連続増加関数の拡張と経済学における応用

山﨑　薫里　(高崎経済大) [1]

1　導入

位相空間に前順序構造を付加した空間の諸性質についての Nachbin の研究 [30] は, 経済学における効用表現の基礎となっている.

本講演では, 位相前順序空間における連続増加関数の拡張について, Nachbin の研究の背景, 及び, その後の研究の発展を紹介するとともに, 経済学における連続増加関数の拡張の役割について紹介する．本講演で必要な用語は, 順序と位相に関しては Nachbin [30], 位相空間における一般的な概念については Engelking [12], 連続関数の拡張については Gillman-Jerison [16], Alò-Shapiro [1], 保科 [21], 経済学における選好理論と順序の関係については Bridges-Mehta [6] を主に参照している.

以下, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合で, 通常の位相および通常の全順序 $\leq$ をもつものとし, $[0,1] := \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 1\}$, $[a, \infty) := \{r \in \mathbb{R} : a \leq r\}$, $(-\infty, b] := \{r \in \mathbb{R} : r \leq b\}$ とする.

空でない集合 X 上の 2 項関係 $\preceq$ として, 以下を考える.

- $\forall x \in X\ (x \preceq x)$　(reflexive 反射律)
- $\forall x, y, z \in X\ ((x \preceq y$ かつ $y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z)$　(transitive 推移律)
- $\forall x, y \in X\ (x \preceq y$ または $y \preceq x)$　(complete 完備性)
- $\forall x, y \in X\ ((x \preceq y$ かつ $y \preceq x) \Rightarrow x = y)$　(antisymmetric 反対称律)

前順序, 全前順序, 順序, 全順序は, 以下のように定義される.

(1) $\preceq$ は反射律と推移律をみたすとき, **前順序** (*preorder*) と呼ばれる.

(2) $\preceq$ は反射律, 推移律と完備性をみたすとき, **全前順序** (*total preorder*, *linear preorder*), 特に経済学においては **選好** (*preference*) と呼ばれる.

(3) $\preceq$ は反射律, 推移律と反対称律をみたすとき, **順序** (**=半順序**, *order*, *partial order*) と呼ばれる.

(4) $\preceq$ は反射律, 推移律, 完備性と反対称律をみたすとき, **全順序** (*total order*, *linear order*) と呼ばれる.

前順序 $\preceq$ の入った空でない集合 X を $(X, \preceq)$ または X で表し, **前順序集合**と呼ぶ. 前順序集合 $(X, \preceq)$ 上の実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が

$$\forall x, x' \in X\ (x \preceq x' \ \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$$

をみたすとき, f は**増加** (*increasing*, *isotone*, *order preserving*) と呼ばれる．空でない位相空間 $X = (X, \tau)$ が前順序 $\preceq$ をもつとき, X を $(X, \tau, \preceq)$ で表し, **位相前順序空間** (*topological preordered space*) と呼ぶ.

[1]本研究は科研費 (課題番号:19K03469) の助成を受けたものである.
〒 370-0801 群馬県高崎市上並榎町 1300 高崎経済大学 経済学部
E-mail: kaori@tcue.ac.jp

位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ における位相 τ と前順序 $\preceq$ の関係について, 以下のように定義される.

- $\preceq$ は **閉** (*closed*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ グラフ $\{(x,y)\in X^2 : x\preceq y\}$ が X^2 の閉集合
- $\preceq$ は**半閉** (*semi-closed*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  任意の $x\in X$ について, $\{y\in X : y\preceq x\}$ と $\{y\in X : x\preceq y\}$ が X の閉集合

閉前順序は半閉である. また, 位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ の前順序 $\preceq$ が特に閉かつ順序であるとき, $(X,\tau,\preceq)$ はハウスドルフ位相空間であることがわかる. 本研究においては, 特に断らない限り, $(X,\tau,\preceq)$ の前順序 $\preceq$ と位相 τ に特別な関係を仮定しない.

