \preceq は閉 (*closed*) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ グラフ $\{(x, y) \in X^2 : x \preceq y\}$ が X^2 の閉集合
- \preceq は半閉 (*semi-closed*) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $x \in X$ について、 $\{y \in X : y \preceq x\}$ と $\{y \in X : x \preceq y\}$ が X の閉集合

閉前順序は半閉である。また、位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の前順序 \preceq が特に閉かつ順序であるとき、 (X, τ, \preceq) はハウスドルフ位相空間であることがわかる。本研究においては、特に断らない限り、 (X, τ, \preceq) の前順序 \preceq と位相 τ に特別な関係を仮定しない。

前順序集合 (X, \preceq) の部分集合 S が増加 (または、減少) であるとは、 $s \preceq x$ (または、 $x \preceq s$) かつ $s \in S$ ならば $x \in S$ のときをいう。位相前順序空間 (X, τ, \preceq) において、 X の任意の交わらない減少閉集合 F_0 と増加閉集合 F_1 に対して、 X の交わらない減少開集合 U_0 と増加開集合 U_1 が存在して $F_i \subset U_i$ ($i = 0, 1$) とできるとき、 (X, τ, \preceq) は **normally preordered** 空間と呼ばれる。さらに、前順序が特に順序である normally preordered 空間は、**normally ordered** 空間と呼ばれる ([30])。

位相空間 (X, τ) が特に離散順序 \preceq_0 (すなわち、 $x \preceq_0 x' \stackrel{\text{def}}{\iff} x = x'$) をもつとき、

位相前順序空間 (X, τ, \preceq_0) が normally ordered 空間 \iff 位相空間 (X, τ) が正規空間である。すなわち、normally preordered 空間は正規空間の拡張とみなせる。

2 位相前順序空間における有界な連続増加関数の拡張

Urysohn の定理の増加関数版として、Nachbin は次の定理を示した。

定理 2.1. (Nachbin [30]) 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) が normally preordered 空間であるための必要十分条件は、 X の任意の交わらない減少閉集合 F_0 と増加閉集合 F_1 に対し、連続増加関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ で $F_i \subset f^{-1}(\{i\})$ ($i = 0, 1$) となるものが存在することである。

位相前順序空間 $X = (X, \tau, \preceq)$ の部分集合 A 上に制限された前順序 \preceq_A を考えるとき、 $(A, \tau|_A, \preceq_A)$ もまた、位相前順序空間となる。Tietze の拡張定理の増加関数版としては、次の定理が知られている。

定理 2.2. (Nachbin [30]) (X, τ, \preceq) を normally preordered 空間、 A をその閉部分集合、 f を A 上の有界な連続増加関数とする。このとき、 f が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は、 $r < r'$ である任意の実数 r, r' について、 $D_X(f^{-1}((-\infty, r])) \cap I_X(f^{-1}([r', \infty))) = \emptyset$ となることである。ここで、 $D_X(f^{-1}((-\infty, r]))$ は $f^{-1}((-\infty, r])$ を含む X の最小の閉減少集合を、 $I_X(f^{-1}([r', \infty)))$ は $f^{-1}([r', \infty))$ を含む X の最小の閉増加集合を表す。

いつ X の部分集合上の連続増加関数が全体に拡張できるか? この問いについては、次の定理が知られている。

定理 2.3. (Nachbin [30], Minguzzi [28]) (X, τ, \preceq) を閉前順序 \preceq をもつ normally preordered 空間、 A を X のコンパクトな部分集合とする。このとき、 A 上の任意の連続増加関数は X 上の連続増加関数に拡張できる。

位相空間論の視点からは, (閉集合とは限らない) 部分集合 A を固定して議論することで応用しやすくなるため, 特に, 連続有界関数の拡張として定義される C^* -embedding の概念が基本的である. 位相空間 (X, τ) の部分集合 A について, A 上の任意の連続関数 $f : A \rightarrow [0, 1]$ が X 上の連続関数 $g : X \rightarrow [0, 1]$ に拡張できるとき (すなわち, 連続関数 $g : X \rightarrow [0, 1]$ が存在し $g|_A = f$ とできるとき), A は X に C^* -embedded であると呼ばれる. A が X に C^* -embedded であることは, A 上の実数値連続有界関数を X 上の実数値連続関数に拡張できることと同値である. この用語を用いると, Tietze の拡張定理は ‘ X が正規空間であるための必要十分条件は, X の任意の閉集合 A が X に C^* -embedded である’ と表現できる.

位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X の零集合 (zero-set) であるとは, A がある連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ を用いて $A = f^{-1}(\{0\})$ と表せるときをいう. X の零集合の補集合を X の余零集合 (cozero-set) と呼ぶ. 位相空間 (X, τ) の2つの部分集合 F と G が X で関数分離 (または, 完全分離, completely separated) されるとは, X の2つの交わらない零集合 Z_0, Z_1 を用いて $F \subset Z_0, G \subset Z_1$ とできることをいい, これは, ある連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ で $F \subset f^{-1}(\{0\})$ かつ $G \subset f^{-1}(\{1\})$ とできることと同値である.

Gillman-Jerison による以下の C^* -embedding の特徴づけは, 連続関数を作るために帰納的に行う集合の分離の操作を1回のみでできるために使いやすい.

定理 2.4. (Gillman-Jerison [16]) (X, τ) を位相空間, A をその部分集合とする. このとき, A が X に C^* -embedded であるための必要十分条件は, A 上で関数分離できる2つの部分集合は X でも関数分離されることである.

位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A 上の任意の連続増加関数 $f : A \rightarrow [0, 1]$ が X 上の連続増加関数 $g : X \rightarrow [0, 1]$ に拡張できるとき, A は X に **order C^* -embedded** であると呼ばれる ([34]). 以下, order C^* -embedding の特徴づけとして3つの結果を紹介する. なお, 定理 2.2 のように, 連続増加関数 f を固定した (より一般的な, 経済学でよく用いられる) 記述で紹介する.

- (Hunsaker [22]) (X, τ, \preceq) を閉順序 \preceq をもつ位相順序空間, A を X の稠密な部分集合, Y を閉順序をもつコンパクト位相順序空間とする.

連続増加関数 $f : D \rightarrow Y$ が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $D_Y(B_1) \cap I_Y(B_2) = \emptyset$ となる Y の任意の2つの部分集合 B_1, B_2 について, $D_X(f^{-1}(B_1)) \cap I_X(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$ となることである. ここで, 一般に $B \subset Z$ について, $D_Z(B)$ は B を含む Z の最小の閉減少集合, $I_Z(B)$ は B を含む Z の最小の閉増加集合を表す. (位相空間における Taïmanov の定理 [32], [12, 3.2.1] の一般化.)

- (Herden [18]) (X, τ, \preceq) を位相前順序空間, A を X の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を連続増加関数とする. X の減少集合 S は, ある $x \in A$ について $f^{-1}((-\infty, f(x)]) \subset S$ とできるとき, **f -compatible** であるという. また, X の開減少集合からなる族 \mathcal{E} が次の2つの条件 (S1) と (S2) をみたすとき, \mathcal{E} は X の **separable system** と呼ばれる.

(S1) $\overline{E_1} \subset E_2$ となる $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ が存在する.

(S2) $\overline{E_1} \subset E_2$ となる任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ に対して, $E_3 \in \mathcal{E}$ が存在して $\overline{E_1} \subset E_3 \subset \overline{E_3} \subset E_2$ とできる.

連続増加関数 $f : A \rightarrow [0, 1]$ が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $r < r'$ について, X 上の f -compatible 集合からなる separable system

$\mathcal{E}_{r,r'}$ が存在し, $f^{-1}([0, r]) \subset E$ かつ $f^{-1}([r', 1]) \subset X \setminus E$ ($\forall E \in \mathcal{E}_{r,r'}$) となることである.

- (Y. [34]) 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A が, ある連続増加関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ を用いて $A = f^{-1}(\{0\})$ (resp. $A = f^{-1}(\{1\})$) と表せるとき, A は X の **order zero-set** (resp. **order one-set**) と呼ばれる. 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の2つの部分集合 F と G の組 $\langle F, G \rangle$ が X で順序関数分離 (順序完全分離, *completely order separated*) されるとは, X の2つの交わらない order zero-set Z_0 と order one-set Z_1 で $F \subset Z_0$ かつ $G \subset Z_1$ とできるときをいい, これは, ある連続増加関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ で $F \subset f^{-1}(\{0\})$ かつ $G \subset f^{-1}(\{1\})$ とできることと同値である. 連続増加関数 $f : A \rightarrow [0, 1]$ が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $r < r'$ である任意の実数 r, r' について, $\langle f^{-1}([0, r]), f^{-1}([r', 1]) \rangle$ が X で順序関数分離できることである.

系 2.5. 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A が X に *order C^* -embedded* であるための必要十分条件は, A 上の2つの部分集合のペア $\langle A_0, A_1 \rangle$ が A 上で順序関数分離できるとき, X 上でも順序関数分離できることである.

系 2.5 は定理 2.4 の自然な一般化となっている.

定理 2.6. (Y. [34]) 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) において, 次は同値である.

- (1) X の任意のコンパクトな部分集合 A は X に *order C^* -embedded* である, かつ, \preceq は半閉である.
- (2) $b \not\preceq a$ である任意の $a, b \in X$ について, $f_{a,b}(a) = 0$ かつ $f_{a,b}(b) = 1$ となるような連続増加関数 $f_{a,b} : X \rightarrow [0, 1]$ が存在する.

閉前順序 \preceq をもつ normally preordered 空間は, 定理 2.6 の (2) をみたすので, 定理 2.6 は定理 2.3 の一般化となっている. また, 定理 2.6 の (2) の条件は, Nachbin [30] の一様化可能前順序空間の定義に現れていた概念である (本原稿の 5 章).

3 非有界な連続増加関数の拡張

2 章でみたように, Gillman-Jerison の定理 (定理 2.4) に関しては, 位相前順序空間上の連続増加関数に一般化できた. では, 他の拡張性に関しても同様に順序構造を付加した一般化が可能であるか? この問いに関して, 有界とは限らない連続増加関数の拡張について最近の [34] の結果と背景を紹介する.

位相空間 (X, τ) の部分集合 A において, A 上の任意の連続関数 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ が X 上の連続関数に拡張できるとき, A は X に **C -embedded** であると呼ばれる. また, 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A において, 任意の連続増加関数 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ が連続増加関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ に拡張できるとき, A は X に **order C -embedded** と呼ばれる.

位相前順序集合 (X, τ, \preceq) の部分集合 A が X に order C^* -embedded であることは, 任意の連続増加関数 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を連続増加関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}^*$, すなわち, 拡張実数 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ を値とする連続関数に拡張できることと同値である. この観点から比較すると, order C -embedding は, 終域の境界を無限遠点とならないように実数値として拡張可能と捉えることが出来る.

位相空間 (X, τ) の C -embedded 部分集合は常に X に C^* -embedded であるが, 逆は成立しない. 一方, 位相空間 (X, τ) の部分集合 A は X に C -embedded である必要十分

条件は, A は X に C^* -embedded かつ U^ω -embedded であることである (森田-保科 [29], Gutev-大田 [17]). ここで, 位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X に U^ω -embedded であるとは, 任意の連続関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 連続関数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ で $f \leq g|_A$ となるものが存在することである. この定義は, 森田-保科 [29] や保科 [20] の集合族を用いたオリジナルのものではなく, 連続関数を用いた Gutev-大田 ([17]) の同値条件であるが, 本稿ではこちらを定義として採用する.

位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A 上の任意の連続増加関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 連続増加関数 $g_1, g_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ で $g_1|_A \leq f \leq g_2|_A$ となるものが存在するとき, A は X に **order U^ω -embedded** と呼ぶ ([34]).

定理 3.1. (Y. [34]) (X, τ, \preceq) を位相前順序空間, A をその部分集合とする. このとき, A は X に *order C -embedded* である必要十分条件は, A は X に *order C^* -embedded* かつ *order U^ω -embedded* であることである.

定理 3.1 は, 連続増加関数の拡張について, \mathbb{R} 値関数としての拡張は (order C -embedding) は, \mathbb{R}^* 値関数としての拡張 (order C^* -embedding) と \mathbb{R} 値への制限 (order U^ω -embedding) で表現できるという自然な解釈を与えるものである.

本稿ではこれまで, 位相空間上の連続関数の拡張は, 位相前順序空間上の連続増加関数の拡張に一般化できることを示す定理を紹介してきたが, 次にうまく対応しない場合を紹介する.

位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X に **controlled embedded** とは, 任意の連続関数 $f: A \rightarrow [0, 1]$ と X の任意の交わらない 2 つの零集合 Z_0, Z_1 で $Z_i \cap A = f^{-1}(\{i\})$ ($i = 0, 1$) となるものに対して, 連続関数 $g: X \rightarrow [0, 1]$ で $g|_A = f$ かつ $g^{-1}(\{i\}) = Z_i$ ($i = 0, 1$) となるものが存在することである. Frantz [15] は, 正規空間 X の閉集合 A は X に controlled embedded であることを示していたが, より一般的に, controlled embedding は C -embedding と同値となる ([33]).

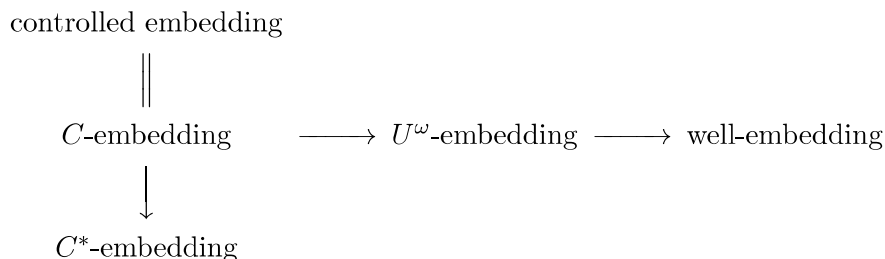
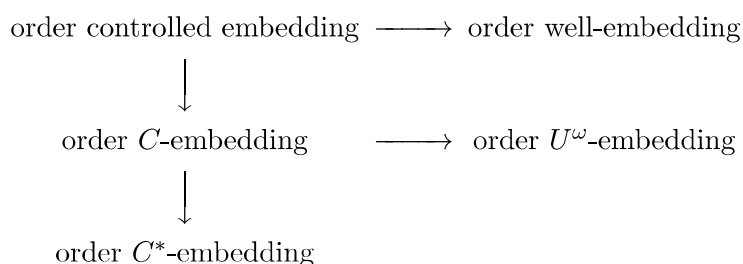
位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A について, 任意の連続増加関数 $f: A \rightarrow [0, 1]$ と X の交わらない order zero-set Z_0 と order one-set Z_1 の組 $\langle Z_0, Z_1 \rangle$ で $Z_i \cap A = f^{-1}(\{i\})$ ($i = 0, 1$) となるものに対し, 連続増加関数 $g: X \rightarrow [0, 1]$ で $g|_A = f$ かつ $g^{-1}(\{i\}) = Z_i$ ($i = 0, 1$) とできるとき, A は X に **order controlled embedded** と呼ばれる. 特に, $Z_i = \emptyset$ ($i = 0, 1$) とおくことで, order controlled embedded な部分集合は order C -embedded であることがわかる. しかし, 位相空間の場合とは異なり, 逆は成立しない.

位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X に **well-embedded** であるとは, A と交わらない X の零集合 Z について, A と Z は関数分離できるときをいう.

位相前順序空間 (X, τ, \preceq) の部分集合 A が X に **order well-embedded** であるとは, X の任意の order zero-set Z_0 で $A \cap Z_0 = \emptyset$ なものと, X の任意の order one-set Z_1 で $A \cap Z_1 = \emptyset$ となるものについて, 2 つの組 $\langle Z_0, A \rangle$ と $\langle A, Z_1 \rangle$ がそれぞれ X で順序関数分離できるときをいう.

位相空間における拡張の関係と (Figure 1), 位相前順序空間における拡張の関係 (Figure 2) は図のようにまとめられるが, 矢印の逆はすべて成立しない (cf. [34]). 位相空間 (X, τ) における C -embedding = controlled embedding の証明の鍵は, well-embedding が果たす関数の補正機能にあった. しかし, 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) においては, order C -embedding が order well-embedding を導かない.

例 3.2. 例えば, $X = [0, 1]^2 \setminus \{(1, 1)\}$, ここで, 通常の積位相, 積順序をもつものとする. このとき, $A = \{1\} \times [0, 1)$ は X に *order C -embedded* であるが, *order well-embedded* でない.

Figure 1: 位相空間 (X, τ) における拡張の関係Figure 2: 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) における拡張の関係

4 経済学における選好と効用関数

経済学において、ある消費者の選好を‘最善’のものから並べるモデルとして効用関数が用いられる。位相前順序空間 (X, τ, \preceq) 上の実数値連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が順序同型写像 (*isomorphism*) であるとき、すなわち、

$$\forall x, x' \in X \quad (x \preceq x' \iff f(x) \leq f(x'))$$

をみたすとき、 f を連続な効用関数 (*utility function*) といい、 X は \preceq の連続な効用表現 (*utility representation*) をもつと呼ばれる。連続な効用関数 $f: (X, \tau, \preceq) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき、前順序 \preceq は完備性をみたす。閉全前順序空間 (X, τ, \preceq) 上の効用関数の存在については、次の2つの定理が基本的である。

定理 4.1. (Eilenberg [11]) 閉全前順序 \preceq をもつ連結な可分空間 (X, τ, \preceq) 上には、連続な効用関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

定理 4.2. (Debreu [7]) 閉全前順序 \preceq をもつ第2可算空間 (X, τ, \preceq) 上には、連続な効用関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

定理 4.2 の証明に使われている次の補題はそれ自身として有名である。 \mathbb{R} の部分集合 S について、 $\mathbb{R} \setminus S$ の有界な自明でない連結成分は *gap* とよばれる。

補題 4.3. (Open Gap Lemma, [7] [8]) S を \mathbb{R} の部分集合とする。このとき、 $g(S)$ の *gap* がすべて開集合となるような狭義増加関数 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

補題 4.3 は、増加関数から (順序位相に関する) 連続増加関数を作ることができるという有力な手法である一方、証明が複雑であるためにこれまで多くの別証明が与えられてき

た ([5], [23], [9], [3], [4] and [19] など). 一方, order C^* -embedding を用いることで, 定理 4.2 に対し補題 4.3 を回避する別証明を与えることができる.

現在では, 連続な効用関数をもつことの特徴づけが数多く与えられているが, それらの中から 1 つ紹介する. 前順序集合 (X, \preceq) において, \preceq が **Debreu** の意味での **order-separable** であるとは, 高々可算な集合 $Z \subset X$ が存在し, $x \prec y$ のとき $z \in Z$ が存在し $x \preceq z \preceq y$ とできるときをいう.

定理 4.4. (Brigde-Mehta [6]) (X, τ, \preceq) を全前順序集合とする. このとき, 連続な効用関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するための必要十分条件は, \preceq が *Debreu* の意味での *order-separable* で, 順序位相 $\tau_{\preceq}(X)$ は $\tau_{\preceq}(X) \subset \tau$ をみたすことである.

連続な効用関数 $f : (X, \tau, \preceq) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき \preceq は完備となるので, 一般の (完備とは限らない) 前順序の効用表現とはならない. そのため, 複数組の連続増加関数を用いるマルチユーティリティ表現が Aumann [2], Dubra-Maccheroni-Ok, [10], Evren-Ok [13], Ok [31] 等により導入された.

位相前順序空間 (X, τ, \preceq) が \preceq の連続なマルチユーティリティ表現 (*continuous multi-utility representation*) をもつとは, X が次の条件 (*) を満たすときをいう.

$$(*) \quad \forall x, x' \in X \quad [x \preceq x' \iff (f(x) \leq f(x') \text{ for } \forall f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{連続増加関数})]$$

以下の事実が知られている.

- 位相前順序空間 (X, τ, \preceq) が \preceq の連続なマルチユーティリティ表現をもつとき, 前順序 \preceq は閉である.
- 半閉な前順序 \preceq をもつ normally preordered 空間 (X, τ, \preceq) は, \preceq の連続なマルチユーティリティ表現をもつ.
- 局所コンパクト, σ -コンパクトなハウスドルフ空間 (X, τ) は, X の任意の閉前順序 \preceq の連続なマルチユーティリティ表現をもつ (Levin [25]).
- 閉前順序 \preceq をもつ k_ω -空間 (X, τ, \preceq) は, normally preordered 空間である. よって, X は \preceq の連続なマルチユーティリティ表現をもつ (Minguzzi [28]).
- 条件 (*) は, 定理 2.6 の条件 (2) と一致する. (order C^* -embedding は, 経済学ではマルチユーティリティ表現として現れてくる.)

5 順序埋蔵定理

位相順序空間 (X, τ, \preceq) の順序 \preceq が連続なマルチユーティリティ表現をもつとき, チコノフキューブへ埋め込めるか? という自然な問いが生じる. 位相空間における埋蔵定理と Stone-Čech コンパクト化の理論の位相順序空間 (X, τ, \preceq) への一般化について, Fletcher-Lindgren [14], Nachbin [30] から紹介する.

位相順序空間 (X, τ, \preceq) において, X が \preceq の連続なマルチユーティリティ表現をもち (すなわち, (*) の条件をみたし), かつ, 次の条件 (**) をみたすとき, 一様化可能前順序空間 (*uniformizable preordered space* [30]) と呼ばれる.

- (**) 任意の $x \in X$ とその近傍 V について, 連続な増加関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ と連続な減少関数 $g : X \rightarrow [0, 1]$ で $f(x) = 1 = g(x)$, かつ, $\inf\{f(y), g(y)\} = 0$ ($\forall y \in X \setminus V$) をみたすものが存在する.

ハウスドルフである一様化可能前順序空間は、順序空間となり [30], 完全正則順序空間 (*completely regular ordered space* [30], 一様順序空間, *uniformly ordered space* [14]) と呼ばれる.

$(X, \tau, \preceq), (Y, \tau', \preceq')$ を2つの位相順序空間とする. このとき, 関数 $f: X \rightarrow Y$ が X の Y への順序位相同型写像 (*order homeomorphism*) であるとは, f が全単射連続増加写像で, f^{-1} も連続増加写像であるときをいう. また, $f: X \rightarrow Y$ が Y の部分集合への順序位相同型写像であるとき, f は X の Y への順序埋蔵 (*order embedding*), または, X は Y に順序埋蔵されると呼ばれる ([14]).

S を空でない集合, 各 $\alpha \in S$ について X_α を \mathbb{R} の有界閉区間とし, 積空間 $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ に通常の積順序 \preceq (すなわち, $(x_\alpha)_{\alpha \in S}, (y_\alpha)_{\alpha \in S} \in \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ について, $(x_\alpha)_{\alpha \in S} \preceq (y_\alpha)_{\alpha \in S} \stackrel{\text{def}}{\iff} x_\alpha \leq y_\alpha$ for $\forall \alpha \in S$) を入れたものは順序キューブ (*ordered cube*) と呼ばれる.

定理 5.1. (順序埋蔵定理, Fletcher-Lindgren [14]). 任意の完全正則順序空間 (X, τ, \preceq) は, 順序キューブに順序埋蔵される.

位相順序空間 (X, τ, \preceq) の順序コンパクト化 (*order compactification*) とは, コンパクトハウスドルフ順序空間 Y と, $f(X)$ が Y の稠密な部分集合となるような順序埋蔵 $f: X \rightarrow Y$ の組 (f, Y) をいい, X と $f(X)$ を同一視する.

- 閉順序 \preceq をもつ位相順序空間 (X, τ, \preceq) が順序コンパクト化をもつための必要十分条件は, X が完全正則順序空間であることである ([30]).

$C_\uparrow^*(X)$ で X 上の有界な連続増加関数全体を表すとする. 特に, $e: X \rightarrow \mathbb{R}^{C_\uparrow^*(X)}$ を評価写像 (evaluation map), nX を $e(X)$ の $\mathbb{R}^{C_\uparrow^*(X)}$ における閉包とすると, (e, nX) は X の **Nachbin** コンパクト化と呼ばれる. 完全正則順序空間の順序コンパクト化 $(f, Y), (g, Z)$ について, 連続な増加関数 $h: Y \rightarrow Z$ が存在し $h \circ f = g$ とできるとき, (f, Y) は (g, Z) を支配する (*dominate*) と呼ばれ, 特に h が順序位相同型写像であるとき, (f, Y) と (g, Z) は同値であるという.

- X を完全正則順序空間とすると, その Nachbin コンパクト化 nX は, X のすべての順序コンパクト化を支配する ([14]).
- X が αX に order C^* -embedded となるような順序コンパクト化 αX は, Nachbin コンパクト化と同値である.
- 離散順序 \preceq_0 をもつ位相順序空間 (X, τ, \preceq_0) の Nachbin コンパクト化 $n(X, \tau, \preceq_0)$ は, 位相空間として Stone-Čech コンパクト化 $\beta(X, \tau)$ と一致する.
- 実数全体 \mathbb{R} に通常の位相 $\tau_{\mathbb{R}}$ と通常的全順序 \leq を考えるとき, Nachbin コンパクト化 $n(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}, \leq)$ は, 位相空間として Stone-Čech コンパクト化 $\beta(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ と一致しない ([14]).
- normally ordered 閉空間 (特に, 閉全順序空間) は必ずしも完全正則順序空間にならない ([14]). よって, $T_2 + (*) \not\Rightarrow (**)$ である.
- 条件 $(**)$ は, X の order cozero-sets と order coone-sets 全体を部分開基とする位相と一致する.

位相順序空間での順序埋め込みは, マルチユーティリティ表現のための条件 $(*)$ に加え, $(**)$ で要求されるある種の局所凸性も求められるため, マルチユーティリティ表現は, 順序埋め込みよりも真に弱い位置づけにある.

References

- [1] R. A. Alò and H. L. Shapiro, *Normal Topological Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [2] R. Aumann, *Utility theory without the completeness axiom*, *Econometrica* **30** (1962), 445–462.
- [3] A. F. Beardon, *Debreu's Gap Theorem*, *Econ. Theory* **2** (1992), 150–152.
- [4] A. F. Beardon and G.B. Mehta, *Utility functions and the order type of the continuum*, *J. Math. Econ.* **23** (1994), 387–390.
- [5] R. Bowen, *A new proof of a theorem in utility theory*, *Int. Econ. Rev.* **9** (1968), 374.
- [6] D. S. Bridges and G. B. Mehta, *Representation of Preference Orderings*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 422, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1995.
- [7] G. Debreu, *Representation of a preference ordering by a numerical function*, in: R. Thrall, C. Coombs, and R. Davies (eds), *Decision Processes*, New York: John Wiley, 1954.
- [8] G. Debreu, *Continuity properties of Paretian utility*, *Int. Econ. Rev.* **5** (1964), 285–293.
- [9] G. Droste, *Ordinal scales in the theory of measurement*, *J. Math. Psych.* **31** (1987), 60–82.
- [10] J. Dubra, F. Maccheroni and E. A. Ok, *Expected utility theory without the completeness axiom*, *J. Econ. Theory* **115** (2004), 118–133.
- [11] S. Eilenberg, *Ordered topological spaces*, *Amer. J. Math.* **63** (1941), 39–45.
- [12] R. Engelking, *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [13] O. Evren and E. A. OK, *On the multi-utility representation of preference relation*, *J. Math. Econ.* **47** (2011), 554–563.
- [14] P. Fletcher and W. F. Lindgren, *Quasi-uniform Spaces*, Lecture Note Pure Appl. Math. 77, Marcel Dekker, New York, 1982.
- [15] M. Frantz, *Controlling Tietze-Urysohn extensions*, *Pacific J. Math.* **169** (1995), 53–73.
- [16] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, New York, 1960.
- [17] V. Gutev and H. Ohta, *Does C^* -embedding imply C -embedding in the realm of products with a non-discrete metric factor?*, *Fund. Math.* **163** (2000), 241–265.

- [18] G. Herden, *On a lifting theorem of Nachbin*, Math. Soc. Sci. **19** (1990), 37-44.
- [19] G. Herden, and G. B. Mehta, *The continuous analogue and generalization of the classical Birkhoff-Milgram theorem*, Math. Soc. Sci. **28** (1994), 59–66.
- [20] T. Hoshina, *Spaces with a property related to uniformly local finiteness*, Tsukuba J. Math. **6** (1982), 51–62.
- [21] T. Hoshina, *Extensions of mappings, II*, in: K. Morita, J. Nagata (Eds.), *Topics in General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1989, pp. 41-80
- [22] W. N. Hunsaker, *Extensions of continuous increasing functions*, Topology Proc. **5** (1980), 105-110.
- [23] J. Jaffray, *Existence of a continuous utility function: an elementary proof*, *Economertica* **43** (1975), 981–983.
- [24] H.A.Kunzi and T.A. Richmond, *Completely regularly ordered spaces versus T_2 -ordered spaces which are completely regular*, Topology Appl. **135** (2004), 185–196.
- [25] V. Levin, *Measurable utility theorems for closed and lexicographic preference relations*, Sov. Math. Dokl. **27** (1983), 639-643.
- [26] T. McCallion, *Compactifications of ordered topological spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 463–473.
- [27] E. Minguzzi, *Topological conditions for the representation of preorders by continuous utilities*, Appl. Gen. Topology **13** (2012), 81–89.
- [28] E. Minguzzi, *Normally preordered spaces and utility*, Order **30** (2013), 137–150.
- [29] K. Morita and T. Hoshina, *P -embedding and product spaces*, Fund. Math. **93** (1976), 7180.
- [30] L. Nachbin, *Topology and Order*, New York, Van Nostrand Reinhold, 1965.
- [31] E. A. OK, *Utility representation of an incomplete preference relation*, J. Econ. Theory **104** (2002), 429–449.
- [32] A. D. Taïmanov, *On extension of continuous mappings of topological spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **31** (1952), 459–463.
- [33] K. Yamazaki, *Controlling extensions of functions and C -embedding*, Topology Proc. **26** (2001/2002) 323–341.
- [34] K. Yamazaki, *Extensions of continuous increasing functions*, Topology Appl. **335** (2023) 108566.

6次元シンプレクティック多様体と その部分多様体のトポロジー

大場 貴裕 (大阪大学大学院 理学研究科)*

1. はじめに

幾何構造がどれほど多様体のトポロジーを制約するかは、トポロジーの研究における基本的な問いである。この問題を考える上で、幾何構造に適合する部分多様体が鍵となることがある。

本稿では、幾何構造としてシンプレクティック構造を考え、その部分多様体としては、シンプレクティック部分多様体を考える。定義を簡単に復習しておく。**シンプレクティック形式**とは、多様体 X 上の非退化かつ閉である2-形式 ω のことで、組 (X, ω) を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ。シンプレクティック多様体 (X, ω) の部分多様体が**シンプレクティック**であるとは、それ自身、 ω の制限によりシンプレクティック多様体になるときをいう。

シンプレクティック多様体の1つのクラスとして、射影多様体がある。その理論において、射影多様体のトポロジーと、超平面切断と呼ばれる余次元1の複素部分多様体のトポロジーの間には繋がりがあある。例えば、Lefschetzの超平面定理は、2つの間のホモトピー群や(コ)ホモロジー群を関連づける。また超平面切断の族を考えれば、Lefschetzペンシル、Lefschetzファイバー空間が得られ、射影多様体のトポロジーをより深く研究できる。

一般のシンプレクティック多様体についてはどうであろうか。これを探るため、本稿では以下の2つの問題を考える。

- (1) (X, ω) の余次元2のホモロジー類 α を一つ固定したとき、どれほどのシンプレクティック部分多様体が α を代表するか？
- (2) (X, ω) がある条件をみたすシンプレクティック部分多様体を含むとき、 X のトポロジーにはどのような制約がかかるか？

筆者は近年、これらの問題に関し、6次元シンプレクティック多様体とその4次元部分多様体の場合について研究している。この研究から得られた結果を本稿では紹介したい。

以下ではとくに断らない限り、多様体およびその間の写像はすべて滑らかであると仮定する。

2. 4次元シンプレクティック部分多様体のトポロジー

2.1. 余次元2のシンプレクティック部分多様体

第1節の問題(1)について考えていく。まずはシンプレクティック多様体に限らず、他の幾何構造を持った多様体でも同様の問題を考察したい。そのために以下のように問題を再設定する。

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1-1
e-mail: taka.oba@math.sci.osaka-u.ac.jp

問題 2.1. n 次元多様体 X のホモロジー類 $\alpha \in H_{n-2}(X; \mathbb{Z})$ を固定したとき, α を代表する余次元2の連結な部分多様体は, ある同値関係のもとでは有限個か?

本稿では部分多様体の同値関係として, 微分同相と (滑らかな) アイソピーを考える.

n 次元多様体 X と $\alpha \in H_{n-2}(X; \mathbb{Z})$ に対し, α を代表する連結な部分多様体が1つ存在したとする. すると, 局所的に連結和を繰り返すことで, 無限個の微分同相でない部分多様体が α を代表する. 微分同相でない部分多様体はもちろんアイソトピーで移り合わないので, 無限個の互いにアイソトピックでない代表元が取れる.

次に, 幾何構造付きの状況で考える. 例えば, X をコンパクトで単連結な Kähler 多様体とする. すると, α を代表する複素部分多様体は, 実はすべてアイソトピックになることが知られている. とくに部分多様体は微分同相になる.

幾何構造を弱め, X にシンプレクティック構造を与えるとどうだろうか. $\dim X = 4$ のときは, $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ を代表するシンプレクティック曲面は, 随伴公式から, 微分同相類はただ1つである. そこで, 区別の仕方を微分同相からアイソトピーに変える. すると, ホモロガスなシンプレクティック曲面の無限族で, 互いにアイソトピックでないものが, Fintushel と Stern [FS] により最初に構成され, 現在では様々な構成例がある ([Smi], [EP] など).

シンプレクティック多様体の次元を上げると, 4次元の場合の結果を用いて, 互いにホモロガスであるが, アイソトピックでないシンプレクティック部分多様体の無限族は簡単に構成できる. しかし, 今度は微分同相類の問題が非自明になる. 例えば, (X, ω) や α の取り方によっては, 代表元の微分同相類がただ1つになる (第2.4節を見よ). 一般のシンプレクティック多様体に対しても, このように微分同相類は有限個になるだろうか.

以上をまとめると下の表のようになる. この表で残った部分に対する答えが, この節での主結果である.

		微分同相	アイソトピー
滑らかな多様体		NO	NO
(コンパクト単連結) Kähler 多様体		YES	YES
シンプレクティック多様体	dim = 4	YES	NO
	dim > 4	??	NO

表 1: 問題2.1への答えのまとめ.

定理 2.2 (大場 [Oba]). 単連結なシンプレクティック6次元閉多様体 (X, ω) と, 4次元シンプレクティック部分多様体の無限族 $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在し, 以下をみたす:

- Y_n たちはすべてホモロガスである;
- Y_n たちは互いにホモトピー同値でない. とくに互いに微分同相でない.

2.2. Lefschetz ファイバー空間

定理2.2のシンプレクティック多様体とその部分多様体の構成には, Lefschetz ファイバー空間を用いる. このファイバー構造ついて, ここでは復習する.

まず Y を向きづけられた4次元閉多様体とする. S^2 を2次元球面とし, 標準的な向きを入れておく.

定義 2.3. 写像 $f: Y \rightarrow S^2$ が **Lefschetz ファイバー空間** であるとは、次をみたすときをいう：

- (i) 写像 f の臨界点集合 $\text{Crit}(f)$ 上で、 f は単射である；
- (ii) 各臨界点 $p \in \text{Crit}(f)$ と、それに対応する臨界値 $f(p)$ の周りで向きに適合する複素座標 (z_1, z_2) , w がそれぞれ取れ、 f は以下のように書ける：

$$w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2;$$

- (iii) 各ファイバーは自己交叉が -1 の球面を含まない.

臨界値上のファイバーのことを **特異ファイバー**、それ以外のファイバーを **正則ファイバー** と呼ぶ.

例 2.4. 球面 S^2 を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなし、写像

$$(S^2 \times S^2) \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\} \rightarrow S^2, \quad (z, w) \mapsto w/z$$

を考える (図1の左側). これはいわゆる Lefschetz ペンシルであり、正則ファイバーは S^2 に同相で、特異ファイバーは 0 と ∞ の上にある. 2点 $(0, 0)$ と (∞, ∞) でブローアップすることにより、正則ファイバーが S^2 に同相な Lefschetz ファイバー空間が得られる (図1の右側). この例は第3節の考察において鍵になる.

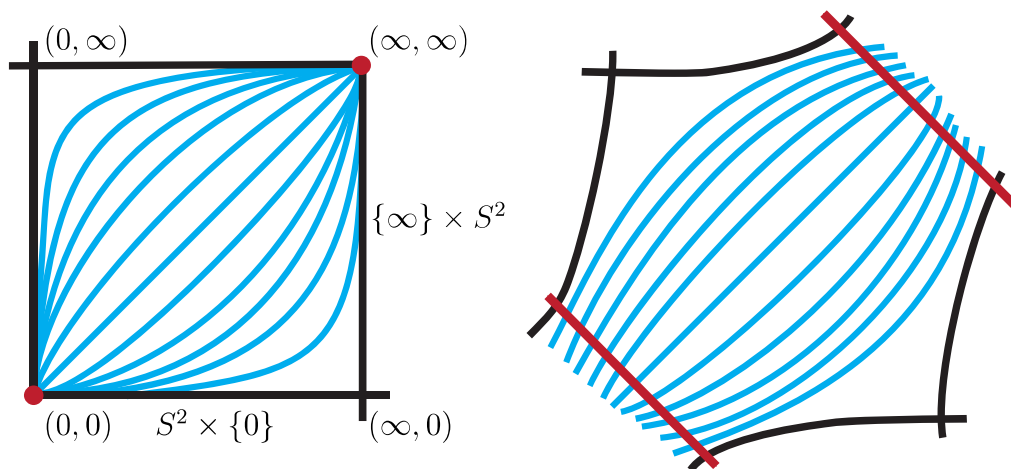


図 1: $S^2 \times S^2$ 上の Lefschetz ペンシル (左) とそのブローアップ上の Lefschetz ファイバー空間 (右).

例 2.4 においては、 $S^2 \times S^2$ を複素多様体とみなし、その構造を利用して Lefschetz ファイバー空間を構成した. 組合せ的な方法でも Lefschetz ファイバー空間を作ることができる. 実際、定理 2.2 の証明にもこちらを用いる. そこで、次にその方法について概説する.

各特異ファイバーは、正則ファイバー上のある単純閉曲線を 1 点につぶすことで得られる. このような単純閉曲線を **消滅サイクル** という. 対応する消滅サイクルが分離型の単純閉曲線である特異ファイバーのことを、**分離型** と呼ぶことにする; 消滅サイクル

が非分離型のときは、特異ファイバーを**非分離型**と呼ぶことにする。Lefschetz ファイバー空間が与えられたとき、そこから各特異ファイバーに対応する消滅サイクルを並べることで、消滅サイクルの (有限) 列ができる。逆に、ある条件をみたす単純閉曲線の列 (c_1, \dots, c_n) を取ると、各 c_i を消滅サイクルとする特異ファイバーを持つ Lefschetz ファイバー空間が構成できる。

例 2.5. まず種数2の閉曲面を考え、 c_1, \dots, c_4 を図2のような単純閉曲線とする。単純閉曲線の列

$$(c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4)$$

を考える。この列を消滅サイクルの列とする Lefschetz ファイバー空間 $f_0: M_0 \rightarrow S^2$ が構成できる。この f_0 は松本幸夫氏 [Mat] により構成された $(S^2 \times T^2) \# 4\overline{\mathbb{C}P}^2$ 上の種数2の Lefschetz ファイバー空間に他ならない。

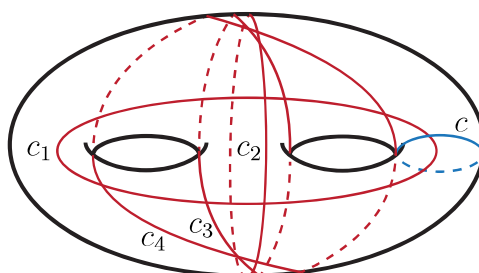


図 2: 単純閉曲線 c_1, c_2, c_3, c_4, c .

Lefschetz ファイバー空間 $f: Y \rightarrow S^2$ が**超楕円的**であるとは、各特異ファイバーの消滅サイクルに沿う Dehn ツイストが、正則ファイバーの超楕円的写像類群の元であるときをいう。上の例はどちらも超楕円的 Lefschetz ファイバー空間である。

超楕円的 Lefschetz ファイバー空間は、 S^2 上の S^2 バンドルの二重分岐被覆空間と相性がいい。

定理 2.6 (Siebert–Tian [ST], Fuller [Ful]). 任意の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間 $f: M \rightarrow S^2$ に対し、 S^2 上の S^2 バンドル S が存在し、 X のあるブローアップ \tilde{M} が S のあるブローアップ \tilde{S} の二重分岐被覆となる。

この定理における X のブローアップは、 $f: M \rightarrow S^2$ の分離型の特異ファイバーの特異点で行っている。とくに、 f が非分離型の特異ファイバーしか持たない場合、ブローアップは必要ない。

2.3. Lefschetz ファイバー空間に付随する 6次元多様体とその部分多様体

以下は定理 2.2 の証明の鍵になる。

補題 2.7. 任意の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間 $f: M \rightarrow S^2$ に対し、6次元閉シンプレクティック多様体 (X, ω) とその 4次元シンプレクティック部分多様体 Y で次をみたすものが存在する：

- X は S^2 上のある $\mathbb{C}P^2$ バンドルをブローアップさせて得られる多様体に微分同相である；
- Y は X をブローアップさせて得られる多様体に微分同相である。

定理 2.2 の証明の概略. 部分多様体の族 $\{Y_n\}$ を構成するため、まずは超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の族を与える。任意の $n \in \mathbb{Z}_{n \geq 0}$ に対し、種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $g_n: M_n \rightarrow S^2$ で、以下を消滅サイクルの列とするものを考える：

$$(c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4, c_1, \dots, c_4, \\ \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4), \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4), \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4), \tau_c^n(c_1), \dots, \tau_c^n(c_4)).$$

ここで、 c_1, \dots, c_4, c は図 2 にある単純閉曲線で、 τ_c は c に沿う右手 Dehn ツイストを表す。この g_n は、例 2.5 で考察した $f_0: M_0 \rightarrow S^2$ の 4 つのコピーを取り、それらのファイバー和 $(f_0 \#_{\text{id}} f_0) \#_{\tau_c^n} (f_0 \#_{\text{id}} f_0)$ として理解できる。正則ファイバーの種数が 2 であることから、 g_n は超楕円的であることを注意しておく。

Lefschetz ファイバー空間 g_0 に補題 2.7 を適用して、まず 6 次元シンプレクティック多様体 (X, ω) とその中の 4 次元シンプレクティック部分多様体 Y_0 を得る。残りの g_n に対しても、補題 2.7 を適用すれば定理の証明が完了しそうであるが、そうはいかない。例えば、補題 2.7 を適用して得られた 6 次元多様体たちがシンプレクティック同相であるかはわからないし、たとえそうであったとしても、ホモロジー類が同じかも補題からすぐにはわからない。そこで、“twisting operation” と呼ばれる操作を用いる。この操作はやや複雑なので、詳しい説明は避けるが、ファイバー和と相性のいい操作で、 (X, ω) やシンプレクティック部分多様体のホモロジー類は変えずに、この部分多様体をファイバー和に合わせて改変するものである（詳しくは [Oba, Section 4.1] を参照されたい）。

シンプレクティック部分多様体 Y_0 に twisting operation を施す。すると、 Y_0 は (X, ω) 内で改変され、各 $g_n: M_n \rightarrow S^2$ ($n \geq 1$) に対応する (X, ω) のシンプレクティック部分多様体 Y_n が得られる。構成から、各 Y_n は Y_0 にホモロガスである。また、 Y_n は M_n のブローアップに微分同相である。 $\pi_1(M_n) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ であることから、

$$\pi_1(Y_n) \cong \pi_1(M_n) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

となり、 Y_n たちが互いに微分同相でないことがわかる。以上から定理が得られる。□

注意 2.8. 上の証明で与えた $g_n: M_n \rightarrow S^2$ は Ozbagci と Stipsicz [OS] の構成例から着想を得たものである。彼らと同じ方法で、 $n \geq 1$ のとき、全空間 M_n とそのブローアップ Y_n は複素構造を許容しないことが証明できる。

2.4. 射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ のシンプレクティック部分多様体

この節では、Fubini–Study 形式 ω_{FS} を持った $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ のシンプレクティック部分多様体の微分同相類について、結果のみ述べる（結果自体はフォークロアだと思われるが、筆者の知る限り、証明込みで明示的に書かれた文献はない）。定理を述べるために、言葉を 1 つ定義しておく。 $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ の 4 次元部分多様体 Y に対し、 $[Y] = d[\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \in H_4(\mathbb{C}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$ をみたす整数 d が存在する。この d を Y の**次数**と呼ぶことにする。

定理 2.9. $(\mathbb{C}\mathbb{P}^3, \omega_{\text{FS}})$ のシンプレクティック 4 次元部分多様体 Y の次数 d が 1, 2, 3 のいずれかであるとき、 Y は次数 d の斉次多項式で定義される $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ 内の滑らかな複素超曲面に微分同相である。すなわち、

$$Y \approx \begin{cases} \mathbb{C}\mathbb{P}^2 & (d = 1), \\ S^2 \times S^2 & (d = 2), \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 6\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} & (d = 3). \end{cases}$$

ただし, \approx は微分同相を表す.

証明は [Oba, Appendix A] を参照されたい.

3. 6次元シンプレクティック多様体のトポロジー

3.1. 部分多様体によるトポロジカルな制約

ここからは初めのページにあった問題 (2) を考えていく:

- (2) (X, ω) がある条件をみたすシンプレクティック部分多様体を含むとき, X のトポロジーにはどのような制約がかかるか?

この問題について, 例えば, 4次元の場合は次のことが知られている.

定理 3.1 (McDuff [McD1]). 連結な4次元閉シンプレクティック多様体 (X, ω) が, S^2 に同相なシンプレクティック部分多様体 Y を含むとする. Y の自己交叉数が非負であれば, Y は $(\mathbb{C}P^2, k\omega_{FS})$ ($k > 0$ はある定数), またはあるシンプレクティック S^2 バンドルのブローアップにシンプレクティック同相である.

6次元以上の場合を考えると, シンプレクティック部分多様体について, 自己交叉数や法バンドルに条件を課しただけの定理3.1の一般化は, 筆者の知る限り, まだ示されていない. そこで, 問題を少し考えやすくするため, 次の概念を導入する.

定義 3.2. (X, ω) を閉シンプレクティック多様体とし, $[\omega] \in H^2(X; \mathbb{Z})$ をみたすとする. 余次元2のシンプレクティック部分多様体 Y が**シンプレクティック超平面切断**であるとは, $PD[\omega] = [Y]$ をみたし, $X \setminus Y$ がWeinstein構造を許容するときをいう.

Weinstein構造の定義をここでは説明しないが, このような構造を $X \setminus Y$ が持つとき, 指数が次元の半分以下のハンドルのみでハンドル分解されることが知られている (この事実については, 例えば, [CE] を参照されたい). また, Weinstein構造に関する条件は人工的に思われるかもしれないが, 複素幾何の範疇で超平面切断を考えれば, その補空間には自然に Weinstein構造が入ることから, それほど不自然ではない.

シンプレクティック超平面切断に問題を制限すると, その補空間についての既存の結果 ([McD2], [PP] など) を用いることができる. 例えば, $(\mathbb{C}P^2, k\omega_{FS})$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) にシンプレクティック同相なシンプレクティック超平面切断を含む6次元シンプレクティック多様体 (X, ω) を考えると, $k = 1$ のとき, X は $\mathbb{C}P^3$ に微分同相であり, $k > 1$ のとき, このような (X, ω) はそもそも存在しないことがわかる. $S^2 \times S^2$ の場合はどうだろうか. $a, b > 0$ に対し, $S^2 \times S^2$ 上のシンプレクティック構造 $\omega_{a,b}$ を

$$\omega_{a,b} = a \operatorname{pr}_1^* \omega_{FS} + b \operatorname{pr}_2^* \omega_{FS}$$

で定義する. ただし, $\operatorname{pr}_i: S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ は, 第 i 成分への射影である. 例えば, 任意の $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ について, $(S^2 \times S^2, \omega_{a,1})$ をシンプレクティック超平面切断として含むシンプレクティック多様体は具体的に構成できる. とくに $a = 1$ の場合, $(S^2 \times S^2, \omega_{1,1})$ をシンプレクティック超平面切断として含むのは, $\mathbb{C}P^4$ の2次超曲面 $(Q^3, \omega_{FS}|_{Q^3})$ である. ただし,

$$Q^3 = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4) \in \mathbb{C}P^4 \mid z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0\}.$$

このようなシンプレクティック多様体は $(Q^3, \omega_{FS}|_{Q^3})$ のみだろうか. 微分同相類について, この問いの答えが以下の結果である.

定理 3.3 (Kwon-大場 [KO2]). 6次元閉シンプレクティック多様体 (X, ω) が, $(S^2 \times S^2, \omega_{1,1})$ にシンプレクティック同相なシンプレクティック超平面切断を含むとする. このとき, X は Q^3 に微分同相である.

注意 3.4. すべての組 (a, b) について, $(S^2 \times S^2, \omega_{a,b})$ がシンプレクティック超平面切断として実現される訳ではない. 例えば, Kwon 氏と筆者は次の結果を示した [KO1]: a を5以上の奇数とすると, $(S^2 \times S^2, \omega_{a,2})$ をシンプレクティック超平面切断として含む6次元閉シンプレクティック多様体は存在しない.

3.2. 擬正則球面のモジュライ空間

定理3.3の証明では擬正則球面のモジュライ空間を用いる. そこでまずは, 擬正則球面の定義を復習する. (X, J) を概複素多様体とする. 写像 $u: \mathbb{C}P^1 \rightarrow X$ が**擬正則**または **J -正則**であるとは, $du \circ i = J \circ du$ が成り立つときをいう. ここで, i は $\mathbb{C}P^1$ 上の標準的な複素構造である.

さて, いま (X, ω) を, 6次元閉シンプレクティック多様体で, $(S^2 \times S^2, \omega_{1,1})$ をシンプレクティック超平面切断 Y として含むものとする. (X, ω) の中の擬正則球面を考えるために, 概複素構造を取るのだが, 一工夫必要である. $Y \cong S^2 \times S^2$ の X における法バンドルの第1 Chern類が $[\omega_{1,1}]$ に一致することから, このバンドルは $\mathcal{O}(1, 1) := \text{pr}_1^* \mathcal{O}_{S^2}(1) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{S^2}(1)$ に同型であることがわかる. 後者を正則直線バンドルと思うと, 全空間の可積分な概複素構造と一致するように, Y の近傍で概複素構造が取れる. この概複素構造を全体に拡張し, X 上の ω -tame な概複素構造 J が構成できる. また, $A, B \in H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$ を

$$A = [S^2 \times \{\text{pt}\}], \quad B = [\{\text{pt}\} \times S^2]$$

で定義し, $H_2(X; \mathbb{Z})$ の中の対応する元も, 同じ A と B を用いる. さらに, Y から相異なる2点 p_0, p_∞ をとる.

モジュライ空間を定義していく. X の中の J -正則球面のモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}$ を,

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \{(u, z_0, z_\infty) \mid u: \mathbb{C}P^1 \rightarrow X \text{ は } J\text{-正則}, [u(\mathbb{C}P^1)] = A + B, u(z_i) = p_i \ (i = 0, \infty)\}$$

で定める. $\mathbb{C}P^1$ の自己同型写像からなる群 $\text{Aut}(\mathbb{C}P^1) (= \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ は, このモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}$ に次のような自由な作用を持つ: $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ と $(u, z_0, z_\infty) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ に対し,

$$\phi \cdot (u, z_0, z_\infty) = (u \circ \phi^{-1}, \phi(z_0), \phi(z_\infty)).$$

$\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{C}P^1$ にも同様に G が作用する. これでようやく, われわれが考えるべきモジュライ空間が定義できる:

$$\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}} / \text{Aut}(\mathbb{C}P^1), \quad \mathcal{M}_z = (\widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{C}P^1) / \text{Aut}(\mathbb{C}P^1).$$

よく知られた議論から, \mathcal{M} と \mathcal{M}_z は多様体になる.

命題 3.5. J をジェネリックにとると, モジュライ空間 \mathcal{M} と \mathcal{M}_z はそれぞれ, (滑らかな) $2n - 2, 2n$ 次元多様体である.

2つのモジュライ空間を観察してみる. まず, $[u, z_0, z_\infty] \in \mathcal{M}$ をとると, これは p_0 と p_∞ を通る X の中の J -正則球面である. Y が J -正則な部分多様体であることから, 交

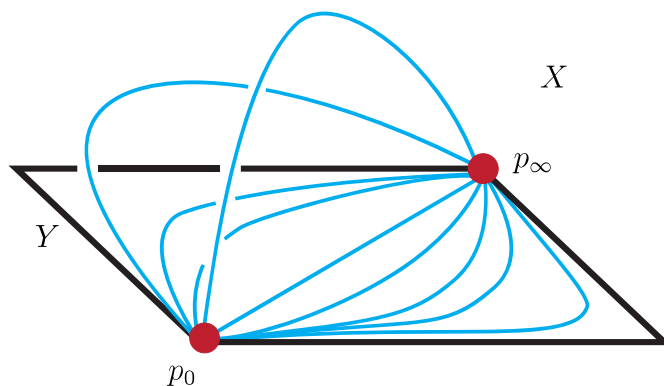


図 3: 擬正則球面の像の様子

又の正值性により, u と Y の交叉する点での代数的交叉数は常に正であることがわかる. u と Y の代数的交叉数は 2 であることも考慮に入れると, p_0, p_∞ 以外の点で u が Y と交わると, u の像はすべて Y に含まれることがわかる. また, このような J -正則球面を考えると, Lefschetz ファイバー空間で見たところの図と同じようなものが Y 上に現れている (図 3). 実は, この J -正則球面たちは $S^2 \times S^2$ の Lefschetz ペンシルを与える. この事実からわかる重要なことは, J -正則球面の列で, M の中では収束しないものが存在することである. つまり, M と M_z はコンパクトでない.

これまでの擬正則球面のモジュライ空間を用いたシンプレクティック多様体のトポロジーの研究では, モジュライ空間のコンパクト性は不可欠であった. その理由の一つとしては, 例えば, モジュライ空間から閉多様体 X への評価写像 $ev: M_z \rightarrow X$, $ev([u, z_0, z_\infty, z]) = u(z)$ の写像度を考えたいからである. モジュライ空間 M, M_z の “Gromov” コンパクト化 $\overline{M}, \overline{M}_z$ がそれぞれ取れる. だが今度は, このコンパクト化が多様体の構造を持つかどうか一般にはわからない. われわれのモジュライ空間のコンパクト化 $\overline{M}, \overline{M}_z$ については実は以下のことがわかる.

命題 3.6. モジュライ空間のコンパクト化 \overline{M} と \overline{M}_z は位相多様体の構造を持つ.

この命題の証明は [GN] から着想を得ており, ポイントは 2 つある. まずは $M^{\text{red}} := \overline{M} \setminus M$ の元 $[u, z]$ について, u は 2 つの既約成分しか持たないという点である. さらに, 各 $[u, z] \in M^{\text{red}}$ に対し, Y の摂動 Y' が存在し, u の各既約成分が Y' とちょうど 2 点, u とは合計で (相異なる) 4 点で交わるものが存在する点である. これらの事実から, 擬正則球面のよく知られた貼り合わせの手法を用いて, M^{red} の各点のまわりの座標近傍を構成する.

3.3. 定理 3.3 の証明

定理の証明の鍵となるのは, 以下の補題である.

補題 3.7. 評価写像 $ev: \overline{M}_z \rightarrow X$ の写像度は 1 である.

補題が成り立つ理由を簡単に説明する. $q_0 \in Y \setminus \{p_0, p_\infty\}$ を任意にとると, p_0, p_∞, q_0 を通る \overline{M} の擬正則球面の像は Y に含まれてしまうのであった. いま q_0 を, $ev(M^{\text{red}}) \cap Y$ 以外のところからとれば, 実は 3 点 p_0, p_∞, q_0 を通る \overline{M} の元は 1 つしかなく, しかも M の元である. q_0 に十分近い任意の点 q でも同様に, p_0, p_∞, q を通る \overline{M} の元がただ 1 つ存在し, それは M の元であることがわかる. ゆえに, q_0 の X における近傍 U が存在

し, $\text{ev}^{-1}(U) \subset \mathcal{M}_z$ で, $\text{ev}|_U$ は単射になる. U 内に $\text{ev}|_{\mathcal{M}_z}$ の正則値が存在することから, ev の写像度が1とわかる.

命題 3.8. シンプレクティック多様体 (X, ω) は単連結である.

証明の概略. 評価写像 $\text{ev}: \overline{\mathcal{M}}_z \rightarrow X$ は写像度が1であるから, 基本群への誘導準同型 ev_* は全射である. これより, ev_* が自明な写像であることを示せば命題が証明できる.

モジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_z$ の任意のループ $\ell(t)$ をとる. すると, $\mathcal{M}_z^{\text{red}} = \overline{\mathcal{M}}_z \setminus \mathcal{M}_z$ や $\text{ev}^{-1}(p_0)$, $\text{ev}^{-1}(p_\infty)$ は余次元が2であるから, 必要なら少し摂動することで, $\ell(t)$ はこれらと交叉を持たないとしてよい. いま,

$$\ell(t) = [u_t, 0, \infty, 1] \in \mathcal{M}_z \subset \overline{\mathcal{M}}_z$$

と書ける. $\text{ev}_*(\ell(t)) = u_t(1)$ であり, これは, 定値ループ $t \mapsto u_t(0) = p_0$ とホモトピックである. ゆえに, $\text{ev}_*([\ell]) = [u_t(0)] = 1 \in \pi_1(X)$ となることがわかる. \square

上の証明の議論では, $\overline{\mathcal{M}}$ や $\overline{\mathcal{M}}_z$ がコンパクトであることを主に利用した. \mathcal{M} や \mathcal{M}_z が非コンパクトであること, 言い換えると, コンパクト化で付け加えられた部分 \mathcal{M}_z , $\mathcal{M}_z^{\text{red}}$ にも重要な情報がある. これを用いて以下の補題が得られる.

補題 3.9. (X, ω) のホモロジーに関して以下が成り立つ.

1. $H_3(X; \mathbb{Z}) = 0$;
2. $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で, A により生成される.

証明は省略するが, 例えば $H_3(X; \mathbb{Z}) = 0$ は, \mathcal{M}^{red} が単連結であることを示すことで得られる. モジュライ空間の非コンパクト性を本質的に用いているのである.

定理 3.3 の証明の概略. Wall [Wal] と Jupp [Jup] の結果によれば, 向きづけられた滑らかな単連結 6 次元多様体で, ホモロジーに振れがない場合, その微分同相類は以下で決まることが知られている: ホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z})$, $H^3(X; \mathbb{Z})$; 3 重カップ積 $\mu: H^2(X; \mathbb{Z})^{\otimes 3} \ni a \otimes b \otimes c \mapsto (a \smile b \smile c)[X] \in \mathbb{Z}$; 第 2 Stiefel–Whitney 類 $w_2(TX)$; 第 1 Pontryagin 類 $p_1(TX)$.

さて, 命題 3.8 より, X は単連結である. さらに, 補題 3.9 と, Poincaré 双対, 普遍係数定理を合わせることで, 任意の k に対し, $H^k(X; \mathbb{Z}) \cong H^k(Q^3; \mathbb{Z})$ がわかる.

この同型を示すことで, 実は $H^2(X; \mathbb{Z})$ や $H_2(X; \mathbb{Z})$, $H_4(X; \mathbb{Z})$ の生成元がわかる. これらは, それぞれ, $[\omega]$, $A = (i \circ j)_*[S^2]$, $[Y]$ で生成されている. ただし, $i: S^2 \times S^2 \cong Y \hookrightarrow X$, $S^2 = S^2 \times \{\text{pt}\} \xrightarrow{j} S^2 \times S^2$ は包含写像である. これより, $H^2(X; \mathbb{Z})^{\otimes 3}$ の生成元が $[\omega]^{\otimes 3}$ とわかり, 3 重カップ積が X と Q^3 で一致することがわかる. さらに, Y の法バンドルが $\mathcal{O}(1, 1)$ に同型であったことから, i^*TX , $(i \circ j)^*TX$ は Q^3 の場合のバンドルと同型であることがわかる. 以上から, $w_2(TX)$ と $p_1(TX)$ も Q^3 のものと一致する. \square

謝辞

「第70回トポロジーシンポジウム」にお招きくださいました，世話人の小林毅先生 (奈良女子大学)，鎌田聖一先生 (大阪大学)，茂手木公彦先生 (日本大学)，山下靖先生 (中央大学)，張娟姬先生 (奈良女子大学)，村井紘子先生 (奈良女子大学) に心より御礼を申し上げます。本稿で紹介した研究は科研費 (課題番号: 20K22306, 22K13913) の助成を受けています。

参考文献

- [CE] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, Symplectic geometry of affine complex manifolds.
- [EP] Tolga Etgü and B. Doug Park, *Non-isotopic symplectic tori in the same homology class*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 9, 3739–3750.
- [FS] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, *Symplectic surfaces in a fixed homology class*, J. Differential Geom. **52** (1999), no. 2, 203–222.
- [Ful] Terry Fuller, *Hyperelliptic Lefschetz fibrations and branched covering spaces*, Pacific J. Math. **196** (2000), no. 2, 369–393.
- [GN] Paolo Ghiggini and Klaus Niederkrüger-Eid, *On the symplectic fillings of standard real projective spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **24** (2022), no. 2, Paper No. 37, 18.
- [Jup] P. E. Jupp, *Classification of certain 6-manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973), 293–300.
- [KO1] Myeonggi Kwon and Takahiro Oba, *Rational ruled surfaces as symplectic hyperplane sections*, Trans. Amer. Math. Soc. **376** (2023), no. 7, 4811–4833.
- [KO2] M. Kwon and T. Oba, *Symplectic fillings of unit cotangent bundles of spheres and applications*, in preparation.
- [Mat] Yukio Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach*, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, pp. 123–148.
- [McD1] Dusa McDuff, *The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 679–712.
- [McD2] Dusa McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 651–671.
- [Oba] Takahiro Oba, *Symplectic submanifolds in dimension 6 from hyperelliptic lefschetz fibrations*, preprint arXiv:2302.12146 (2023).
- [OS] Burak Ozbagci and András I. Stipsicz, *Noncomplex smooth 4-manifolds with genus-2 Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 10, 3125–3128.
- [PP] Patrick Popescu-Pampu, *On the cohomology rings of holomorphically fillable manifolds*, Singularities II, Contemp. Math., vol. 475, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 169–188.
- [Smi] Ivan Smith, *Symplectic submanifolds from surface fibrations*, Pacific J. Math. **198** (2001), no. 1, 197–205.
- [ST] Bernd Siebert and Gang Tian, *On hyperelliptic C^∞ -Lefschetz fibrations of four-manifolds*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), no. 2, 255–280.
- [Wal] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds*, Invent. Math. **1** (1966), 355–374; corrigendum, *ibid.* **2** (1966), 306.

フィルター付き集合で豊穡化した圏のマグニチュード

浅尾 泰彦 (福岡大学)*

概要

2000年代に Leinster によって導入された「マグニチュード」と呼ばれる距離空間の‘不変量’について解説し、最近の研究について紹介する。誤解を恐れずに端的に言えば、マグニチュードは「距離構造のオイラー標数」であり、マグニチュードの理論は「位相幾何学の適用範囲を距離構造まで拡張する試み」である。ここで距離構造とそこから誘導される位相は切り離して考えている。

1 有限距離空間のマグニチュード

距離空間 (X, d) が $\#X < \infty$ を満たすときこれを有限距離空間と呼ぶ。2000年代に Leinster は有限距離空間 (X, d) に対してそのマグニチュードを次のように定義した ([12, 13])。まず X 上に1つ全順序を固定し、実数 $t \geq 0$ に対して行列 $Z_X = (e^{-td(x,y)})_{x,y \in X}$ を定める。これが可逆の時、マグニチュードを逆行列の成分和

$$\text{Mag}X := \sum_{x,y} (Z_X^{-1})_{xy}$$

で定める。この値は全順序の取り方によらない。一般には Z_X は可逆とは限らず、不定元 $q = e^{-t}$ を用いて $Z_X = (q^{d(x,y)})_{x,y \in X}$ を考えることもある。例えば、 $X = \{0, 1\}$, $d(0, 1) = d(1, 0) = \frac{1}{2}$ の時、 $\text{Mag}X = \frac{2}{1+e^{-t/2}}$ であり、 $\text{Mag}X = \frac{2}{1+q^{1/2}}$ と書いたりもする。また‘冪級数展開’して $\text{Mag}X = 2 - 2q^{1/2} + 2q - 2q^{3/2} + \dots$ と書くこともある。

マグニチュードは一見何の意味がある量なのか分からず、また未だあまり分からないが、少なくとも定義そのものは位相幾何学的に極めて自然であるのでそれを解説する。また講演者による研究成果についても紹介する。これらの解説は講演者の解釈 ([1]) に大きく依存していてマグニチュード理論が誕生した際の際の原論文の説明とは定義の順序や仕方が違う箇所があることを注意しておく。誤解を恐れずに端的に言えば、マグニチュードは「距離構造のオイラー標数」であり、マグニチュードの理論は「位相幾何学の適用範囲を距離構造まで拡張する試み」であると講演者は考えている。ここで距離構造とそこから誘導される位相は切り離して考えている。

* 〒814-0180 福岡県福岡市城南区七隈8丁目19-1 福岡大学 理学部応用数学科

e-mail: asao@fukuoka-u.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/yasuhikoasao>

2010 Mathematics Subject Classification: 55N35

キーワード: マグニチュード, オイラー標数, マグニチュードホモロジー, ホモロジー

2 単体複体のオイラー標数

オイラー標数は位相幾何学における根源的なアイデアであり、図形の点・辺・面などの個数の交代和として定義される。正確には有限単体複体 S に対して

$$\chi(S) = \sum_n (-1)^n \#\{n\text{-face}\}$$

で定義される。一方で、単体複体の重心細分はその幾何実現の位相を保つことが知られており、特にオイラー標数も保存する。単体複体 S の重心細分の定義を振り返ってみると、まず face 全体に包含によって順序を入れた face poset $F(S)$ を構成し、その poset の chain, つまり $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ なる点列を face とし部分列を subface とするような単体複体を構成すればそれが重心細分であった。したがって一般の poset に対しても上のようにして構成した単体複体（順序複体）のオイラー標数が考えられ、これは単体複体のオイラー標数の拡張になっている。つまり poset P に対して

$$\chi(P) = \sum_n (-1)^n \#\{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$$

と定義すれば $\chi(S) = \chi(F(S))$ である。

3 群のホモロジー

オイラー標数からホモロジー群への飛躍が代数トポロジーの原点と言っても過言ではなく、ホモロジーとは加群列 H_n であってランク交代和 $\sum_n (-1)^n \text{rank } H_n$ がオイラー標数に一致するようなもののうち‘良い加群’たちである。単体複体の場合は chain complex (C_*, ∂_*) を

$$\begin{aligned} C_n &= \mathbb{Z}\langle n\text{-face} \rangle, \\ \partial_n(n\text{-face}) &= \sum_k (-1)^k \text{k-th } (n-1)\text{-subface}, \end{aligned}$$

で定めると一般にそのホモロジー群は振れを持ち、オイラー標数よりも多い情報量を持つ上に、有限とは限らない単体複体に対しても定義ができる。poset の場合も上を拡張する形で

$$\begin{aligned} C_n &= \mathbb{Z}\langle x_0 < x_1 < \dots < x_n \rangle, \\ \partial_n(x_0 < x_1 < \dots < x_n) &= \sum_k (-1)^k (x_0 < x_1 < \dots < \check{x}_k < \dots < x_n), \end{aligned}$$

と定義する。ここで \check{x} は「 x を省く」ことを意味する。

ところで poset とは集合 X の任意の 2 元のペア (x, y) に対してその間に順序関係が「あるかないか」が定まり、さらにその関係が反射律と推移律を満たすことを要請したものである。そこで $x \leq y$ の場合は $T(x, y) = \{*\}$ (1 元集合), $x \not\leq y$ の場合は $T(x, y) = \emptyset$ (空集合) と定めれば、積について結合的に振る舞う写像の族 $\{*\} \rightarrow$

$T(x, x), T(x, y) \times T(y, z) \longrightarrow T(x, z)$ が得られ, 逆にこのような対応 $T : X \times X \longrightarrow \text{Set}$ は poset の概念そのものである. T が $\{*\}$ や \emptyset 以外の集合も値として取りうるように拡張したものは小圏そのものであり, 上の定義を拡張する形で小圏のホモロジーを次の chain complex によって定義することができる.

$$C_n = \bigoplus_{x_i \in X} \mathbb{Z}T(x_0, x_1) \times T(x_1, x_2) \times \cdots \times T(x_{n-1}, x_n),$$

$$\partial_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_k (-1)^k (f_1, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_n),$$

ただし $(f_1 \circ f_0, f_2, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n), (f_1, f_2, \dots, f_{n+1} \circ f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$ とした. 例えば群 G を対象が 1 つで射集合が G である小圏と同一視した場合はよく知られている群ホモロジーの定義と一致する.

4 グラフ・有向グラフ・距離空間

ここで本来扱いたい対象である距離空間について振り返っておくと, これは集合 X と写像 $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ のペアであって, 次の性質を満たすものである.

- (1) $d(x, x) = 0,$
- (2) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z),$
- (3) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y,$
- (4) $d(x, y) = d(y, x).$

距離空間の間の写像は距離を大きくしないとき **1-Lipschitz 写像** と呼ばれ, 以降では距離空間と 1-Lipschitz 写像のなす圏を考える. 距離空間の例として**グラフ**が挙げられる. ここではループと多重辺を持たない連結なものを考える. グラフの頂点集合に, 2 点間の距離をそれらを結ぶ最短のパスの長さによって定めることで距離空間になる. この距離構造はグラフの構造を覚えていることに注意する (距離 1 の 2 点間に辺を引けば良い). 言い換えるとこの対応によってグラフの圏から距離空間の圏への忠実充満関手が得られる (辺を潰すことも許している). グラフを一般化した対象として**有向グラフ**というものがあり, これは辺に向きのついたものである. 有向グラフについても有向辺のなすパスの長さによって距離構造を入れたいが, 残念ながら任意の 2 点間を結ぶ有向パスがあるとは限らず, もしあったとしても対称性 (上の (4)) を満たすとは限らない. とはいえ (1) ~ (3) は満たすのであるから, これはほとんど距離空間であり, 距離空間の定義を微修正する方が自然という見方もできる. そこで距離関数の値域を $[0, \infty]$ に広げ, 条件 (4) を取り除いた定義を採用すれば, 有向パスで結べない 2 点間の距離を ∞ とすることで有向グラフに距離構造を与えられる. この対応によって有向グラフの圏から距離空間の圏への忠実充満関手が得られる. 距離 ∞ を許すことで通常のグラフの場合も連結性を仮定する必要がなくなる. ちなみにグラフとは辺で結ばれた 2 点間には両向きに一つづつの有向辺がある有向グラフと思うことで, グラフの圏は有向グラフの圏に忠実充満に埋め込める.

5 poset と距離空間

poset とは対応 $T : X \times X \rightarrow \{\emptyset, \{*\}\} \subset \text{Set}$ であって自然な写像の族 $\{*\} \rightarrow T(x, x), T(x, y) \times T(y, z) \rightarrow T(x, z)$ を備えたもののことであった。これは上の距離空間の定義と似ており、条件 (1), (2) がそれぞれ写像の族に対応していると考えられる。対称性 (4) だけでなく非退化性 (3) まで落として、距離関数 $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ で条件 (1), (2) を満たすものを**一般距離空間 (Lawvere metric space)** と呼ぶ。poset と一般距離空間の違いは対応の値域 ($\{\emptyset, \{*\}\} \subset \text{Set}$ と $[0, \infty]$)、そこでの演算記号 (\times と $+$)、そして矢印の記号 (\rightarrow と \geq もしくは $=$) であり、これらの記号の違いを除けば本質的にはほとんど同じものである。そこで poset のオイラー標数を真似て一般距離空間のオイラー標数を考えてみると (小圏の場合とも見比べながら)、

$$\chi(X) = \sum_{x_i \neq x_{i+1}} (-1)^n "d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)"$$

と定義できそうである。しかし \sum の足し算と $d(x_i, x_{i+1})$ たちの足し算は区別して考えたので不定元 q を用いて次のように定義する。名前も**マグニチュード**にする。

$$\text{Mag} X = \sum_{x_i \neq x_{i+1}} (-1)^n q^{d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)},$$

ただし $q^\infty = 0$ とする。しかし、poset の場合と違って例えば $x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x, \dots$ のように「行ったり来たり」の列も考えられるため、例え X が有限集合であっても \sum は無限和である。したがってもしグラフのように d の値が整数か ∞ であれば $\text{Mag} X$ は形式的冪級数である。それ以外の場合は正の実数冪も許容した **Novikov 級数** として定義する。級数の各係数が有限の値に収まるか考えていないし、実際退化した点があれば ($d(x, y) = 0, x \neq y$) 収束しないがここでは無視することにする。退化した点がなければ問題なく、そうでない場合は少し工夫を要する。ちなみに Novikov 級数環の単元は定数項が非 0 の元であり、また形式的冪級数環を部分環として持つ。

最初に出てきた行列 $Z_X = (q^{d(x, y)})_{x, y \in X}$ を考える。グラフの隣接行列の場合と同様に考えて、 $(Z_X - I)^n$ の xy 成分は「 x から y に止まることなく $(n+1)$ ステップで、かつ距離 ℓ で到達する経路の数」を q^ℓ の係数にもつ級数である。このことを考慮すると、

$$\sum_n (I - Z_X)^n \text{ の成分和} = \sum_{x_i \neq x_{i+1}} (-1)^n q^{d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)},$$

であり、 $\sum_n (I - Z_X)^n = (I - (I - Z_X))^{-1} = Z_X^{-1}$ と計算できる。退化した点がない場合は $\det Z_X$ は単元なので逆行列は存在する。この議論は Novikov 級数環上の行列環の位相を考えることで正当化できる。

6 Filtered set category

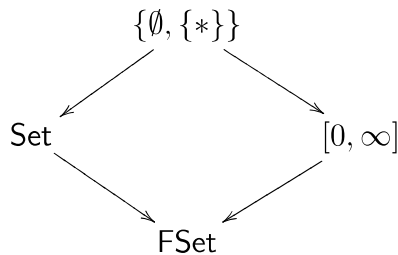
poset と距離空間が「似ている」からオイラー標数の定義を真似てマグニチュードを定義したわけであるが、実はこの二つは似ているだけでなく「血が繋がっている」。その祖先

は **filtered set (enriched) category** と (講演者に) 呼ばれているものである. 上で小圏は対応 $X \times X \rightarrow \text{Set}$ であると紹介したが, filtered set category は対応 $X \times X \rightarrow \text{FSet}$ のことである. FSet は以下で定義される **filtered set** の圏である.

1. filtered set X とは $\ell \in [0, \infty]$ で添字づけられた部分集合族 X_ℓ をもつ集合 X であって, $X_\ell \subset X_{\ell'}$ ($\ell \leq \ell'$) と $X_\infty = X$ を満たすものである.
2. filtered set X, Y の間の filtered map とは写像 $f : X \rightarrow Y$ であって $fX_\ell \subset Y_\ell$ を満たすものである.
3. filtered set X, Y の積 $X \times Y$ を $(X \times Y)_\ell = \cup_{\ell_1 + \ell_2 = \ell} X_{\ell_1} \times Y_{\ell_2}$ で定義する.

ちなみに $[0, \infty]$ を \geq を射, $+$ を積とするモノイダル圏と見た時, FSet は $[0, \infty]$ 上の separated presheaf のなす圏と同一視でき, filtered set の積は Day convolution である. また Set は $X = X_0$ を満たす filtered set とみなすことができ, この対応によって忠実充満関手 $\text{Set} \rightarrow \text{FSet}$ が得られる. 小圏を対象, 射, 射の合成で説明したことを延長すると, filtered set category とは対象, 射, 射の合成があって小圏と同じルールを満たしており, さらに射には正実数による次数がついていて $\deg(g \circ f) \leq \deg f + \deg g, \deg \text{id} = 0$ を満たすものである ($\deg f = \ell \Leftrightarrow f \in X_\ell \setminus \cup_{r < \ell} X_r$). この次数条件は恣意的につけたわけではなく積の定義と射の合成則から自然に要請される.

小圏 (\supset poset) は全ての射の次数が 0 の filtered set category, 距離空間は対象 x から y へ一つだけ次数 $d(x, y)$ の射をもつ filtered set category とみなせる. ただし次数 ∞ の射はないことにする. 次数に関する条件 $\deg(g \circ f) \leq \deg f + \deg g$ が三角不等式の一般化になっている. これらの同一視は埋め込みの列



から誘導されている. ここで $\text{FSet} \supset [0, \infty]$ は米田埋め込みであり, 実数 r を $X_\ell = \begin{cases} \{*\} & \ell \geq r, \\ \emptyset & \ell < r, \end{cases}$ で定まる filtered set に対応させる. ただし ∞ は \emptyset に対応させる. また右上の矢印は $\emptyset \mapsto \infty, \{*\} \mapsto 0$ である.

filtered set にもマグニチュードが定義でき ([1]), それは距離空間のマグニチュードと poset のオイラー標数を含んでいる. さらに有限群の軌道体オイラー標数も含む.

7 filtered set category のホモロジー

小圏のホモロジーをそのまま拡張する形で filtered set category X から chain complex (C_*, ∂_*) が構成できる.

$$C_n = \bigoplus_{x_i \in X} \mathbb{Z}X(x_0, x_1) \times X(x_1, x_2) \times \cdots \times X(x_{n-1}, x_n),$$

$$\partial_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_k (-1)^k (f_1, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_n),$$

ここで $X(x_i, x_{i+1})$ は x_i から x_{i+1} への射のなす filtered set である. 各チェイン群は filtered abelian group であり, 射の次数条件 ($\deg(g \circ f) \leq \deg f + \deg g$) から境界作用素は filtration を保つ. したがって C_* は filtered chain complex である. filtration が $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ による場合, 一般に filtered chain complex からスペクトル系列が構成できる. $E_{p,q}^0$ 項は filtration による商 $F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q}$ である. またもし収束すれば収束先は X から射の次数を忘れ去って得られる小圏のホモロジーである. まず E^1 項について次が成り立つ.

Theorem 7.1 (essentially by Hepworth-Willerton and Leinster-Shulman [10, 15])

X が有限距離空間で距離関数の値が整数である時, $E_{\ell, n-\ell}^1 =: \text{MH}_n^\ell(X)$ はマグニチュードを圏化する. つまり

$$\text{Mag} X = \sum_{n, \ell} (-1)^n \text{rank} \text{MH}_n^\ell(X) q^\ell$$

が成り立つ.

同様に X が finite poset の時にも E^1 項はオイラー標数を圏化していることがわかる (この時は E^1 退化する). つまり E^1 項は通常の単体複体のホモロジーを拡張してマグニチュードまで圏化するものである. またスペクトル系列の文脈を無視すれば距離関数の値域に制限をつける必要はない (単に商 $F_{\leq \ell} C_* / F_{< \ell} C_*$ のホモロジー MH_*^ℓ を考えれば良い). MH はマグニチュードホモロジーと呼ばれる. オイラー標数の定義には有限性が必要でホモロジーには必要なかったように, マグニチュードホモロジーにも X の有限性は必要ない.

E^2 項については次が成り立つ.

Theorem 7.2 (A. [2]) X が有限有向グラフの時, $E_{n,0}^2$ は Grigor'yan-Lin-Muranov-Yau ([7]) らの被約パスホモロジー \tilde{H}_n と同型である.

パスホモロジーは有向グラフの '良い' ホモロジー論として一連の研究がなされている. '良い' というのは位相空間の場合のアナロジーで Eilenberg-MacLane 公理を満たしたりホモトピー不変性を持つという意味である ([7]). 一つ応用例を紹介する. マグニチュードホモロジーが「対角成分しか持たない」ようなグラフ, つまりグラフ X であって $\text{MH}_n^\ell(X) = 0$ ($\ell \neq n$) を満たすグラフは対角的と呼ばれマグニチュード理論の研究対

象である。例えばツリーや完全グラフは対角的であるが、どのようなグラフが対角的かを明らかにすることは一つの大きな問題である ([10])。Theorem 7.2 とスペクトル系列の計算によって次が得られる。

Theorem 7.3 (A. [2]) 有限グラフは対角的ならば被約パスホモロジー \tilde{H}_n は全て 0 である。

逆は成り立たない。 E^3 項以降は収束先以外何もわかっていない。

8 ホモトピー不変性

FSet には $r \in [0, \infty)$ で添字付けられるホモトピー関係の列が次のように定義される。 I_r を二つの対象 $0, 1$ と、id でない唯一の射 $0 \rightarrow 1$ を持つ filtered set category で、この射の次数が r であるものとする。 filtered 関手 $F, G : C \rightarrow D$ が 1-ステップ r -ホモトピックとは filtered 関手 $H : C \times I_r \rightarrow D$ であって $H|_0 = F, H|_1 = G$ を満たすものが存在することを言う。 1-ステップ r -ホモトピーで生成される同値関係を r -ホモトピーという。 すぐにわかる事実として $r \leq r'$ に対して r -ホモトピックならば r' -ホモトピックである。 以下に具体例を挙げる。

- 通常の小圏に対しては関手 F から G への 1-ステップ 0-ホモトピーは自然変換そのものである。 したがって通常のコホモロジー同値は 0-ホモトピー同値である。 より強く、随伴対があれば 0-ホモトピー同値であり、したがって poset 間にガロア接続が存在すれば 0-ホモトピー同値である。
- 有向グラフに対しては Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau らのホモトピー ([7]) と 1-ホモトピーは一致する。
- 一般距離空間とその Kolmogorov 商（退化した点を潰す）は 0-ホモトピー同値である。

次が成り立つ。

Theorem 8.1 (A. [2]) 上で定義したスペクトル系列の E^{r+1} 項は r -ホモトピー不変である。 したがって MH は 0-ホモトピー不変であり、 E^2 項はパスホモロジー以外の項も Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau らの意味でホモトピー不変である。

したがって FSet にはより精密な意味で（モデル構造などの）ホモトピー論の列があると期待され、それを裏付ける次の結果が知られている。

Theorem 8.2 (Cirici et al. [6]) filtered chain complex の圏には、 E^r に擬同型を誘導する chain map を弱同値射とするモデル構造の列 M_r ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) が存在する。

Theorem 8.3 (Carranza et al. [5]) 有向グラフの圏にはパスホモロジーに同型を誘

導する射を弱同値とする cofibration category の構造（モデル構造より少し弱い）が存在する。

つまり Theorem 8.2 の M_r は FSet の r -ホモトピー論から誘導されていること、1-ホモトピー論は Theorem 8.3 のものを包含していることが期待される。

9 マグニチュードの具体例

マグニチュードの計算例を紹介するために、一般距離空間にも適用できる少し広いマグニチュードの定義を紹介する。上で大まかにしか説明しなかった概念についても定義を述べておく。

Definition 9.1 1. 一般距離空間とは集合 X と写像 $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ の組 (X, d) であって次を満たすものである。

- (a) $d(x, x) = 0$,
- (b) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

集合 X が有限集合の時、 (X, d) を有限一般距離空間と呼び、以下ではこれしか扱わないことにする。

- 2. 写像 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Q}$ が**左有限**とは任意の $L \in [0, \infty)$ について f を $[0, L]$ に制限した時の台が有限集合であることを言う。左有限写像 f を冪級数のように $f = \sum_{\ell} f(\ell)q^{\ell}$ と表示する。左有限写像全体の集合に点ごとの和と積 $f \cdot g(\ell) = \sum_{\ell'+\ell''=\ell} f(\ell')g(\ell'')$ を入れたものを **Novikov 級数環** と呼び、 $\mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ と書く。
- 3. $\mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ 係数行列 Z_X を $Z_X(x, y) = q^{d(x, y)}$ で定める (X には適当な全順序を入れるが以下の定義には影響しない)。ただし $q^{\infty} = 0$ とする。
- 4. 写像 $w : X \rightarrow \mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ が *weighting* とは、 $\sum_{y \in X} Z_X(x, y)w(y) = 1$ が全ての $x \in X$ で成立することをいう。つまり w をベクトルと見たときに $Z_X w = (1)$ となることをいう。ここで全ての成分が1のベクトルを (1) とかいた。
- 5. 写像 $v : X \rightarrow \mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ が *coweighting* とは、 $\sum_{x \in X} Z_X(x, y)v(x) = 1$ が全ての $y \in X$ で成立することをいう。つまり v をベクトルと見たときに $v^T Z_X = (1)^T$ となることをいう。

Lemma 9.2 X が weighting w と coweighting v の両方を持つ時、 $\sum_{x \in X} w(x) = \sum_{x \in X} v(x)$ が成り立ち、この値は w や v の取り方によらない。

証明 $\sum_{x \in X} w(x) = (1)^T w = v^T Z_X w = v^T (1) = \sum_{x \in X} v(x)$. □

Lemma 9.3 X が非退化の時（つまり $d(x, y) = 0$ ならば $x = y$ ）、 X は weighting と coweighting を一意にもつ。

証明 X が非退化の時 $\det Z_X$ の定数項は1なので $\mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ の中で可逆である。よって

Z_X は可逆行列なので weighting と coweighting を一意にもつ。 \square

Definition 9.4 X に対して Kolmogorov 商 KQX を次のように定義する。 X に同値関係 \sim を $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = d(y, x) = 0$ で定める。 その商集合を KQX と書き, この上に距離関数を $d([x], [y]) = d(x, y)$ で定めることができる ($x \sim y$ ならば全ての $a \in X$ について $d(x, a) = d(y, a), d(a, x) = d(a, y)$ が成り立つ) 。 KQX は非退化である。

Lemma 9.5 有限一般距離空間 X は常に weighting と coweighting を持つ。

証明 KQX の weighting を w とする。 $x \in X$ に対して $x \sim y$ となる y の個数を C_x と書くことにする。 この時 $k: X \rightarrow \mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ を $k(x) = w([x])/C_x$ で定めると,

$$\begin{aligned} \sum_{y \in X} Z_X(x, y)k(y) &= \sum_{y \in X} Z_X(x, y)w([y])/C_y \\ &= \sum_{y \in X} Z_{KQX}([x], [y])w([y])/C_y \\ &= \sum_{[y] \in KQX} Z_{KQX}([x], [y])w([y]) \\ &= 1. \end{aligned}$$

となり k は X の weighting である。 coweighting についても同様にできる。 \square

Definition 9.6 有限一般距離空間 X に対してそのマグニチュードを $\text{Mag}X = \sum_{x \in X} w(x) = \sum_{x \in X} v(x)$ で定める。 ここで w, v はそれぞれ X の weighting と coweighting である。

マグニチュードホモロジーはこの定義のマグニチュードも圏化している。 また X が非退化である時には, MH は直和分解 $\text{MH} = \bigoplus_{x \in X} \text{MH}^x$ を持ち, それぞれの MH^x は weighting の値 $w(x)$ を圏化している。

Example 9.7 ([10]) 完全グラフ K_n に対しては $Z_X(x, y) = \begin{cases} q & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$ なので, $w(x) = \frac{1}{1+(n-1)q}$ とすればこれは weighting である。 よってマグニチュードは

$$\text{Mag}K_n = \frac{n}{1+(n-1)q} = n - n(n-1)q + n(n-1)^2q^2 - \dots$$

である。

Example 9.8 ([1]) まず超平面配置の研究などで用いられる ranked poset を紹介する。

Definition 9.9 最小元 0 を持つ poset P は以下を満たす rank 関数 $r: P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を備

えているとき *ranked poset* と呼ばれる.

$$\begin{cases} r(0) = 0, \\ r(b) > r(a) & \text{if } a < b, \\ r(b) = r(a) + 1 & \text{if } b \text{ covers } a. \end{cases}$$

ここで '*b covers a*' とは $\{c \mid a \leq c \leq b\} = \{a, b\}$ のことを言う.

$$\text{ranked poset } (P, r) \text{ に } d(x, y) = \begin{cases} r(b) - r(a) & \text{if } a \leq b, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \text{によって距離を入れる.}$$

これは P の有向 Hasse 図を有向グラフと見ることと同じである. この時, P の weighting w は一意に存在して $w(0) = \pi_P(-q)$ が成り立つ. ここで $\pi_P(-q)$ は P のメビウス関数 μ_P を用いて次で定義される **Poincare 多項式** である.

$$\pi_P(q) := \sum_{a \in P} \mu_P(0, a) (-q)^{r(a)}.$$

したがってマグニチュードホモロジーの直和成分 MH^0 は $\pi_P(-q)$ を圏化している. これが振れを持つかは知られていない.