前順序集合 $(X,\preceq)$ の部分集合 S が**増加** (または, **減少**) であるとは, $s\preceq x$ (または, $x\preceq s$) かつ $s\in S$ ならば $x\in S$ のときをいう. 位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ において, X の任意の交わらない減少閉集合 F_0 と増加閉集合 F_1 に対して, X の交わらない減少開集合 U_0 と増加開集合 U_1 が存在して $F_i\subset U_i$ $(i=0,1)$ とできるとき, $(X,\tau,\preceq)$ は **normally preordered 空間**と呼ばれる. さらに, 前順序が特に順序である normally preordered 空間 は, **normally ordered 空間**と呼ばれる ([30]).

位相空間 (X,τ) が特に**離散順序** $\preceq_0$ (すなわち, $x\preceq_0 x' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x=x'$) をもつとき,

位相順序空間 $(X,\tau,\preceq_0)$ が normally ordered 空間 $\Longleftrightarrow$ 位相空間 (X,τ) が正規空間

である. すなわち, normally preordered 空間は正規空間の拡張とみなせる.

2 位相前順序空間における有界な連続増加関数の拡張

Urysohn の定理の増加関数版として, Nachbin は次の定理を示した.

定理 2.1. (Nachbin [30]) *位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ が normally preordered 空間であるための必要十分条件は, X の任意の交わらない減少閉集合 F_0 と増加閉集合 F_1 に対し, 連続増加関数 $f : X\to[0,1]$ で $F_i\subset f^{-1}(\{i\})$ $(i=0,1)$ となるものが存在することである.*

位相前順序空間 $X=(X,\tau,\preceq)$ の部分集合 A 上に制限された前順序 $\preceq_A$ を考えるとき, $(A,\tau|A,\preceq_A)$ もまた, 位相前順序空間となる. Tietze の拡張定理の増加関数版としては, 次の定理が知られている.

定理 2.2. (Nachbin [30]) *$(X,\tau,\preceq)$ を normally preordered 空間, A をその閉部分集合, f を A 上の有界な連続増加関数とする. このとき, f が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $r<r'$ である任意の実数 r,r' について, $D_X(f^{-1}((-\infty,r]))\cap I_X(f^{-1}([r',\infty)))=\emptyset$ となることである. ここで, $D_X(f^{-1}((-\infty,r]))$ は $f^{-1}((-\infty,r])$ を含む X の最小の閉減少集合を, $I_X(f^{-1}([r',\infty)))$ は $f^{-1}([r',\infty))$ を含む X の最小の閉増加集合を表す.*

いつ X の部分集合上の連続増加関数が全体に拡張できるか? この問いについては, 次の定理が知られている.

定理 2.3. (Nachbin [30], Minguzzi [28]) *$(X,\tau,\preceq)$ を閉前順序 $\preceq$ をもつ normally preordered 空間, A を X のコンパクトな部分集合とする. このとき, A 上の任意の連続増加関数は X 上の連続増加関数に拡張できる.*

位相空間論の視点からは, (閉集合とは限らない) 部分集合 A を固定して議論することで応用しやすくなるため, 特に, 連続有界関数の拡張として定義される C^*-embedding の概念が基本的である. 位相空間 (X,τ) の部分集合 A について, A 上の任意の連続関数 $f : A \to [0,1]$ が X 上の連続関数 $g : X \to [0,1]$ に拡張できるとき (すなわち, 連続関数 $g : X \to [0,1]$ が存在し $g|A = f$ とできるとき), A は X に **C^*-embedded** であると呼ばれる. A が X に C^*-embedded であることは, A 上の実数値連続有界関数を X 上の実数値連続関数に拡張できることと同値である. この用語を用いると, Tietze の拡張定理は 'X が正規空間であるための必要十分条件は, X の任意の閉集合 A が X に C^*-embedded である' と表現できる.