Example 9.10 ([1]) Γ を有限生成群とし S をその生成系とする. その **ケイリーグラフ** $\text{Cay}(\Gamma, S)$ は一般に無限グラフであるため, マグニチュードは定義できない. しかし可算無限サイズの行列 $Z_{\text{Cay}}(\Gamma, S)$ は一意に weighting w を持ち, $w(x) = (\sum_{g \in \Gamma} q^{\text{wl}g})^{-1}$ となる. ここで wl は語長を表す. 右辺は (Γ, S) の **growth series** の逆元である. したがってマグニチュードホモロジーの直和成分は実質的に growth series を圏化している. これが振れを持つかは知られていない.

その他にもマグニチュードホモロジーの計算をした論文はいくつかある ([3, 8, 9, 10, 11, 16]). またマグニチュードホモトピー型と呼ばれる CW 複体でその通常ホモロジーがマグニチュードホモロジーと一致するものも構成されている ([4, 17]). また何も紹介しないがコンパクト距離空間のマグニチュードについても一連の研究がされている. これらはすべて Leinster の Web ページに掲載してある ([14]).

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招き下さいました諸先生方に感謝いたします. また理研の吉田純氏と福岡大学の三石史人氏には原稿を細部まで読んで頂き有益なコメントを頂きました. この場をお借りしてお礼申し上げます.

参考文献

- [1] Y. Asao, *Magnitude and magnitude homology of filtered set enriched categories*, (2023), preprint, arXiv:2303.05677.

- [2] Y. Asao, *Magnitude homology and Path homology*, (2022), Bull. London Math. Soc., 55(1)(2023), 375–398.
- [3] Y. Asao, Y. Hiraoka and S. Kanazawa, *Girth, magnitude homology, and phase transition of diagonality*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A: Mathematics, (2023).
- [4] Y. Asao and K. Izumihara, *Geometric approach to graph magnitude homology*, Homology, Homotopy and Applications 23 (2021), 297–310.
- [5] D. Carranza, B. Doherty, M. Opie, M. Sarazola, and L.-Z. Wong, *Cofibration category of digraphs for path homology*, preprint, arXiv:2212.12568, (2022).
- [6] J. Cirici, D. -E. Santander, M. Livernet, S. Whitehouse, *Model category structures and spectral sequences*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A: Mathematics, 150 (6)(2020) , 2815 – 2848.
- [7] A. Grigor'yan, Y. Lin, Y. Muranov and S.-T. Yau, *Homotopy theory for digraphs*, Pure Appl. Math. Q. 10 (2014), no. 4, 619–674.
- [8] K. Gomi, *Magnitude homology of geodesic space*, preprint, arXiv:1902.07044, 2019.
- [9] Y. Gu, *Graph magnitude homology via algebraic Morse theory*, preprint, arXiv:1809.07240, (2018).
- [10] R. Hepworth and S. Willerton, *Categorifying the magnitude of a graph*, Homology Homotopy Appl. **19** (2017), 31–60.
- [11] R. Kaneta and M. Yoshinaga, *Magnitude homology of metric spaces and order complexes*, Bulletin of the London Mathematical Society 53(3) (2021), 893–905.
- [12] T. Leinster, *The magnitude of metric spaces*, Documenta Mathematica 18 (2013), 857–905.
- [13] T. Leinster, *The magnitude of a graph* , Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 166 (2019), 247–264.
- [14] Tom Leinster's web page <https://www.maths.ed.ac.uk/~tl/magbib/>
- [15] T. Leinster and M. Shulman, *Magnitude homology of enriched categories and metric spaces*, Alg. Geom. Topol. 21 (2021), 2175–2221.
- [16] R. Sazdanovic and V. Summers, *Torsion in the magnitude homology of graphs*, Journal of Homotopy and Related Structures 16(2) (2021), 275–296.
- [17] Y. Tajima and M. Yoshinaga, *Causal order complex and magnitude homotopy type of metric spaces*, Int. Math. Res. Not.(2023).

Unicellular LLT polynomials and twins of regular semisimple Hessenberg varieties

佐藤 敬志 (大阪公立大学 数学研究所)*

概 要

本稿では、regular semisimple Hessenberg 多様体の twin と呼ばれる多様体のコホモロジーと unicellular LLT 多項式が同一のものであるという、柘田幹也氏との共同研究 [1] の結果を紹介する。

1 Introduction

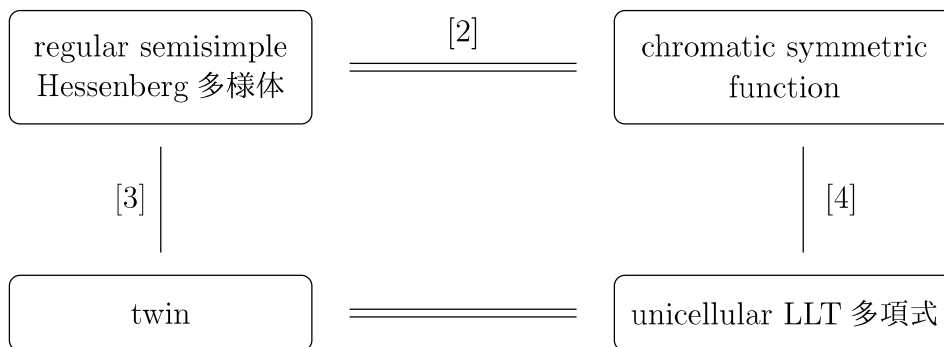
本稿に現れる主要な数学的対象は次の 4 つである。

- Regular semisimple Hessenberg 多様体
- Regular semisimple Hessenberg 多様体の twin
- chromatic symmetric functions
- unicellular LLT 多項式

歴史的には別々に定義され研究されてきた、この 4 つの対象が実は非常に密接に関係していることを本稿では紹介する。Regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーと chromatic symmetric function の involution が同一であるという Shareshian-Wachs 予想は Brosnan と Chow[2] により肯定的に解かれた。ここで chromatic symmetric function は chromatic polynomial の一般化である。この結果は Hessenberg 多様体という幾何学的対象と chromatic symmetric function という組合せ論的対象を結び付けた。一方、Ayzenberg と Buchstaber[3] は相異なる固有値が固定された tridiagonal Hermitian matrix のなす空間を一般化したものを研究するうちに、それが regular semisimple Hessenberg 多様体の twin と呼ぶべき空間であることを発見し、regular semisimple Hessenberg 多様体と twin それぞれのコホモロジーの間の関係を記述した。また、(unicellular) LLT 多項式は skew Schur 関数の積の q -類似として定義され、Carlson-Mellit[4] により chromatic symmetric function との対応関係が記述された。これらの関係を図に表すと次のようになる。

* e-mail: 00tkshst00@gmail.com

キーワード : Hessenberg 多様体, Hessenberg twins, chromatic symmetric functions, LLT 多項式



この四角形において、我々は2つの縦の辺で表された関係が“並行”であることを発見し、下辺の“等号”を示した。

2 Regular semisimple Hessenberg 多様体と chromatic symmetric functions

この章では上辺の等号について説明する。

2.1 Hessenberg 多様体

定義 2.1. Hessenberg 多様体とは旗多様体

$$\text{Fl}(\mathbb{C}^n) = \{V_\bullet = (V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim V_i = i\}$$

の subvariety であり、 $n \times n$ 行列 S と Hessenberg 関数と呼ばれる関数 $h: [n] \rightarrow [n]$ を用いて次のように定められる。

$$\text{Hess}(S, h) = \{V_\bullet \in \text{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid SV_i \subset V_{h(j)} \text{ for any } j \in [n]\}$$

ここで $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ を表し、 $h: [n] \rightarrow [n]$ が Hessenberg 関数であるとは、単調非減少かつ任意の $i \in [n]$ で $h(i) \geq i$ が成り立つときに言う。

Hessenberg 多様体は De Mari-Procesi-Shayman[5] によって定められた variety である。それは permutohedral variety などの重要な variety を含んでおり、また旗多様体の量子コホモロジーの計算などにも用いられる。また、旗多様体のコホモロジー環は Weyl 群の余不変式環になるが、regular nilpotent と呼ばれるタイプの Hessenberg 多様体のコホモロジー環は、その Borel の結果をそのまま拡張した形で記述できることが知られている [6]。このような観点から、Hessenberg 多様体は重要な subvariety の族だと考えられている。

Hessenberg 多様体は B 型や C 型など一般の型の旗多様体に対して定めることができるが、[1] では A 型の Hessenberg 多様体のみを扱っており、本稿もそのようにする。行列 S が互いに異なる固有値を持つとき、 $\text{Hess}(S, h)$ は regular semisimple であると呼ばれる。

Regular semisimple Hessenberg 多様体には、左からの積として定まる T -作用がある。

命題 2.2 ([5]). *Regular semisimple Hessenberg* 多様体 $\text{Hess}(S, h)$ に対し次が成立する。

- $\text{Hess}(S, h)$ は滑らかな多様体である。
- $\dim \text{Hess}(S, h) = 2 \sum_{i=1}^n (h(i) - i)$
- 固定点集合は $\text{Hess}(S, h)^T = \text{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$
- $H^{\text{odd}}(\text{Hess}(S, h)) = 0$

また、regular semisimple Hessenberg 多様体は全て互いに C^∞ 級同相である。ゆえに regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーは S の選択によらない。以降では、 S は対角行列であって、互いに異なる固有値を持つものとする。上記の理由により S を書かなくても不都合は生じないので、 $\text{Hess}(S, h)$ を以降では $X(h)$ と書くことにする。また、以降ではコホモロジーは常に \mathbb{C} 係数で考えることにする。

ここで $X(h)$ には T -作用があるので、この作用に関し同変コホモロジー $H_T^*(X(h)) = H^*(ET \times_T X(h))$ を考えることにする。上で述べたように $H^{\text{odd}}(\text{Hess}(S, h)) = 0$ であるので $X(h)$ は equivariantly formal であり、包含写像が誘導する写像

$$\iota_1^*: H_T^*(X(h)) \rightarrow H_T^*(X(h)^T) \cong \text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$$

は単射である。以降、この単射を用いて $H_T^*(X(h))$ の元を写像 $f: \mathfrak{S}_n \rightarrow H^*(BT)$ として扱う。より詳しく言えば、 $\text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ における上記の単射の像を局所的な条件で記述できる。これは後で命題 2.3 として紹介する。

ここで $H^*(BT)$ をより具体的に記述するために、 $\pi_i: T \rightarrow S^1$ を (i, i) 成分を取り出す写像として、 $\mathbb{C}(\pi_i)$ を π_i が定める T -加群とする。次の直線束

$$ET \times_T \mathbb{C}(\pi_i) \rightarrow ET/T = BT$$

の第 1 Chern 類を $t_i \in H^2(BT)$ と書くと、

$$H^*(BT) = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$$

である。また、 $H^2(BT)$ には \mathfrak{S}_n が作用しており、 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\sigma \cdot t_i = t_{\sigma(i)}$ である。また、この作用は自然に $H^*(BT)$ 上の作用に拡張される。つまり、 $f, g \in H^*(BT)$ に対し $\sigma \cdot (fg) = (\sigma \cdot f)(\sigma \cdot g)$ として拡張される。

ここで ι_1^* の像を正確に記述しておく。

命題 2.3 (cf. [8]).

$$\text{Im } \iota_1^* = \left\{ f \in \text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT)) \left| \begin{array}{l} f(w) - f(w(i, j)) \equiv 0 \pmod{t_{w(i)} - t_{w(j)}} \\ \text{for any } w \in \mathfrak{S}_n \text{ and } i < j \leq h(i) \end{array} \right. \right\}$$

定義 2.4 ([7]). $f \in H_T^*(X(h))$ とする。 $H_T^*(X(h))$ 上の \mathfrak{S}_n -作用を

$$(\sigma \cdot f)(w) = \sigma \cdot (f(\sigma^{-1}w))$$

で定める。これを dot action と呼ぶ。

左辺は $\text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ への作用、右辺は $H^*(BT)$ への作用であることに注意。簡単な計算で $H_T^*(X(h))$ が $\dot{\text{action}}$ で閉じていることが分かる。

$H_T^*(X(h))$ の元と $\dot{\text{action}}$ の具体例を挙げる。まず

$$x_i(w) = w \cdot t_i = t_{w(i)}$$

で定めると、 $x_i \in H_T^*(X(h))$ である。これは幾何学的には旗多様体のトートロジカル直線束の第 1 同変 Chern 類として得られるものを $X(h)$ に制限したものである。常に t_i に値を取る定値関数 $\mathfrak{S}_n \rightarrow H^*(BT)$ も t_i で表すことにする。これは $ET \times_T X(h) \rightarrow BT$ による引き戻しである。

さて、この 2 種類の $H_T^*(X(h))$ の元が $\dot{\text{action}}$ でどう動くか見ると

- $(\sigma \cdot x_i)(w) = \sigma \cdot (x_i(\sigma^{-1}w)) = \sigma \cdot t_{\sigma^{-1}w(i)} = t_{w(i)} = x_i(w)$
- $(\sigma \cdot t_i)(w) = \sigma \cdot (t_i(\sigma^{-1}w)) = \sigma \cdot t_i = t_{\sigma(i)} = t_{\sigma(i)}(w)$

となる。つまり

$$\sigma \cdot x_i = x_i, \quad \sigma \cdot t_i = t_{\sigma(i)}$$

であることが分かる。

ここで次数付き $H^*(BT)$ -加群として $H_T^*(X(h)) \cong H^*(BT) \otimes H^*(X(h))$ であり、

$$H^*(X(h)) = H_T^*(X(h)) / (t_1, \dots, t_n)$$

である。Dot action はイデアル (t_1, \dots, t_n) を変えないので、dot action は $H^*(X(h))$ 上の作用を定める。つまり $H^*(X(h))$ は \mathfrak{S}_n の次数付き表現となる。

2.2 chromatic symmetric functions

本稿において、グラフは単純なもののみを考え、辺の向き付けは考えないものとする。

定義 2.5. Hessenberg 関数 $h: [n] \rightarrow [n]$ に対し、それに付随するグラフ G_h を次で定義する。 G_h の頂点集合は $[n]$ であり、 $i < j \leq h(i)$ のとき $\{i, j\}$ は G_h の辺である。

グラフ G の coloring $\kappa: G \rightarrow \mathbb{N}$ とは G の頂点集合から \mathbb{N} への写像のことである。頂点集合が $[n]$ であるようなグラフ G に対し、coloring $\kappa: G \rightarrow \mathbb{N}$ の ascent と呼ばれる数を

$$\text{asc}(\kappa) = \#\{\{i, j\} \in E(G) \mid i < j, \kappa(i) < \kappa(j)\}$$

で定める。また、coloring $\kappa: G \rightarrow \mathbb{N}$ が proper であるとは、任意の G の辺 $\{i, j\}$ に対し、 $\kappa(i) \neq \kappa(j)$ であるときに言う。

定義 2.6. $i \in \mathbb{N}$ に対し z_i を変数とする。頂点集合が $[n]$ であるようなグラフ G に対し、その chromatic quasisymmetric function $\text{csf}_G(q)$ を以下で定義する。

$$\text{csf}_G(q) = \sum_{\kappa: G \rightarrow \mathbb{N}, \text{proper}} z^\kappa q^{\text{asc}(\kappa)}$$

ここで $z^\kappa = \prod_{i=1}^n z_{\kappa(i)}$ を表す。

Hessenberg 関数 h に対し、 $\text{csf}_{G_h}(q)$ は z_i たちの対称関数係数の多項式であることが知られている [9]。ゆえに以降では $\text{csf}_{G_h}(q)$ のことを単に G_h の chromatic symmetric function と呼ぶ。グラフ G の chromatic symmetric function は G の chromatic polynomial の一般化になっている。

2.3 Shareshian-Wachs 予想

Regular semisimple Hessenberg 多様体 $X(h)$ と chromatic symmetric functions $\text{csf}_{G_h}(q)$ の間の次の対応は Shareshian-Wachs 予想と呼ばれ、Brosnan-Chow により肯定的に解決された。

定理 2.7 ([2]). Hessenberg 関数 h に対し、

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{ch}(H^{2i}(X(h)))q^i = \omega(\text{csf}_{G_h}(q))$$

ここで ch は Frobenius characteristic であり、 ω は対称関数の involution である。

上式の左辺は $H^*(X(h))$ の Frobenius series と呼ばれる。実際には無限和でなく $0 \leq i \leq \dim_{\mathbb{C}} X(h)$ という i に渡っての和ではあるが、記号が煩雑になるのを避けるためこのように書いた。また昨年、Kiem-Lee[10] によって、この定理の簡明な別証明が与えられた。

3 Twins

この章では Introduction の四角形の左辺について述べる。

3.1 Twin の定義

$U(n)$ を n 次ユニタリー群、 $T \subset U(n)$ を対角行列で対角成分の絶対値が 1 であるような行列全体とする。このとき T は $U(n)$ の極大トーラスとなっている。旗多様体 $\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ を $U(n)/T$ と同一視すると、Hessenberg 多様体は次のように書くこともできる。

$$X(h) = \{gT \in U(n)/T \mid g^{-1}Sg \in M_h\}$$

ここで M_h は、次を満たすエルミート行列全体の集合である: $h(i) < j$ または $i > h(j)$ ならば (i, j) 成分は 0 である。このとき、対角行列 S と T の元は可換なので、射影 $U(n) \rightarrow U(n)/T$ によって $X(h)$ を引き戻した空間は左からの T の積による作用で閉じた空間になっている。

定義 3.1. Regular semisimple Hessenberg 多様体 $X(h)$ の twin と呼ばれる多様体 $Y(h)$ を次で定義する。

$$Y(h) = \{gT \in U(n)/T \mid gSg^{-1} \in M_h\}$$

M_h は T の随伴作用で不変なので、 $Y(h)$ にも T が左からの積で作用している。また、Ayzenberg-Buchstaber[3] での $Y(h)$ の定義は、 $X(h)$ の $U(n) \rightarrow U(n)/T$ の引き戻しを左からの積による T -作用で割った空間 ($\subset T \backslash U(n)$) であった。本稿では各元の逆元を取ることによって $Y(h) \subset U(n)/T$ としている。ゆえに $X(h)$ の T -作用の固定点で置換行列 w が代表するものは、 $Y(h) \subset U(n)/T$ においては w^{-1} に対応していることを注意しておく。

注意 3.2. Ayzenberg-Buchstaber[3] では regular semisimple Hessenberg 多様体を Y_h と書き、その twin を X_h と書いている。本稿とは X と Y の使い方が逆であることに注意。

Twin $Y(h)$ は $X(h)$ と似た性質を多く持ち、次が成立する。

命題 3.3 ([3]). Regular semisimple Hessenberg 多様体の twin $Y(h)$ に対し次が成立する。

- $Y(h)$ は滑らかな多様体である。
- $\dim Y(h) = 2 \sum_{i=1}^n (h(i) - i)$
- 固定点集合は $Y(h)^T = \text{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$
- $H^{\text{odd}}(Y(h)) = 0$

しかし、一般には $Y(h)$ は $\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の subvariety でないことが知られている。

3.2 $X(h)$ と $Y(h)$ のコホモロジーの関係

まず $Y(h)$ の同変コホモロジー環について述べる。 $X(h)$ のときと同様に、包含写像が誘導する写像

$$\iota_2^*: H_T^*(Y(h)) \rightarrow H_T^*(Y(h)^T) = \text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$$

は単射である。やはり $H_T^*(Y(h))$ の元を写像 $\mathfrak{S}_n \rightarrow H^*(BT)$ として扱うことにする。ここでも $\text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ における上記の単射の像を局所的な条件で記述できる。

命題 3.4 ([3]).

$$\text{Im } \iota_2^* = \left\{ f \in \text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT)) \left| \begin{array}{l} f(w) - f(w(i, j)) \equiv 0 \pmod{t_i - t_j} \\ \text{for any } w \in \mathfrak{S}_n \text{ and } i < j \leq h(i) \end{array} \right. \right\}$$

常に t_i に値を取る定値関数 $t_i: \mathfrak{S}_n \rightarrow H^*(BT)$ は $H_T^*(Y(h))$ の元である。また、 $y_i \in \text{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ を

$$y_i(w) = x_i(w^{-1}) = t_{w^{-1}(i)}$$

で定めると、これも $H_T^*(Y(h))$ の元である。これも旗多様体のトートロジカル直線束の第 1 同変 Chern 類の引き戻しで得られる。

ここで $\xi: H_T^*(Y(h)) \rightarrow H_T^*(X(h))$ を、 $f \in H_T^*(Y(h))$, $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し

$$(\xi(f))(w) = w \cdot (f(w))$$

で定める。

命題 3.5 ([3]). 環として次の同型がある。

$$\xi: H_T^*(Y(h)) \cong H_T^*(X(h))$$

一般には $X(h)$ と $Y(h)$ の間に T -同変な同相写像があるわけではないことに注意。実際に、この同型は $H^*(BT)$ -代数としての同型ではない。これは次の計算からも分かる。上に挙げた具体的な元の ξ による像を考える。

- $(\xi(t_i))(w) = w \cdot (t_i(w)) = w \cdot t_i = t_{w(i)} = x_i(w)$
- $(\xi(y_i))(w) = w \cdot (y_i(w)) = w \cdot t_{w^{-1}(i)} = t_i = t_i(w)$

つまり

$$\xi(t_i) = x_i, \quad \xi(y_i) = t_i$$

である。

また ξ を通して $H_T^*(X(h))$ 上の dot action を $H_T^*(Y(h))$ 上の作用と見ることができ、これを dagger action と呼ぶ。つまり

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(Y(h)) & \xrightarrow{\xi} & H_T^*(X(h)) \\ \sigma \dagger \downarrow & & \sigma \cdot \downarrow \\ H_T^*(Y(h)) & \xrightarrow{\xi} & H_T^*(X(h)) \end{array}$$

が可換になるように $H_T^*(Y(h))$ 上の dagger action を定める。式で書くと

$$(\sigma \dagger f)(w) = f(\sigma^{-1}w)$$

となる。上の可換図式と dot action の計算からすぐに

$$\sigma \dagger t_i = t_i, \quad \sigma \dagger y_i = y_{\sigma(i)}$$

であることが分かる。

さて、 $Y(h)$ の通常のコホモロジーは同変コホモロジーから復元でき、dagger action は t_i を動かさないのので、dagger action も $H^*(Y(h))$ 上の作用に落とすことができる。さらに、命題 3.5 を用いると

$$H^*(Y(h)) \cong H_T^*(Y(h))/(t_1, \dots, t_n) \cong H_T^*(X(h))/(x_1, \dots, x_n)$$

であり、結局 $H^*(Y(h))$ 上の dagger action を考える際は、 $H_T^*(X(h))/(x_1, \dots, x_n)$ 上の dot action を考えれば良い。このようにして $H^*(Y(h))$ は次数付き \mathfrak{S}_n -表現となる。

命題 3.6. 次数付き \mathfrak{S}_n -表現として次が成立する。

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes H^*(Y(h)) \cong H^*(X(h)) \otimes \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$$

上式では $H^*(Y(h))$ にのみ dagger action を考えており、他は dot action を考えている。ここで x_i は dot action で動かないので、 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ は自明表現からなり、その Frobenius series は

$$\frac{1}{(1-q)^n} = (1-q)^{-n}$$

となる。

4 unicellular LLT 多項式

この章では Introduction の四角形の右辺について述べる。

4.1 unicellular LLT 多項式の定義

LLT 多項式は skew Young diagram の組に対して定められる対称関数係数の多項式で、skew Schur 関数の積の q -類似として定められた。本稿では各 skew Young diagram が単一のセルからなる場合の LLT 多項式、つまり unicellular LLT 多項式のみを扱い、一般の場合の LLT 多項式の定義は割愛する。実は Hessenberg 関数は unicellular LLT 多項式と 1 対 1 対応しており、 h に対応する unicellular LLT 多項式を $\text{LLT}_h(q)$ と表すことにすると、 h に付随するグラフ G_h を用いて次のように書くことができる。

定義 4.1. Hessenberg 関数 h に対し、

$$\text{LLT}_h(q) = \sum_{\kappa: G_h \rightarrow \mathbb{N}} z^\kappa q^{\text{asc}(\kappa)}$$

と定める。

この定義は、chromatic symmetric function の定義（定義 2.6）の coloring の条件から proper を除いたものに一致している。

4.2 $\text{csf}_{G_h}(q)$ と $\text{LLT}_h(q)$ の関係

これ以降、 $\text{csf}_{G_h}(q)$ と $\text{LLT}_h(q)$ を係数である z_i たちの対称関数の部分を操作するために、それぞれ $\text{csf}_{G_h}(\mathbf{z}; q)$, $\text{LLT}_h(\mathbf{z}; q)$ と書くことにする。

命題 4.2 ([4]).

$$\text{LLT}_h[(q-1)Z; q] = (q-1)^{-n} \text{csf}_{G_h}(\mathbf{z}; q)$$

ここで $Z = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ であり、 $\text{LLT}_h[(q-1)Z; q]$ は *plethysm* を表す。

注意 4.3. ここでは plethysm について詳しく述べないが、対称関数における特殊な代入操作である。 z_i たちの対称関数 $\varphi(\mathbf{z})$ に対し $\varphi[Z]$ は $\varphi(\mathbf{z})$ 自身である。詳しくは [11] の 3.3 節などを参照せよ。

命題 4.4. φ を次数 n の斉次対称関数とすると、次が成立する。

$$\omega(\varphi[Z]) = (-1)^n \varphi[-Z]$$

5 主結果

奇数次が消えているような次数付き表現 V に対し、 $F_V(\mathbf{z}; q)$ で V の Frobenius series を表すことにする。定理 2.7 と命題 4.2 と 4.4 より

$$\begin{aligned} F_{H^*(X(h))}(\mathbf{z}; q) &= \omega(\text{csf}_{G_h}(\mathbf{z}; q)) = \omega((q-1)^{-n} \text{LLT}_h[(q-1)Z; q]) \\ &= (1-q)^{-n} \text{LLT}_h[(1-q)Z; q] \end{aligned} \quad (1)$$

である。右辺の $(1-q)^{-n}$ は $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ の Frobenius series であることに注意すると、幾何的な状況との対応が理解しやすいのではないと思われる。また、命題 3.6 における $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ も、式 (1) の右辺の plethysm を解消する形で、次の命題により現れる。

命題 5.1 ([11]). 次が成立する。

$$F_V \left[\frac{Z}{1-q}; q \right] = F_{V \otimes \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]}(\mathbf{z}; q)$$

ゆえに、この命題と命題 3.6 および式 (1) を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned} (1-q)^{-n} F_{H^*(Y(h))}(\mathbf{z}; q) &= F_{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes H^*(Y(h))}(\mathbf{z}; q) = F_{H^*(X(h)) \otimes \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]}(\mathbf{z}; q) \\ &= F_{H^*(X(h))} \left[\frac{Z}{1-q}; q \right] = (1-q)^{-n} \text{LLT}_h(\mathbf{z}; q) \end{aligned}$$

この両辺に $(1-q)^n$ を掛けることで次が得られ、これが Introduction の四角形の底辺の等号であり、[1] の主結果である。

定理 5.2 ([1, Proposition 4.1.3]). *Hessenberg* 関数 h に対し、次が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{ch}(H^{2i}(Y(h)))q^i = \text{LLT}_h(q)$$

注意 5.3. [1] の発表後、Precup-Sommers[12] もこの定理を証明していることを宇部高等専門学校の堀口達也氏から指摘頂いた。また、Kiem-Lee[13] による別証明もごく最近与えられた。

現在研究中であるが、[13] に触発されて、定理 5.2 の直接的な証明を与えることができた。これは [13] と比べてもより初等的な証明であり、さらに ξ を通じて定理 2.7 の直接的な証明も与えることができ、両者を統一的に証明することができた。この結果は柘田幹也氏、堀口達也氏との共同研究である。

参考文献

- [1] M. Masuda and T. Sato, *Unicellular LLT polynomials and twins of regular semisimple Hessenberg varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN, rnac359 (2023).
- [2] P. Brosnan and T. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. 329 (2018), 955–1001.

- [3] A. Ayzenberg and V. Buchstaber, *Manifolds of isospectral matrices and Hessenberg varieties*, Int. Math. Res. Not. 2021, no. 21, 16671–16692.
- [4] E. Carlsson and A. Mellit, *A proof of the shuffle conjecture*, J. of Amer. Math. Soc. 31 (2017):661–697.
- [5] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 332 (1992), no. 2, 529–534.
- [6] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, J. Reine Angew. Math. 764, 241–286 (2020).
- [7] J. Tymoczko, *Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties*, Contemp. Math. 460 (2008), 365–384.
- [8] V. Guillemin and C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. 107 (2001), no. 2, 283–349.
- [9] J. Shareshian and M. L. Wachs, *Chromatic quasisymmetric functions*, Adv. Math. 295 (2016), 497–551.
- [10] Y.H. Kiem and D. Lee, *Birational geometry of generalized Hessenberg varieties and the generalized Shareshian-Wachs conjecture* arXiv:2208.12282.
- [11] M. Haiman, *Combinatorics, symmetric functions, and Hilbert schemes*, Current developments in mathematics, 2002, 39–111, Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [12] M. Precup and E. Sommers, *Perverse sheaves, nilpotent Hessenberg varieties, and the modular law*, arXiv:2201.13346.
- [13] Y.H. Kiem and D. Lee, *Geometry of the twin manifolds of regular semisimple Hessenberg varieties and unicellular LLT polynomials*, arXiv:2307.01130.

Biquandle Brackets and Quivers

Sam Nelson*

Abstract

In this brief expository article we review the background for biquandle bracket quivers – including biquandles, biquandle homsets, biquandle coloring quivers and biquandle brackets – for a talk at the 70th Topology Symposium at Nara Women’s University in August 2023.

KEYWORDS: Quantum enhancements, biquandles, biquandle counting invariants, biquandle brackets, trace diagrams, quivers

2020 MSC: 57K12

1 Introduction

Biquandles are algebraic structures with axioms motivated by the Reidemeister moves in knot theory. Every oriented knot or link L in \mathbb{R}^2 or S^2 has a *fundamental biquandle* $\mathcal{B}(L)$ analogous to the fundamental group of a topological space. A finite biquandle X determines an invariant of oriented knots and links called the *biquandle homset invariant* $\text{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$ consisting of biquandle homomorphisms from the fundamental biquandle of L to X . These homset elements have the property that they can be represented visually as *colorings* of a diagram of the oriented knot or link L analogously to the way linear transformations between vector spaces are represented by matrices. In particular, choosing a different diagram of L yields a different representation of the homset elements analogously to the way choosing a different basis yields a different matrix representing the same linear transformation, with the role of change-of-basis matrices played in the biquandle homset case by biquandle-colored Reidemeister moves. See [5, 10] for more.

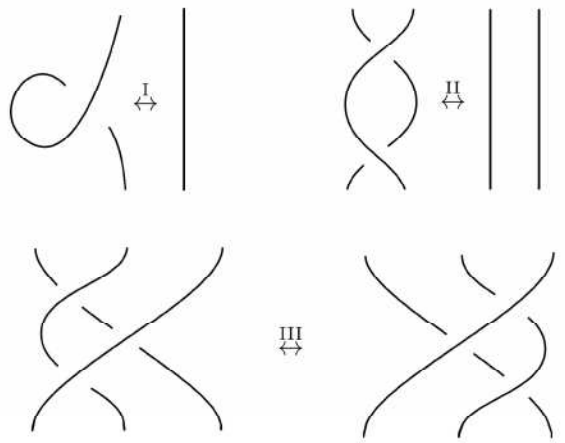
From the homset, many useful computable invariants can be defined. The simplest of these is the cardinality of the homset, a non-negative integer-valued oriented link invariant known in the literature as the *biquandle counting invariant*, denoted $\Phi_X^{\mathbb{Z}}(L)$. Any invariant ϕ of biquandle-colored diagrams determines a multiset-valued invariant of oriented knots and links called an *enhancement* of the counting invariant. The first such examples use a cohomology theory on the category of biquandles to define *2-cocycle* and *3-cocycle* invariants, multiset-valued invariants which can be transformed into polynomial invariants which evaluate to $\Phi_X^{\mathbb{Z}}(L)$ at zero but in general are stronger invariants; see [1]. A more recent example of an enhancement is the *biquandle coloring quiver* associated to a subset S of the automorphism group of the finite biquandle X ; such a subset determines a directed graph-valued enhancement of the counting invariant. Since directed graphs (also known as *quivers*) are categories, this enhancement is actually a *categorification* of the counting invariant. Several new polynomial invariants can be obtained from these quivers via different forms of decategorification; see [2–4, 6, 9].

Our main interest in this manuscript is in a family of enhancements known as *biquandle brackets*. These are a type of *quantum enhancement*, i.e. quantum invariants of biquandle-colored oriented knots and links representing elements of the homset $\text{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$. In this manuscript and its associated talk, we review (in a fairly self-contained way) biquandles and biquandle quivers, leading up to biquandle brackets and biquandle bracket quivers. In Section 2 we review the basics of biquandles and the biquandle homset invariant. In Section 5 we review the quiver categorification of the biquandle homset invariant. In Section 4 we review biquandle brackets and their categorification via quivers. We conclude in Section 5 with a few words about current work in this area.

*Email: Sam.Nelson@cmc.edu. Partially supported by Simons Foundation collaboration grant 702597.

2 Knots, Biquandles and Biquandle Coloring

A *knot* is an embedding $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ or $K : S^1 \rightarrow S^3$; we may also consider the image of such an embedding as a knot. A *link* is a disjoint union of knots. A knot is *tame* if the embedding is piecewise-linear or (equivalently) C^∞ . In the 1920s, Kurt Reidemeister, a mathematician at the Georg August Universität in Göttingen, Germany, proved that two diagrams represent ambient isotopic tame knots in S^3 iff they are related by a sequence of the following moves, now known as *Reidemeister moves*:



For the remainder of this Manuscript, we will consider only tame knots and links. See [15] for more.

Thus, to prove that two diagrams represent the same knot, it suffices to identify a sequence of Reidemeister moves changing one diagram to the other. To prove that two diagrams represent different knots, we can identify *knot invariants*, functions $f : \mathcal{D} \rightarrow X$ taking knot diagrams as inputs and giving output values in some set X (which could be integers, polynomials, graphs etc.) with the property that diagrams differing by Reidemeister moves have the same function value, i.e.,

$$D \sim D' \Rightarrow f(D) = f(D').$$

Then if two knot diagrams share the same value of an invariant, it says nothing – the two diagrams could represent the same knot or they could just coincidentally have the same value; however, if two diagrams have different values of an invariant, then they cannot be related by Reidemeister moves and hence must represent different knots.

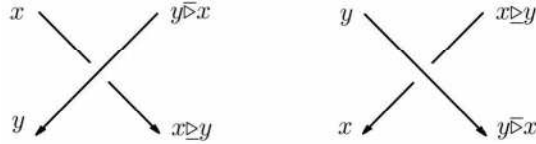
To define invariants, we need to find things that are not changed by Reidemeister moves. One way to do this is to use the power of universal algebra, creating algebraic structures with axioms derived from the Reidemeister moves. The example of interest for this manuscript is the algebraic structure known as *biquandles* (see [5, 10] for more).

Definition 1. A *biquandle* is a set X with a pair of binary operations $\triangleright, \bar{\triangleright} : X \times X \rightarrow X$ satisfying the axioms

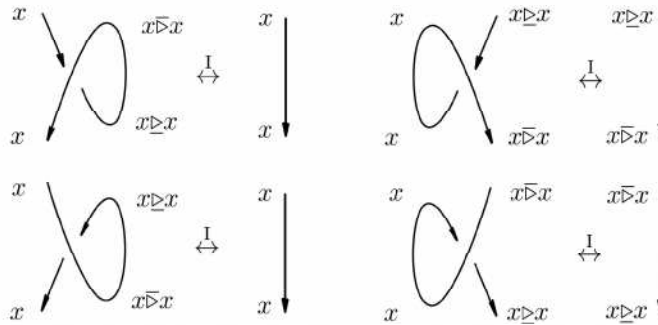
- (i) For all $x \in X$, $x \triangleright x = x \bar{\triangleright} x$,
- (ii) For all y in X , the maps $\alpha_y, \beta_y : X \rightarrow X$ defined by $\alpha_y(x) = x \bar{\triangleright} y$ and $\beta_y(x) = x \triangleright y$ and the map $S : X \times X \rightarrow X \times X$ defined by $S(x, y) = (y \bar{\triangleright} x, x \triangleright y)$ are invertible, and
- (iii) For all $x, y, z \in X$, we have

$$\begin{aligned} (x \triangleright y) \triangleright (z \triangleright y) &= (x \triangleright z) \triangleright (y \bar{\triangleright} z) \\ (x \triangleright y) \bar{\triangleright} (z \triangleright y) &= (x \bar{\triangleright} z) \triangleright (y \bar{\triangleright} z) . \\ (x \bar{\triangleright} y) \bar{\triangleright} (z \bar{\triangleright} y) &= (x \bar{\triangleright} z) \bar{\triangleright} (y \triangleright z) \end{aligned}$$

These axioms result from interpreting the elements of X as labels or “colors” for the semiarcs (segments between crossings) in an oriented knot diagram and interpreting the operations as over- and under-crossing rules as shown:



Then axiom (i) expresses the four oriented versions of the Reidemeister I move:



Similarly axiom (ii) expresses the four oriented Reidemeister II moves and axiom (iii) expresses the all-positive Reidemeister III move.

Since these moves form a generating set of oriented Reidemeister moves (see [14]), we have:

Theorem 1. *If X is a biquandle and D and D' are oriented knot or link diagrams related by Reidemeister moves, there is a one-to-one correspondence between the set of X -colorings of D and the set of X -colorings of D' .*

See [5, 10] for more details.

Definition 2. A map $f : X \rightarrow Y$ between biquandles is a *homomorphism* if for all $x, y \in X$ we have

$$f(x \geq y) = f(x) \geq f(y) \text{ and } f(x \bar{\geq} y) = f(x) \bar{\geq} f(y).$$

A bijective homomorphism is an *isomorphism*.

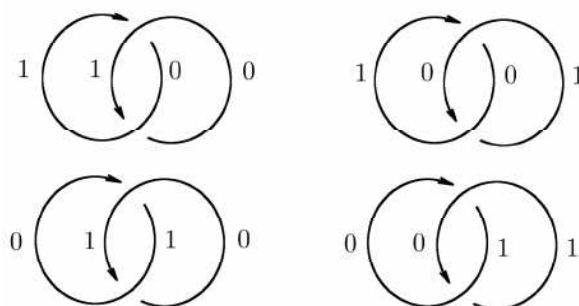
Example 1. Given a diagram representing an oriented knot or link diagram L , we define the *fundamental biquandle* $\mathcal{B}(L)$ in the following way:

- We form a set of *generators* consisting of a symbol for each semiarc in the diagram,
- We form a set of *biquandle words* including generators and expressions of the forms $u \geq v$, $u \bar{\geq} v$, $\alpha_u^{-1}(v)$, $\beta_u^{-1}(v)$ and $S_i^{-1}(x_j, x_k)$ for $i \in \{1, 2\}$ (we interpret $S_i^{-1}(u, v)$ as the i th component of $S^{-1}(u, v)$) where u, v are biquandle words,
- Then $\mathcal{B}(L)$ is the set of equivalence classes of biquandle words under the equivalence relation generated by the biquandle axioms and the crossing relations.

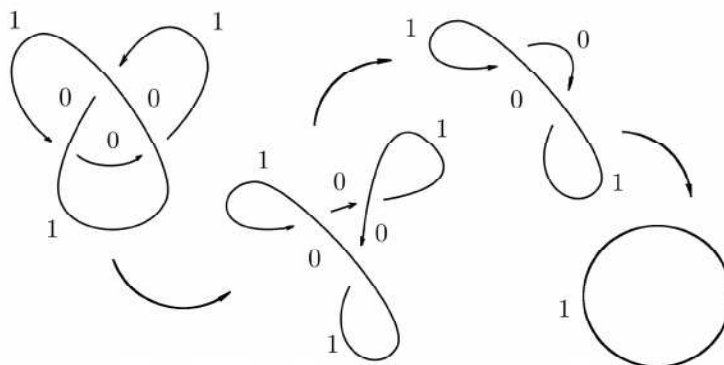
The set of generators and crossing relations (taking the biquandle axioms as understood) is known as a *biquandle presentation*. Reidemeister moves on diagrams produce Tietze moves on the presentation, resulting in isomorphic biquandles; hence, the fundamental biquandle does not depend on our choice of diagram for L and is a link invariant.

An X -coloring of an oriented knot or link diagram D is an assignment of an image in X to each generator of $\mathcal{B}(L)$ satisfying the crossing relations and hence determines a unique biquandle homomorphism $f : \mathcal{B}(K) \rightarrow X$. Thus the set of biquandle colorings of a diagram D of an oriented knot or link L can be identified with the homset $\text{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$. In particular, a choice of diagram for L is analogous to a choice of basis for a vector space – just as a linear transformation $f : X \rightarrow Y$ is determined by a choice of output vector for each input basis vector, a biquandle homset element is determined by a choice of output color in X for each semiarc in our chosen diagram of L such that the crossing relations are satisfied in X . Different choices of diagram for L yield different representations of the same homset element just as different choices of basis yield different matrices representing the same linear transformation, with the role of change-of-basis matrices played by X -colored Reidemeister moves.

Example 2. Let X be the biquandle $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ with $x \triangleright y = x \bar{\triangleright} y = x + 1$ and consider the Hopf link L . The homset $\text{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$ has four elements which we can represent with the set of X -colored diagrams



Example 3. Each of the diagrams below represents the same homset element in $\text{Hom}(\mathcal{B}(L), X)$ where L is the unknot and X is the biquandle in Example 2.



See [5] for more.

3 Quivers and Categorification

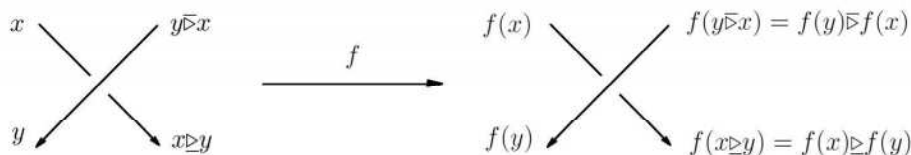
Categories are algebraic structures consisting of a collection of *objects* and for each pair of objects X, Y a set of *morphisms* denoted $\text{Hom}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$ satisfying certain axioms. Examples include the category of sets and functions, the category of vector spaces and linear transformations, the category of groups and group homomorphisms, the category of topological spaces and continuous maps, etc. Indeed, many subject areas of mathematics can be described in category-theoretic terms. Connections between these subject areas can often be formalized as maps known as *functors* between categories, e.g. the fundamental

group functor π_1 which transforms topological questions into group-theoretic questions. Similarly, functors known as *homology theories* measure information about topological or algebraic structures in terms of chain complexes and homology groups.

In the late 1990s, mathematical physicists such as Louis Crane and (my former colleague) John Baez proposed a program of *categorification* wherein simpler structures are replaced with richer categorical structures. For example, we might replace natural numbers n with vector spaces of dimension n , addition with direct sum and multiplication with tensor product. As a result, we get a richer and more powerful structure – while integers can be either equal or not, vector spaces may be identical, distinct but isomorphic, or different. From these richer structures we can recover the original simpler structures and potentially get new ones via *decategorification*, e.g. taking the dimension of the vector spaces. Famous examples in recent decades include Khovanov homology (categorifying the Jones polynomial) and Knot Floer homology (categorifying the Alexander polynomial).

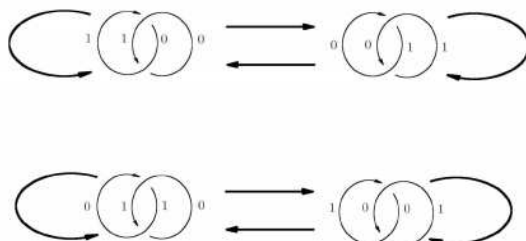
Directed graphs, sometimes known as *quivers* (as collections of arrows), form categories with vertices as objects and directed paths as morphisms. In recent years my students, professional collaborators and I have used quivers to categorify several enhancements of the biquandle counting invariant; see [2–4, 9, 11] for more.

For this section we will focus on one example, the biquandle coloring quiver. Let X be a finite biquandle and D an oriented knot or link diagram with a choice of coloring X -coloring, and let $f : X \rightarrow X$ be a biquandle endomorphism. Then applying f to each color on the diagram D yields another assignment of elements of X to generators of $\mathcal{B}(D)$, and the fact that f is a quandle endomorphism implies that this assignment is a valid X -coloring.



In particular, each endomorphism f determines an arrow from one coloring in the homset to another. Thus, a set S of endomorphisms of X determines a quiver structure on the homset which we call the *biquandle coloring quiver* associated to S . Changing the diagram D by X -colored Reidemeister moves does not change the homset or the resulting quiver, and hence the quiver is an invariant of knots and links for each S . In particular the case of $S = \emptyset$ can be identified with the original homset invariant. The case of $S = \text{Hom}(X, X)$, the entire set of endomorphisms, is called the *full quiver*.

Example 4. In our previous Example 2, the identity map and the map $f(x) = x + 1$ are the only endomorphisms. Then the full biquandle coloring quiver looks like



Such a quiver is a category and hence the biquandle coloring quiver is a categorification of the biquandle homset invariant; it decategorifies to the original homset by deleting the arrows. Other polynomial invariants such as the *in-degree polynomial* can be obtained as decategorifications; see [2, 4] for more.

4 Biquandle Brackets

In the 1980s, Vaughn Jones won the Fields medal for his introduction of a powerful knot invariant known as the *Jones polynomial*. The invariant can be defined using the *Kauffman bracket skein relation* which we may understand as thinking of crossings as linear combinations of *smoothings* or diagrams with crossings removed. More precisely, applying the skein relation to a diagram with a crossing replaces the diagram with a linear combination of two diagrams with the crossing removed and the resulting endpoints connected in the two possible ways with coefficients in $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$. Recursively applying this procedure to all crossings yields a linear combination of diagrams without crossings, known as *Kauffman states*. Evaluating each Kauffman state as δ^{k-1} where k is the number of components and $\delta = -A^2 - A^{-2}$ yields the *unnormalized Kauffman bracket polynomial*, and multiplying by $(-A^3)^{-wr}$ where wr is the *writhe* or number of positive crossings minus the number of negative crossings yields the Kauffman bracket polynomial, which can be easily checked to be invariant under Reidemeister moves.

For biquandle brackets we want to generalize the Kauffman bracket to the case of biquandle colored knots and links. To do this, we replace the Kauffman bracket skein relation with the skein relations

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} x \\ \diagdown \\ \diagup \\ y \end{array} = A_{x,y} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + B_{x,y} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\
 & \begin{array}{c} y \\ \diagdown \\ \diagup \\ x \end{array} = A_{x,y}^{-1} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + B_{x,y}^{-1} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}
 \end{aligned}$$

yielding *trace diagrams* with dashed signed edges called a *traces*. Traces act like crossings, enabling us to retain the biquandle colors in a homset element diagram. We now have skein coefficients $A_{x,y}$ and $B_{x,y}$ which are functions of the biquandle colors $x, y \in X$ on the left side of the crossing. Deleting the traces and colors in a fully-smoothed diagram yields the usual Kauffman states, and we require the elements $-A_{x,y}B_{x,y}^{-1} - A_{x,y}^{-1}B_{x,y}$ to be equal, with their common value denoted as δ .

The Reidemeister moves then impose some conditions on the skein coefficients:

$$\begin{aligned}
 A_{x,y}A_{y,z}A_{x \triangleright y, z \triangleright y} &= A_{x,z}A_{y \triangleright x, z \triangleright x}A_{x \triangleright z, y \triangleright z} \\
 A_{x,y}B_{y,z}B_{x \triangleright y, z \triangleright y} &= B_{x,z}B_{y \triangleright x, z \triangleright x}A_{x \triangleright z, y \triangleright z} \\
 B_{x,y}A_{y,z}B_{x \triangleright y, z \triangleright y} &= B_{x,z}A_{y \triangleright x, z \triangleright x}B_{x \triangleright z, y \triangleright z} \\
 A_{x,y}A_{y,z}B_{x \triangleright y, z \triangleright y} &= A_{x,z}B_{y \triangleright x, z \triangleright x}A_{x \triangleright z, y \triangleright z} + A_{x,z}A_{y \triangleright x, z \triangleright x}B_{x \triangleright z, y \triangleright z} \\
 &\quad + \delta A_{x,z}B_{y \triangleright x, z \triangleright x}B_{x \triangleright z, y \triangleright z} + B_{x,z}B_{y \triangleright x, z \triangleright x}B_{x \triangleright z, y \triangleright z} \\
 B_{x,y}A_{y,z}A_{x \triangleright y, z \triangleright y} + A_{x,y}B_{y,z}A_{x \triangleright y, z \triangleright y} \\
 + \delta B_{x,y}B_{y,z}A_{x \triangleright y, z \triangleright y} + B_{x,y}B_{y,z}B_{x \triangleright y, z \triangleright y} &= B_{x,z}A_{y \triangleright x, z \triangleright x}A_{x \triangleright z, y \triangleright z}.
 \end{aligned}$$

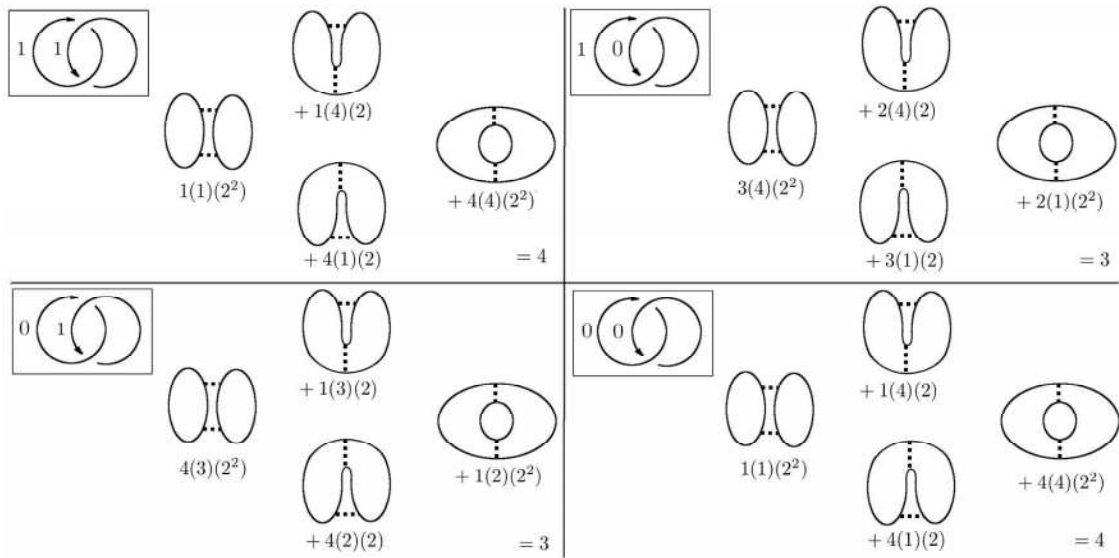
A biquandle bracket β defined on a biquandle X and a commutative unital ring R then consists of a pair of maps $A, B : X \times X \rightarrow R^\times$ such that the above equations are satisfied and the values $\delta = -A_{x,y}B_{x,y}^{-1} - A_{x,y}^{-1}B_{x,y}$ and $w = -A_{x,x}^2 B_{x,x}^{-1}$ are the same for all $x, y \in X$. Then for each X -coloring of an oriented link diagram D ,

the sum of the products of state values times smoothing coefficients times writhe adjustment w^{-wr} over the set of all Kauffman states, known as the *state-sum* value, is unchanged by X -colored Reidemeister moves, and the multiset of such values over the complete homset is an invariant of oriented knots and links.

Example 5. Let X be the biquandle from our previous Example 2 and let $R = \mathbb{Z}_5$. Then one can verify that the coefficient tables

$$\begin{array}{c|cc} A & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} B & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}$$

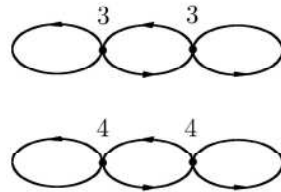
satisfy the biquandle bracket axioms with $\delta = 2$ and $w = 1$. Then the Hopf link with its four X -colorings has biquandle bracket multiset $\{3, 3, 4, 4\}$:



See [12, 13] for more details and examples.

Finally, we can categorify the biquandle bracket invariant using the biquandle coloring quiver. More precisely, where the biquandle bracket invariant is a multiset of β -values over the biquandle homset, a choice of set of biquandle endomorphisms S gives us an invariant quiver with vertices weighted with β -values which we call a *biquandle bracket quiver*.

Example 6. Continuing with the Hopf link and biquandle bracket from the previous examples, we have the following biquandle bracket quiver:



These quivers can become very large and complex very quickly, so for useful invariants it is helpful to decategorify in various ways to obtain easy-to-use polynomial invariants.

Example 7. Given a biquandle bracket quiver, we can sum over the set of arrows terms of the form $s^{S(a)}t^{T(a)}$ where $S(a)$ and $T(a)$ are the weights at the source and target of the arrow respectively. In the biquandle bracket quiver in Example 6 above, we get $4s^3t^3 + 4s^4t^4$ for this polynomial decategorification.

Example 8. Another decategorification uses the fact that while the out-degree of every vertex in a biquandle bracket quiver is the same, the in-degrees can be (and generally are) different. Thus, we can sum over the set of vertices terms of the form $u^{\beta(v)}w^{\deg_+(v)}$ where $\beta(v)$ is the weight at the vertex v and $\deg_+(v)$ is the in-degree of the vertex v . Then in our Example 6 we obtain $2u^3w^2 + 2u^4w^2$ for this decategorification.

See [6] for more.

5 Current and Future Work

I am currently working with several collaborators around the world on generalizations and extensions of these biquandle bracket quiver invariants, and other groups are also working on biquandle brackets. In [7] it is shown that many biquandle brackets are cohomologous to the Jones polynomial, meaning that biquandle bracket quivers yield a family of new categorifications of the Jones polynomial quite unlike Khovanov homology in various forms. In [8] biquandle brackets are generalized to picture-valued invariants.

Faster algorithms for finding biquandle brackets are of great interest, as are new methods of finding biquandle brackets over infinite coefficient rings. Work currently in preparation (check [arXiv.org](https://arxiv.org) soon!) includes *biquandle power brackets*, a major advancement over standard biquandle brackets in which the value δ of a Kauffman state component can vary as a function of the biquandle colors it contains, as well as *biquandle-colored Conway algebras* and extensions of the biquandle bracket to other algebraic structures.

References

- [1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito. State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 5:146–156, 1999.
- [2] J. Cenicerros and S. Nelson. Psyquandle coloring quivers. *Preprint, arXiv:2107.05668*.
- [3] K. Cho and S. Nelson. Quandle cocycle quivers. *Topology Appl.*, 268:106908, 10, 2019.
- [4] K. Cho and S. Nelson. Quandle coloring quivers. *J. Knot Theory Ramifications*, 28(1):1950001, 12, 2019.
- [5] M. Elhamdadi and S. Nelson. *Quandles—an introduction to the algebra of knots*, volume 74 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [6] P. C. Falkenburg and S. Nelson. Biquandle bracket quivers. *J. Knot Theory Ramifications (to appear)*.
- [7] W. Hoffer, A. Vengal, and V. Winstein. The structure of biquandle brackets. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(6):2050042, 13, 2020.
- [8] D. P. Ilyutko and V. O. Manturov. Picture-valued parity-biquandle bracket. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040004, 22, 2020.
- [9] K. Istambouli and S. Nelson. Quandle module quivers. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(12):2050084, 14, 2020.
- [10] L. H. Kauffman and D. Radford. Bi-oriented quantum algebras, and a generalized Alexander polynomial for virtual links. In *Diagrammatic morphisms and applications (San Francisco, CA, 2000)*, volume 318 of *Contemp. Math.*, pages 113–140. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

- [11] J. Kim, S. Nelson, and M. Seo. Quandle coloring quivers of surface-links. *J. Knot Theory Ramifications*, 30(1):Paper No. 2150002, 13, 2021.
- [12] S. Nelson, M. E. Orrison, and V. Rivera. Quantum enhancements and biquandle brackets. *J. Knot Theory Ramifications*, 26(5):1750034, 24, 2017.
- [13] S. Nelson and N. Oyamaguchi. Trace diagrams and biquandle brackets. *Internat. J. Math.*, 28(14):1750104, 24, 2017.
- [14] M. Polyak. Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quantum Topol.*, 1(4):399–411, 2010.
- [15] K. Reidemeister. *Knotentheorie*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. Reprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
CLAREMONT MCKENNA COLLEGE
850 COLUMBIA AVE.
CLAREMONT, CA 91711

2 1 世紀のルネ・トム ～ 生誕 1 0 0 周年に寄せて

大本 亨（早稲田大学理工学術院）*

2023 年 8 月 12 日

本講演では、数え上げ幾何学の基礎づけに掛かる私の研究（トム多項式理論 [16, 17, 18, 19, 21]）を軸に、その源泉たるトムの数学の現代に与える意味と価値を再考する。

1 トムとコボルディズム理論

1.1 ルネ・トム (René Thom) 私の学生時代の指導教員は福田拓生先生でその師がルネ・トムであった。福田先生は *Manifold Tokyo* (1970) でのトム来日の翌年に IHES に留学し、当時懸案だった「トムの第 1 アイソトピー補題」を証明して位相的構造安定性の理論に貢献した。その頃のトムや IHES の様子は福田先生の小文 [6] の中で垣間見ることができる。

よく知られるようにトムは彼の創始したコボルディズム理論で 1958 年にフィールズ賞を受賞した。その理論のインパクトは、アティヤとサリバンが追悼記事 [2, 23] で述懐している。またトムは、ほぼ同時期に、写像の特異点理論、力学系、特性類理論、分類空間、半代数的集合のトポロジーなどの諸分野を開拓したパイオニアであった。現在ではこれらの分野群は独自に分化し深化しているが、少なくとも当時のトムの考えでは、彼の横断性定理に依拠した《構造安定性の理論》の文脈の中で一続きの一貫した内容として捉えていたに違いない。確かにこれらのアイデアの多くは、彼の学位論文 [24] の中にすでにその原型が現れている。こうした 20 世紀の抽象数学を駆使する一方で、トムはフランス古典数学にも親しんでいた。実際、彼の初等カタストロフィーで重要な役割を果たす多項式標準形（非退化特異点、カスプ、ツバメの尾...）とその判別式は極めて古典的であるし、縮閉線・伸開線などの古典平面微分幾何は彼のコースティクスの理論の源泉である。モンジュやポンスレーによる曲面の輪郭線の射影幾何は今で言うところのポラー指数や特性類の話であって、後述するトム多項式の話題に直結する。



R. Thom (1923-2002)

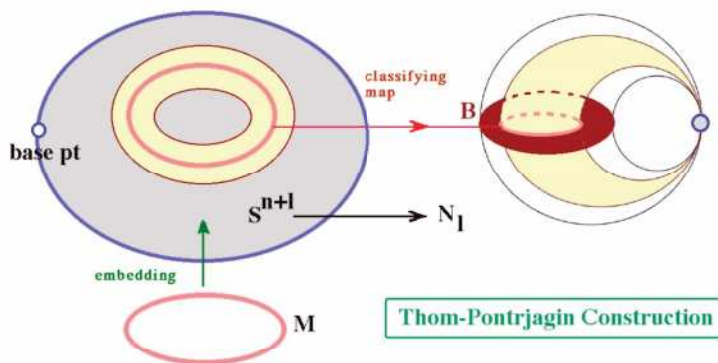
* toruohmoto@waseda.jp

トムは IHES で同僚だったグロタンディークとは不仲であったが、広中平祐先生とは相性がたいへんよかったとテシエやレーから聞いた ([6] 参照). 人間的な部分のみならず数学的な指向性も近かったのかも知れない—確かに特異点解消とコボルディズムの考え方には一脈通じるものがある. そこでまず, コボルディズム理論を振り返ってみよう.

1.2 トム・ポントリャーギン構成 C^∞ 多様体の特異サイクルがいつ部分多様体で実現できるか? という素朴な問いが出発点となって, コボルディズムの概念まで一気に駆け上がる [23]. 有向閉 n -多様体 M_1, M_2 がコボルダントとは, ある境界付きコンパクト有向 $(n+1)$ -多様体 W が存在して $\partial W = (\partial M_1) \sqcup (-\partial M_2)$ を満たすときにいう. これは有向閉多様体に関する同値関係をなして, その同値類全体 $MSO^* (= MSO^*(pt))$ は非交和と直積から可換環の構造が入る.

ホイットニーの埋め込み定理により, 有向閉 n -多様体 M を十分高い次元の球面 $S^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \cup \{\infty\}$ に埋め込む. この法束 ν の普遍ベクトル束 $ESO(k) \rightarrow BSO(k)$ への分類写像 $\rho: (\nu, M) \rightarrow (ESO(k), BSO(k))$ を 1 点コンパクト化すれば, M のアンビエント空間の球面からトム空間への基点付き写像 $\bar{\rho}: S^{n+k} \rightarrow MSO(k)$ を得る (基点付近以外は C^∞ 級としてよい). そこでトムは, 普遍ベクトル束の零切断 $BSO(k)$ に対する横断性定理を用いて次の安定ホモトピー群との同型を示した [25]:

$$MSO^{-n} \xrightarrow{\cong} \pi_n(MSO) := \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(MSO(k)). \quad (*)$$



以上は相対版にすぐに拡張される. すなわち, 有向閉 n -多様体からの C^∞ 写像 $f_i: M_i \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) がコボルダントとは, 有向コンパクト $(n+1)$ -多様体 W と C^∞ 写像 $h: (W, \partial W) \rightarrow (Y \times I, Y \times \partial I)$ が存在して $h|_{\partial W} = f_1 \sqcup f_2$ となるときにいう ($I = [0, 1]$). これにより, 一般コホモロジー理論である $MSO^*(Y)$ が導入される ($\kappa := \dim Y - n$). すなわち, (*) の相対版は無限ループ空間への写像のホモトピー集合との同型である:

$$MSO^*(Y) \xrightarrow{\cong} [Y, \Omega^\infty MSO]. \quad (**)$$

$\{MSO(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ をトム・スペクトラムと呼ぶ. $U(n) \subset SO(2n)$ を取れば複素コボルディズム理論 $MU^*(-)$ が定義される.

1.3 代数的コボルディズム 代数幾何学の側で (ボレル・ムーア) ホモロジー論に相当するものとして, 代数的スキーム Y における i 次元代数的サイクルの有理同値類全体であるチャウ群 $\mathrm{CH}_i(Y)$ がある. これを Y が非特異な場合に制限して, 交叉により乗法を入れることでチャウ環 (交叉環) $\mathrm{CH}^i(Y) := \mathrm{CH}_{l-i}(Y)$ ($l = \dim Y$) が定まる*¹. 高次チャウ群や代数的 K 理論などの進展を経て 21 世紀に入る前後にようやく, 複素コボルディズム理論 MU^* の代数幾何版として, モレル・ヴォエヴォドスキーによる代数的コボルディズム (モティヴィック・コホモロジー) 理論 $\mathrm{MGL}^{*,*}$ が現れ, 続いてレヴィン・モレル [11] およびレヴィン・パンドハリパンデ [12] による代数的コボルディズム理論 Ω^* が登場した. 前者 $\mathrm{MGL}^{p,q}(Y)$ はトポロジーにおける同型 (\star) の右辺の代数幾何ヴァージョンであって, モティヴィック・トム・スペクトラムを用いた \mathbb{A}^1 -ホモトピー論的構成物である. 後者の $\Omega^\kappa(Y)$ は (\star) 左辺の代数的アナロジーであって, 任意の固有射 $f: X \rightarrow Y$ (X は非特異で $\kappa = \dim Y - \dim X$) の同型類全体で生成される自由アーベル群を形式群 (formal group law) に対応する関係 (二重点退化関係式という) で割った商群として定義される*² [12]. これら出自の異なる理論の間に $(\star\star)$ に相当する同型が知られている (レヴィンほか):

$$\Omega^\kappa(Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{MGL}^{2\kappa, \kappa}(Y). \quad (\star\star')$$

微分トポロジー (Thom)	代数幾何
写像の特異点論	特異点論 & Hilbert スキーム (Grothendieck)
(特異) 部分多様体の横断性	交叉理論 (Kleiman, Fulton-MacPherson '80)
同変コホモロジー	代数的ボレル構成: 同変交叉理論 (Totaro-Edidin-Graham '90)
コボルディズム理論	代数的コボルディズム (Levine-Morel/Pandharipande '00, '09)
トム空間	モティヴィック・トムスペクトラム (Morel-Voevodsky '00)
ホモトピー論	\mathbb{A}^1 -ホモトピー論 (Morel-Voevodsky '00)
コホモロジー作用素	代数的コホモロジー作用素 (Vishik '19)

2 特異点の数え上げ幾何学～トム多項式理論

2.1 ヒルベルト第 15 問題の最終的解決? 20 世紀初頭にヒルベルトは 23 の未解決問題を提出した. その 15 番目を雑駁に述べれば

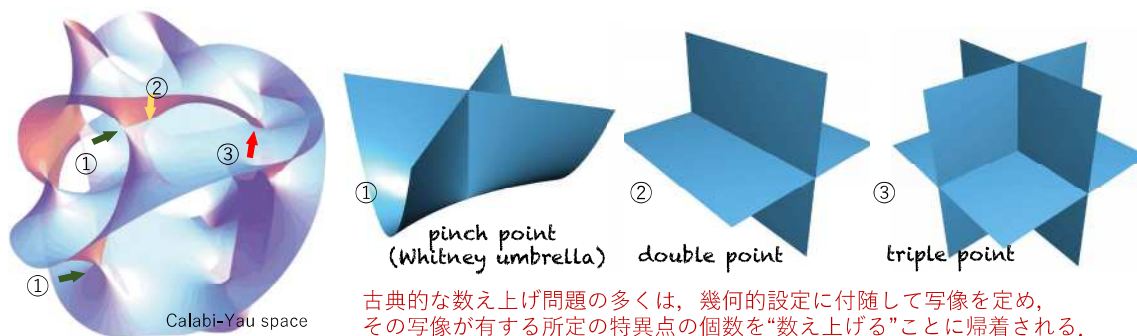
「シューベルトとその時代における数え上げ幾何学の厳密な基礎付けを与えよ」

という問いである. いわゆる《シューベルト・カルキュラス》はグラスマン多様体や旗多様体などのモジュライ空間のコホモロジーの環構造に関する理論全般の総称であって, 現代においても幾何学的表現論の一翼として発展している分野である. 一方でシューベルトの大著 [22] の大半は, 彼が発見したこの記号計算を道具に様々な古典的数え上げ問題を大

*¹ トポロジーでのように加群のクロネッカー双対として定義するのではない.

² $f_i: X_i \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) が同型とは, $f_2 \circ \sigma = f_1$ となる同型射 $\sigma: X_1 \rightarrow X_2$ が存在するときをいう. Ω^ 理論は特異点解消の存在が欠かせないため, (広中の特異点解消定理から) 標数 0 を仮定する.

胆に解くことに費やされている。ただし、現在の観点からすれば彼の議論は厳密性に難があった。この厳密化の一般論は、代数多様体の交叉の理論あるいは方程式の変数の消去理論と位置づけられて（ファン・デル・ヴェルデンほか）、20世紀中葉のヴェイユやグロタンディークらによる代数幾何学の確立を経て、セールの交叉公式および80年代のフルトンとマクファーソンによる代数幾何的交叉理論（**Intersection Theory**）[7]をもってひとまずは完成したと言って良いだろう。しかし、以下で述べる《多重特異点の数え上げ問題》は、シューベルトらの重要な核心的課題であったにもかかわらず、現在に至るまで包括的な理論的考察がなされていない。実際そこには、フルトン[7]で触れられていない本質的に深い題材一点配置のモジュライ空間一が隠されている。この節は代数幾何の文脈で議論を進める。単に多様体と書くときは非特異な代数多様体を意味する。簡単のため、基礎体 k は複素数体 \mathbb{C} とするが、標数 0 の代数的閉体で構わない。



2.2 写像の多重特異点 多様体間の射 $f: X \rightarrow Y$ の特異点とは、微分 df_p の階数が最大でない点 $p \in X$ 、およびその点における写像芽 $f: (X, p) \rightarrow (Y, q)$ を指す。特異点は座標変換芽による分類がなされる。本稿ではいわゆる \mathcal{K} -同値 (f が定めるイデアルが同型) を扱い、特異点型 (同値類) を η などと表す。多重写像芽とは、その像が一致ような X の複数の点における写像芽 $f: (X, S) \rightarrow (Y, q)$ のことである ($S = \{p_1, \dots, p_r\} \subset X$)。順序付けられた組 $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ を多重特異点型と呼ぶ。写像 $f: X \rightarrow Y$ の定義域・値域の $\underline{\eta}$ -型多重特異点跡 $M_{\underline{\eta}}(f) \subset X$ および $N_{\underline{\eta}}(f) \subset Y$ とは、次を満たす点 $p_1 \in X$ および $q \in Y$ がなす集合の X, Y におけるザリスキー閉包を意味する (正しい定義は後述): $p_2, \dots, p_r \in X$ が存在して、 $p_i \neq p_j$ ($1 \leq i \neq j \leq r$) で $f(p_1) = \dots = f(p_r) =: q$ を満たし、 $1 \leq i \leq r$ について写像芽 $f: (X, p_i) \rightarrow (Y, q)$ が η_i 特異点型である。

その典型例は多重点型、つまりはめ込み芽の集まり $A_0^r = (A_0, \dots, A_0)$ である。値域多様体 Y の二重点跡 $N_{A_0^2}(f)$ や三重点跡 $N_{A_0^3}(f)$ は局所的には上図のようなものを想起されたい。

特異点跡 $M_{\underline{\eta}}(f)$, $N_{\underline{\eta}}(f)$ は各々 X, Y の (特異) 部分多様体となり、その特異点跡の次数あるいは個数を ‘数え上げる’ が我々の課題である。しかし、多重特異点の数え上げは X 上の複数の特異点の点配置に関わるために本質的に難しく、とりわけ後述するトム・カザリアン予想 (原理) [8, 9] は数十年来の未解決問題である。これは数多ある数

え上げ公式の“博物学”を一貫した観点から体系化するものである。例えば、弦理論におけるインスタントンの数え上げに関する「ゲツチェ (Göttsche) 予想」(現在は定理)は、最も単純な r 重 A_1 特異点型に関する普遍多項式 (トム多項式) $n(A_1^r)$ からすぐに導かれる。あるいは多くの古典的な問題, 例えば非特異超曲面 $V \subset \mathbb{P}^r$ の射影双対に現れる r 重点の数え上げも, 同じ普遍多項式 $n(A_1^r)$ を用いて (代入する f の情報を変えるだけで) 表される。 A_1^r 特異点型を任意の多重特異点型 $\underline{\eta}$ に置き換えてこれを定式化する。

2.3 主結果と例 以降, X, Y をそれぞれ m, l 次元の多様体とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ の余次元とは $\kappa := l - m \in \mathbb{Z}$ を指す。写像芽 $f: (X, p) \rightarrow (Y, q)$ の \mathcal{K} -特異点型とは, 剰余環 $Q(f) := \mathcal{O}_{X,p}/f^*\mathfrak{m}_{Y,q}\mathcal{O}_{X,p}$ の同型類のことである。写像芽が有限確定とは有限次のテイラー展開で特異点型が定まるときにいい, その次数の最小値を k_η と記し, 特異点型 η のイデアルを $I_\eta := f^*\mathfrak{m}_{Y,q}\mathcal{O}_{X,p} + \mathfrak{m}_{X,p}^{k_\eta+1}$ (の同型類) で定める。多重特異点型 $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ において, 各 η_i は有限確定と常に仮定する。多重特異点型 $\underline{\eta}$ の重複度を

$$n = n(\underline{\eta}) := \sum \dim \mathcal{O}_{X,p_i}/I_{\eta_i} < \infty$$

とし, $\underline{\eta}$ の \mathcal{K}_e -余次元を $\ell = \ell(\underline{\eta})$ と記す (= $\underline{\eta}$ -特異点型の安定写像芽の値域の最小次元)。

写像 $f: X \rightarrow Y$ に付随する商チャーン類 $c_i(f)$ を次で定める:

$$c(f) := 1 + c_1(f) + c_2(f) + \dots = \frac{1 + f^*c_1(TY) + f^*c_2(TY) + \dots}{1 + c_1(TX) + c_2(TX) + \dots}$$

さらにランドウェーバー・ノヴィコフ類 (LN 類) とは, $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ を添字として

$$s_I = s_I(f) := f_*(c^I(f)) = f_*(c_1(f)^{i_1} c_2(f)^{i_2} \dots c_k(f)^{i_k}) \in \text{CH}^{|I|}(Y)$$

あるいはその引き戻し $f^*s_I \in \text{CH}^{|I|-\kappa}(X)$ として定義される ($|I| = \sum_{s=1}^k s_i$)。主結果はトム・カザリアン予想 [8, 9] の肯定的解決であって, ここではその一部を紹介する。

定理 1 (Target multi-singularity Thom polynomials の存在 [19, 18])

任意の多重特異点型 $\underline{\eta}$ に対して, 次の (\star) を満たす普遍同次チャーン多項式

$$R_{\underline{\eta}} = \sum a_I(\underline{\eta})c^I \in \mathbb{Q}[c_1, c_2, \dots]$$

($|I| = \ell - \kappa$) が唯一存在する。 (\star) 任意の固有射 $f: X \rightarrow Y$ ($\kappa = \dim Y - \dim X$) に対して有理係数の $\underline{\eta}$ 型多重特異値跡類 $n_{\underline{\eta}}(f) \in \text{CH}^\ell(Y)_{\mathbb{Q}}$ は次の表示を持つ:

$$n_{\underline{\eta}}(f) = \sum f_*(R_{J_1}) \dots f_*(R_{J_s}). \quad (1)$$

ここで, 右辺の和は $\{1, \dots, r\}$ の順序付きの空でない部分集合への分割 $\{1, \dots, r\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$ ($s \geq 1$) すべてに関するもので, 各 $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ について, R_J は $R_{(\eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_k})}$ に $c_i = c_i(f)$ を代入したものである。

定理 1 の帰結として, 定義域 X の $\underline{\eta}$ 型多重特異点跡類 $m_{\underline{\eta}}(f) \in \text{CH}^{\ell-\kappa}(X)_{\mathbb{Q}}$ について,

$$m_{\underline{\eta}}(f) = \sum R_{J_1} \cdot f^* f_*(R_{J_2}) \cdots f^* f_*(R_{J_s}) \quad (2)$$

($1 \in J_1$) の形の Thom 多項式表示がある良い条件下で示される (詳細は省略). (1) の右辺は LN 類 s_I の多項式であり, (2) の右辺は LN 類 $f^* s_I$ および $c_i(f)$ の多項式であって, その形は特異点型 $\underline{\eta}$ のみから定まる. この普遍多項式を (値域および定義域の) 多重特異点型 $\underline{\eta}$ に対するトム多項式と呼ぶ.

安定写像 $f : X \rightarrow Y$ (任意の有限部分集合 S における写像芽 $f : (X, S) \rightarrow (Y, f(S))$ が局所安定) では, 多重特異点跡類 $m_{\underline{\eta}}(f)$, $n_{\underline{\eta}}(f)$ はそれぞれ多重特異点跡 $M_{\underline{\eta}}(f)$, $N_{\underline{\eta}}(f)$ の (ある重複度を除いた) 有理同値類に他ならない.

例 2.1 (多重点跡公式) 余次元 $\kappa = \dim Y - \dim X > 0$ の写像 $f : X \rightarrow Y$ について, 二重点および三重点公式は 70-80 年代に知られている:

$$\begin{aligned} m_{A_0^2}(f) &= f^* f_*(1) - c_{\kappa}(f), \\ m_{A_0^3}(f) &= f^* f_*(m_{A_0^2}(f)) - 2c_{\kappa} f^* f_*(1) + 2 \left(c_{\kappa}^2 + \sum_{i=0}^{\kappa-1} 2^i c_{\kappa-i-1} c_{\kappa+i+1} \right). \end{aligned}$$

しかし, 4 重点公式以降は, いわゆる曲線形写像 (curvilinear map) と呼ばれる限定された写像以外では実に今まで考察されて来なかった^{*3}. その理由は次の 2.4 節で述べる. $\underline{\eta} = A_0^r$ の場合で定理 1 (1) と (2) は, 一般の多重点公式の存在を保証する. さらにトールス同変の局所化手法を用いたある種の未定係数法による計算方法 [20, 8] により

$$R_{A_0} = 1, \quad R_{A_0^2} = -c_{\kappa}, \quad R_{A_0^3} = 2 \left(c_{\kappa}^2 + \sum_{i=0}^{\kappa-1} 2^i c_{\kappa-i-1} c_{\kappa+i+1} \right)$$

のように求めることができる. $\{1, 2\}$ および $\{1, 2, 3\}$ の分割の仕方から, 確かに, 定理 1 より二重点・三重点公式が復元される:

$$\begin{aligned} m_{A_0^2} &= R_{A_0} \cdot f^* f_* R_{A_0} + R_{A_0^2} = f^* f_*(1) - c_{\kappa}. \\ m_{A_0^3} &= R_{A_0} \cdot (f^* f_* R_{A_0})^2 + R_{A_0} \cdot f^* f_* R_{A_0^2} + 2R_{A_0^2} \cdot f^* f_* R_{A_0} + R_{A_0^3} \\ &= f^* f_*(f^* f_*(1) + R_{A_0^2}) + 2R_{A_0^2} \cdot f^* f_*(1) + R_{A_0^3} \\ &= f^* f_*(m_{A_0^2}) - 2c_{\kappa} f^* f_*(1) + R_{A_0^3}. \end{aligned}$$

リマーニら [14] は, カザリアン予想を仮定して, 同様な手法で $R_{A_0^4}$ を計算していた (詳細は略). つまり, 4 重点以降の多重点公式も具体的に計算可能であることが定理 1 で確定したことになる. これにより曲線形に限らない一般の数え上げ幾何学が展開できる.

^{*3} 曲線形写像とは, $\kappa \geq 0$ であって A_{μ} 特異点 (局所環 $Q(f)$ が $k[x]/\langle x^{\mu+1} \rangle$ に同型) のみを許容する写像を指す. この場合は 80 年代にクライマンらによってよく研究されていて, 4 重点以上の数え上げ公式を含む再帰的關係式等が求められている [10]. 曲線形でない場合における多重特異点の数え上げ公式の一般論は今に至るまで未開拓であって, 例えば前述のゲツチェ予想 ($\kappa = -1$) はこの場合に属する.