位相空間 (X,τ) の部分集合 A が X の**零集合** (*zero-set*) であるとは, A がある連続関数 $f : X \to [0,1]$ を用いて $A = f^{-1}(\{0\})$ と表せるときをいう. X の零集合の補集合を X の**余零集合** (*cozero-set*) と呼ぶ. 位相空間 (X,τ) の 2 つの部分集合 F と G が X で**関数分離** (または, 完全分離, *completely separated*) されるとは, X の 2 つの交わらない零集合 Z_0, Z_1 を用いて $F \subset Z_0$, $G \subset Z_1$ とできることときをいい, これは, ある連続関数 $f : X \to [0,1]$ で $F \subset f^{-1}(\{0\})$ かつ $G \subset f^{-1}(\{1\})$ とできることと同値である.

Gillman-Jerison による以下の C^*-embedding の特徴づけは, 連続関数を作るために帰納的に行う集合の分離の操作を 1 回のみでできるために使いやすい.

定理 2.4. (Gillman-Jerison [16]) *(X,τ) を位相空間, A をその部分集合とする. このとき, A が X に C^*-embedded であるための必要十分条件は, A 上で関数分離できる 2 つの部分集合は X でも関数分離されることである.*

位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ の部分集合 A 上の任意の連続増加関数 $f : A \to [0,1]$ が X 上の連続増加関数 $g : X \to [0,1]$ に拡張できるとき, A は X に **order C^*-embedded** であると呼ばれる ([34]). 以下, oreder C^*-embedding の特徴づけとして 3 つの結果を紹介する. なお, 定理 2.2 のように, 連続増加関数 f を固定した (より一般的な, 経済学でよく用いられる) 記述で紹介する.

- (Hunsaker [22]) $(X,\tau,\preceq)$ を閉順序 $\preceq$ をもつ位相順序空間, A を X の稠密な部分集合, Y を閉順序をもつコンパクト位相順序空間とする.
  連続増加関数 $f : D \to Y$ が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $D_Y(B_1) \cap I_Y(B_2) = \emptyset$ となる Y の任意の 2 つの部分集合 B_1, B_2 について, $D_X(f^{-1}(B_1)) \cap I_X(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$ となることである. ここで, 一般に $B \subset Z$ について, $D_Z(B)$ は B を含む Z の最小の閉減少集合, $I_Z(B)$ は B を含む Z の最小の閉増加集合を表す. (位相空間における Taĭmanov の定理 [32] , [12, 3.2.1] の一般化.)

- (Herden [18]) $(X,\tau,\preceq)$ を位相前順序空間, A を X の部分集合, $f : A \to \mathbb{R}$ を連続増加関数とする. X の減少集合 S は, ある $x \in A$ について $f^{-1}((-\infty, f(x)]) \subset S$ とできるとき, **f-compatible** であるという. また, X の開減少集合からなる族 $\mathcal{E}$ が次の 2 つの条件 $(S1)$ と $(S2)$ をみたすとき, $\mathcal{E}$ は X の **separable system** と呼ばれる.

  $(S1)$ $\overline{E_1} \subset E_2$ となる $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ が存在する.

  $(S2)$ $\overline{E_1} \subset E_2$ となる任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ に対して, $E_3 \in \mathcal{E}$ が存在して $\overline{E_1} \subset E_3 \subset \overline{E_3} \subset E_2$ とできる.

  連続増加関数 $f : A \to [0,1]$ が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $r < r'$ について, X 上の f-compatible 集合からなる separable system

$\mathcal{E}_{r,r'}$ が存在し, $f^{-1}([0,r]) \subset E$ かつ $f^{-1}([r',1]) \subset X \setminus E$ $(\forall E \in \mathcal{E}_{r,r'})$ となることである.

- (Y. [34]) 位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ の部分集合 A が, ある連続増加関数 $f : X \to [0,1]$ を用いて $A = f^{-1}(\{0\})$ (resp. $A = f^{-1}(\{1\})$) と表せるとき, A は X の **order zero-set** (resp. **order one-set**) と呼ばれる. 位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ の 2 つの部分集合 F と G の組 $\langle F,G\rangle$ が X で**順序関数分離** (順序完全分離, *completely order separated*) されるとは, X の 2 つの交わらない order zero-set Z_0 と order one-set Z_1 で $F \subset Z_0$ かつ $G \subset Z_1$ とできるときをいい, これは, ある連続増加関数 $f : X \to [0,1]$ で $F \subset f^{-1}(\{0\})$ かつ $G \subset f^{-1}(\{1\})$ とできることと同値である.
  連続増加関数 $f : A \to [0,1]$ が X 上の連続増加関数に拡張できるための必要十分条件は, $r < r'$ である任意の実数 r, r' について, $\langle f^{-1}([0,r]), f^{-1}([r',1])\rangle$ が X で順序関数分離できることである.