2.4 ヒルベルト・スキーム上の代数的交叉理論 いままでの写像の特異点論研究において、任意の固有射 $f: X \rightarrow Y$ に対する X 上の η 型多重特異点跡および Y 上の η 型多重特異点跡それ自体が、代数的スキーム構造を伴う形で厳密には定義されていなかった。そこでこれらの厳密な定義を、点配置空間のコンパクト化であって、かつ関手的により振る舞いをするヒルベルト・スキームを介して与える。

X 上の n 点のヒルベルト・スキーム (**Hilbert scheme**) $X^{[n]}$ とは、 X 上の colength n の 0 次元部分スキーム、すなわち、有限の閉点 $\{p_i\}$ に台を持ち $\sum \dim \mathcal{O}_{X,p_i}/I_{p_i} = n$ を満たすイデアル層 $\mathcal{I} (\subset \mathcal{O}_X)$ 全体をパラメトライズするモジュライ空間である。これはあるグラスマン多様体の部分代数多様体として実現される。ヒルベルト・スキームは次のような普遍性を有する：直積の部分スキーム $Z \subset U \times X$ と平坦射 $\sigma: Z \rightarrow U$ でそのファイバーが colength n の 0 次元部分スキームであるものがあれば、分類射 $\rho: U \rightarrow X^{[n]}$ が存在して、族 σ は普遍族 $Z_X^n = \bigcup_{z_I} \text{Spec}(\mathcal{O}_X/I) \rightarrow X^{[n]}$ の ρ による引き戻しと同型になる。順序付きヒルベルト・スキーム $X^{[[n]]}$ とは、対称積へのヒルベルト・チャウ射 $X^{[n]} \rightarrow S^n X = X^n/\mathfrak{S}_n$ とのファイバー積として与えられる：

$$\begin{array}{ccc} X^{[[n]]} & \longrightarrow & X^{[n]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \longrightarrow & S^n X \end{array}$$

第 1 成分への射影を $\text{pr}_1: X^{[[n]]} \rightarrow X^n \rightarrow X$ と書き、 $\bar{f} = f \circ \text{pr}_1: X^{[[n]]} \rightarrow Y$ とおく。

例 2.1 で紹介した二重点・三重点公式は、 $f: X \rightarrow Y$ の二重・三重点跡の特異点解消を $X^{[[2]]}$ および $X^{[[3]]}$ (これらは常に非特異) を用いて構成することで示される。しかし、 $\dim X \geq 3$ で $n \geq 4$ のとき、ヒルベルト・スキーム $X^{[[n]]}$ は特異点を有するために扱うのがとても厄介である。これが今までの数え上げ幾何学の現代史の中で一般の 4 重点公式 (さらに n 重点公式 ($n \geq 4$)) が全く手つかずであった最大の原因と言ってよい*4。

多重特異点型 $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ に対して、幾何的部分集合 (**geometric subset**)

$$\Xi(X; \underline{\eta}) \subset X^{[n]}$$

を、構造層 \mathcal{O}_X のイデアル層 $z_I \in X^{[n]}$ で、 r 点 $S = \{p_1, \dots, p_r\} \subset X$ を台に持ち、各点 p_i での stalk が η_i 特異点型のイデアル I_{η_i} と同型であるもの全体のザリスキー閉包と定義する。順序付きの場合でも定義できて、記号の流用で以降は $\Xi(X; \underline{\eta}) \subset X^{[[n]]}$ とする。

そこでマザーの多重ジェット拡張写像の「コンパクト化」として、固有射 $f: X \rightarrow Y$ に対してヒルベルト拡張写像 (**Hilbert extension map**)

$$f^{[[n]]}: X^{[[n]]} \rightarrow (X \times Y)^{[[n]]}$$

*4 曲線形なイデアルのみからなる $X^{[[n]]}$ の部分集合 (curviliner ヒルベルト・スキームと呼ばれる) は非特異であって、すべての議論が非特異な代数多様体の範疇で収まる。それ故に 80 年代に曲線形数え上げ幾何学 (curviliner enumerative geometry) が成立し得た。

を導入する．これはイデアル層 $z_I \in X^{[n]}$ に対して，イデアル層 $z_{(I, I_\Gamma)} \in (X \times Y)^{[n]}$ (I_Γ は f のグラフ $\Gamma \subset X \times Y$ の定義イデアル) を対応させて定義する．部分スキーム $X^{[n]} \times Y \subset (X \times Y)^{[n]}$ の $f^{[n]}$ によるスキーム論的逆像が相対ヒルベルト・スキーム $X^{[n]}(f)$ ，即ち f のファイバーに台を持つような 0 次元部分スキームをパラメトライズするモジュライ空間である．

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\text{pr}_1} & X^{[n]}(f) & \longrightarrow & X^{[n]} \times Y & \longrightarrow & Y \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & & & f \end{array}$$

この $X^{[n]}(f)$ は逆像 $(f^{[n]})^{-1}(\Xi(X; \underline{\eta}) \times Y)$ を含み，これを pr_1 と \bar{f} により X, Y に写像することにより，多重特異点跡 $M_{\underline{\eta}}(f) \subset X$ および $N_{\underline{\eta}}(f) \subset Y$ を定義する．

命題 [19]：ヒルベルト拡張写像 $f^{[n]} : X^{[n]} \rightarrow (X \times Y)^{[n]}$ は正則埋め込み (regular embedding) であり*⁵，その法束は $X^{[n]}$ 上のトートロジカル束 $(f^*TY)^{[n]}$ である．

フルトン・マクファーソンの交叉理論 [7] の要点は，代数的スキームの間の正則埋め込み $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ と \mathcal{Y} の閉部分スキーム V との交差積 $\mathcal{X} \cdot V \in \text{CH}_*(\mathcal{X})$ を V の法錐 C_V への変形 (moving to the normal cone) を通して定義し，これを礎に φ のギジン写像 $\varphi^! : \text{CH}_*(\mathcal{Y}) \rightarrow \text{CH}_*(\mathcal{X})$ の理論を確立することにあつた．上の命題からギジン写像

$$(f^{[n]})^! : \text{CH}_*((X \times Y)^{[n]}) \rightarrow \text{CH}_*(X^{[n]})$$

が定まる．そこでギジン写像 $(f^{[n]})^!$ と pr_1 と \bar{f} の押出し (pushforward) により，多重特異点跡類を定義する ($\ell := \ell(\underline{\eta})$ は $\underline{\eta}$ の \mathcal{K}_e 余次元， $m = \dim X$ ， $l = \dim Y = m + \kappa$)：

$$m_{\underline{\eta}}(f) := \text{pr}_{1*}((f^{[n]})^![\Xi(X; \underline{\eta}) \times Y]) \in \text{CH}_{l-\ell}(X) = \text{CH}^{\ell-\kappa}(X),$$

$$n_{\underline{\eta}}(f) := \bar{f}_*((f^{[n]})^![\Xi(X; \underline{\eta}) \times Y]) \in \text{CH}_{l-\ell}(Y) = \text{CH}^\ell(Y).$$

これらは各々 $M_{\underline{\eta}}(f)$ ， $N_{\underline{\eta}}(f)$ に台をもつ*⁶．

2.5 代数的コボルディズムとコホモロジー作用素 複素コボルディズム MU^* は C^∞ カテゴリーで記述されていて，複素解析特異点の分類理論とは全く相性がよくない．そこでトム・カザリアン原理 (定理 1) を導くためには，すべてを代数幾何に舞台を移した代数的コボルディズム理論の登場が必要であつた．

定理 1 の証明にレビンらの Ω^* 理論を用いる．以下で証明の流れをざっくりと紹介する．まず第 1 ステップとして，余次元 κ の任意の固有射 $f : X \rightarrow Y$ に対して多重特異値

*⁵ ここで， X, Y が非特異でも $X^{[n]}$ と $(X \times Y)^{[n]}$ は一般に特異多様体であることに注意しよう．

*⁶ $M_{\underline{\eta}}(f), m_{\underline{\eta}}(f)$ および $N_{\underline{\eta}}(f), n_{\underline{\eta}}(f)$ は任意の固有射 f に対して定義できていることに注意する．一方，固有射 f が ‘良い写像’ (局所安定写像) のとき， $M_{\underline{\eta}}(f), N_{\underline{\eta}}(f)$ は §2.2 で述べた定義と一致し，正しい余次元を持つ—それぞれの基本類がちょうど (しかるべき定数倍を除いて) $m_{\underline{\eta}}(f), n_{\underline{\eta}}(f)$ を表す．

跡類 $n_{\underline{\eta}}(f)$ を対応させる仕方は, f の代数的コボルディズム類 $[f : X \rightarrow Y] \in \Omega^{\kappa}(Y)$ のみに依ることを示す. 第2ステップとして, まず残余多項式 $\Delta n_{\underline{\eta}}$ を帰納的に次で与える:

- 特異点型 η ($r = 1$) に対して

$$\Delta n_{\eta}(f) := f_*(m_{\eta}(f)) = n_{\eta}(f) \in \text{CH}^{\ell(\eta)}(Y).$$

- 多重特異点型 $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ ($r \geq 2$) に対して

$$\Delta n_{\underline{\eta}}(f) := n_{\underline{\eta}}(f) - \sum \Delta n_{J_1}(f) \cdots \Delta n_{J_s}(f) \in \text{CH}^{\ell(\underline{\eta})}(Y)$$

(和は分割 $\{1, \dots, r\} = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_s$ ($s \geq 2$) すべてに渡る).

これにより well-defined な写像

$$\Delta n_{\underline{\eta}} : \Omega^{\kappa}(Y) \rightarrow \text{CH}^{\ell}(Y)$$

を得る (ここで $\ell = \ell(\underline{\eta})$ とおいた). そこでこれがアーベル群の間の準同型写像であって引き戻しに対して自然に振る舞うこと (射 $\varphi : Y' \rightarrow Y$ に対して, φ^* と $\Delta n_{\underline{\eta}}$ が可換), 即ち $\Delta n_{\underline{\eta}}$ が加法的な代数的コホモロジー作用素であることを示す. 加法的であることは非交和のヒルベルト・スキームの性質

$$(X_1 \sqcup X_2)^{[n]} = \bigsqcup_{k+l=n} X_1^{[k]} \times X_2^{[l]}$$

に基づき, 引き戻しに関する可換性はヒルベルト・スキームの普遍性に由来する. 以上の議論は $\Omega^{\ell}(Y)$ に '持ち上げる' ことができる. つまり, 幾何的部分集合 $\Xi(\underline{\eta})$ の特異点解消 $\mu : \tilde{\Xi}(\underline{\eta}) \rightarrow \Xi(\underline{\eta})$ をひとつ与えることで, すべてを CH^* 値から Ω^* 値に変えて $\Delta n_{\underline{\eta}, \mu} : \Omega^{\kappa}(Y) \rightarrow \Omega^{\ell}(Y)$ を構成できて, これが代数的コホモロジー作用素になる.

最後のステップとして, 以下のヴィシク [28] による定理を用いる. これは複素コボルディズム理論 MU^* においてよく知られた事実の代数幾何版に相当する.

定理 (ヴィシク [28]) : 任意の加法的コホモロジー作用素 $\varphi : \Omega^{\kappa} \rightarrow \Omega^{\ell}$ に対して, その有理係数化 $\varphi : \Omega^{\kappa} \rightarrow \Omega^{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ はランドウェーバー・ノビコフ作用素 $s_I : \Omega^{\kappa}(Y) \rightarrow \Omega^{\ell}(Y)$ の $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 係数の一次結合で表される ($\mathbb{L} = \Omega^*(k)$ はラザード環).

この定理より, あるチャーン多項式 $R_{\underline{\eta}} = \sum_I a_I c^I$ ($a_I \in \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) が存在して, 任意の固有射 $f : X \rightarrow Y$ に対して $\Delta n_{\underline{\eta}, \mu}(f) = f_*(R_{\underline{\eta}})$ を満たす. 値を CH^* 値に直して $\Delta n_{\underline{\eta}}$ から $n_{\underline{\eta}}$ を逆に表わすことで, 定理1の証明を終える*7.

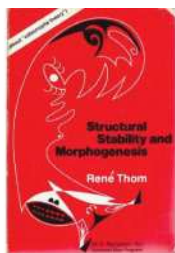
7 1) 以上の証明から値は [11] の意味の有向コホモロジー論であれば何であってよく, 例えば代数的 K -理論トム多項式も考えられる: $n_{\underline{\eta}}^K(f) \in K_0(Y)[\beta, \beta^{-1}]$. その場合, 基本類は構造層である. 基礎体が \mathbb{C} のとき, サイクル写像 $\Omega^ \rightarrow \overline{MU}^*$ を通して複素コボルディズムや楕円コホモロジー値でも良い.

2) 代数的コボルディズムに依拠する上記の解法は, さらにヴォエヴオドスキー・モレルによるモチヴィックコホモロジー $\text{MGL}^{*,*}$ との関係性を強く示唆する.

3) 多重特異点跡類の定義ではヒルベルト・スキーム $X^{[n]}$ 上のトートロジカル束に掛かる特性類の積分が本質的であって, 代数幾何における数多の話題に関連する.

3 トムとその他の話題

3.1 多様体空間と conical stratification コボルディズムに関して、トムは明らかに「すべての閉多様体がなす位相空間」を想起していた [26, §4]. 基点を保つ C^∞ 写像の空間 $\mathcal{M}_k := C^\infty(S^{n+k}, MSO(k))_{base}$ および $BSO(k)$ に横断的でない $h \in \mathcal{M}_k$ からなる判別超曲面 Γ_k を考えて、その補空間 $\mathcal{M}_k - \Gamma_k$ の帰納的極限 ($k \rightarrow \infty$) がそれである. $\lim(\mathcal{M}_k - \Gamma_k)$ の弧状連結成分をひとつ取ると、ある有向閉 n -多様体 M が同型を除いて決まる一すなわち、連結成分の任意の元 h に対して零切断との横断的交叉 $h^{-1}(BSO(k)) \subset S^{n+k}$ が M と微分同相となり、この連結成分自体は分類空間 $B\text{Diff}^+(M)$ 上のファイブレーションであって M と微分同相な多様体全体の集合に相当する. 判別超曲面 Γ_k 自体は $h: S^{n+k} \rightarrow MSO(k)$ と $BSO(k)$ との接触の特異性に応じて分割されるはずで、トム・マザー理論を介して、ルーリー (Lurie) ら [13, 3] の意味で \mathcal{M}_k の錐的滑層化 (conical stratification) を与えるだろう*8. 一方、代数的コボルディズム $\text{MGL}^{*,*}(-)$ の文脈においても、最近、導来代数幾何 (derived algebraic geometry) の研究者達 [5] が類似のアイデアで‘代数的スキーム全体がなす分類スタック’を考えている. この方向は数え上げ幾何学の展望にひとつの指針を与えるに違いない.



Structural Stability and Morphogenesis (1972)

3.2 次世代カタストロフ理論 トムは70年代以降、いわゆるカタストロフ理論の創出と発展に専心した. この純粋数学から外の世界に向けた大胆かつ野心的試みは、一時の熱狂と喧騒の後、特異点の分類に係る数学理論の部分が、アーノルド、ウォール、泉屋・石川らによって大きく発展し今に至る. 中でも、ラグランジュ・ルジャンドル特異点論は最も成功した話題のひとつであろう. さて、私は訳あって数年前から情報科学や工学分野に少し携わり、情報幾何学 (甘利 [1]) を知った. これは統計的推論、凸最適化、AI や機械学習などの分野においてアフィン微分幾何学からの統一的な理解と手法を与えるものであって、凸ポテンシャルのルジャンドル変換がその基礎になっている. しかし、現実の場面で遭遇する非凸の場合や深層学習アーキテクチャ等の特異モデルでは、計量の退化や空間の縮退が現れるために微分幾何的手法は破綻してしまう一実はその障害としてルジャンドル特異点や特異ルジャンドル多様体が現れる. そこでラグランジュ・ルジャンドル特異点論を足場に《情報幾何学への特異点論的アプローチ》を進めている [15]. その先には「可微分スタック上の初等カタストロフ理論」があるはずである*9. その指針を与えるトムの著作 [27] は、現在も未来においても、「連続性の幾何学」の意味と価値を説き、また世に問い続けることだろう.

*8 これはヴァシリエフ理論とも関わるが、この滑層化の厳密な構成はまだ知られていない. [8] も参照.

*9 フロベニウス多様体の話題からも情報幾何学との関連がある (マニンら [4]).

参考文献

- [1] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Springer (2016).
- [2] M. Atiyah, The impact of Thom's cobordism theory, *Bull. A.M.S.*, **41** (2004), 337–340.
- [3] D. Ayaka, J. Francis, H. L. Tanaka, Local structures on stratified spaces, *Adv. Math.* **307** (2017), 903–1028.
- [4] N. Combe, Y.I. Manin, F-manifolds and geometry of information, *Bull. L.M.S.* (2020), 777–792.
- [5] E. Elmanto, M. Hoyois, A. Khan, V. Sosnilo and M. Yakerson, Modules over algebraic cobordism, (2020), *Forum Math. Pi* **8** (2020), 1–44.
- [6] 福田拓生, IHES の関孝和賞受賞によせて, 数学通信第 12 卷 3 号 (2007).
- [7] W. Fulton, *Intersection Theory*, 2nd edition, Springer (1998).
- [8] M. E. Kazarian, Multisingularities, cobordisms and enumerative geometry, *Russian Math. Survey* **58**:4 (2003), 665–724 (*Uspekhi Mat. nauk* **58**, 29–88).
- [9] M. E. Kazarian, Thom polynomials, *Singularity Theory and its application* (Sapporo, 2003), *Adv. Stud. Pure Math.* vol. **43** (2006), 85–136.
- [10] S. L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, *Real and Complex Singularities* (Proc. Conf. Oslo, 1976), *Sijthoff & Noordhoff* (1977), 297–396.
- [11] M. Levine and F. Morel, *Algebraic Cobordism*, Springer (2007).
- [12] M. Levine and R. Pandharipande, Algebraic cobordism revisited, *Invent. Math.* **176** (2009), 63–130.
- [13] J. Lurie, Higher algebra, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>
- [14] R. Marangell and R. Rimányi. The general quadruple point formula, *Amer. J. Math.* **132** (2010), 867–896.
- [15] N. Nakajima and T. Ohmoto, The dually flat structure for singular models, *Information Geometry*, Springer (2021), 31–64.
- [16] T. Ohmoto, Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **140** (2006), 115–134.
- [17] 大本 亨, 特異点の数え上げと同変 Chern 類, *数学*, 61 卷 1 号 (2009), 21–39.
- [18] T. Ohmoto, Singularities of maps and characteristic classes, *Real and Complex Singularities in São Carlos, 2012*, *Adv. Studies Pure Math.* **68** (2016), 191–265.
- [19] T. Ohmoto, Universal polynomials for multi-singularity loci of maps, preprint (2023)
- [20] R. Rimányi, Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities, *Invent. Math.* **143** (2001), 499–521.
- [21] T. Sasajima and T. Ohmoto, Thom polynomials in \mathcal{A} -classification I: counting singular projections of a surface, *European Math. Soc. Ser. Cong. Rep.* (2018), 203–226.
- [22] H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig B.G. Teubner (1879).
- [23] D. Sullivan, René Thom's work on geometric homology and bordism, *Bull. A.M.S.*, **41** (2004), 341–350.
- [24] R. Thom, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, *Ann. Sci. de l'Ecole Normale Sup.* Série 3, **69** (1952), 109–182.
- [25] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), 17–86.
- [26] R. Thom, The bifurcation subset of a space of maps, *Manifolds - Amsterdam 1970*, *LNMA* 197, Springer (1971), 202–208.
- [27] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin (1972) [彌永・宇敷訳, 構造安定性と形態形成, 岩波書店 (1980)]
- [28] A. Vishik, Stable and unstable operations in algebraic cobordism, *Ann. Sci. l'Ecole Normale Sup.* **52** (2019), 561–630.

曲面群の円周への作用の剛性と調和測度について (足立真訓 (静岡大), 松田能文 (青山学院大) との共同研究)

野澤 啓 (立命館大)*

概 要

本講演では [2] に基づき, 曲面群の円周への作用の剛性について, 懸垂束上の調和測度, つまり, 懸垂葉層の葉ごとの熱流で不変な測度を用いて調べる. 足立が調和測度から構成した懸垂束上の S^1 接続に対して, Burger–Iozzi–Wienhard の有界オイラー数を考えるとガウス＝ボネの定理が成り立つことについて説明する. また, その応用として, Burger–Iozzi–Wienhard によるカスプ付き曲面に対するミルナー＝ウッド不等式, およびその等号成立の場合に成り立つ剛性である松元の剛性定理の一般化の別証明を与えられることも述べる.

1 導入: ミルナー＝ウッド不等式と円周への群作用の剛性

本講演の主題は円周への曲面群作用の剛性であり, ミルナー＝ウッド不等式はその起源の一つである. 正確な主張は次節に回し, ここでは歴史的経緯を見る. まず 1958 年に Milnor [26] が曲面上の階数 2 実ベクトル束上の平坦接続の存在のためのオイラー数に関する必要条件を示した. Wood [32] が 1971 年に曲面上の一般の S^1 束に対して一般化して得られたのがミルナー＝ウッド不等式である. ミルナー＝ウッド不等式は Sullivan による一般化に加えて以下のような様々な方向に発展・関係し, その内のいくつかの分野は現在も盛んに研究されている.

- Sullivan [30] によるミルナー不等式のアファイン多様体への一般化.
- ミルナー＝ウッド不等式において等号が成立するのはフクス作用に半共役な円周への曲面群の作用に限る, という松元の剛性定理 [23], 皆川による軌道体版 [27], Mann による幾何的作用への一般化 [22].
- ミルナー＝ウッド不等式, 松元の剛性定理のカスプ付き曲面の場合への一般化 [6].
- Ghys による有界コホモロジーを用いた研究 [16].
- 3次元ザイフェルト多様体の横断的葉層の存在問題の研究 [13, 18, 19, 28].
- 一般の次元の次元 (複素) 双曲多様体の基本群の作用に対する体積不変量への拡張 (一般化ミルナー＝ウッド不等式), モストー剛性定理の派生 [17, 12, 10].

* 〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1 びわこ・くさつキャンパス ウェストウィング 409 号室
e-mail: hnozawa@fc.ritsumeai.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:20K03620) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 57M60, 57R30

キーワード: 曲面群, 円周への群作用, 円周の同相群, オイラー数, ガウス＝ボネ公式, 調和測度

- アノソフ表現, トレド不変量, 高次元タイヒミュラー理論などの曲面群の表現の研究 [6].
- 多様体の微分同相群の代数的性質の研究 ([8]などを参照).

なお, **フクス作用**とは双曲曲面群のポアンカレ円板の境界への自然な作用である. 上のリストの通り, ミルナー=ウッド不等式は高次元化されているが, それらの一般化においては, 離散群からリー群への準同型が扱われる. 元のミルナー=ウッド不等式や松元および Mann の剛性定理は, 曲面群の円周への位相的な作用全体, つまり, 曲面群から円周の同相群 $\text{Homeo}_+(S^1)$ への準同型全体という無限次元の対象を扱っている点が魅力的である.

本講演では, 懸垂束上の調和測度 (4 節参照) というミステリアスな概念を用いて, 曲面群の円周への作用の剛性を調べる. なお, 調和測度を用いたミルナー=ウッド不等式や松元剛性へのアプローチについては, Frankel [14], Thurston [31] などの仕事があるが前者は未出版, 後者は未完である *1. Thurston のアイディアは [9] でも言及されている.

2 主結果: 調和測度に付随する S^1 接続のガウス=ボネ公式とその応用

便宜上, 有限型の有向曲面群の代わりに $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ の振れのない格子 Γ を考えることとする. 対応する双曲曲面 $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ (\mathbb{D} はポアンカレ円板) を Σ で表す. Σ は有限体積のため高々有限のカスプを持ち, カスプを持たないことと Σ が閉であることが同値である. 理想境界 $\partial \mathbb{D}$ への Γ 作用

$$\rho_0 : \Gamma \rightarrow \text{PSL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Homeo}_+(\partial \mathbb{D})$$

は**フクス作用**と呼ばれる.

曲面群の円周への作用の基本的な不変量はオイラー数である. Σ が閉ならば, Γ の円周への作用 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ が与えられたとき, オイラー数 $e(\rho) \in \mathbb{Z}$ が普遍オイラー類 $eu \in H^2(\text{Homeo}_+(S^1))$ を用いて,

$$e(\rho) = \langle [\Sigma], [\rho^* eu] \rangle$$

と定義されるのだった. ただし, $[\Sigma] \in H_2(\Gamma)$ は Σ の基本類に対応する元である. Σ がカスプを持つときには基本類が自明になるので, このようには定義できない. Burger–Iozzi–Wienhard は実係数有界コホモロジーを使うことで, Σ がカスプを持つ場合にオイラー数の定義を拡張した (3 節参照).

本講演では, 懸垂葉層の調和測度と呼ばれる概念を用いて, 曲面群の円周への作用の剛性を考える. まずは, 懸垂束について思い出す. **懸垂束** $M := \Sigma \times_{\rho} S^1 := \Gamma \backslash (\mathbb{D} \times S^1)$ は Σ 上の S^1 束であって, ファイバーに横断的な懸垂葉層 \mathcal{F} を持ち, そのモノドロミー

*1 トポロジージンポジウムにおいて [31] が Thurston の論文全集に含まれて出版されていることを吉田健一さんから教えていただきました. 感謝いたします.

準同型 $\Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ は ρ と一致するのだった. ここで, $\gamma \cdot (z, t) = (\gamma z, \rho(\gamma)t)$, $(\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathbb{D}, \forall t \in S^1)$ である. また, M 上の懸垂葉層 \mathcal{F} は直積葉層 $\mathbb{D} \times S^1 = \sqcup_{w \in S^1} \mathbb{D} \times \{w\}$ から導かれるのだった.

次に, 調和測度について簡潔に述べる (厳密な定義は 4 節参照). 懸垂葉層の各葉はファイバーに横断的であり, 射影 $M \rightarrow \Sigma$ の制限の引き戻しにより双曲計量を持つ. 懸垂束 M 上の測度が調和的であるとは, およそ, その測度が葉に沿った熱流で不変であるときにいう. 難しい概念であるが, Garnett の定理 [15] により, あらゆるコンパクトな葉層付き多様体が非自明な調和測度を持つことが大きなアドバンテージである.

さて, 本講演の主結果を述べる. 足立 [1] は, 調和測度に付随する S^1 接続, つまり, 調和測度に関する平坦接続のファイバーごとの平均をとることで得られる懸垂束上の S^1 接続を考え, その曲率の絶対値が 1 で抑えられることを示した. Σ が閉の場合にはガウス=ボネの公式と組み合わせてミルナー=ウッド不等式が示される. 一方で, Σ がカスプを持つ場合には, 有界オイラー数を考える必要があり, 公式が成り立つかどうかは非自明である. 本講演の主結果は, 調和測度に付随する S^1 接続に対するガウス=ボネ公式である.

定理 2.1 ([2]). Γ を $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ の振れのない格子とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ を S^1 への作用であって有限軌道を持たないとする. ρ の懸垂束を考え, その上の調和測度 μ を考える. μ に付随した S^1 接続を $\bar{\omega}$ とするとき, $\bar{\omega}$ が弱い意味で持つ曲率を $K \text{ vol}$ とすると,

$$e(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K(z) \text{vol}(dz),$$

を満たす. ここで $e(\rho)$ は Burger–Iozzi–Wienhard の有界オイラー数 (3 節参照) であり, vol は $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ の双曲体積形式である.

Σ が閉の場合には, このガウス=ボネ公式は実質的に古典的定理と同様に示される. 5 節で述べる通り, Σ がカスプを持つ場合の証明では, カスプ周りについての考察が必要になる. 足立による曲率評価と合わせて, Σ がカスプを持つ場合にも, ミルナー=ウッド不等式を示すことができる. さらに, 等号成立条件について考察し, 松元の剛性定理の別証明も与えることができた.

系 2.2 (ミルナー=ウッド不等式, 松元の剛性定理 [26, 32, 23, 6]). Γ を $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ の振れのない格子, $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ をその S^1 への作用とする. このとき,

$$|e(\rho)| \leq |e(\Sigma)| \tag{2.1}$$

が成り立つ. ただし, $e(\Sigma)$ は Σ のオイラー数である. さらに, $e(\rho) = e(\Sigma)$ (resp. $e(\rho) = -e(\Sigma)$) が成り立つことと ρ がフクス作用 ρ_0 (resp. フクス作用の複素共役 $\bar{\rho}_0$) に半共役になることは同値である.

なお, ρ が ρ_0 に半共役であるとは, ここでは, 単調かつ写像度 1 であるような連続写

像 $f : S^1 \rightarrow S^1$ が存在して $f \circ \rho(\gamma) = \rho_0(\gamma) \circ f$ ($\forall \gamma \in \Gamma$) が成り立つときに言う.

松元 [25] では, Burger–Iozzi–Wienhard によるカスプを持つ曲面の場合の松元剛性を, 閉曲面の場合の松元剛性に帰着させることで示されている.

松元の剛性は, オイラー数が極大, つまり $e(\rho) = \pm e(\Sigma)$ となるような作用について, フクス作用との半共役写像を与えることで示される. 調和測度からどのように半共役写像を与えられるか, 次の定理を見ることで理解できる.

定理 2.3 ([2]). $e(\rho) = \pm e(\Sigma)$ が成り立つとき, M の普遍被覆 $\mathbb{D} \times S^1$ への調和測度の引き戻しは $h(z, t) \text{vol}(z) \nu(t)$ の形であらわされる. ここで, vol は葉向体積形式, ν は S^1 上のあるボレル測度であり,

$$h(z, t) = C(t) \frac{1 - |z|^2}{|\mathfrak{m}(e^{it}) - z|^2} \quad (\forall z \in \mathbb{D}, \forall t \in S^1).$$

ここで, $C(t)$ は各葉上で定数となるある関数, $\mathfrak{m} : S^1 \rightarrow S^1$ は写像度 ± 1 のある連続写像でありかつ (ρ, ρ_0) 同変, つまり $\mathfrak{m} \circ \rho(\gamma) = \rho_0(\gamma) \circ \mathfrak{m}$ ($\forall \gamma \in \Gamma$) を満たす.

さて, オイラー数が極大になるような作用については上記の通り, 調和測度から松元の剛性定理が示される. Σ が閉であるとき, Mann [22] はフクス作用の一般化として $\Gamma \rightarrow G \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ のようにあるリー群 G を経由する作用を幾何的作用と呼び, 幾何的作用にホモトピックな作用に対して松元剛性と同様の結果を示した. このような作用についても調和測度が記述できれば, Mann の定理も調和測度を用いて示すことができ, 理解が深まる.

問 2.4. 曲面群 Γ の幾何的作用にホモトピックな作用の調和測度を記述せよ.

3 Burger–Iozzi–Wienhard による有界オイラー数

ここでは, Burger–Iozzi–Wienhard による有界オイラー数の定義を思い出す. Γ を $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ の振れのない格子とし, $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ をその S^1 への作用とする. Γ が一様でない, つまり $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ がカスプを持ち, コンパクトでないときには, Σ の基本類が自明となってしまう, オイラー数が通常のやり方では定義できない. Burger–Iozzi–Wienhard は有界コホモロジーを用いて次のように自然にオイラー数の定義を拡張した. まず, 全てのカスプを切り落とし, Σ を境界付きのコンパクトな曲面とみなす. Gromov の同型より, Σ および $\partial \Sigma$ の有界コホモロジーは基本群の有界コホモロジーに同型である. $\pi_1 \partial \Sigma$ は従順であることから, その実係数有界コホモロジーは自明である. よって, 実係数有界コホモロジーの相対完全列

$$\dots \longrightarrow H_b^1(\partial \Sigma) \longrightarrow H_b^2(\Sigma, \partial \Sigma) \xrightarrow{f} H_b^2(\Sigma) \longrightarrow H_b^2(\Sigma, \partial \Sigma) \longrightarrow \dots$$

より, 写像 $f : H_b^2(\Sigma, \partial \Sigma) \rightarrow H_b^2(\Sigma) \cong H^2(\Gamma)$ が同型となる. ρ のオイラー数 $e(\rho)$ を

$$e(\rho) = \langle f^{-1} \rho^* \text{eu}, [\Sigma, \partial \Sigma] \rangle,$$

で定義する. ここで, $[\Sigma, \partial\Sigma]$ は Σ の相対基本類である. $e(\rho) \in \mathbb{Z}$ とは限らず, Γ が自由群であることから, ホモトピー不変にならないことも分かる. 以下の公式 (3.1) を見ると, 有界オイラー数はある意味で境界付き版であることが理解できる.

Σ が閉のとき, 円周への群作用のオイラー数がポアンカレ移動数を用いて計算できることはよく知られている. Σ がカスプを持つ場合も, 同様に計算できることが Burger–Iozzi–Wienhard によって示されている. 準同型としての持ち上げ $\tilde{\rho}: \Gamma \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ をとる. ここで,

$$\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) = \{ f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi, \forall x \in \mathbb{R} \}$$

は $\text{Homeo}_+(S^1)$ の普遍被覆群である. **ポアンカレ移動数** $\tau: \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n},$$

として, $x \in \mathbb{R}$ の選び方に依らず定義できるのだった ([29] 参照). [6] より, もし $\partial\Sigma \neq \emptyset$ である場合,

$$e(\rho) = - \sum_{i=1}^m \tau(\tilde{\rho}(c_i)). \quad (3.1)$$

が成り立つ. ここで, c_i は i 番目のカスプを一周するループである.

有界オイラー数の定義のためには, 境界の基本群が従順であることが大切だった. 定理 2.1 を高次元化するような次の問題が考えられる.

問 3.1. カスプを持つ有限体積双曲多様体上の平坦 S^1 束について, その調和測度に付随する S^1 接続を構成し, ガウス=ボネの定理を証明せよ.

4 葉層構造の調和測度とは

ここでは, 調和測度の定義, 存在定理, 構造定理について簡潔に述べる. 葉層付き多様体 (M, \mathcal{F}) の各葉の上にリーマン計量が定まっているとする. コンパクトな葉 L があるとき, 関数を L 上で積分するという M 上の測度が得られる. この測度は葉の方向に移動しても不変 (ホロノミー不変) であり, **横断的不変測度**と呼ばれる. このような測度があれば \mathcal{F} の性質を知るのに役立つが, 稀にしか存在しない. (M, \mathcal{F}) 上の調和測度とは, \mathcal{F} に沿った熱流で不変であるような M 上の測度のことであり, Garnett [15] により導入された横断的不変測度の一般化である. その利点は, Garnett が示した通り, M がコンパクトでありさえすれば, 非自明な調和測度が存在する, という事実である. これまで様々な広いクラスの葉層構造に対して応用がなされてきた. 例えば, Thurston による不変円周の構成 (未完) や Deroin–Kleptsyn の C^1 級葉層構造の研究などがある.

今回の発表に即して, 調和測度を定義する. Γ を $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ の捩れの無い格子とし, $\Sigma := \Gamma \backslash \mathbb{D}$ とする. Γ の円周への作用 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ に対して, 懸垂束 $M := \Sigma \times_{\rho} S^1 := \Gamma \backslash (\mathbb{D} \times S^1)$ を考える. $M \rightarrow \Sigma$ は S^1 束であり, M 上には各葉が双

曲計量を持つような余次元 1 の葉層構造が定義されるのだった。それから定まる葉向ラプラシアンを Δ で表す。

定義 4.1 (Garnett [15]). M 上のボレル測度 μ が懸垂葉層上の調和測度であるとは,

$$\int_M \Delta f(x) \mu(dx) = 0 \quad (4.1)$$

が次の性質を満たす任意の f について成り立つときに言う。 f はコンパクト台を持ち、各葉への制限が C^2 級であり、 Δf が連続となる。

この定義中の関数 f については、式 (4.1) が意味を持つような十分に大きいクラスの関数たちを考えるということである。

上述の通り、調和測度の特徴はその存在性にある。もし M がコンパクト、つまり $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ が閉のとき、Garnett の定理により非自明な調和測度が存在する ([15, 7])。 Σ がカスプを持つとき M がコンパクトでないが、Alvarez は S^1 への Γ 作用の平衡測度を使って調和測度を構成した。

定理 4.2 (Alvarez [4]). M 上の懸垂葉層の非自明な調和測度が存在する。

調和測度は、Garnett の構造定理により、普遍被覆上の各葉の上での正調和関数を用いて表される。今の状況では、調和測度 μ を $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ に持ち上げると、

$$\tilde{\mu} = h(z, t) \text{vol}(z) \nu(t) \quad (4.2)$$

という形にあらわされる。ただし、 vol は葉向体積形式、 ν は \mathbb{R} 上のあるボレル測度であり、 $h(z, t)$ はあるボレル可測関数であって、 ν -a.e. t に対して $\mathbb{D} \times \{t\}$ への制限が正かつ調和的となるものである。

5 調和測度の不随する S^1 接続とガウス＝ボネ公式

ここでは、定理 2.1 の証明のアイディア・概要を述べる。まず、足立による調和測度の不随する S^1 接続の構成と曲率の評価について述べる。 Γ を $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ の振れない格子とし、 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ をその S^1 への作用とする。 $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ とする。前節で述べた通り、 Σ 上の懸垂束 $M = \Sigma \times_{\rho} S^1$ は調和測度 μ を持つ。

μ に付随した S^1 接続の構成のためには、いくつかのステップが必要となる。 $\tilde{\mu}$ を μ の $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ への持ち上げとする。まず、 $\tilde{\mu}$ を各 S^1 ファイバー上の測度に分解する。まず、 μ を $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ に持ち上げると、Garnett の分解定理 [15] により、

$$\tilde{\mu} = h(z, t) \text{vol}(z) \nu(t),$$

の形で表されるのだった。ここで、 vol は \mathbb{D} の葉向体積形式、 ν は \mathbb{R} 上のボレル測度、 h は $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ 上の $\text{vol}(z) \nu(t)$ に関する局所可積分関数であって、 ν -a.e. t に対して $h(\cdot, t)$ は

\mathbb{D} 上の正調和関数である. $z \in \mathbb{D}$ に対して $\mu_z = h(z, t)\nu(t)$ と \mathbb{R} 上の測度をおくことで, $\tilde{\mu}$ を μ_z たちに分解できる.

定義 5.1. 各 $z \in \mathbb{D}$ に対し, μ_z によって平坦接続の平均をとって得られる S^1 接続を, μ に付随する S^1 接続とよぶ.

これでリプシッツ連続な S^1 接続が得られ, 弱い意味で曲率を持つことを示すためには, μ_z が測度が正になる点の不存在を示すなど細かい議論が必要であり, \mathbb{D} 上の正調和関数に関するハルナック不等式 [3] および Li, Li-Schoen の定理 [20, 21] などを用いるがここでは説明を割愛する.

足立による曲率評価について簡潔に述べる. $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2$ とし, 平坦接続 $\tilde{\omega}$ の x_j 方向の傾きを ω_j とおくと, μ に付随する S^1 接続の曲率は次で表されることが分かる.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta}(z, \theta)\omega_2(z, \theta) + \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta}(z, \theta)\omega_1(z, \theta) \right) d\theta.$$

これは $(\omega_1(z, \theta), \omega_2(z, \theta))$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) という \mathbb{R}^2 上のリプシッツ連続曲線の囲む領域の符号付き面積になっている. この曲線の接ベクトルはほとんど至る所で定義され,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \omega_j(z, \theta) = \frac{\partial \log h}{\partial x_j}(z, \tau(z, \theta))$$

であることが分かる. (τ についての説明は省略する.) よって, 等周不等式より

$$\begin{aligned} |K| &\leq \frac{(1-|z|^2)^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial \log h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log h}{\partial x_2}\right)^2} d\theta \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} |d \log h|_{\text{hyp}} d\theta \right)^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

であり, ハルナック不等式 $|d \log h|_{\text{hyp}} \leq 1$ より $|K| \leq (2\pi)^2/4\pi^2 = 1$ が従う.

もし Σ が閉, つまりカスプを持たない場合には, ガウス=ボネの定理

$$e(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K(z) \text{vol}(dz). \quad (5.2)$$

はほぼ古典的な場合と同様に示される. しかし, カスプを持つ場合には, そもそもオイラー数の定義からして古典版とはずれがあり, Burger-Iozzi-Wienhard による有界オイラー数についてガウス=ボネの公式 (5.2) が成り立つことは非自明である.

各カスプ周りに考察が帰着できることは次のようにして分かる. まず, M の自明化 σ をとっておく. この σ を用いて有界オイラー数は準同型リフト $\tilde{\rho}: \Gamma \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ をとることで,

$$e(\rho) = - \sum_{i=1}^m \tau(\tilde{\rho}(c_i)), \quad (5.3)$$

と計算できるのであった。ここで、 $\tau : \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ はポアンカレ移動数であり、 m は Σ の持つカスプの数であり、 $c_i \in \Gamma$ は i 番目のカスプを境界の向きに一回周るループに対応する Γ の元である。

それぞれのカスプの近傍には、ホロ円周を葉とする葉層構造がある。ホロ円周たちを $\{c_i^s\}$ のようにパラメータ付けし、 $s \rightarrow \infty$ のときに c_i^s の長さが 0 に近づくようにする。 $s \gg 0$ に対して、 $c_1^s, c_2^s, \dots, c_m^s$ を境界とするコンパクト曲面を Σ^s とおく。古典的なガウス＝ボネの定理によって、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^s} K(z) \text{vol}(dz) = \sum_{i=1}^m \tau(\widetilde{\text{hol}}_{\bar{\omega}}(c_i^s)), \quad (5.4)$$

であることが分かる。ここで、 $\widetilde{\text{hol}}_{\bar{\omega}}(c_i^s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\bar{\omega}$ の c_i^s に沿ったホロノミー写像の σ に関するリフトである。 Σ は体積有限であり、 $|K(z)| \leq 1$ a.e. z であるので、 $s \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_{\Sigma^s} K(z) \text{vol}(dz) \longrightarrow \int_{\Sigma} K(z) \text{vol}(dz)$$

が成り立つことが分かる。よって、(5.3) および (5.4) より、(5.2) を示すためには各 i について、 ∞ に発散する数列 $\{s_n\}$ であって、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\tau(\widetilde{\text{hol}}_{\bar{\omega}}(c_i^{s_n})) \longrightarrow -\tau(\tilde{\rho}(c_i)) \quad (5.5)$$

となるものを見つければ良い。この部分は、ハルナック不等式を用いた評価により証明できる。

6 松元剛性への応用

最後に、主定理を応用して松元剛性を示す議論の概要を述べる。証明の要において、松元によって考えられた葉の理想境界への同変写像が現れる。

さて、5 節で述べた通り、足立による調和測度に付随する S^1 接続の曲率評価は、等周不等式とハルナック不等式によって証明されたのだった。オイラー数が極大になるとき、ガウス＝ボネの公式（カスプつきの場合は主定理 2.1）を用いると、これらの両不等式においても等号が成立することが分かる。この内、ハルナック不等式の等号成立から次のようなことが分かる。

命題 6.1 (ハルナック不等式の等号成立条件 [2]). h をポアンカレ円板 \mathbb{D} 上の正調和関数とする。 $|d \log h|_{\text{hyp}} = 1$ がある 1 点において成り立つならば、 h はある $m \in S^1$ を用いて次の形にあらわされる。

$$h(z) = h(0) \frac{1 - |z|^2}{|m - z|^2}.$$

つまり、 \mathbb{D} 上の正調和関数 h についてハルナック不等式の等号が成立するのは、 h がブスマン関数のときのみである。ここで、 \mathbb{D} 上のブスマン関数とは、理想境界の一点で無限に発散するような \mathbb{D} 上の正調和関数として特徴づけられる。

さて、この命題より、オイラー数が極大になる場合、その調和測度から得られる葉の上の正調和関数について、理想境界の一点のみで発散することが分かるので、次のような可測写像を考えることができる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{m} : S^1 & \longrightarrow & \partial\mathbb{D} \\ t & \mapsto & t \text{ を通る葉の上の正調和関数 } h(\cdot, t) \text{ が発散する点} \end{array}$$

この写像 \mathbf{m} が $\rho(\Gamma)$ およびフクス作用 $\rho_0(\Gamma)$ に関する同変性は構成から直ちに分かる。

なお、この写像は松元 [24] によって既に考察されている。松元は双曲曲面を葉とする葉層付き空間ではエルゴード的な調和測度が I 型と II 型に分けられることを示した。I 型であれば上記のように、ほぼ全ての葉で付随する調和関数が境界のただ 1 点で発散する。一方、II 型では付随する調和関数が境界のほぼ全ての点で発散する。この節の議論から、ミルナー＝ウッド不等式の等号が成立するような作用は I 型であることが分かる。他には、Mann の幾何的作用も I 型であることが期待される。

問 6.2. 曲面群の円周への作用で I 型の調和測度を持つものを決定せよ。

参考文献

- [1] M. Adachi, A differential-geometric approach to the Milnor–Wood inequality, Master Thesis, Nagoya Univ., 2010 (in Japanese).
- [2] M. Adachi, Y. Matsuda, H. Nozawa, Harmonic measures and rigidity for surface group actions on the circle, Preprint, arXiv:2207.08411.
- [3] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [4] S. Alvarez, Discretization of harmonic measures for foliated bundles. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 11-12, 621–626.
- [5] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 5, 731–799.
- [6] M. Burger, A. Iozzi, A. Wienhard, Higher Teichmüller spaces: from $SL(2, \mathbb{R})$ to other Lie groups, *Handbook of Teichmüller theory*. Vol. IV, 539–618, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.
- [7] A. Candel, The harmonic measures of Lucy Garnett. Adv. Math. **176** (2003), no. 2, 187–247.
- [8] D. Calegari, *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007.
- [9] D. Calegari. *scI*, Math. Soc. of Japan Mem. Vol. 20, (2009).
- [10] K. Corlette, Rigid representations of Kählerian fundamental groups, J. Differential Geom. **33** (1991), 239–252.
- [11] B. Deroin, V. Kleptsyn, Random conformal dynamical systems. Geom. Funct. Anal. **17** (2007), no. 4, 1043–1105.
- [12] N.M. Dunfield, Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds, Invent. Math. **136** (1999), 623–657.

- [13] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann, Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphism of the circle, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), no. 4, 638–660.
- [14] S. Frankel, Harmonic Analysis of surface group representations to $\text{Diff}(S^1)$ and Milnor type inequalities, *Prépublication de l'École Polytechnique* **1125** (1996), Preprint.
- [15] L. Garnett, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. *J. Funct. Anal.* **51** (1983), no. 3, 285–311.
- [16] É. Ghys, Groupes d'homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée, *Contemp. Math.*, 58, III (1987), 81–105.
- [17] W.M. Goldman, Topological components of spaces of representations, *Invent. Math.* **93** (1988), 557–607.
- [18] M. Jankins, W. Neumann, Homomorphisms of Fuchsian groups to $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), no. 3, 480–495.
- [19] M. Jankins, W. Neumann, Rotation numbers of products of circle homeomorphisms, *Math. Ann.* **271** (1985), no. 3, 381–400.
- [20] P. Li, Uniqueness of L^1 solutions for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 2, 447–457.
- [21] P. Li, R. Schoen, L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds. *Acta Math.* **153** (1984), no. 3-4, 279–301.
- [22] K. Mann, Spaces of surface group representations. *Invent. math.* **201**, (2015), 669–710.
- [23] S. Matsumoto, Some remarks on foliated S^1 bundles, *Invent. Math.* **90** (1987), no. 2, 343–358.
- [24] S. Matsumoto, The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations. *Tohoku Math. J. (2)* **64** (2012), no. 4, 569–592.
- [25] S. Matsumoto, Rigidity Theorem for surface group actions on the circle, Preprint, 2021.
- [26] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), 215–223.
- [27] H. Minakawa, Milnor–wood inequality for crystallographic groups, *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 13 Année 1994–1995. 167–170, 1995.
- [28] R. Naimi, Foliations transverse to fibers of Seifert manifolds. *Comment. Math. Helv.* **69** (1994), no. 1, 155–162.
- [29] A. Navas, *Groups of circle diffeomorphisms*. Translation of the 2007 Spanish edition. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2011. xviii+290 pp.
- [30] D. Sullivan, A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds, *Comment. Math. Helv.* **51** (1976), no. 2, 183–189.
- [31] W. P. Thurston, Three-manifolds, Foliations and Circles II, *Collected works of William P. Thurston with commentary. Vol. I. Foliations, surfaces and differential geometry.*, 413–450, Edited by B. Farb, D. Gabai and S.P. Kerckhoff, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2022.
- [32] J. W. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, *Comment. Math. Helv.* **46** (1971), 257–273.

ρ -多様体の上のある \mathbb{Q} コホモロジー類の構成

原子 秀一 (東京大学大学院数理科学研究科)*

本研究は科研費 (課題番号:22J13678,22KJ0912) の助成を受けたものである。

1 序

超幾何 (supergeometry) とは大まかにいえば、座標どうしの積が可換とは限らず、積の順番を交換した際に -1 が現れうるような幾何を指す。超幾何は素粒子物理におけるボソンとフェルミオンの間の超対称性 (supersymmetry, SUSY) を記述することを動機としている。反対称な座標に対応するフェルミオンの数学的な議論としては、たとえば F. A. Berezin や G. I. Kats[2, 3] によってフェルミオンの上の積分、すなわち Berezin 積分が導入された。超幾何における多様体の定式化としては主に G^∞ -超多様体、 GH^∞ -超多様体、 H^∞ -超多様体、次数付き超多様体が知られている。 G^∞ -、 GH^∞ -、および H^∞ -超多様体とは、通常の Euclid 空間の代わりに Grassmann 代数を用いた superpoint の空間の上の解析を考え、それを局所的に貼り合わせて得られるものである。一方で、次数付き超多様体は代数幾何的な定式化とも呼ばれ、多様体の上の関数のなす代数を値とする局所環付き空間を考え、この可換代数を超可換代数に拡張して得られるものである。これらの定式化は、superpoint の空間に DeWitt 位相を課した上ですべて次数付き超多様体と等価となることが知られている [1]。本講演では主に代数幾何的な定式化を用いる。

超可換代数や超 Lie 代数における \mathbb{Z}_2 次数付きの条件を一般化した代数として ρ -可換代数や ρ -Lie 代数の概念が考えられている。 ρ -可換代数 [4, 7] は ϵ -可換代数 [14]、 (Γ, λ) -可換代数 [8]、概可換代数 [6] などと呼ばれており、 ρ -Lie 代数は colour (超) 代数 [13] とも呼ばれている。ここでは ρ -可換代数および ρ -Lie 代数という呼び方を採用する。これらは M. Scheunert によって後述の形で明示的に導入され、Ado の定理が ρ -Lie 代数の設定でも成り立つことが示されている [14]。その後 Y. Kobayashi と S. Nagamachi[10, 11] によって、 ρ -可換代数の元を要素に持つ行列代数とその上の行列式やトレース、Berezinian が導入された [10]。さらに、超幾何における superpoint のなす空間とその上の G^∞ な関数に相当するものを ρ -可換代数の上で議論している [11]。ここで導入された行列式、トレース、Berezinian は T. Covoło と J.-Ph. Michel によって可換因子や積の取り替えの影響も含めた圏論的な特徴付けが与えられている [8]。また、P. J. M. Bongaarts と H. G. J. Pijls や C. Ciupală によって量子平面の上の微積が代数的に議論されている [4, 7]。

本講演では超多様体の一種である \mathbb{Q} 多様体における \mathbb{Q} コホモロジー群およびモジュ

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

e-mail: harako@ms.u-tokyo.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification: 58A50, 57R20, 16W50, 17B75, 53D17

キーワード: Graded manifolds, \mathbb{Q} -manifolds, graded algebras, modular classes

ラー類の概念について紹介し、これらを ρ -可換代数に拡張した ρ -多様体、 ρ -Q 多様体とモジュラー類についての結果を示す。以下の内容は主に [9] に基づく。

2 超多様体と Q 多様体

積の対称性および反対称性は、統一的に次数付き代数の次数付き可換性として記述される。 G をアーベル群としたとき G -次数付き代数 (G -graded algebra) とは、代数の構造をもつ次数付きベクトル空間 $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$ であって、任意の $f \in A_i$ および $g \in A_j$ に対して $fg \in A_{i+j}$ を満たすものをいう。 $f \in A$ が斉次 (homogeneous) であるとはある $i \in G$ が存在して $f \in A_i$ となることであり、このとき f の (G -) 次数 ((G -)degree) は i であるという。斉次元 f の次数を $|f|$ と書く。

\mathbb{Z}_2 -次数付き代数のことを超代数 (superalgebra) といい、 $|f| = 0$ を満たす元を even な元、 $|f| = 1$ を満たす元を odd な元という。さらに超代数 A であって、任意の斉次元 $f, g \in A$ について

$$fg = (-1)^{|f||g|}gf$$

を満たすものを超可換代数 (supercommutative algebra) という。

代数幾何的な定式化の動機は通常の滑らかな多様体が局所環付き空間の言葉で特徴づけられることによる。たとえば、次の 2 つの事実が知られている。ここでは、滑らかな多様体 M について、 M の開部分集合にその上の滑らかな関数を対応させる層を C_M^∞ と書く。

補題 2.1. (M, \mathcal{O}) を可換代数の圏に値をもつパラコンパクト Hausdorff 空間 M の上の局所環付き空間とする。次は同値である。

- (1) M は n 次元の滑らかな多様体で $(M, \mathcal{O}) \cong (M, C_M^\infty)$ である。
- (2) (M, \mathcal{O}) は局所的に $(\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}^\infty)$ に同型である。すなわち、各点 $p \in M$ においてある開近傍 $p \in U \subset M$ が存在して、同型 $\mathcal{O}(U) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。

補題 2.2. M, N を滑らかな多様体とする。滑らかな写像 $M \rightarrow N$ たちと局所環付き空間の準同型 $(M, C_M^\infty) \rightarrow (N, C_N^\infty)$ たちの間には 1 対 1 対応が存在する。

次数付き多様体としての超多様体は多様体の局所的な関数のなす代数を超可換代数に置き換えることで得られる。

定義 2.3. 次元 (n, m) の超多様体とは局所環付き空間 (M, \mathcal{A}) であって、次のを満たすものである。

- (1) M は n 次元の滑らかな多様体である。
- (2) 任意の $p \in M$ に対しある座標近傍 $p \in U$ および切断 $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{n+m} \in$

$\mathcal{A}(U)$ が存在し

$$\mathcal{A}(U) \cong C^\infty(U) \otimes \wedge^\bullet \langle x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{n+m} \rangle$$

となる。

$m = 0$ のときは通常の滑らかな多様体に他ならない。(2) のような座標近傍 U においては、 U の通常の滑らかな座標を (x^1, x^2, \dots, x^n) としたとき

$$x^i x^j = \begin{cases} x^j x^i & (1 \leq i \leq n \text{ または } 1 \leq j \leq n \text{ のとき}), \\ -x^j x^i & (n+1 \leq i, j \leq n+m \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって関数環 $\mathcal{A}(U)$ は超可換代数の構造をもつ。

超多様体におけるベクトル場も代数的な特徴付けにより定義される。超多様体 (M, \mathcal{A}) の上のベクトル場 X とは代数 $\mathcal{A}(M)$ の上の超導分 (superderivative)、すなわち任意の $f, g \in \mathcal{A}(M)$ に対し

$$X(fg) = X(f)g + (-1)^{|X||f|} fX(g)$$

が成り立つ $\mathcal{A}(M)$ 上の線型自己準同型をいう。超多様体 (M, \mathcal{A}) の上のベクトル場全体がなす集合 $\text{Vect}(M)$ は超交換子 (supercommutator)

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{|X||Y|} Y \circ X \quad (X, Y \in \text{Vect}(M))$$

によって超 Lie 代数をなす。

多様体の次数付けにより生じる構造として、 \mathbb{Q} 多様体の概念がある。

定義 2.4. 超多様体 M とその上のベクトル場 Q の組が \mathbb{Q} 多様体であるとは、 Q は odd なベクトル場であり $[Q, Q] = 0$ を満たすことをいう。

$|Q| = 1$ より、条件 $[Q, Q] = 0$ は $Q \circ Q = 0$ と言い換えられる。

例 2.5. \mathfrak{g} を有限次元 Lie 代数とする。 \mathfrak{g} の括弧積 $[\cdot, \cdot]: \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は双対写像 $d: \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}^*$ を誘導し、さらに導分として拡張することで $d: \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{\bullet+1} \mathfrak{g}^*$ を誘導する。すると括弧積の Jacobi 恒等式より d は $d \circ d = 0$ を満たす。 \mathfrak{g} の全ての元を odd な元と思ったものを $\Pi \mathfrak{g}$ とおくと、 $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$ は超多様体 $\Pi \mathfrak{g}$ の関数環とみなせる。よって、 $(\Pi \mathfrak{g}, d)$ は \mathbb{Q} 多様体となる。

例 2.6. M を超多様体とし、その座標を $(x^1, x^2, \dots, x^{n+m})$ で表す。 M のシフトされた余接束 ΠT^*M とは、ファイバー方向の座標 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+m}^*)$ と次数付け $|x_a^*| = -|x^a| - 1$ ($1 \leq a \leq n+m$) および変換則

$$y_a^* = \sum_{b=1}^{n+m} \frac{\partial x^b}{\partial y^a} x_b^*$$

によって定まる M 上のベクトル束である。このベクトル束の上の関数は M の上の多重ベクトル場に対応する。 $f, g \in \mathcal{A}(\Pi T^*M)$ に対する Schouten 括弧積は

$$[[f, g]] = \sum_{a=1}^{n+m} \left((-1)^{(|f|+|x^a|+1)(|x^a|+1)} \frac{\partial f}{\partial x_a^*} \frac{\partial g}{\partial x^a} - (-1)^{|x^a|(|f|+1)} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x_a^*} \right).$$

と表される。(高次)Poisson 多様体の Poisson 構造 \mathcal{P} とは、 M の上の多重ベクトル場 $\mathcal{P} \in \mathcal{A}(\Pi T^*M)$ であって $[[\mathcal{P}, \mathcal{P}]] = 0$ を満たすものである。このとき、odd なベクトル場 $Q_{\mathcal{P}} := [[\mathcal{P}, -]] \in \text{Vect}(\Pi T^*M)$ を考えると $(\Pi T^*M, Q_{\mathcal{P}})$ は \mathbb{Q} 多様体となる。

3 \mathbb{Q} コホモロジー

\mathbb{Q} 多様体 (M, Q) においては $Q \circ Q = 0$ が成り立つため、 M の上の関数のなす代数 $\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(M)_0 \oplus \mathcal{A}(M)_1$ を \mathbb{Z}_2 で次数付けられたコチェイン複体であって微分 Q が作用するものと考えることができる。このコチェイン複体のコホモロジー群

$$H_Q^\bullet(M) := H^\bullet(\mathcal{A}(M), Q)$$

を \mathbb{Q} 多様体 (M, Q) の \mathbb{Q} コホモロジー群という。

\mathbb{Q} コホモロジー類を構成する方法として、向き付け可能な \mathbb{Q} 多様体の上のモジュラー類を考えるものがある。通常の高次元多様体上の体積形式は行列式直線束を用いて定義される。一方で、超可換代数を要素にもつ行列において行列式に相当するものは Berezinian であり、区分行列で表示された even な行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ に対しては

$$\text{Ber}(X) := \begin{cases} \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det(D)^{-1} & (A, D \text{ が可逆なとき}), \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases} \quad (3.1)$$

で定義される。超多様体 (M, \mathcal{A}) の **Berezinian 直線束** $\text{Ber}(M)$ とは、自明化被覆として座標近傍系をもち、各座標 $x = (x^a)_a$ の上のある自明化を与える切断 $D(x)$ について座標 $x = (x^a)_a$ と座標 $y = (y^a)_a$ の共通部分の上では

$$D(y) = D(x) \text{Ber} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^b} \right)_{a,b}$$

となるものである。 $\text{Ber}(M)$ の切断 vol は、座標近傍 U の座標 $x = (x^a)_a$ を用いて局所的に $\text{vol} = D(x)s(x)$ ($s(x) \in \mathcal{A}(U)$) の形で表されるが、任意の座標 $x = (x^a)_a$ に対して $s(x)$ が可逆であるとき vol は (**Berezin**) **体積形式**であるという。

さて、体積形式 vol が存在するときベクトル場 $X \in \text{Vect}(M)$ の発散 $\text{Div}_{\text{vol}} X \in \mathcal{A}(M)$ が

$$\text{vol} \cdot (\text{Div}_{\text{vol}} X) = L_X(\text{vol}) \quad (3.2)$$

により定まる。さらに、 M に \mathbb{Q} 構造 $Q \in \text{Vect}(M)$ が存在するとき $Q \circ Q = 0$ より $Q(\text{Div}_{\text{vol}} Q) = 0$ が従う。すなわち、 $\text{Div}_{\text{vol}} Q$ はコチェイン複体 $(\mathcal{A}(M), Q)$ のコサイク

ルとなる。このコホモロジー類

$$\text{Mod}_Q(M) := [\text{Div}_{\text{vol}} X] \in H_Q^1(M)$$

を Q 多様体 (M, Q) のモジュラー類という。

上で定義された Q 多様体のモジュラー類は、(高次)Poisson 多様体において良く知られたモジュラー類と次の意味において一致することが知られている。

定理 3.1 (Bruce [5]). 高次 Poisson 多様体 M のモジュラー類は、 Q 多様体 $(\Pi T^*M, Q_p)$ のモジュラー類と一致する。

Q コホモロジー群の他の応用例として M. Kontsevich による特性類の構成 [12] が挙げられる。平坦束の接続 1-形式を用いる構成と同様に、シンプレクティック葉層、複素シンプレクティック多様体などの特性類を得ることができるが、この構成は Q 多様体 M の上の $(2n, k)$ 次元のシンプレクティックなファイバーを持つ Q 同変なベクトル束 $E \rightarrow M$ を考え、 $(2n, k)$ 次元の定数項を持たないハミルトンベクトル場がなす空間の相対連続コホモロジー群から Q 多様体 M の Q コホモロジーを得る準同型

$$H_{\text{cont}}^\bullet(\text{Ham}_{2n|k}^0, \text{Sp}(2n, \mathbb{R}); \mathbb{R}) \rightarrow H_Q^\bullet(M)$$

として表される。

4 ρ -可換代数

G をアーベル群とし、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または \mathbb{C} とする。

定義 4.1. G 上の可換因子 (commutation factor) とは 2 変数関数 $\rho: G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ であって、任意の $i, j, k \in G$ に対して

- (1) $\rho(i, j)\rho(j, i) = 1$,
- (2) $\rho(i + j, k) = \rho(i, k)\rho(j, k)$ かつ $\rho(i, j + k) = \rho(i, j)\rho(i, k)$

を満たすもののことである。

この定義から、任意の $i, j \in G$ について

$$\rho(i, j) \neq 0, \quad \rho(i, j) = \rho(-j, i) = \rho(j, -i), \quad \rho(0, i) = \rho(i, 0) = 1$$

などが直ちに導かれる。とくに、条件 (1) より任意の $i \in G$ について $\rho(i, i) \in \{\pm 1\}$ であるから、 $p \in \mathbb{Z}_2$ について

$$G_p := \{i \in G \mid \rho(i, i) = (-1)^p\}$$

とおくと、 $G = G_0 \sqcup G_1$ と非交叉に分割することができる。 G_0 の元を even な元、 G_1 の元を odd な元と呼ぶ。

通常の可換代数や超可換代数が ρ -可換代数と見なせることは容易に確かめられる。

例 4.2. 四元数体 $\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle$ を考える。 $G = \mathbb{Z}_2^2$ とし、

$$|1| := (0, 0), \quad |i| := (1, 0), \quad |j| := (0, 1), \quad |k| := (1, 1)$$

により G -次数を与える。

$$\begin{aligned} \rho: \quad \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((l, m), (l', m')) &\longmapsto (-1)^{lm' - ml'} \end{aligned}$$

と定めることで ρ は可換因子となり、 \mathbb{H} は \mathbb{Z}_2^2 で次数付けられた ρ -可換代数とみなせる。

例 4.3. $\Theta = (\theta_{kl})_{k,l} \in M(m, \mathbb{R})$ を歪対称行列とする。生成元と関係式

$$A_\Theta := \langle u^1, u^2, \dots, u^m \mid u^k u^l = \exp(2\pi\sqrt{-1} \theta_{kl}) u^l u^k \rangle$$

で定義される \mathbb{C} 上の結合代数を非可換トーラス (noncommutative torus) という。

$G = \mathbb{Z}^m$ とし、 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in G$ に対し

$$(A_\Theta)_{\mathbf{i}} := \mathbb{C} \cdot \{(u^1)^{i_1} (u^2)^{i_2} \dots (u^m)^{i_m}\}$$

により G -次数付け $A_\Theta = \bigoplus_{\mathbf{i} \in G} (A_\Theta)_{\mathbf{i}}$ を与える。

$$\begin{aligned} \rho: \quad G \times G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}) &\longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1} \mathbf{i}^\top \Theta \mathbf{j}) \end{aligned}$$

と定めることで ρ は可換因子の条件を満たす。 A_Θ は \mathbb{Z}^m で次数付けられた ρ -可換代数となる。

超可換代数を要素に持つ行列 (supermatrix) は、行と列をそれぞれ even な部分と odd な部分の 2 つずつに分けて考えていた。 ρ -可換代数 $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$ を要素にもつ行列では行および列にそれぞれ G による次数付け $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in G^{\times k}$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in G^{\times l}$ がある状況を考える。このような行列全体を $M_\bullet(I \times J; A) = \bigoplus_{d \in G} M_d(I \times J; A)$ と書く。Kobayashi-Nagamachi は、 G が有限生成であり I および J の元が全て even な場合、もしくは全て odd な場合に、行列式

$$\rho \det: M_0(I \times J; A) \rightarrow A_{\sum_p i_p - \sum_q j_q}$$

が定まることを示した [10]。また、任意の I に対しても、even な行・列と odd な行・列で区分された行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ について式 (3.1) と同様の形で ρ -Berezinian $\rho \text{Ber}: M_0(I; A) \rightarrow A_0$ が定まる。

Lie 代数についても、可換因子を用いた拡張が知られている。

定義 4.4. G で次数付けられたベクトル空間 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in G} \mathfrak{g}_i$ と \mathbb{K} -双線形写像 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ の組が次数 $d \in G$ の ρ -Lie 代数であるとは、任意の斉次な $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ について以下を満たすことである。

- (1) $[\cdot, \cdot]$ の次数は d である、すなわち $[[X, Y]] = |X| + |Y| + d$ である。
- (2) $[X, Y] = -\rho(|X|, |Y|)[Y, X]$ が成り立つ。 (ρ -歪対称性)
- (3) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + \rho(|X| + d, |Y| + d)[Y, [X, Z]]$ が成り立つ。 (ρ -Jacobi 恒等式)

たとえば、 G で次数付けられた結合代数 $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$ は ρ -交換子

$$[X, Y]_\rho := XY - \rho(|X|, |Y|)YX \quad (X, Y \in A)$$

によって次数 0 の ρ -Lie 代数をなす。例として、上に述べた行列代数 $M_\bullet(I; A)$ は ρ -交換子によって ρ -Lie 代数となる。

ρ -可換代数に特徴的な操作として、乗数と呼ばれる 2 変数関数による可換因子および積の取り換えがある。

定義 4.5. 2 変数関数 $\mu: G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ が乗数 (multiplier) であるとは、任意の $i, j, k \in G$ について

- (1) $\mu(i + j, k)\mu(i, j) = \mu(i, j + k)\mu(j, k)$,
- (2) $\mu(0, 0) = 1$

を満たすことである。

可換因子 $\rho: G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ と乗数 $\mu: G \times G \rightarrow \mathbb{K}$ があるとき、

$$\begin{aligned} \rho^\mu: G \times G &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto \rho(i, j)\mu(i, j)\mu(j, i)^{-1} \end{aligned}$$

は可換因子となる。さらに、 $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$ が ρ -可換代数であるとき

$$f \star g := \mu(|f|, |g|)fg \quad (f, g \in A)$$

により A の上の積 \star が定まる。もとの構造と区別して、この \star を積とした結合代数 A を A^μ と書く。

命題 4.6. A^μ は ρ^μ -可換代数となる。

補題 4.7. 上で述べた対応は ρ -可換代数全体のなす圏から ρ^μ -可換代数全体のなす圏への圏同型を誘導する。

5 ρ -多様体

超多様体は多様体の上の関数のなす代数を超可換な代数に取り替えたものであったが、この手続きを ρ -可換な代数に適用したものを考える。ここでは、実あるいは複素数に値をもつ、滑らかあるいは解析的な多様体を考え、 \mathcal{O} をその上の関数のなす層とする。

定義 5.1. ρ -多様体とは局所環付き空間 (M, \mathcal{O}_ρ) であって、次を満たすものである。

- (1) M は \mathcal{O} を関数のなす層とする n 次元の多様体である。
- (2) 各点 $p \in M$ においてある開近傍 $p \in U \subset M$ と切断 $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \in \mathcal{O}_\rho(U)$ が存在して、同型

$$\mathcal{O}_\rho(U) \cong \mathcal{O}(U)[[x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{n+m}]].$$

が成り立つ。これらの $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ を形式的な座標と呼ぶ。

$\mathcal{O}_\rho(M)$ の上の ρ -導分、すなわち任意の $f, g \in \mathcal{O}_\rho(M)$ に対して

$$X(fg) = X(f)g + \rho(|X|, |f|)fX(g)$$

を満たす $\mathcal{O}_\rho(M)$ の線型自己準同型 X を ρ -多様体の上のベクトル場と呼ぶ。 ρ -ベクトル場全体 $\text{Vect}_\rho(M)$ は ρ -Lie 代数をなす。

ρ -多様体の間の射を局所環付き空間の射と定めることで、たとえば逆関数定理に相当する次の事実が示される。

定理 5.2 (H.). $\Phi: M \rightarrow N$ を形式的な座標の G -次数が 0 でない ρ -多様体の間の射とする。 $p \in M$ について、 p のまわりで Φ の Jacobi 行列が可逆であれば、ある p のまわりの座標近傍 $U \subset M$ と $\Phi(p)$ のまわりの座標近傍 $V \subset N$ が存在して $\Phi|_U: U \rightarrow V$ が可逆となる。

ベクトル場の G -次数付けを用いて ρ -多様体においても \mathbb{Q} -多様体を考えることができる。

定義 5.3. ρ -多様体 M とその上のベクトル場 Q の組であって、 $|Q|$ が odd であり $[Q, Q]_\rho = 0$ を満たすものを ρ - \mathbb{Q} 多様体と呼ぶ。

一般の ρ -可換代数に対して同様の条件を課したものは almost commutative \mathbb{Q} -algebra と呼ばれている [6]。

ρ -多様体の上の体積形式は、超多様体の場合と同様に Berezinian を用いて定義する。ただし、 ρ -多様体における Jacobi 行列は ρ -可換な関数を要素にもつ行列となるため、Kobayashi-Nagamachi による ρ -Berezinian を用いる。 ρ -多様体 (M, \mathcal{O}_ρ) の上の ρ -Berezinian 直線束とは、 M の座標近傍系を自明化近傍とする M 上の直線束 $\rho \text{Ber}(M)$ であって、座標 $(x^a)_a$ と $(y^a)_a$ の共通部分の上では

$$D(y) = D(x) \rho \text{Ber} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^b} \right)_{a,b}$$

となるものである。ここで $D(x)$ は自明化近傍 $(x^a)_a$ の上のある自明化を与える切断である。 ρ -多様体 M の上の (ρ -Berezin) 体積形式とは $\rho \text{Ber}(M)$ の切断 vol であって、局所的に $\text{vol} = D(x)s(x)$ ($s(x) \in \mathcal{O}_\rho(U)$) と表したとき $s(x)$ が可逆となるものと定める。

ρ -Berezin 体積形式に対しても、式 (3.2) と同じ形でベクトル場 X の発散 $\text{Div}_{\text{vol}} X$ が定まる。また、体積形式 vol をもつ ρ - Q 多様体では超多様体の場合と同様に $Q(\text{Div}_{\text{vol}} Q) = 0$ が示される。 $\mathcal{O}_\rho(M)$ の部分空間

$$\mathcal{O}_\rho(M)_Q := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_\rho(M)_{p|Q}$$

を微分 Q が作用するコチェイン複体として捉え、そのコホモロジー群 $H_Q^\bullet(M) := H^\bullet(\mathcal{O}_\rho(M)_Q, Q)$ をとることで ρ - Q 多様体の Q コホモロジー群が定まる。この Q コホモロジー群の元として、体積形式 vol をもつ ρ - Q 多様体 (M, Q) のモジュラー類

$$\text{Mod}_Q(M; \text{vol}) := [\text{Div}_{\text{vol}} X] \in H_Q^1(M)$$

が構成される。

例 5.4. 例 4.3 に挙げた非可換トーラス A_Θ は、1 点 $M = \{*\}$ の上の $G = \mathbb{Z}^m$ で次数付けられた ρ -多様体と捉えられる。

$G' := \mathbb{Z} \times G$ とおき、 G' の上の可換因子

$$\begin{aligned} \rho': G' \times G' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((s, \mathbf{i}), (t, \mathbf{j})) &\longmapsto (-1)^{st} \rho(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \end{aligned}$$

を考える。可換リー代数 $\mathfrak{g} := \mathbb{C}^m$ の上の標準的な座標関数を $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m$ で表す。

$$|\eta^a|' := (1, (0, 0, \dots, 0)) \quad \text{および} \quad |u^a|' := (0, |u^a|) \quad (1 \leq a \leq m)$$

で定まる G' -次数付け $|\cdot|'$ によって ρ' -多様体 $\Pi\mathfrak{g} \times M$ を考えると、ベクトル場

$$Q := - \sum_{a=1}^m 2\pi\sqrt{-1} \eta^a u^a \frac{\partial}{\partial u^a}$$

は Q 構造となる。 $M = \{*\}$ の上の自明な体積形式 vol について、モジュラー類は

$$\text{Mod}_Q(\Pi\mathfrak{g} \times M; \text{vol}) = -2\pi\sqrt{-1} \sum_{a=1}^m [\eta^a]$$

と計算できる。

また、ここで定義したモジュラー類は乗数による可換因子や積の取り替えについて不変であることが示される。 ρ を可換因子、 μ を乗数とすると、補題 4.7 に述べた圏の間の同型は、 ρ -多様体がなす圏から ρ^μ -多様体がなす圏への圏同型を誘導する。この同型による M の像を M^μ と書くことにする。 M^μ における M 上のベクトル場 X 、 M 上の体積形式 vol に対応するものをそれぞれ X^μ, vol^μ と書くことにする。 Q が M の Q 構造であるとき Q^μ は M^μ の上の Q 構造を定め、 vol^μ は M^μ の上の体積形式を定めることが示される。

定理 5.5 (H.). $\text{Mod}_{Q^\mu}(M^\mu; \text{vol}^\mu) = \text{Mod}_Q(M; \text{vol})$ である。

参考文献

- [1] C. Bartocci, U. Bruzzo, and D. H.-Ruipérez. *The Geometry of Supermanifolds*. Math. Appl. Springer, Dordrecht, 1991.
- [2] F. A. Berezin. *The method of second quantization*. Vol. Vol. 24. Academic Press, New York-London, 1966, pp. xii+228.
- [3] F. A. Berezin and G. I. Kac. “Lie groups with commuting and anticommuting parameters”. In: *Mat. Sb. (N.S.)* (1970), pp. 343–359.
- [4] P. J. M. Bongaarts and H. G. J. Pijls. “Almost commutative algebra and differential calculus on the quantum hyperplane”. In: *J. Math. Phys.* 2.35 (1994), pp. 959–970.
- [5] A. Bruce. “Modular classes of Q -manifolds: A review and some applications”. In: *Arch. Math. (Brno)* 53.4 (May 2017), pp. 203–219.
- [6] A. J. Bruce. “Almost commutative Q -algebras and derived brackets”. In: *J. Non-commut. Geom.* 14.2 (2020), pp. 681–707.
- [7] C. Ciupală. “Differential calculus on almost commutative algebras and applications to the quantum hyperplane”. In: *Arch. Math. (Brno)* 41.4 (2005), pp. 359–377.
- [8] T. Covolo and J.-Ph. Michel. “Determinants over graded-commutative algebras, a categorical viewpoint”. In: *Enseign. Math.* 62.3-4 (2016), pp. 361–420.
- [9] S. Harako. *Almost Commutative Manifolds and Their Modular Classes*. 2022. arXiv: 2206.05709 [math.AT].
- [10] Y. Kobayashi and S. Nagamachi. “Lie groups and Lie algebras with generalized supersymmetric parameters”. In: *J. Math. Phys.* 25.12 (1984), pp. 3367–3374.
- [11] Y. Kobayashi and S. Nagamachi. “Analysis on generalized superspaces”. In: *J. Math. Phys.* 27.9 (1986), pp. 2247–2256.
- [12] M. Kontsevich. “Rozansky-Witten Invariants via Formal Geometry”. In: *Compos. Math.* 115.1 (Jan. 1999), pp. 115–127.
- [13] V. Rittenberg and D. Wyler. “Generalized superalgebras”. In: *Nuclear Phys. B* 3.139 (1978), pp. 189–202.
- [14] M. Scheunert. “Generalized Lie algebras”. In: *J. Math. Phys.* 20.4 (1979), pp. 712–720.

CARS, INTERCHANGES, TRAFFIC COUNTERS, AND SOME PRETTY DARNED GOOD KNOT INVARIANTS

DROR BAR-NATAN, UNIVERSITY OF TORONTO

ABSTRACT. A condensed summary of a talk I gave in Nara on August 13, 2023: Reporting on joint work with Roland van der Veen, I'll tell you some stories about ρ_1 , an easy to define, strong, fast to compute, homomorphic, and well-connected knot invariant. ρ_1 was first studied by Rozansky and Overbay [Ro1, Ro2, Ro3, Ov] and Ohtsuki [Oh2], it has far-reaching generalizations, it is dominated by the coloured Jones polynomial, and I wish I understood it.

My talk's title and abstract were the same as the title and abstract of this summary. The talk used slides, and in this summary, they are shown on the right.




Those slides were all excerpts from a handout, which is attached at the end of this document. It is where the true content lies! It is also available on the web site of this talk, which is displayed on the next slide.

As an aside, I really believe in this way of giving talks, with slides and a handout. Slides are to save time and to allow for more elaborate figures. But slide talks without a handout are awful! Content disappears before it's been digested. A handout with identical content to the slides solves the problem – you can always look back to recall (and ahead, to decide how hard you want to fight sleep). But then the best way to make sure that the handout and the slides are fully synced is to have the slides simply be zoomed-in parts of the handout, and that's precisely what I do.



But it's a waste of so much paper, I hear you say. Yes, I say, but it's completely trivial relative to our travel to hear each other talk. Save where it matters. Where it's useful, spend.

Okay, it's all online, at <http://drorbn.net/na23>. There's also a paper, at <http://drorbn.net/na23>.

ants More at <http://drorbn.net/na23> 

Thanks, NSERC and Arthur Chu!

Acknowledgement. This work was supported by NSERC grant RGPIN-2018-04350 and by the Chu Family Foundation (NYC).

Date: August 14, 2023.

We seek strong, fast, and homomorphic invariants. Strong and fast are clear enough. Especially, we care for fast because of the likes of the GST48 knot [GST] and the Piccirillo knot [Pi]. Polynomial time is best!

We seek strong, fast, homomorphic knot and tangle invariants.
Strong. Having a small “kernel”.
Fast. Computable even for large knots (best: poly time).

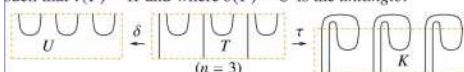


We then explained “homomorphic”. It means, “extends to tangles and is well behaved under tangle gluing and strand doubling”.

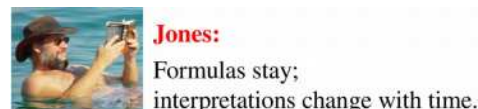


We care for “homomorphic” because using tangles and tangle operations we can define interesting classes of knots, and thus invariants that are homomorphic with respect to these operations may be able to tell us something about these classes. See ωεβ/AKT.

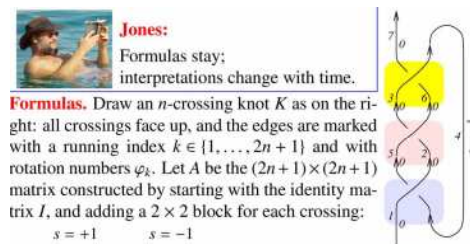
Why care for “Homomorphic”? **Theorem.** A knot K is ribbon iff there exists a $2n$ -component tangle T with skeleton as below such that $\tau(T) = K$ and where $\delta(T) = U$ is the *untangle*:



But enough with philosophy! I learned from Vaughan Jones that theories change with time, yet formulas stay. So let’s start with formulas!



To compute our knot invariant ρ_1 , we cut it to a long knot and place it in the plane so that at all vertices, all edges are “flowing up”. We then label each edge with serial number and with its rotation number φ_k .



We make a $(2n+1) \times (2n+1)$ matrix A by starting with the identity matrix and adding a 2×2 block for each crossing, as shown on the right. We let $G = (g_{\alpha\beta})$ be the inverse of A .

rotation numbers φ_k . Let A be the $(2n+1) \times (2n+1)$ matrix constructed by starting with the identity matrix I , and adding a 2×2 block for each crossing:

$$c : \begin{array}{cc} \begin{array}{c} s = +1 \\ j+1 \uparrow \quad i+1 \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad j \end{array} & \begin{array}{c} s = -1 \\ i+1 \uparrow \quad j+1 \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad i \end{array} \end{array} \longrightarrow$$

A	col $i+1$	col $j+1$
row i	$-T^s$	$T^s - 1$
row j	0	-1

Let $G = (g_{\alpha\beta}) = A^{-1}$. For the trefoil example, it is:

If we start from the trefoil knot diagram displayed before, the resulting A is shown on the right.

Jones: Formulas stay; interpretations change with time.

Formulas. Draw an n -crossing knot K as on the right: all crossings face up, and the edges are marked with a running index $k \in \{1, \dots, 2n + 1\}$ and with rotation numbers φ_k . Let A be the $(2n + 1) \times (2n + 1)$ matrix constructed by starting with the identity matrix I , and adding a 2×2 block for each crossing:

$$c: \begin{matrix} s = +1 & s = -1 \\ \begin{matrix} j+1 \nearrow & i+1 \nearrow \\ i \searrow & j \searrow \end{matrix} & \begin{matrix} i+1 \nearrow & j+1 \nearrow \\ j \searrow & i \searrow \end{matrix} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} A & \text{col } i+1 & \text{col } j+1 \\ \text{row } i & -T^s & T^s - 1 \\ \text{row } j & 0 & -1 \end{matrix}$$

Let $G = (g_{\alpha\beta}) = A^{-1}$. For the trefoil example, it is:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -T & 0 & 0 & T-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -T & 0 & 0 & T-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T-1 & 0 & 1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bureau, Alexander, Fox

And now the corresponding G , the “Green Function”, is shown.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & T & 1 & T & 1 & T & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T^2}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T^2}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-T}{T^2-T+1} & \frac{T^2-T+1}{(T-1)T} & \frac{1}{T^2-T+1} & \frac{T^2-T+1}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-T}{T^2-T+1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

“The Green Function”

We noted that $\det(A)$ is (up to a normalization) the good old Alexander polynomial. If you are a classical topologist, you should yawn and perhaps fall asleep right now, for so far everything is very old material.

Note. The Alexander polynomial Δ is given by $\Delta = T^{(-\varphi-w)/2} \det(A)$, with $\varphi = \sum_k \varphi_k$, $w = \sum_c s_c$.

Classical Topologists: This is boring. Yawn.

The 2×2 matrices are the Bureau matrices. The matrix A is a presentation matrix of the Alexander module, derived by applying Fox calculus to the Wirtinger presentation. Even G is not a great surprise; it is related to the “Blanchfield Pairing”. All of these people are old timers, so much so that their pictures are in black and white.



All the news is in just one slide, the one on the right! We defined $R_1(c)$ and ρ_1 , explained why ρ_1 is easy to compute (as easy as the Alexander polynomial), and asserted that it is invariant (to be proven below). If you are a classical topologist, these formulas should come as a complete surprise to you.

These days I take what I learned from Vaughan Jones a step further. I care for programs even more than I care for formulas.

We load some libraries that play a mild role: just tables of knots, and some older invariants for comparison, and a program to compute rotation numbers (something we could have done by hand).

Next is the main part of the program. It is almost one-to-one the same as the formulas for ρ_1 , and if there's ever a disagreement, the program is to be trusted better because it's been tested extensively. Note that the program outputs the ordered pair $Z = (\Delta, \rho_1)$, because Δ is computed anyway within the computation of ρ_1 , and we consider it as a part of ρ_1 .

We run the program on all knots with up to 6 crossings.

Formulas, continued. Finally, set

$$R_1(c) := s(g_{ji}(g_{j+1,j} + g_{j,j+1} - g_{ij}) - g_{ii}(g_{j,j+1} - 1) - 1/2)$$

$$\rho_1 := \Delta^2 \left(\sum_c R_1(c) - \sum_k \varphi_k (g_{kk} - 1/2) \right).$$

In our example $\rho_1 = -T^2 + 2T - 2 + 2T^{-1} - T^{-2}$.

Theorem. ρ_1 is a knot invariant.

Proof: later.

Classical Topologists: Whiskey Tango Foxtrot?



Jones:

Formulas stay; interpretations change with time.

Preliminaries

This is Rho.nb of <http://drorbn.net/oa22/ap>.

Once [`<< KnotTheory``; `<< Rot.m`];

Loading KnotTheory` version of February 2, 2020, 10:53:45.2097.

Read more at <http://katlas.org/wiki/KnotTheory>.

Loading Rot.m from <http://drorbn.net/la22/ap> to compute rotation numbers.

The Program

```
R1[s_, i_, j_] :=
  s (g_{ji} (g_{j+1,j} + g_{j,j+1} - g_{ij}) - g_{ii} (g_{j,j+1} - 1) - 1/2);
Z[K_] := Module[{Cs, phi, n, A, s, i, j, k, Delta, G, rho1},
  {Cs, phi} = Rot[K]; n = Length[Cs];
  A = IdentityMatrix[2 n + 1];
  Cases[Cs, {s_, i_, j_} ->
    {A[[{i, j}, {i + 1, j + 1}]] += (-T^5 T^5 - 1)}];
  Delta = T^(-Total[phi] - Total[Cs][[All, 1]])/2 Det[A];
  G = Inverse[A];
  rho1 = Sum_{k=1}^n R1 @@ Cs[[k]] - Sum_{k=1}^{2n} phi[[k]] (g_{kk} - 1/2);
  Factor@
  {Delta, Delta^2 rho1 /. alpha_ -> alpha + 1 /. g_{alpha, beta} -> G[[alpha, beta]]};
```

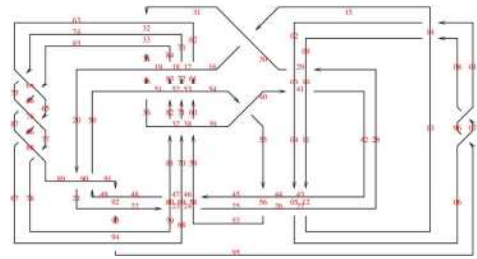
The First Few Knots

TableForm[Table[Join[{K[[1]]_K[[2]]}, Z[K]], {K, AllKnots[{3, 6]}], TableAlignments -> Center]

3 ₁	$\frac{1-T+T^2}{T}$	$\frac{(-1+T)^2(1+T^2)}{T^2}$
4 ₁	$-\frac{1-3T+T^2}{T}$	0
5 ₁	$\frac{1-T+T^2-3T^3+T^4}{T^2}$	$\frac{(-1+T)^2(1+T^2)(2+T^2+2T^4)}{T^4}$
5 ₂	$\frac{2-3T+2T^2}{T}$	$\frac{(-1+T)^2(5-4T+5T^2)}{T^2}$
6 ₁	$-\frac{(-2+T)(-1+2T)}{T}$	$\frac{(-1+T)^2(1-4T+T^2)}{T^2}$
6 ₂	$-\frac{1-3T+3T^2-3T^3+T^4}{T^2}$	$\frac{(-1+T)^2(1-4T+4T^2-4T^3+4T^4-4T^5+T^6)}{T^4}$
6 ₃	$\frac{1-3T+5T^2-3T^3+T^4}{T^2}$	0

The program is fast! Here is the GST48 knot once again,...

Fast!



and it takes only about 170 seconds to compute its ρ_1 .