系 2.5. *位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ の部分集合 A が X に order C^*-embedded であるための必要十分条件は, A 上の 2 つの部分集合のペア $\langle A_0, A_1\rangle$ が A 上で順序関数分離できるとき, X 上でも順序関数分離できることである.*

系 2.5 は定理 2.4 の自然な一般化となっている.

定理 2.6. (Y. [34]) *位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ において, 次は同値である.*

(1) *X の任意のコンパクトな部分集合 A は X に order C^*-embedded である, かつ, $\preceq$ は半閉である.*

(2) *$b \not\preceq a$ である任意の $a,b \in X$ について, $f_{a,b}(a) = 0$ かつ $f_{a,b}(b) = 1$ となるような連続増加関数 $f_{a,b} : X \to [0,1]$ が存在する.*

閉前順序 $\preceq$ をもつ normally preordered 空間は, 定理 2.6 の (2) をみたすので, 定理 2.6 は定理 2.3 の一般化となっている. また, 定理 2.6 の (2) の条件は, Nachbin [30] の一様化可能前順序空間の定義に現れていた概念である (本原稿の 5 章).

3 非有界な連続増加関数の拡張

2 章でみたように, Gillman-Jerison の定理 (定理 2.4) に関しては, 位相前順序空間上の連続増加関数に一般化できた. では, 他の拡張性は関しても同様に順序構造を付加した一般化が可能であるか? この問いに関して, 有界とは限らない連続増加関数の拡張について最近の [34] の結果と背景を紹介する.

位相空間 (X,τ) の部分集合 A において, A 上の任意の連続関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が X 上の連続関数に拡張できるとき, A は X に **C-embedded** であると呼ばれる. また, 位相前順序空間 $(X,\tau,\preceq)$ の部分集合 A において, 任意の連続増加関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が連続増加関数 $g : X \to \mathbb{R}$ に拡張できるとき, A は X に **order C-embedded** と呼ばれる.

位相前順序集合 $(X,\tau,\preceq)$ の部分集合 A が X に order C^*-embedded であることは, 任意の連続増加関数 $f : A \to \mathbb{R}$ を連続増加関数 $g : X \to \mathbb{R}^*$, すなわち, 拡張実数 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ を値とする連続関数に拡張できることと同値である. この観点から比較すると, order C-embedding は, 終域の境界を無限遠点とならないように実数値として拡張可能と捉えることが出来る.

位相空間 (X,τ) の C-embedded 部分集合は常に X に C^*-embedded であるが, 逆は成立しない. 一方, 位相空間 (X,τ) の部分集合 A は X に C-embedded である必要十分

条件は, A は X に C^*-embedded かつ U^ω-embedded であることである (森田-保科 [29], Gutev-大田 [17]). ここで, 位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X に U^ω**-embedded** であるとは, 任意の連続関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対し, 連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ で $f \le g|A$ となるものが存在することである. この定義は, 森田-保科 [29] や保科 [20] の集合族を用いたオリジナルのものではなく, 連続関数を用いた Gutev-大田 ([17]) の同値条件であるが, 本稿ではこちらを定義として採用する.

位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ の部分集合 A 上の任意の連続増加関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対し, 連続増加関数 $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ で $g_1|A \le f \le g_2|A$ となるものが存在するとき, A は X に **order** U^ω**-embedded** と呼ぶ ([34]).

定理 3.1. (Y. [34]) $(X, \tau, \preceq)$ を位相前順序空間, A をその部分集合とする. このとき, A は X に *order* C*-embedded* である必要十分条件は, A は X に *order* C^**-embedded* かつ *order* U^ω*-embedded* であることである.