Timing@

```
Z[GST48 = EPD[X14,1, X2,29, X3,40, X43,4, X26,5, X6,95,
X96,7, X13,8, X9,28, X10,41, X42,11, X27,12, X30,15,
X16,61, X17,72, X18,83, X19,34, X89,20, X21,92,
X79,22, X68,23, X57,24, X25,56, X62,31, X73,32,
X84,33, X50,35, X36,81, X37,70, X38,59, X39,54, X44,55,
X58,45, X69,46, X80,47, X48,91, X90,49, X51,82, X52,71,
X53,60, X63,74, X64,85, X76,65, X87,66, X67,94,
X75,86, X88,77, X78,93]]
```

$$\{170.313, \left\{ -\frac{1}{T^8} (-1 + 2T - T^2 - T^3 + 2T^4 - T^5 + T^8) \right. \\ \left. (-1 + T^3 - 2T^4 + T^5 + T^6 - 2T^7 + T^8), \frac{1}{T^{16}} \right. \\ \left. (-1 + T)^2 (5 - 18T + 33T^2 - 32T^3 + 2T^4 + 42T^5 - 62T^6 - \right. \\ \left. 8T^7 + 166T^8 - 242T^9 + 108T^{10} + 132T^{11} - 226T^{12} + \right. \\ \left. 148T^{13} - 11T^{14} - 36T^{15} - 11T^{16} + 148T^{17} - 226T^{18} + \right. \\ \left. 132T^{19} + 108T^{20} - 242T^{21} + 166T^{22} - 8T^{23} - 62T^{24} + \right. \\ \left. 42T^{25} + 2T^{26} - 32T^{27} + 33T^{28} - 18T^{29} + 5T^{30} \right\} \}$$

$Z = (\Delta, \rho_1)$ is strong! It seems that it is stronger than HOMFLY-PT and Khovanov homology taken together.

Strong!

```
{NumberOfKnots[{3, 12}],
Length@
Union@Table[Z[K], {K, AllKnots[{3, 12]}]],
Length@
Union@Table[{HOMFLYPT[K], Kh[K]},
{K, AllKnots[{3, 12]}]}]
{2977, 2882, 2785}
```

So the pair (Δ, ρ_1) attains 2,882 distinct values on the 2,977 prime knots with up to 12 crossings (a deficit of 95), whereas the pair (HOMFLYPT, Khovanov Homology) attains only 2,785 distinct values on the same knots (a deficit of 192).



On to interpretations, we discussed the traffic rules for cars on a knot diagram. All car crashes we discuss are gentle and no harm is ever caused to the occupants of our cars.

Cars, Interchanges, and Traffic Counters. Cars always drive forward. When a car crosses over a bridge it goes through with (algebraic) probability $T^s \sim 1$, but falls off with probability $1 - T^s \sim 0^*$. At the very end, cars fall off and disappear. See also [Jo, LTW].

$p = 1 - T^s$

* In algebra $x \sim 0$ if for every y in the ideal generated by x , $1 - y$ is invertible.

A relevant scene with Lightning McQueen, enacted by Roland's kids.



$$p = 1 - T^s$$

We claim that the matrix G of before is the traffic matrix for a knot diagram. Yet first we illustrate the traffic matrix using a very simple knot diagram (a single kink), and some simple-minded geometric summation.

Theorem. The Green function $g_{\alpha\beta}$ is the reading of a traffic counter at β , if car traffic is injected at α (if $\alpha = \beta$, the counter is after the injection point).

Example.

$$\sum_{\rho \geq 0} (1-T)^\rho = T^{-1} \quad T^{-1} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad G = \begin{pmatrix} 1 & T^{-1} & 1 \\ 0 & T^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We then used “ g -rules” to prove the claim. These are rules that tell us how to move the traffic injection sites and the traffic counting sites, and they will also be useful below, within the actual proof of invariance.

Proof. Near a crossing c with sign s , incoming upper edge i and incoming lower edge j , both sides satisfy the g -rules:

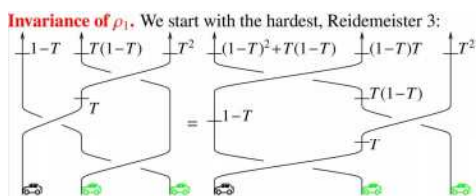
$$g_{i\beta} = \delta_{i\beta} + T^s g_{i+1,\beta} + (1-T^s) g_{j+1,\beta}, \quad g_{j\beta} = \delta_{j\beta} + g_{j+1,\beta}$$

and always, $g_{\alpha,2n+1} = 1$: use common sense and $AG = I (= GA)$.

Bonus. Near c , both sides satisfy the further g -rules:

$$g_{\alpha i} = T^{-s}(g_{\alpha,i+1} - \delta_{\alpha,i+1}), \quad g_{\alpha j} = g_{\alpha,j+1} - (1-T^s)g_{\alpha i} - \delta_{\alpha,j+1}.$$

On to the invariance under the hardest of the Reidemeister moves, Reid3. We first establish that traffic away from the Reid3 site is not affected by the move. This is essentially the invariance of the Burau representation.



It follows that we only need to understand the contribution of the $R_1(c)$ terms from the crossings within the Reid3 area.

\Rightarrow Overall traffic patterns are unaffected by Reid3!
 \Rightarrow Green's $g_{\alpha\beta}$ is unchanged by Reid3, provided the cars injection site α and the traffic counters β are away.
 \Rightarrow Only the contribution from the R_1 terms within the Reid3 move matters, and using g -rules the relevant $g_{\alpha\beta}$'s can be pushed outside of the Reid3 area:

We could have done it by hand, but we are lazy and we have good computer skills. So we type in the g -rules, the three R_1 contributions for the left hand side of Reid3 and the three R_1 contributions for the right hand side. We then apply the g -rules to move the traffic injection sites and the traffic counting sites to outside of the Reid3-move area, to where they are unchanged by the move. Comparing lhs with rhs, the computer says True, which means that ρ_1 is invariant under Reid3.

\Rightarrow Only the contribution from the R_1 terms within the Reid3 move matters, and using g -rules the relevant $g_{\alpha\beta}$'s can be pushed outside of the Reid3 area:

$$\delta_{i^+,j^+} := \mathbf{If}[i^+ == j^+, \mathbf{1}, \mathbf{0}];$$

$$gRules_{i^+,j^+} := \{g_{i^+,j^+} \Rightarrow \delta_{i^+,j^+} + T^s g_{i^+,j^+} + (1-T^s) g_{j^+,j^+}, g_{j^+,j^+} \Rightarrow \delta_{j^+,j^+} + g_{j^+,j^+}, g_{i^+,i^+} \Rightarrow T^{-s}(g_{i^+,i^+} - \delta_{i^+,i^+}), g_{i^+,j^+} \Rightarrow g_{i^+,j^+} - (1-T^s) g_{i^+,i^+} - \delta_{i^+,j^+}\}$$

$$lhs = R_1[1, j, k] + R_1[1, i, k'] + R_1[1, i', j'] //.$$

$$gRules_{1,j,k} \cup gRules_{1,i,k'} \cup gRules_{1,i',j'}$$

$$rhs = R_1[1, i, j] + R_1[1, i', k] + R_1[1, j', k'] //.$$

$$gRules_{1,i,j} \cup gRules_{1,i',k} \cup gRules_{1,j',k'}$$

Simplify[lhs == rhs]
True

As a second example we verify invariance under Reid1. Most of the work had already been done, because we computed already the “traffic matrix” of a kink. What remains is a little calculation (without forgetting the rotation-number correction!). We do that calculation on the right, using a hybrid of computer and human power (very little of each). A few further

Next comes Reid1, where we use results from an earlier example:

$$R_1[1, 2, 1] - 1 (g_{22} - 1/2) /. gRules_{\alpha,\beta} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & T^{-1} & 1 \\ 0 & T^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \llbracket \alpha, \beta \rrbracket$$

$$\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T} - \frac{-1 + \frac{1}{T}}{T} = \bigcirc$$

Invariance under the other moves is proven similarly.

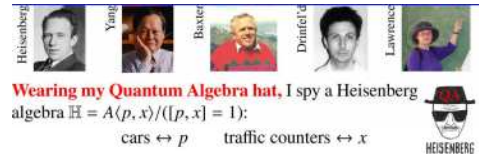
moves need to be shown — they are discussed at [ωεβ/APAI](#). This concludes the invariance proof for ρ_1 .

This slide ought to be shown bigger. Wearing my topology hat, I genuinely, honestly, don't know what's going on.

Wearing my Topology hat the formula for R_1 , and even the idea to look for R_1 , remain a complete mystery to me.



Unfortunately, at this point we had to rush towards the end, and be brief. Wearing my quantum algebra hat, the first thing to note is that there is a whiff of a Heisenberg relation in car traffic — a difference of 1 between the traffic counting before and after the place where traffic is injected, and that may remind us of the Heisenberg commutation relation, $[p, x] = 1$.



I have gone through the remaining few slides way too quickly. Here I will let them speak for themselves. The main things to learn from these reproduced slides are the references cited in them, and the comments in red.

Where did it come from? Consider $\mathfrak{g}_\epsilon := sl_{2+}^\epsilon := L\langle y, b, a, x \rangle$ with relations

$$[b, x] = \epsilon x, \quad [b, y] = -\epsilon y, \quad [b, a] = 0,$$

$$[a, x] = x, \quad [a, y] = -y, \quad [x, y] = b + \epsilon a.$$

At invertible ϵ , it is isomorphic to sl_2 plus a central factor, and it can be quantized à la Drinfel'd [Dr] much like sl_2 to get an algebra $QU = A\langle y, b, a, x \rangle$ subject to (with $q = e^{\hbar\epsilon}$):

$$[b, a] = 0, \quad [b, x] = \epsilon x, \quad [b, y] = -\epsilon y,$$

$$[a, x] = x, \quad [a, y] = -y,$$

$$xy - qyx = \frac{1 - e^{-\hbar(b+\epsilon a)}}{\hbar}.$$

Now QU has an R -matrix solving Yang-Baxter (meaning Reid3),

$$R = \sum_{m,n \geq 0} \frac{y^n b^m \otimes (\hbar a)^m (\hbar x)^n}{m! [n]_q!},$$

($[n]_q!$ is a “quantum factorial”)

and so it has an associated “universal quantum invariant” à la Lawrence and Ohtsuki [La, Oh1], $Z_\epsilon(K) \in QU$.

Now $QU \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ (only as algebras!) and $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ represents into \mathbb{H} via

$$y \rightarrow -tp - \epsilon \cdot xp^2, \quad b \rightarrow t + \epsilon \cdot xp,$$

$$a \rightarrow xp, \quad x \rightarrow x,$$

(abstractly, \mathfrak{g}_ϵ acts on its Verma module

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)/(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)\langle y, a, b - \epsilon a - t \rangle) \cong \mathbb{Q}[x]$$

by differential operators, namely via \mathbb{H}), so R can be pushed to $\mathcal{R} \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$.

Everything still makes sense at $\epsilon = 0$ and can be expanded near $\epsilon = 0$ resulting with $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0(1 + \epsilon\mathcal{R}_1 + \dots)$, with $\mathcal{R}_0 = e^{t(xp \otimes 1 - x \otimes p)}$ and \mathcal{R}_1 a quartic polynomial in p and x . So p 's and x 's get created along K and need to be pushed around to a standard location (“normal ordering”). This is done using

$$(p \otimes 1)\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(T(p \otimes 1) + (1 - T)(1 \otimes p)),$$

$$(1 \otimes p)\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(1 \otimes p),$$

and when the dust settles, we get our formulas for ρ_1 . But QU is a quasi-triangular Hopf algebra, and hence ρ_1 is **homomorphic**. Read more at [BV1, BV2] and hear more at [ωεβ/SolvApp](#), [ωεβ/Dogma](#), [ωεβ/DoPeGDO](#), [ωεβ/FDA](#), [ωεβ/AQDW](#).

Also, we can (and know how to) look at higher powers of ϵ and we can (and more or less know how to) replace sl_2 by arbitrary semi-simple Lie algebra (e.g., [Sch]). So



Schaveling

ρ_1 is not alone!

These constructions are very similar to Rozansky-Overbay [Ro1, Ro2, Ro3, Ov] and hence to the “loop expansion” of the Kontsevich integral and the coloured Jones polynomial [Oh2].

We re-iterated that an invariant as simple as ρ_1 must have a simple explanation, hopefully, within topology. Our current understanding of ρ_1 within quantum algebra is simply way too complicated.

We also remind that in some sense, ρ_1 is a “friend” of the Alexander polynomial Δ , and that Δ is perhaps the most topologically-meaningful knot invariant. Like Δ , ρ_1 gives a genus bound. Does it also give a ribbon criteria like the Fox-Milnor condition for Δ ?

At the end, we merely flashed our theorem regarding ρ_d , which generalizes ρ_1 when $d \geq 1$, and our implementation thereof. For $d \geq 2$, ρ_d is more complicated than ρ_1 , yet it retains some things in common with ρ_1 : Once more the key is the matrix $G = (g_{\alpha\beta})$. To compute ρ_1 we carry out a 1-fold summation over the features of the knot (crossings and rotations), of polynomials of degree ≤ 2 in the $g_{\alpha\beta}$'s. To compute ρ_d we carry out a d -fold summation over the features of the knot, of polynomials of degree $\leq 2d$ in the $g_{\alpha\beta}$'s. Multiple summations are of course more costly than single summations, yet the computation of ρ_2 remains of polynomial time and for small d it is completely practical.

If this all reads like insanity to you, it should (and you haven't seen half of it). Simple things should have simple explanations. Hence, **Homework**. Explain ρ_1 with no reference to quantum voodoo and find it a topology home (large enough to house generalizations!). Make explicit the homomorphic properties of ρ_1 . Use them to do topology!

P.S. As a friend of Δ , ρ_1 gives a genus bound, sometimes better than Δ 's. How much further does this friendship extend?

```

A Small-Print Page on  $\rho_d, d \geq 1$ .
Definition.  $(\rho_d)_{\mathbb{Z}[t]} \in \mathbb{Z}[t]$  is a knot invariant,  $\rho_d(K) = 2d^2$ .
This theorem. There exist some unique power series  $r^d(p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}[t]$  with  $\deg r^d \leq 2d + 2$  (twice  $d$ ) such that the power series  $Z = \sum_{\mathbb{Z}[t]} r^d(p_1, p_2, \dots, p_d)$  is a knot invariant. Beyond the once-and-for-all computation of  $Z$  (a matrix inversion),  $Z^d$  is computable in  $O(d^3)$  operations in the ring  $\mathbb{Z}[t]$ . (There are knot diagrams including the braid-like Reidemeister moves, but not the cyclic ones).
Theorem. There also exist finite power series  $r^d(p, \beta) \in \mathbb{Z}[t]$  such that the power series  $Z = \sum_{\mathbb{Z}[t]} r^d(p, \beta)$  is a knot invariant, as easily computable as  $Z^d$ .
Implementation. Data, this program (with output using the Conway variable  $z = \sqrt{-1} - \sqrt{2}$ ), and then a done. See the end of this page.

```

REFERENCES

[BV1] D. Bar-Natan and R. van der Veen, *A Polynomial Time Knot Polynomial*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019) 377–397, [arXiv:1708.04853](https://arxiv.org/abs/1708.04853).
 [BV2] D. Bar-Natan and R. van der Veen, *Perturbed Gaussian Generating Functions for Universal Knot Invariants*, [arXiv:2109.02057](https://arxiv.org/abs/2109.02057).
 [Dr] V. G. Drinfel'd, *Quantum Groups*, Proc. Int. Cong. Math., 798–820, Berkeley, 1986.
 [GST] R. E. Gompf, M. Scharlemann, and A. Thompson, *Fibered Knots and Potential Counterexamples to the Property 2R and Slice-Ribbon Conjectures*, Geom. and Top. **14** (2010) 2305–2347, [arXiv:1103.1601](https://arxiv.org/abs/1103.1601).
 [Jo] V. F. R. Jones, *Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials*, Annals Math., **126** (1987) 335–388.
 [La] R. J. Lawrence, *Universal Link Invariants using Quantum Groups*, Proc. XVII Int. Conf. on Diff. Geom. Methods in Theor. Phys., Chester, England, August 1988. World Scientific (1989) 55–63.
 [LTW] X-S. Lin, F. Tian, and Z. Wang, *Burau Representation and Random Walk on String Links*, Pac. J. Math., **182-2** (1998) 289–302, [arXiv:q-alg/9605023](https://arxiv.org/abs/q-alg/9605023).
 [Oh1] T. Ohtsuki, *Quantum Invariants*, Series on Knots and Everything **29**, World Scientific 2002.
 [Oh2] T. Ohtsuki, *On the 2-loop Polynomial of Knots*, Geom. Top. **11** (2007) 1357–1475.

- [Ov] A. Overbay, *Perturbative Expansion of the Colored Jones Polynomial*, Ph.D. thesis, University of North Carolina, August 2013, [ωεβ/Ov](#).
- [Pi] L. Piccirillo, *The Conway knot is not slice*, *Ann. of Math. (2)* **191-2** (2020) 581–591, [arXiv:1808.02923](#).
- [Ro1] L. Rozansky, *A Contribution of the Trivial Flat Connection to the Jones Polynomial and Witten's Invariant of 3D Manifolds, I*, *Comm. Math. Phys.* **175-2** (1996) 275–296, [arXiv:hep-th/9401061](#).
- [Ro2] L. Rozansky, *The Universal R-Matrix, Burau Representation and the Melvin-Morton Expansion of the Colored Jones Polynomial*, *Adv. Math.* **134-1** (1998) 1–31, [arXiv:q-alg/9604005](#).
- [Ro3] L. Rozansky, *A Universal U(1)-RCC Invariant of Links and Rationality Conjecture*, [arXiv:math/0201139](#).
- [Sch] S. Schaveling, *Expansions of Quantum Group Invariants*, Ph.D. thesis, Universiteit Leiden, September 2020, [ωεβ/Scha](#).

Email address: drorbn@math.toronto.edu

URL: <http://www.math.toronto.edu/~drorbn>



Cars, Interchanges, Traffic Counters, and some Pretty Darned Good Knot Invariants

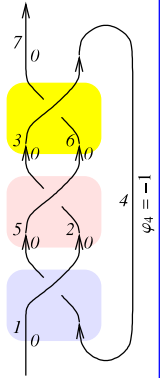
More at ωεβ/APAI

Abstract. Reporting on joint work with Roland van der Veen, I'll tell you some stories about ρ_1 , an easy to define, strong, fast to compute, homomorphic, and well-connected knot invariant. ρ_1 was first studied by Rozansky and Overbay [Ro1, Ro2, Ro3, Ov] and Ohtsuki [Oh2], it has far-reaching generalizations, it is dominated by the coloured Jones polynomial, and I wish I understood it.

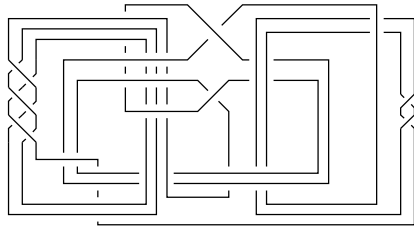
Common misconception. "Dominated" \Rightarrow "lesser".



Jones:
Formulas stay; interpretations change with time.

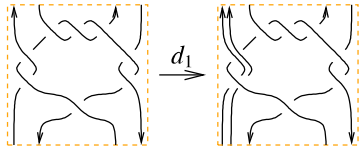


We seek strong, fast, homomorphic knot and tangle invariants.
Strong. Having a small "kernel".
Fast. Computable even for large knots (best: poly time).

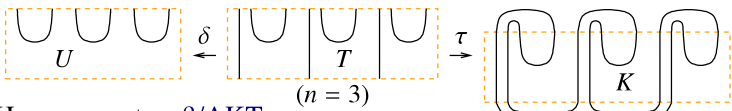


Gompf-Scharlemann-Thompson

Homomorphic. Extends to tangles and behaves under tangle operations; especially gluings and doublings:



Why care for "Homomorphic"? **Theorem.** A knot K is ribbon iff there exists a $2n$ -component tangle T with skeleton as below such that $\tau(T) = K$ and where $\delta(T) = U$ is the untangle:



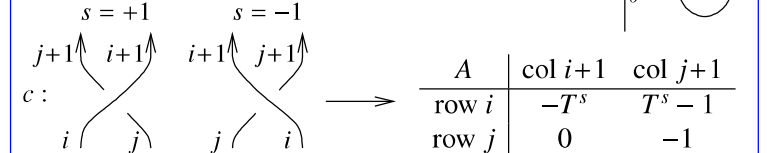
Hear more at ωεβ/AKT.

Acknowledgement. This work was supported by NSERC grant RGPIN-2018-04350 and by the Chu Family Foundation (NYC).

[BV1] D. Bar-Natan and R. van der Veen, *A Polynomial Time Knot Polynomial*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019) 377–397, arXiv:1708.04853.
 [BV2] D. Bar-Natan and R. van der Veen, *Perturbed Gaussian Generating Functions for Universal Knot Invariants*, arXiv:2109.02057.
 [Dr] V. G. Drinfel'd, *Quantum Groups*, Proc. Int. Cong. Math., 798–820, Berkeley, 1986.
 [Jo] V. F. R. Jones, *Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials*, Annals Math., **126** (1987) 335–388.
 [La] R. J. Lawrence, *Universal Link Invariants using Quantum Groups*, Proc. XVII Int. Conf. on Diff. Geom. Methods in Theor. Phys., Chester, England, August 1988. World Scientific (1989) 55–63.
 [LTW] X-S. Lin, F. Tian, and Z. Wang, *Burau Representation and Random Walk on String Links*, Pac. J. Math., **182-2** (1998) 289–302, arXiv:q-alg/9605023.
 [Oh1] T. Ohtsuki, *Quantum Invariants*, Series on Knots and Everything **29**, World Scientific 2002.
 [Oh2] T. Ohtsuki, *On the 2-Loop Polynomial of Knots*, Geom. Top. **11** (2007) 1357–1475.
 [Ov] A. Overbay, *Perturbative Expansion of the Colored Jones Polynomial*, Ph.D. thesis, University of North Carolina, August 2013, ωεβ/Ov.
 [Ro1] L. Rozansky, *A Contribution of the Trivial Flat Connection to the Jones Polynomial and Witten's Invariant of 3D Manifolds, I*, Comm. Math. Phys. **175-2** (1996) 275–296, arXiv:hep-th/9401061.
 [Ro2] L. Rozansky, *The Universal R-Matrix, Burau Representation and the Melvin-Morton Expansion of the Colored Jones Polynomial*, Adv. Math. **134-1** (1998) 1–31, arXiv:q-alg/9604005.
 [Ro3] L. Rozansky, *A Universal U(1)-RCC Invariant of Links and Rationality Conjecture*, arXiv:math/0201139.
 [Sch] S. Schaveling, *Expansions of Quantum Group Invariants*, Ph.D. thesis, Universiteit Leiden, September 2020, ωεβ/Scha.

References.

Formulas. Draw an n -crossing knot K as on the right: all crossings face up, and the edges are marked with a running index $k \in \{1, \dots, 2n + 1\}$ and with rotation numbers φ_k . Let A be the $(2n + 1) \times (2n + 1)$ matrix constructed by starting with the identity matrix I , and adding a 2×2 block for each crossing:



Let $G = (g_{\alpha\beta}) = A^{-1}$. For the trefoil example, it is:

$A =$	$\begin{pmatrix} 1 & -T & 0 & 0 & T-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -T & 0 & 0 & T-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T-1 & 0 & 1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Burau</p> <p>Alexander</p> <p>Fox</p> <p>Wirtinger</p> <p>Blanchfield</p>
$G =$	$\begin{pmatrix} 1 & T & 1 & T & 1 & T & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T^2}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T}{T^2-T+1} & \frac{T^2}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-T}{T^2-T+1} & \frac{T-T+1}{(T-1)T} & \frac{T-T+1}{T^2-T+1} & \frac{T^2-T+1}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-T}{T^2-T+1} & -\frac{1}{T^2-T+1} & \frac{1}{T^2-T+1} & \frac{T^2-T+1}{T^2-T+1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>"The Green Function"</p>

Note. The Alexander polynomial Δ is given by

$$\Delta = T^{(-\varphi-w)/2} \det(A), \quad \text{with } \varphi = \sum_k \varphi_k, \quad w = \sum_c s_c.$$

Classical Topologists: This is boring. Yawn.

Formulas, continued. Finally, set

$$R_1(c) := s(g_{ji}(g_{j+1,j} + g_{j,j+1} - g_{ij}) - g_{ii}(g_{j,j+1} - 1) - 1/2)$$

$$\rho_1 := \Delta^2 \left(\sum_c R_1(c) - \sum_k \varphi_k (g_{kk} - 1/2) \right).$$

In our example $\rho_1 = -T^2 + 2T - 2 + 2T^{-1} - T^{-2}$.

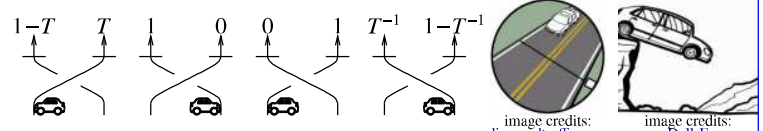
Theorem. ρ_1 is a knot invariant.

Proof: later.

Classical Topologists: Whiskey Tango Foxtrot?

Cars, Interchanges, and Traffic Counters.

Cars always drive forward. When a car crosses over a bridge it goes through with (algebraic) probability $T^s \sim 1$, but falls off with probability $1 - T^s \sim 0^*$. At the very end, cars fall off and disappear. See also [Jo, LTW].



$$p = 1 - T^s$$

* In algebra $x \sim 0$ if for every y in the ideal generated by x , $1 - y$ is invertible.

Preliminaries

This is Rho.nb of <http://drorbn.net/oa22/ap>.

Once[<< KnotTheory` ; << Rot.m];

Loading KnotTheory` version

of February 2, 2020, 10:53:45.2097.

Read more at <http://katlas.org/wiki/KnotTheory>.

Loading Rot.m from <http://drorbn.net/la22/ap>

to compute rotation numbers.

The Program

```

R1[s_, i_, j_] :=
  S (Gji (Gj+,j + Gj,j+ - Gij) - Gii (Gj+,j+ - 1) - 1/2);
Z[K_] := Module[{Cs, phi, n, A, s, i, j, k, Delta, G, rho1},
  {Cs, phi} = Rot[K]; n = Length[Cs];
  A = IdentityMatrix[2 n + 1];
  Cases[Cs, {s_, i_, j_} ->
    (A[[{i, j}, {i + 1, j + 1}]] += ( -T^s T^s - 1 ))];
  Delta = T^(-Total[phi] - Total[Cs[[All, 1]]]) / 2 Det[A];
  G = Inverse[A];
  rho1 = Sum_{k=1}^n R1 @@ Cs[[k]] - Sum_{k=1}^{2 n} phi[[k]] (Gkk - 1/2);
  Factor@
    {Delta, Delta^2 rho1 /. alpha_+ -> alpha + 1 /. Galpha_beta -> G[[alpha, beta] ]};

```

The First Few Knots

```

TableForm[Table[Join[{K[[1]K[[2]]}, Z[K]],
  {K, AllKnots[{3, 6}]}], TableAlignments -> Center]

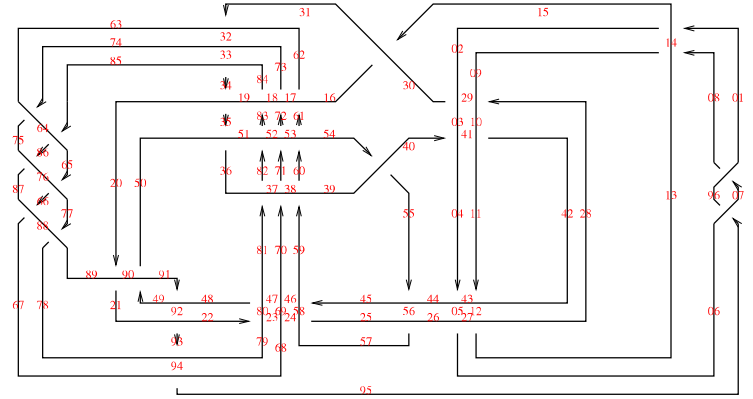
```

3 ₁	$\frac{1-T+T^2}{T}$	$\frac{(-1+T)^2(1+T^2)}{T^2}$
4 ₁	$-\frac{1-3T+T^2}{T}$	0
5 ₁	$\frac{1-T+T^2-T^3+T^4}{T^2}$	$\frac{(-1+T)^2(1+T^2)(2+T^2+2T^4)}{T^4}$
5 ₂	$\frac{2-3T+2T^2}{T}$	$\frac{(-1+T)^2(5-4T+5T^2)}{T^2}$
6 ₁	$-\frac{(-2+T)(-1+2T)}{T}$	$\frac{(-1+T)^2(1-4T+T^2)}{T^2}$
6 ₂	$-\frac{1-3T+3T^2-3T^3+T^4}{T^2}$	$\frac{(-1+T)^2(1-4T+4T^2-4T^3+4T^4-4T^5+T^6)}{T^4}$
6 ₃	$\frac{1-3T+5T^2-3T^3+T^4}{T^2}$	0



$$p = 1 - T^s$$

Fast!



Timing@

```

Z[GST48 = EPD[X14,1, X2,29, X3,40, X43,4, X26,5, X6,95,
  X96,7, X13,8, X9,28, X10,41, X42,11, X27,12, X30,15,
  X16,61, X17,72, X18,83, X19,34, X89,20, X21,92,
  X79,22, X68,23, X57,24, X25,56, X62,31, X73,32,
  X84,33, X50,35, X36,81, X37,70, X38,59, X39,54, X44,55,
  X58,45, X69,46, X80,47, X48,91, X90,49, X51,82, X52,71,
  X53,60, X63,74, X64,85, X76,65, X87,66, X67,94,
  X75,86, X88,77, X78,93]]

```

$$\{170.313, \left\{ -\frac{1}{T^8} (-1 + 2T - T^2 - T^3 + 2T^4 - T^5 + T^8) \right.$$

$$\left. (-1 + T^3 - 2T^4 + T^5 + T^6 - 2T^7 + T^8), \frac{1}{T^{16}} \right.$$

$$\left. (-1 + T)^2 (5 - 18T + 33T^2 - 32T^3 + 2T^4 + 42T^5 - 62T^6 - 8T^7 + 166T^8 - 242T^9 + 108T^{10} + 132T^{11} - 226T^{12} + 148T^{13} - 11T^{14} - 36T^{15} - 11T^{16} + 148T^{17} - 226T^{18} + 132T^{19} + 108T^{20} - 242T^{21} + 166T^{22} - 8T^{23} - 62T^{24} + 42T^{25} + 2T^{26} - 32T^{27} + 33T^{28} - 18T^{29} + 5T^{30}) \right\}$$

Strong!

```
NumberOfKnots[{3, 12}],
```

```
Length@
```

```
Union@Table[Z[K], {K, AllKnots[{3, 12}]}],
```

```
Length@
```

```
Union@Table[{HOMFLYPT[K], Kh[K]},
```

```
{K, AllKnots[{3, 12}]}]
```

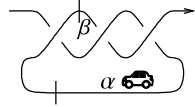
```
{2977, 2882, 2785}
```

So the pair (Δ, ρ_1) attains 2,882 distinct values on the 2,977 prime knots with up to 12 crossings (a deficit of 95), whereas the pair (HOMFLYPT, Khovanov Homology) attains only 2,785 distinct values on the same knots (a deficit of 192).



Hoste Ocneanu Millett Freyd Lickorish Yetter Przytycki Traczyk Khovanov

Theorem. The Green function $g_{\alpha\beta}$ is the reading of a traffic counter at β , if car traffic is injected at α (if $\alpha = \beta$, the counter is *after* the injection point).



Example.

$$\sum_{p \geq 0} (1-T)^p = T^{-1} \quad T^{-1} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad G = \begin{pmatrix} 1 & T^{-1} & 1 \\ 0 & T^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proof. Near a crossing c with sign s , incoming upper edge i and incoming lower edge j , both sides satisfy the g -rules:



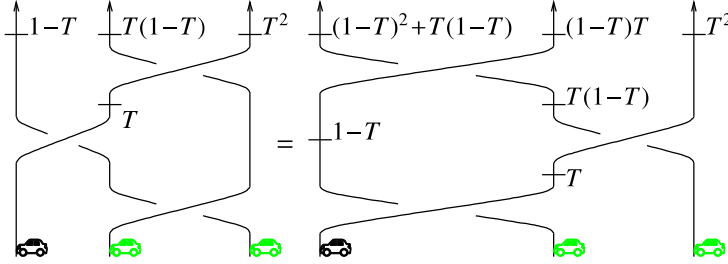
$$g_{i\beta} = \delta_{i\beta} + T^s g_{i+1,\beta} + (1-T^s)g_{j+1,\beta}, \quad g_{j\beta} = \delta_{j\beta} + g_{j+1,\beta},$$

and always, $g_{\alpha,2n+1} = 1$: use common sense and $AG = I (= GA)$.

Bonus. Near c , both sides satisfy the further g -rules:

$$g_{\alpha i} = T^{-s}(g_{\alpha,i+1} - \delta_{\alpha,i+1}), \quad g_{\alpha j} = g_{\alpha,j+1} - (1-T^s)g_{\alpha i} - \delta_{\alpha,j+1}.$$

Invariance of ρ_1 . We start with the hardest, Reidemeister 3:



\Rightarrow Overall traffic patterns are unaffected by Reid3!

\Rightarrow Green's $g_{\alpha\beta}$ is unchanged by Reid3, provided the cars injection site α and the traffic counters β are away.

\Rightarrow Only the contribution from the R_1 terms within the Reid3 move matters, and using g -rules the relevant $g_{\alpha\beta}$'s can be pushed outside of the Reid3 area:

$$\delta_{i,j} := \text{If}[i == j, 1, 0];$$

$gRules_{s,i,j} :=$

$$\{g_{i\beta} \mapsto \delta_{i\beta} + T^s g_{i+1,\beta} + (1-T^s) g_{j+1,\beta}, \quad g_{j\beta} \mapsto \delta_{j\beta} + g_{j+1,\beta}, \\ g_{\alpha,i} \mapsto T^{-s}(g_{\alpha,i+1} - \delta_{\alpha,i+1}), \\ g_{\alpha,j} \mapsto g_{\alpha,j+1} - (1-T^s) g_{\alpha i} - \delta_{\alpha,j+1}\}$$

$$lhs = R_1[1, j, k] + R_1[1, i, k^+] + R_1[1, i^+, j^+] //.$$

$$gRules_{1,j,k} \cup gRules_{1,i,k^+} \cup gRules_{1,i^+,j^+};$$

$$rhs = R_1[1, i, j] + R_1[1, i^+, k] + R_1[1, j^+, k^+] //.$$

$$gRules_{1,i,j} \cup gRules_{1,i^+,k} \cup gRules_{1,j^+,k^+};$$

Simplify[lhs == rhs]

True

Next comes Reid1, where we use results from an earlier example:

$$R_1[1, 2, 1] - 1 (g_{22} - 1/2) /. g_{\alpha,\beta} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & T^{-1} & 1 \\ 0 & T^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \llbracket \alpha, \beta \rrbracket$$

$$\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T} - \frac{-1 + \frac{1}{T}}{T} = 0$$

Invariance under the other moves is proven similarly.

Wearing my Topology hat the formula for R_1 , and even the idea to look for R_1 , remain a complete mystery to me.



Wearing my Quantum Algebra hat, I spy a Heisenberg algebra $\mathbb{H} = A\langle p, x \rangle / ([p, x] = 1)$:

$$\text{cars} \leftrightarrow p \quad \text{traffic counters} \leftrightarrow x$$

Where did it come from? Consider $\mathfrak{g}_\epsilon := sl_{2+}^\epsilon := L\langle y, b, a, x \rangle$ with relations

$$[b, x] = \epsilon x, \quad [b, y] = -\epsilon y, \quad [b, a] = 0,$$

$$[a, x] = x, \quad [a, y] = -y, \quad [x, y] = b + \epsilon a.$$

At invertible ϵ , it is isomorphic to sl_2 plus a central factor, and it can be quantized à la Drinfel'd [Dr] much like sl_2 to get an algebra $QU = A\langle y, b, a, x \rangle$ subject to (with $q = e^{\hbar\epsilon}$):

$$[b, a] = 0, \quad [b, x] = \epsilon x, \quad [b, y] = -\epsilon y,$$

$$[a, x] = x, \quad [a, y] = -y, \quad xy - qyx = \frac{1 - e^{-\hbar(b+\epsilon a)}}{\hbar}.$$

Now QU has an R -matrix solving Yang-Baxter (meaning Reid3),

$$R = \sum_{m,n \geq 0} \frac{y^n b^m \otimes (\hbar a)^m (\hbar x)^n}{m! [n]_q!}, \quad ([n]_q! \text{ is a "quantum factorial"})$$

and so it has an associated "universal quantum invariant" à la Lawrence and Ohtsuki [La, Oh1], $Z_\epsilon(K) \in QU$.

Now $QU \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ (only as algebras!) and $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ represents into \mathbb{H} via

$$y \mapsto -tp - \epsilon \cdot xp^2, \quad b \mapsto t + \epsilon \cdot xp, \quad a \mapsto xp, \quad x \mapsto x,$$

(abstractly, \mathfrak{g}_ϵ acts on its Verma module

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon) / (\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\epsilon)\langle y, a, b - \epsilon a - t \rangle) \cong \mathbb{Q}[x]$$

by differential operators, namely via \mathbb{H}), so R can be pushed to $\mathcal{R} \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$.

Everything still makes sense at $\epsilon = 0$ and can be expanded near $\epsilon = 0$ resulting with $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0(1 + \epsilon \mathcal{R}_1 + \dots)$, with $\mathcal{R}_0 = \mathbb{Q}\langle xp \otimes 1 - x \otimes p \rangle$ and \mathcal{R}_1 a quartic polynomial in p and x . So p 's and x 's get created along K and need to be pushed around to a standard location ("normal ordering"). This is done using

$$(p \otimes 1)\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(T(p \otimes 1) + (1-T)(1 \otimes p)),$$

$$(1 \otimes p)\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(1 \otimes p),$$

and when the dust settles, we get our formulas for ρ_1 . But QU is a quasi-triangular Hopf algebra, and hence ρ_1 is **homomorphic**. Read more at [BV1, BV2] and hear more at $\omega\epsilon\beta/\text{SolvApp}$, $\omega\epsilon\beta/\text{Dogma}$, $\omega\epsilon\beta/\text{DoPeGDO}$, $\omega\epsilon\beta/\text{FDA}$, $\omega\epsilon\beta/\text{AQDW}$.

Also, we can (and know how to) look at higher powers of ϵ and we can (and more or less know how to) replace sl_2 by arbitrary semi-simple Lie algebra (e.g., [Sch]). So ρ_1 is **not alone!**



Schaveling

These constructions are very similar to Rozansky-Overbay [Ro1, Ro2, Ro3, Ov] and hence to the "loop expansion" of the Kontsevich integral and the coloured Jones polynomial [Oh2].

If this all reads like **insanity** to you, it should (and you haven't seen half of it). Simple things should have simple explanations.

Hence, **Homework**. Explain ρ_1 with no reference to quantum voodoo and find it a topology home (large enough to house generalizations!). Make explicit the homomorphic properties of ρ_1 . Use them to do topology!

P.S. As a friend of Δ , ρ_1 gives a genus bound, sometimes better than Δ 's. How much further does this friendship extend?

A Small-Print Page on $\rho_d, d > 1$.

Definition. $\langle f(z_i), h(\xi_i) \rangle_{z_i} := f(\partial_{z_i})h|_{z_i=0}$, so $\langle p^2 x^2, e^{g\pi\xi} \rangle = 2g^2$.

Baby Theorem. There exist (non unique) power series $r^\pm(p_1, p_2, x_1, x_2) = \sum_d \epsilon^d r_d^\pm(p_1, p_2, x_1, x_2) \in \mathbb{Q}[T^{\pm 1}, p_1, p_2, x_1, x_2][[\epsilon]]$ with $\deg r_d^\pm \leq 2d + 2$ ("docile") such that the power series $Z^b = \sum \rho_d^b \epsilon^d :=$

$$\left\langle \exp\left(\sum_c r^s(p_i, p_j, x_i, x_j)\right), \exp\left(\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \pi_\alpha \xi_\beta\right) \right\rangle_{\{p_\alpha, x_\beta\}}$$

is a knot invariant. Beyond the once-and-for-all computation of $g_{\alpha\beta}$ (a matrix inversion), Z^b is computable in $O(n^d)$ operations in the ring $\mathbb{Q}[T^{\pm 1}]$.

(Bnots are knot diagrams modulo the braid-like Reidemeister moves, but not the cyclic ones).

Theorem. There also exist docile power series $\gamma^\varphi(\bar{p}, \bar{x}) = \sum_d \epsilon^d \gamma_d^\varphi \in \mathbb{Q}[T^{\pm 1}, \bar{p}, \bar{x}][[\epsilon]]$ such that the power series $Z = \sum \rho_d \epsilon^d :=$

$$\left\langle \exp\left(\sum_c r^s(p_i, p_j, x_i, x_j) + \sum_k \gamma^{\varphi k}(\bar{p}_k, \bar{x}_k)\right), \exp\left(\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(\pi_\alpha + \bar{\pi}_\alpha)(\xi_\beta + \bar{\xi}_\beta) + \sum_\alpha \pi_\alpha \bar{\xi}_\alpha\right) \right\rangle_{\{p_\alpha, \bar{p}_\alpha, x_\beta, \bar{x}_\beta\}}$$

is a knot invariant, as easily computable as Z^b .

Implementation. Data, then program (with output using the Conway variable $z = \sqrt{T} - 1 / \sqrt{T}$), and then a demo. See Rho.nb of $\omega\epsilon\beta/ap$.

$$\mathbf{V@r}_{1,\varphi}[k_] := \varphi(1/2 - \bar{p}_k \bar{x}_k); \mathbf{V@r}_{2,\varphi}[k_] := -\varphi^2 \bar{p}_k \bar{x}_k / 2; \\ \mathbf{V@r}_{3,\varphi}[k_] := -\varphi^3 \bar{p}_k \bar{x}_k / 6$$

$$\mathbf{V@r}_{1,\pm}[i_ , j_] := s(-1 + 2 p_i x_i - 2 p_j x_j + (-1 + T^5) p_i p_j x_i^2 + (1 - T^5) p_j^2 x_i^2 - 2 p_i p_j x_i x_j + 2 p_j^2 x_i x_j) / 2$$

$$\mathbf{V@r}_{2,1}[i_ , j_] := (-6 p_i x_i + 6 p_j x_j - 3(-1 + 3T) p_i p_j x_i^2 + 3(-1 + 3T) p_j^2 x_i^2 + 4(-1 + T) p_i p_j x_i^3 - 2(-1 + T)(5 + T) p_i p_j^2 x_i^3 + 2(-1 + T)(3 + T) p_j^2 x_i^3 + 18 p_i p_j x_i x_j - 18 p_j^2 x_i x_j - 6 p_i^2 p_j x_i^2 x_j + 6(2 + T) p_i p_j^2 x_i^2 x_j - 6(1 + T) p_j^3 x_i^2 x_j - 6 p_i p_j^2 x_i x_j^2 + 6 p_j^3 x_i x_j^2) / 12$$

$$\mathbf{V@r}_{2,-1}[i_ , j_] := (-6 T^2 p_i x_i + 6 T^2 p_j x_j + 3(-3 + T) T p_i p_j x_i^2 - 3(-3 + T) T p_j^2 x_i^2 - 4(-1 + T) T p_i^2 p_j x_i^3 + 2(-1 + T)(1 + 5T) p_i p_j^2 x_i^3 - 2(-1 + T)(1 + 3T) p_j^3 x_i^3 + 18 T^2 p_i p_j x_i x_j - 18 T^2 p_j^2 x_i x_j - 6 T^2 p_i^2 p_j x_i^2 x_j + 6 T(1 + 2T) p_i p_j^2 x_i^2 x_j - 6 T(1 + T) p_j^3 x_i^2 x_j - 6 T^2 p_i p_j^2 x_i x_j^2 + 6 T^2 p_j^3 x_i x_j^2) / (12 T^2)$$

$Z_2[\mathbf{GST48}]$ (* takes a few minutes *)

$$(1 - 4z^2 - 61z^4 - 207z^6 - 296z^8 - 210z^{10} - 77z^{12} - 14z^{14} - z^{16}, \\ 1 + (38z^2 + 255z^4 + 1696z^6 + 16281z^8 + 86952z^{10} + 259994z^{12} + 487372z^{14} + 615066z^{16} + 543148z^{18} + 341714z^{20} + \\ 153722z^{22} + 48983z^{24} + 10776z^{26} + 1554z^{28} + 132z^{30} + 5z^{32}) \epsilon + \\ (-8 - 484z^2 + 9709z^4 + 165952z^6 + 1590491z^8 + 16256508z^{10} + 115341797z^{12} + 432685748z^{14} + 395838354z^{16} - 4017557792z^{18} - 23300064167z^{20} - \\ 70082264972z^{22} - 142572271191z^{24} - 209475503700z^{26} - 221616295209z^{28} - 151502648428z^{30} - 23700199243z^{32} + \\ 99462146328z^{34} + 164920463074z^{36} + 162550825432z^{38} + 119164552296z^{40} + 69153062608z^{42} + 32547596611z^{44} + 12541195448z^{46} + \\ 3961384155z^{48} + 1021219696z^{50} + 212773106z^{52} + 35264208z^{54} + 4537548z^{56} + 436600z^{58} + 29536z^{60} + 1252z^{62} + 25z^{64}) \epsilon^2)$$

$\mathbf{TableForm}[\mathbf{Table}[\mathbf{Join}[\{\mathbf{K}[\mathbf{1}]_{\mathbf{K}[\mathbf{2}]}], \mathbf{Z}_3[\mathbf{K}]\}], \{\mathbf{K}, \mathbf{AllKnots}[\{\mathbf{3}, \mathbf{6}\}]\}], \mathbf{TableAlignments} \rightarrow \mathbf{Center}]$ (* takes a few minutes *)

$$\begin{array}{l} 3_1 \quad 1 - z^2 \quad 1 + (2z^2 + z^4) \epsilon + (-2 - 4z^2 + 3z^4 + 4z^6 + z^8) \epsilon^2 + (-12 + 74z^2 - 27z^4 - 20z^6 + 8z^8 + 6z^{10} - z^{12}) \epsilon^3 \\ 4_1 \quad 1 - z^2 \quad 1 + (-2 + 2z^4) \epsilon^2 \\ 5_1 \quad 1 + 3z^2 + z^4 \quad 1 + (10z^2 - 21z^4 + 12z^6 + 2z^8) \epsilon + (6 - 28z^2 + 33z^4 + 364z^6 + 655z^8 + 536z^{10} + 227z^{12} + 48z^{14} + 4z^{16}) \epsilon^2 + (-60 - 970z^2 + 645z^4 - 3380z^6 - 3280z^8 + 7470z^{10} + 19475z^{12} + 20536z^{14} + 12564z^{16} + 4774z^{18} + 1189z^{20} + 144z^{22} + 8z^{24}) \epsilon^3 \\ 5_2 \quad 1 - 2z^2 \quad 1 + (6z^2 - 5z^4) \epsilon + (4 - 20z^2 + 43z^4 - 64z^6 + 26z^8) \epsilon^2 + (-36 + 498z^2 - 883z^4 + 100z^6 + 816z^8 + 556z^{10} + 146z^{12}) \epsilon^3 \\ 6_1 \quad 1 - 2z^2 \quad 1 + (-2z^2 + z^4) \epsilon + (-4 + 4z^2 + 25z^4 - 8z^6 + 2z^8) \epsilon^2 + (12 + 154z^2 - 223z^4 - 608z^6 + 100z^8 - 52z^{10} + 10z^{12}) \epsilon^3 \\ 6_2 \quad 1 - z^2 - z^4 \quad 1 + (-2z^2 - 3z^4 + 2z^6 + z^8) \epsilon + (-2 - 4z^2 + 29z^4 + 28z^6 + 42z^8 - 8z^{10} - 2z^{12} + 4z^{14} + z^{16}) \epsilon^2 + (12 - 166z^2 - 155z^4 - 194z^6 - 2453z^8 - 1622z^{10} - 1967z^{12} - 258z^{14} + 49z^{16} - 30z^{18} - z^{20} + 6z^{22} + 2z^{24}) \epsilon^3 \\ 6_3 \quad 1 + z^2 + z^4 \quad 1 + (2 + 8z^2 - 16z^6 - 24z^8 - 16z^{10} - 2z^{12}) \epsilon^2 \end{array}$$

$$\mathbf{V@r}_{3,1}[i_ , j_] := (4 p_i x_i - 4 p_j x_j + 2(5 + 7T) p_i p_j x_i^2 - 2(5 + 7T) p_j^2 x_i^2 - 4(-5 + 6T) p_i^2 p_j x_i^3 + 4(-16 + 17T + 2T^2) p_i p_j^2 x_i^3 - 4(-11 + 11T + 2T^2) p_j^2 x_i^3 + 3(-1 + T) p_i^3 p_j x_i^4 - 3(-1 + T)(4 + 3T) p_i^2 p_j^2 x_i^4 + (-1 + T)(13 + 22T + T^2) p_i p_j^3 x_i^4 - (-1 + T)(4 + 13T + T^2) p_j^4 x_i^4 - 28 p_i p_j x_i x_j + 28 p_j^2 x_i x_j + 36 p_i^2 p_j x_i^2 x_j - 12(9 + 2T) p_i p_j^2 x_i^2 x_j + 24(3 + T) p_j^3 x_i^2 x_j - 4 p_i^3 p_j x_i^3 x_j + 28 T p_i^2 p_j^2 x_i^3 x_j - 4(-6 + 17T + T^2) p_i p_j^3 x_i^3 x_j + 4(-5 + 10T + T^2) p_j^4 x_i^3 x_j + 24 p_i p_j^2 x_i^2 x_j^2 - 24 p_j^3 x_i^2 x_j^2 - 24(10 + T) p_i p_j^3 x_i^2 x_j^2 - 6(6 + T) p_j^4 x_i^2 x_j^2 - 4 p_i p_j^3 x_i x_j^3 + 4 p_j^4 x_i x_j^3) / 24$$

$$\mathbf{V@r}_{3,-1}[i_ , j_] := (-4 T^3 p_i x_i + 4 T^3 p_j x_j - 2 T^2(7 + 5T) p_i p_j x_i^2 + 2 T^2(7 + 5T) p_j^2 x_i^2 - 4 T^2(-6 + 5T) p_i^2 p_j x_i^3 + 4 T(-2 - 17T + 16 T^2) p_i p_j^2 x_i^3 - 4 T(-2 - 11T + 11 T^2) p_j^3 x_i^3 + 3(-1 + T) T^2 p_i^3 p_j x_i^4 - 3(-1 + T) T(3 + 4T) p_i^2 p_j^2 x_i^4 + (-1 + T)(1 + 22T + 13 T^2) p_i p_j^3 x_i^4 - (-1 + T)(1 + 13T + 4 T^2) p_j^4 x_i^4 + 28 T^3 p_i p_j x_i x_j - 28 T^3 p_j^2 x_i x_j - 36 T^3 p_i^2 p_j x_i^2 x_j + 12 T^2(2 + 9T) p_i p_j^2 x_i^2 x_j - 24 T^2(1 + 3T) p_j^3 x_i^2 x_j + 4 T^3 p_i^3 p_j x_i^3 x_j - 28 T^2 p_i^2 p_j^2 x_i^3 x_j - 4 T(-1 - 17T + 6 T^2) p_i p_j^3 x_i^3 x_j + 4 T(-1 - 10T + 5 T^2) p_j^4 x_i^3 x_j - 24 T^3 p_i p_j^2 x_i^2 x_j^2 + 24 T^3 p_j^3 x_i^2 x_j^2 + 24 T^3 p_i^2 p_j^2 x_i^2 x_j^2 - 6 T^2(1 + 10T) p_i p_j^3 x_i^2 x_j^2 + 6 T^2(1 + 6T) p_j^4 x_i^2 x_j^2 + 4 T^3 p_i p_j^3 x_i x_j^3 - 4 T^3 p_j^4 x_i x_j^3) / (24 T^3)$$

$$\{p^*, x^*, \bar{p}^*, \bar{x}^*\} = \{\pi, \xi, \bar{\pi}, \bar{\xi}\}; (z_{-i-})^* := (z^*)^i; \\ \mathbf{Zip}_{\{i\}}[\mathcal{E}_i] := \mathcal{E}_i; \\ \mathbf{Zip}_{\{z, zs, \dots\}}[\mathcal{E}_i] := (\mathbf{Collect}[\mathcal{E}_i // \mathbf{Zip}_{\{zs\}}[z] /. f_{-} . z^{d_{-}} \mapsto (D[f, \{z^*, d\}]])) /. z^* \mapsto \theta$$

$$\mathbf{gPair}[\mathbf{fs}_, \mathbf{w}_] := \mathbf{gPair}[\mathbf{fs}, \mathbf{w}] = \mathbf{Collect}[\mathbf{Zip}_{\mathbf{Join}@\mathbf{Table}[\{\{p_\alpha, \bar{p}_\alpha, x_\alpha, \bar{x}_\alpha\}, \{\alpha, w\}\}]}[\mathbf{Times}@\mathbf{@@}(\mathbf{V}@\mathbf{fs})] \mathbf{Exp}[\mathbf{Sum}[\mathbf{g}_{\alpha, \beta}(\pi_\alpha + \bar{\pi}_\alpha)(\xi_\beta + \bar{\xi}_\beta), \{\alpha, w\}, \{\beta, w\}] - \mathbf{Sum}[\bar{\xi}_\alpha \pi_\alpha, \{\alpha, w\}]]], \mathbf{g}_, \mathbf{Factor}]$$

$$\mathbf{T2z}[p_] := \mathbf{Module}[\{q = \mathbf{Expand}[p], n, c\}, \\ \mathbf{If}[q == \theta, \theta, c = \mathbf{Coefficient}[q, T, n = \mathbf{Exponent}[q, T]]; \\ c z^n + \mathbf{T2z}[q - c(T^{1/2} - T^{1/2})^2]^n];$$

$$\mathbf{Z}_d[\mathbf{K}_] := \mathbf{Module}[\{\mathbf{Cs}, \varphi, n, \mathbf{A}, \mathbf{s}, i, j, k, \Delta, \mathbf{G}, \mathbf{d1}, \mathbf{Z1}, \mathbf{Z2}, \mathbf{Z3}\}, \\ \{\mathbf{Cs}, \varphi\} = \mathbf{Rot}[\mathbf{K}]; n = \mathbf{Length}[\mathbf{Cs}]; \mathbf{A} = \mathbf{IdentityMatrix}[2n + 1]; \\ \mathbf{Cases}[\mathbf{Cs}, \{\mathbf{s}_, i, j\} \mapsto (\mathbf{A}[\{i, j\}], \{i + 1, j + 1\})] += \begin{pmatrix} -T^5 & T^5 - 1 \\ \theta & -1 \end{pmatrix}; \\ \{\Delta, \mathbf{G}\} = \mathbf{Factor}@\{T^{-\mathbf{Total}[\varphi] - \mathbf{Total}[\mathbf{Cs}[\mathbf{All}, \mathbf{1}]]} / 2 \mathbf{Det}@\mathbf{A}, \mathbf{Inverse}@\mathbf{A}\}; \\ \mathbf{Z1} = \mathbf{Exp}[\mathbf{Total}[\mathbf{Cases}[\mathbf{Cs}, \{\mathbf{s}_, i, j\} \mapsto \mathbf{Sum}[\mathbf{e}^{\mathbf{d1}} \mathbf{r}_{\mathbf{d1}, \mathbf{s}}[i, j], \{\mathbf{d1}, \mathbf{d}\}]]] + \\ \mathbf{Sum}[\mathbf{e}^{\mathbf{d1}} \mathbf{y}_{\mathbf{d1}, \varphi}[\mathbf{k}], \{\mathbf{k}, 2n\}, \{\mathbf{d1}, \mathbf{d}\}] /. \mathbf{y}_{\varphi, \theta}[_] \mapsto \theta]; \\ \mathbf{Z2} = \mathbf{Expand}[\mathbf{F}[\{\}, \{\}\] \times \mathbf{Normal}@\mathbf{Series}[\mathbf{Z1}, \{\epsilon, \theta, \mathbf{d}\}]] // . \\ \mathbf{F}[\mathbf{fs}_, \{\mathbf{es}_\dots\}] \times \{f: (r | y)_{ps_}[\mathbf{is}_]\}^{\mathbf{p}_\dots} \mapsto \\ \mathbf{F}[\mathbf{Join}[\mathbf{fs}, \mathbf{Table}[\mathbf{f}, \mathbf{p}]], \mathbf{DeleteDuplicates}@\{\mathbf{es}, \mathbf{is}\}]; \\ \mathbf{Z3} = \mathbf{Expand}[\mathbf{Z2} /. \mathbf{F}[\mathbf{fs}_, \mathbf{es}_] \mapsto \mathbf{Expand}[\mathbf{gPair}[\mathbf{Replace}[\mathbf{fs}, \mathbf{Thread}[\mathbf{es} \rightarrow \mathbf{Range}@\mathbf{Length}@\mathbf{es}], \{2\}], \mathbf{Length}@\mathbf{es}]] /. \mathbf{g}_{\alpha, \beta} \mapsto \mathbf{G}[\mathbf{es}[\mathbf{A}], \mathbf{es}[\mathbf{B}]]]; \\ \mathbf{Collect}[\{\Delta, \mathbf{Z3} /. \epsilon^{\mathbf{p}_\dots} \mapsto \mathbf{p}! \Delta^{\mathbf{p}} \epsilon^{\mathbf{p}}\}, \epsilon, \mathbf{T2z}];$$

Higher homotopy normalities in topological groups

蔦谷 充伸 (九州大学)*

2023 年 8 月 13 日

1 導入

1.1 なぜ higher なもの考えるのか

高次元の空間などをはじめとする「目に見えない図形」の幾何学において、(コ) ホモロジー群やホモトピー群 (特に基本群) などは人の目の代わりとして、大きな役割を果たしてきた。これらの不変量の重要な性質としてホモトピー不変性がある。ホモトピー不変性とはホモトピックな写像 (以下位相空間の間の写像と言え、常に連続写像を意味する) $f \simeq g: X \rightarrow Y$ がホモロジー群などに等しい写像を誘導することである。このことからホモトピー同値な空間のホモロジー群などが同型になることが従うのであった。これらの不変量の重要性を動機の一つとして、up to homotopy の性質に焦点を当てたホモトピー論が発展した。ホモトピー論においては写像は全て up to homotopy で考えてしまえばよいように思われるが、実はそれほど話は単純ではない。

例 1.1. Milnor [Mil56a] は連結な基点付き可算単体複体 X 上の基点付きループ空間の位相群モデル G_X を構成した。 G_X は通常の基点付きループ空間 ΩX と H-同値 (up to homotopy で演算を保つ写像によってホモトピー同値) であり、 X を底空間とする普遍主 G_X -束を持つことも証明している (つまり X は G_X の分類空間 BG_X のホモトピー型を持つ)。また一般に位相群の間の連続準同型 $f: H \rightarrow G$ がホモトピー同値写像ならば、分類空間の間のホモトピー同値写像 $BH \simeq BG$ を誘導する。さて、 n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の $G_{\mathbb{C}P^n}$ は $n \geq 2$ のとき、直積群 $S^1 \times G_{S^{2n+1}}$ と H-同値となることが知られている。しかし対応する分類空間はそれぞれ $\mathbb{C}P^n$ と $\mathbb{C}P^\infty \times S^{2n+1}$ であり、これらはホモトピー同値ではない。準同型かつホモトピー同値な写像が存在するなら分類空間のホモトピー同値が従うが、H-同値写像の存在だけでは分類空間のホモトピー同値は従わないということである。この問題に対して、菅原 [Sug61] は **strongly homotopy-multiplicative map** という高次ホモトピーで記述される概念によって、分類空間がホモトピー同値となるための必要十分条件を記述した。これによって分類空間のホモトピー型は、up to homotopy ではコントロールできないが (準同型でなくとも) 「up to higher homotopy」ではコントロールできることが分かった。この概念は Stasheff [Sta63] により一般化され、 A_n -写像の理論が生まれた。

* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学大学院数理学研究院
 e-mail: tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp
 web: <https://www3.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/>

この例のように, up to homotopy の性質と等式で表される性質 (準同型の定義 $f(gh) = f(g)f(h)$ など) との間に, 高次ホモトピー的な現象が潜んでいることがある. この例の場合, $G_{\mathbb{C}P^n}$ から $S^1 \times G_{S^{2n+1}}$ への A_{n+1} -写像でホモトピー同値写像であるものが存在しないことを Stasheff が証明しており, ある意味でこれが準同型でかつホモトピー同値なものがないことに対する最も本質的な障害となっている.

1.2 A_n -写像

上で少し A_n -写像について触れたが, 本講演の主題に関わるため詳しく説明する. なお, 当記事および講演では本質を見やすくするため技術的な条件を幾分か不正確に記述することがある. まず位相モノイドの間の写像 $f: H \rightarrow G$ が **H-写像** (この H は定義域の位相群 H のことでなく Hopf の頭文字からとられている) であるとは, f は単位元を単位元に写す写像であって, $f \circ m \simeq m \circ (f \times f)$ (ホモトピック) となることである. ここで $m: H \times H \rightarrow H$ と $m: G \times G \rightarrow G$ は位相モノイドの積を与える写像である. これは f が 2 個の元の積を up to homotopy で保つということであるが, より多くの元の積をより「よい」形で保つことを要請するのが次の A_n -写像である.

定義 1.2. 位相モノイド G, H の間の単位元を保つ写像 $f: H \rightarrow G$ の A_n -形式 ($n = 1, 2, \dots, \infty$) とは以下を満たす写像の族 $\{f_i: [0, 1]^{i-1} \times H^i \rightarrow G\}_{i=1}^n$ である.

- (1) $f_1 = f$,
- (2) $f_i(t_1, \dots, t_{i-1}; h_1, \dots, h_i)$

$$= \begin{cases} f_{i-1}(t_1, \dots, t_{i-1}; h_1, \dots, h_k h_{k+1}, \dots, h_i) & (t_k = 0) \\ f_k(t_1, \dots, t_{k-1}; h_1, \dots, h_k) f_{i-k}(t_{k+1}, \dots, t_{i-1}; h_{k+1}, \dots, h_i) & (t_k = 1) \end{cases}$$
- (3) $f_i(t_1, \dots, t_{k-1}; h_1, \dots, h_{k-1}, *, h_{k+1}, \dots, h_i)$

$$= f_i(t_1, \dots, \max\{t_{k-1}, t_k\}, \dots, t_{k-1}; h_1, \dots, h_{k-1}, h_{k+1}, \dots, h_i)$$

ここで $*$ は単位元を表し, $\max\{t_0, t_1\}$ や $\max\{t_{i-1}, t_i\}$ はそれ自身を除くことを意味する. これらの対 $f = (f, \{f_i\}_i)$ を A_n -写像という.

単位元に関する条件 3 を除けば, A_2 -写像と H-写像は同じものである. H-写像であるためのホモトピーは $f(h_1 h_2)$ と $f(h_1) f(h_2)$ をつなぐ h_1, h_2 に関して連続な道の族である. A_3 -写像であるための「高次ホモトピー」は次の図のようなものになる.

$$\begin{array}{ccc}
 f(h_1 h_2) f(h_3) & & f(h_1) f(h_2) f(h_3) \\
 & \square & \\
 & f_3 & \\
 & \square & \\
 f(h_1 h_2 h_3) & & f(h_1) f(h_2 h_3)
 \end{array}$$

例 1.3. 位相モノイドの間の準同型写像は A_∞ -写像である. 実際, 準同型写像 $f: H \rightarrow G$ の A_∞ 形式 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ として次のようにとればよい (標準的な A_∞ -形式).

$$f_i(t_1, \dots, t_{i-1}; h_1, \dots, h_i) = h_1 \cdots h_i.$$

例 1.4. (単位元が「非退化な基点」であるならば) $f: H \rightarrow G$ が A_n -形式を持つとき, f と基点を保ってホモトピックな写像 $g: H \rightarrow G$ もまた A_n -形式を持つ. 証明はホモトピー拡張性質を適当に使えばよい. このことと上の例から, 写像 $f: H \rightarrow G$ が A_n -形式を持たないならば, その写像はいかなる準同型ともホモトピックでないことがわかる.

1.3 ホモトピーファイバー列

ファイバー束の被覆ホモトピー性質のみを取り出して一般化した概念として, **Hurewicz** ファイブレーションや **Serre** ファイブレーションが知られている. $\pi: E \rightarrow B$ がこのようなファイブレーションであるとき, B の基点上のファイバーの包含写像を $i: F \rightarrow E$ とすると, 次のホモトピー長完全列が得られるのであった.

$$\cdots \rightarrow \pi_2(B) \rightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{\pi_*} \pi_0(B)$$

ファイブレーションに対しては **Serre** スペクトル系列のような (コ) ホモロジーの計算に使える道具もあり, ファイブレーションは理論面でも応用面でも重要である. さらにホモトピー論の教科書によく書かれているように, 任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ はある意味であたかもファイブレーションであるかのように扱うことができ, そのファイバーに相当するホモトピーファイバー $i: F_f \rightarrow X$ が定義される. すると, ホモトピー長完全列

$$\cdots \rightarrow \pi_2(Y) \rightarrow \pi_1(F_f) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \rightarrow \pi_0(F_f) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \xrightarrow{f_*} \pi_0(Y)$$

が得られ, 対応する **Serre** スペクトル系列も使えるため, ホモトピーファイバーも理論や計算においてしばしば活躍する. 任意の写像に対してホモトピーファイバーが取れるということは, ホモトピーファイバーの自然な写像 $i: F_f \rightarrow X$ のホモトピーファイバーも取ることができる. さらにこの操作は繰り返すことができ, 写像の列が得られる. このような写像の列は実はホモトピー同値を除いて次のように「周期的」になる.

$$\cdots \rightarrow \Omega^2 Y \rightarrow \Omega F_f \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \rightarrow F_f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

ここで ΩX は X 上の基点付きループのなす空間である. このような写像の列をホモトピーファイバー列という. ホモトピーファイバー列の各写像の左隣はその写像のホモトピーファイバーになっている.

さてホモトピーファイバー列は左には無限に延ばせるが, 右にはどうであろうか. 一般には右に延ばすのは不可能である. 例えば, 右端から数えて 4 つ目以降の空間はループ空間となっているため, その基本群が可換でなければならず, ファイバー列を常に右に延ばせるわけではないことがわかる. これは必要条件に着目した議論だが, 十分条件については次の位相群を用いた構成がある.

例 1.5. $f: H \rightarrow G$ を閉部分群の包含写像とする. このとき (ある程度よい条件が必要だが) 商空間への射影 $G \rightarrow G/H$ は主 H -束となる. $EG \rightarrow BG$ を普遍主 G -束とすると, G の G/H への左作用から次の主 G -束

$$EG \times G/H \rightarrow EG \times_G G/H$$

を得る. EG が可縮であることから $EG \times G/H$ は G/H とホモトピー同値であり, $EG \times_G G/H = EG/H$ は可縮な空間への H の自由作用 (で適当な性質を満たすもの) で割った空間なので, H の分類空間 BH とホモトピー同値である. さらに G/H への G 作用の相伴束 $EG \times_G G/H \rightarrow BG$ があるので, 次はホモトピーファイバー列となることがわかる.

$$H \xrightarrow{f} G \rightarrow G/H \rightarrow BH \rightarrow BG$$

なお, 最後の写像は f から誘導される写像 $Bf: BH \rightarrow BG$ とホモトピックであることも確認できる.

例 1.6. 正規閉部分群 $N \subset H$ に対し $G = H/N$ もまた位相群となることに注意すると, 上の例と同様の議論によって次のホモトピーファイバー列を得る.

$$N \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow BN \rightarrow BH \rightarrow BG$$

このホモトピーファイバー列は重要な示唆を与えてくれる. つまり, ただの写像 $N \rightarrow H$ では右に延ばせるかどうか分からないが, 「正規閉部分群である」という仮定を置けばこれだけ右に延ばすことが可能になるというのである. 実はこれはある意味で逆も成立する. 例 1.1 で紹介した Milnor の構成などを用いれば, 一般の写像 $X \rightarrow Y$ から得られるホモトピーファイバー列と例 1.5, 1.6 で得られるホモトピーファイバー列に本質的には同じものであることがわかる. つまり, 任意のホモトピーファイバー列は「ホモトピー同値を除いて」次のような構造を持つ.

$$N \xrightarrow{\text{正規部分群}} H \xrightarrow{\text{群準同型}} G \xrightarrow{\text{群作用}} BN \rightarrow BH \rightarrow BG$$

ホモトピー論的にはこの記述はある意味で十分だが別の意味では不十分である. つまり, ホモトピー不変な性質として直接に記述出来ないため, そのホモトピー論的な障害がこのままでは扱いにくいのである. 本研究で「正規性」の高次ホモトピー版を考える目的の一つはこういった障害理論を構築することである.

1.4 crossed module

正規部分群の高次ホモトピー版を考える前に, 正規部分群という性質の包含写像以外への一般化について触れておく. それは crossed module と呼ばれており, 少なくとも 1940 年代には MacLane や J.H.C. Whitehead らにより研究されている.

定義 1.7. 位相群の間の準同型 $f: H \rightarrow G$ が **crossed module** とは, G の H への位相群の同型による連続な作用 $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ が与えられていて, 次の性質を満たすこと.

- (1) 任意の $x, h \in H$ に対し, $\rho(f(h))(x) = h x h^{-1}$ となる.
- (2) 任意の $x \in H$ と $g \in G$ に対し, $f(\rho(g)(x)) = g x g^{-1}$ となる.

正確には作用 ρ の連続性の意味をはっきりさせる必要があるがここでは省略する.

例 1.8. H が位相群 G の正規部分群のとき, $x \in H$ と $g \in G$ に対し $\rho(g)(x) = g x g^{-1} \in H$ と定めれば, 包含写像 $f: H \rightarrow G$ は crossed module である. つまり, crossed module は正規部分群の一般化である.

例 1.9. $E \rightarrow B$ をファイブレーションとし, そのファイバーを F とする. このとき, 誘導準同型 $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E)$ (これは単射とは限らない) は (離散的な) crossed module となることが知られている.

crossed module に対しても例 1.6 と同様の構成が出来ることは Farjoun と Segev [FS10] が証明している. つまり, $f: H \rightarrow G$ が crossed module のとき, Borel 構成 $EH \times_H G$ は自然に位相群となり, 次のホモトピーファイバー列が存在する.

$$H \rightarrow G \rightarrow EH \times_H G \rightarrow BH \rightarrow BG \rightarrow B(EH \times_H G)$$

1.5 この講演で扱う内容

本講演は筆者による論文 [Tsu23] に基づいて以下の内容を扱う.

- 高次ホモトピー正規性 ($N_k(\ell)$ -写像) の定義
- $N_k(\ell)$ -写像のファイバーワイズ A_n -空間を用いた特徴付け
- $N_k(\ell)$ -写像の商空間にどのくらい積構造が遺伝するか
- $SU(m) \rightarrow SU(n)$ は p -局所的にどの程度の高次ホモトピー正規性をもつか

本研究によって $N_k(\ell)$ -写像が Lie 群の高次ホモトピー正規性の「限界」を記述するにはちょうどよいものであることがわかった. しかし $N_k(\ell)$ -写像は crossed module のような「真の正規性」からはかなり遠いものである. つまり, さらなる高次ホモトピー的な条件を課さない限りは真の crossed module には近づけない. 特に「商空間」(正確には Borel 構成) に遺伝する積構造が非常に弱い. また, 本研究ではあまり具体的に扱われてこなかったある種の「二重添え字付き」の高次ホモトピーを扱っており, 既に感触としては高次ホモトピー構造を具体的に記述するには限界が来ている. 今回の研究には Joyal や Lurie らによる高次圏論の理論などは用いていないが, これより強い条件を考えるのであれば, より整理された形で扱わざるを得ないだろうと考えている.

2 $N_k(\ell)$ -写像

2.1 $N_k(\ell)$ -写像

位相群 H, G に対し, H から G への A_n -写像のなす空間を $\mathcal{A}_n(H, G)$ と書く. Moore path を用いて基点付きループ空間と H -同値な位相モノイドを作るときと同様の議論で,

\mathcal{A}_n を対象が位相群で、 H から G への射の集合が空間 $\mathcal{A}_n(H, G)$ となるような位相圏 (topologically enriched category) が構成できる [Tsu16]. なお、圏 \mathcal{A}_n として他の高次圏論的な定式化を考えたとしても、以下の議論は適当に解釈し直せば同様に行えると思われる.

さて、この設定のとき $\mathcal{A}_n(H, H)$ は合成に関して位相モノイドとなる. そして共役を与える写像 $\text{conj}_H: H \rightarrow \mathcal{A}_n(H, H)$ ($\text{conj}_H(h)(x) = h x h^{-1}$) はモノイドの準同型となる. また、位相モノイドの間の \mathcal{A}_n -写像と同様に位相モノイドの作用の間の \mathcal{A}_n -同変写像も定義される. この状況で、 $N_k(\ell)$ -写像は次のように定義される.

定義 2.1. 位相群の間の準同型写像 $f: H \rightarrow G$ が $N_k(\ell)$ -写像 ($1 \leq k, \ell \leq \infty$) であるとは、 A_k -写像 $\rho: G \rightarrow \mathcal{A}_\ell(H, H)$ が与えられていて、次が成り立つこと.

- (1) $\rho \circ f: H \rightarrow \mathcal{A}_\ell(H, H)$ は $\text{conj}_H: H \rightarrow \mathcal{A}_\ell(H, H)$ と A_k -写像としてホモトピック.
- (2) 1 点から f を対応させる写像 $* \rightarrow \mathcal{A}_\ell(H, G)$ は G 作用に関して A_k -同変写像であって、その H への制限は自明な A_k -形式とホモトピック. ただし、 $*$ には G は自明に作用し、 $\mathcal{A}_\ell(H, G)$ には対応 $\alpha \mapsto \text{conj}_G(g) \circ \alpha \circ \rho(g^{-1})$ によって作用する.

この定義の条件はちょうど定義 1.7 の対応する条件を「高次ホモトピー版」に緩めたものになっている.

例 2.2. crossed module $f: H \rightarrow G$ と付随する作用 $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ は $N_\infty(\infty)$ -写像を与える.

例 2.3. $k' \leq k$ かつ $\ell' \leq \ell$ のとき、 $N_k(\ell)$ -写像は $N_{k'}(\ell')$ -写像である.

例 2.4. $k = \ell = 1$ のとき、 $N_1(1)$ -写像であることは McCarty [McC64] によるホモトピー正規写像の定義に一致する. ここで位相群の準同型 $f: H \rightarrow G$ がホモトピー正規写像であるとは、写像 $\rho': G \wedge H \rightarrow H$ が存在して $\rho' \circ (f \wedge \text{id}_H): H \wedge H \rightarrow H$ が写像 $(h, x) \mapsto h x h^{-1} x^{-1}$ とホモトピックであって、 $f \circ \rho': G \wedge H \rightarrow G$ が写像 $(g, x) \mapsto g f(x) g^{-1} f(x)^{-1}$ とホモトピックであって、これらのホモトピーを「つなげた」ものがホモトピーとして写像 $(h, x) \mapsto f(h x h^{-1} x^{-1})$ から動かないホモトピーとホモトピックであること.

$$\begin{array}{ccc}
 H \wedge H & \xrightarrow{\langle \text{id}_H, \text{id}_H \rangle} & H \\
 \downarrow f \wedge \text{id}_H & \searrow \rho' & \downarrow f \\
 G \wedge H & \xrightarrow{\langle \text{id}_G, f \rangle} & G
 \end{array}$$

2.2 射影空間とファイバーワイス A_n -空間

位相群 G に対し n 次射影空間 $B_n G$ が定義される. 射影空間の構成にはバー構成を用いるものや Dold–Lashof によるものなどがあるが、Milnor の構成 [Mil56b] によれば、 $B_n G$ は G の $n + 1$ 個の join G^{*n+1} への G の対角的な作用による商 G^{*n+1}/G として実

現できる．自然な包含写像 $B_n G \subset B_{n+1} G$ に関する帰納極限 BG は G の分類空間である (BG を底空間とし，全空間が可縮であるような主 G -束 (普遍主束) $EG \rightarrow BG$ が存在する)．

例 2.5. $S^0 \subset \mathbb{R}, S^1 \subset \mathbb{C}, S^3 \subset \mathbb{H}$ はそれぞれ実数，複素数，四元数の絶対値 1 の元からなる Lie 群と思えるが，対応する n 次射影空間は通常の意味での射影空間 $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ となる．

射影空間は A_n -写像と関係が深い．実際， A_n -写像 $f: H \rightarrow G$ があると，誘導写像 $B_n f: B_n H \rightarrow B_n G$ が得られる．さらに次が成り立つ (以下の形は筆者 [Tsu16] によるが，似たような結果はさまざまな形で知られていた)．

定理 2.6. 位相群の間の A_n -写像 $f: H \rightarrow G$ に対し誘導写像と包含写像の合成

$$B_n H \xrightarrow{B_n f} B_n G \rightarrow BG$$

を対応させる写像

$$\mathcal{A}_n(H, G) \rightarrow \text{Map}_*(B_n H, BG)$$

(Map_* は基点を保つ写像のなす空間を表す) は弱ホモトピー同値写像である．

この定理は Milnor の基点付きループ群 G_X を用いると自然なホモトピー同値 $X \simeq BG_X$ が存在するので

$$\mathcal{A}_n(H, G_X) \simeq \text{Map}_*(B_n H, X)$$

というある種の随伴性を記述する理論的な結果である．一方，この結果は A_n -写像という高次ホモトピーデータを含む障害理論が通常の空間の障害理論によって記述出来ることも示しており，応用面でも役に立つ．今回の結果は正にこの方向性での応用になる．

位相群の「族」版であるファイバーワイズ位相群に対してもファイバーワイズ A_n -写像やファイバーワイズ射影空間，ファイバーワイズ分類空間などが定義され，同様の結果が成り立つ．

例 2.7. 主 G -束 $P \rightarrow B$ に対し， G の G 自身への共役作用に関する同伴束 $P \times_{\text{conj}} G \rightarrow B$ はファイバーワイズ位相群である．

2.3 主定理

主定理のアイデアは「同変」を「ファイブレーション」で翻訳するということである．これは以下の例の類似である．

例 2.8. 位相群 G の空間 X への作用があると，普遍主束 $EG \rightarrow BG$ の同伴束 $EG \times_G X \rightarrow BG$ が得られる．一方で，空間 Y から BG への写像 $f: Y \rightarrow BG$ があると，普遍主束の引き戻しの全空間 $f^* EG$ に G が作用する．この「 G の作用」と「 BG への写像」の間の対応は，適当なホモトピー論的な意味で「1 対 1 対応」であることが知られている．

作用の高次ホモトピー的な障害は取り扱いが難しいが、ファイバーワイスホモトピー論（写像のホモトピー論）の障害理論は古くから多くの研究結果があり、複雑な計算を扱う手法も数多く存在する。主定理は複雑な高次ホモトピーデータの障害理論を、そのような古典的な道具の揃った世界の問題に対応させるものである。

次が本研究の主定理である。この中でファイバーワイス A_ℓ -空間という対象が出てくるが、これは二項演算の高次ホモトピー結合性を n 個の積まで考えたものである。積構造の整合性のある意味でそのレベルまでしか求めていないことを意味している。また、主 H -束 $E_k H \rightarrow B_k H$ は普遍主束 $EH \rightarrow BH$ を k 次射影空間 $B_k H$ 上に制限したものである。

定理 2.9. 位相群の間の準同型写像 $f: H \rightarrow G$ が $N_k(\ell)$ -写像となるための必要十分条件はファイバーワイス A_ℓ -空間 $E \rightarrow B_k G$ と f から誘導される写像 $B_k f: B_k H \rightarrow B_k G$ 上のファイバーワイス A_ℓ -写像 $\phi: E_k H \times_{\text{conj}} H \rightarrow E$ と $B_k G$ 上のファイバーワイス A_ℓ -写像 $\psi: E \rightarrow E_k G \times_{\text{conj}} G$ が存在して、次を満たすこと。

- (1) ϕ は各ファイバー上で弱ホモトピー同値写像である。
- (2) $\psi \circ \phi$ は写像 $B_k H \rightarrow B_k G$ 上のファイバーワイス A_ℓ -写像として f から誘導されるファイバーワイス準同型 $E_k H \times_{\text{conj}} H \rightarrow E_k G \times_{\text{conj}} G$ とホモトピックである。

定理の条件は定義 2.1 の条件とちょうど対応するようになっている。

注意 2.10. 実は上の書き方は少し嘘が入っている。元の論文では実際に定義を書き下すのが難しいために、 A_ℓ -空間への A_ℓ -写像と A_ℓ -空間からの A_ℓ -空間の合成は定義していない。代わりに ϕ を「逆向き」にすることで、その問題を回避している。整理された高次圏論の枠組みでは上記の書き方のままで結果が成立するものと思われる。

2.4 商空間への積構造の遺伝

正規部分群の重要な性質としてその商に群構造が遺伝することが挙げられる。crossed module の場合には「ホモトピー商」である Borel 構成に群構造が遺伝する。では $N_k(\ell)$ -写像の場合はどうであろうか？詳しくはまだよくわかっていないが、少なくとも以下が成立する。

定理 2.11. 位相群の準同型 $f: H \rightarrow G$ が $N_k(k)$ -写像でかつ Borel 構成 $X = EH \times_H G$ に対し LS カテゴリーの評価 $\text{cat } X \leq k$ が成り立つとき、 X は H -空間の構造を持つ（つまり単位元を持つ連続な二項演算を持つ）。

注意 2.12. LS カテゴリーはその空間が可縮な開集合何枚で覆えるかを表す数である。この文脈でこのような不変量が現れるのは不思議に思うかもしれないが、射影空間と LS カテゴリーの間に深い関係があることが岩瀬の Ganea 予想の反例に関する仕事 [Iwa98] により知られている。

3 計算例

3.1 $SU(m) \rightarrow SU(n)$ の正規性

$N_k(\ell)$ -写像であることが古典的なホモトピー論の問題に帰着されると述べたが、実際に計算結果が得られたので紹介する。実は $SU(m) \rightarrow SU(n)$ は $2 \leq m < n$ である限り $N_1(1)$ -写像ですらない。しかし p -局所化 (p は奇素数) をするとある程度正規性を持つことがわかる。ここで空間 X の p -局所化 $X_{(p)}$ とは、大雑把に言ってホモトピー群が

$$\pi_i(X_{(p)}) = \pi_i(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

となるような関手的に構成される空間のことである。つまり、 p と互いに素なねじれに関する障害は全て無くなった空間である（なお、全てのねじれに関する障害を無くしたホモトピー論に相当するのが有理ホモトピー論である）。位相群の p -局所化は位相群として関手的に実現できるので、その正規性を論ずることができる。

注意 3.1. 可換な連結コンパクト Lie 群はトーラスとなることが知られているが、より強く、ホモトピー可換な連結コンパクト Lie 群もトーラスに限ることが知られている [AJT60]。しかし奇素数 p に関して局所化すると、例えば $SU(n)_{(p)}$ は $p > 2n$ のときホモトピー可換となることが知られている。この例のように、Lie 群は大きな素数 p で局所化すると高い可換性を持つ傾向がある。これより、可換性だけでなく正規性に関しても同様のことが言えるだろうと予想できる。

定理 3.2. 包含写像の p -局所化 $f: SU(m)_{(p)} \rightarrow SU(n)_{(p)}$ ($2 \leq m < n$) について次が成り立つ。

- (1) $p \geq kn + \ell m$ ならば f は $N_k(\ell)$ -写像である。
- (2) $\max\{kn - m, (k - 1)n + 2\} < p \leq kn + (\ell - 1)m$ ならば f は $N_k(\ell)$ -写像でない。

一つ目の主張は $SU(n)_{(p)}$ のホモトピー群の計算から、二つ目の主張はファイバーワイズ A_k -空間のファイバーワイズ射影空間の mod p コホモロジーの計算から証明される。この結果はかなりの範囲をカバーしているが、 $p \leq \max\{kn - m, (k - 1)n + 2\}$ の場合と $kn + (\ell - 1)m < p < kn + \ell m$ の場合はまだよくわかっていない。

例 3.3. $SU(2)_{(3)} \rightarrow SU(3)_{(3)}$ は $N_1(1)$ -写像ではない。

例 3.4. $SU(2)_{(5)} \rightarrow SU(3)_{(5)}$ は $N_1(1)$ -写像であるが、 $N_1(2)$ -写像ではない。 $N_2(1)$ -写像かどうかはこの定理からはわからない。

詳細は略すが、 $SO(2m + 1) \rightarrow SO(2n + 1)$ ($Sp(m) \rightarrow Sp(n)$ としても同様) についても同じような結果が得られている。他の準同型についてはまだ考えられておらず、現時点では計算すべき対象はまだ大量に残っている状態である。

参考文献

- [AJT60] S. Araki, I. M. James, and Emery Thomas. Homotopy-abelian Lie groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:324–326, 1960.
- [FS10] Emmanuel D. Farjoun and Yoav Segev. Crossed modules as homotopy normal maps. *Topology Appl.*, 157(2):359–368, 2010.
- [Iwa98] Norio Iwase. Ganea’s conjecture on Lusternik-Schnirelmann category. *Bull. London Math. Soc.*, 30(6):623–634, 1998.
- [McC64] G. S. McCarty, Jr. Products between homotopy groups and the J -morphism. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 15:362–370, 1964.
- [Mil56a] John Milnor. Construction of universal bundles. I. *Ann. of Math. (2)*, 63:272–284, 1956.
- [Mil56b] John Milnor. Construction of universal bundles. II. *Ann. of Math. (2)*, 63:430–436, 1956.
- [Sta63] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H -spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963)*, 275-292; *ibid.*, 108:293–312, 1963.
- [Sug61] Masahiro Sugawara. On the homotopy-commutativity of groups and loop spaces. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math.*, 33:257–269, 1960/61.
- [Tsu16] Mitsunobu Tsutaya. Mapping spaces from projective spaces. *Homology Homotopy Appl.*, 18(1):173–203, 2016.
- [Tsu23] Mitsunobu Tsutaya. Higher homotopy normalities in topological groups. *J. Topol.*, 16(1):234–263, 2023.