定理 3.1 は, 連続増加関数の拡張について, $\mathbb{R}$ 値関数としての拡張は (order C-embedding) は, $\mathbb{R}^*$ 値関数としての拡張 (order C^*-embedding) と $\mathbb{R}$ 値への制限 (order U^ω-embedding) で表現できるという自然な解釈を与えるものである.

本稿ではこれまで, 位相空間上の連続関数の拡張は, 位相前順序空間上の連続増加関数の拡張に一般化できることを示す定理を紹介してきたが, 次にうまく対応しない場合を紹介する.

位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X に **controlled embedded** とは, 任意の連続関数 $f : A \to [0,1]$ と X の任意の交わらない 2 つの零集合 Z_0, Z_1 で $Z_i \cap A = f^{-1}(\{i\})$ $(i = 0, 1)$ となるものに対して, 連続関数 $g : X \to [0,1]$ で $g|A = f$ かつ $g^{-1}(\{i\}) = Z_i$ $(i = 0, 1)$ となるものが存在することである. Frantz [15] は, 正規空間 X の閉集合 A は X に controlled embedded であることを示していたが, より一般的に, controlled embedding は C-embedding と同値となる ([33]).

位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ の部分集合 A について, 任意の連続増加関数 $f : A \to [0,1]$ と X の交わらない order zero-set Z_0 と order one-set Z_1 の組 $\langle Z_0, Z_1 \rangle$ で $Z_i \cap A = f^{-1}(\{i\})$ $(i = 0, 1)$ となるものに対し, 連続増加関数 $g : X \to [0,1]$ で $g|A = f$ かつ $g^{-1}(\{i\}) = Z_i$ $(i = 0, 1)$ とできるとき, A は X に **order controlled embedded** と呼ばれる. 特に, $Z_i = \emptyset$ $(i = 0, 1)$ とおくことで, order controlled embedded な部分集合は order C-embedded であることがわかる. しかし, 位相空間の場合とは異なり, 逆は成立しない.

位相空間 (X, τ) の部分集合 A が X に **well-embedded** であるとは, A と交わらない X の零集合 Z について, A と Z は関数分離できるときをいう.

位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ の部分集合 A が X に **order well-embedded** であるとは, X の任意の order zero-set Z_0 で $A \cap Z_0 = \emptyset$ なものと, X の任意の order one-set Z_1 で $A \cap Z_1 = \emptyset$ となるものについて, 2 つの組 $\langle Z_0, A \rangle$ と $\langle A, Z_1 \rangle$ がそれぞれ X で順序関数分離できるときをいう.

位相空間における拡張の関係と (Figure 1), 位相前順序空間における拡張の関係 (Figure 2) は図のようにまとめられるが, 矢印の逆はすべて成立しない (cf. [34]). 位相空間 (X, τ) における C-embedding = controlled embedding の証明の鍵は, well-embedding が果たす関数の補正機能にあった. しかし, 位相順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ においては, order C-embedding が order well-embedding を導かない.

例 3.2. 例えば, $X = [0,1]^2 \setminus \{\langle 1, 1 \rangle\}$, ここで, 通常の積位相, 積順序をもつものとする. このとき, $A = \{1\} \times [0,1)$ は X に *order* C*-embedded* であるが, *order well-embedded* でない.

$$\begin{tikzcd}
\text{controlled embedding} \arrow[d, equal] & & \\
C\text{-embedding} \arrow[r] \arrow[d] & U^{\omega}\text{-embedding} \arrow[r] & \text{well-embedding} \\
C^{*}\text{-embedding} & &
\end{tikzcd}$$

Figure 1: 位相空間 (X, τ) のおける拡張の関係

$$\begin{tikzcd}
\text{order controlled embedding} \arrow[r] \arrow[d] & \text{order well-embedding} \\
\text{order } C\text{-embedding} \arrow[r] \arrow[d] & \text{order } U^{\omega}\text{-embedding} \\
\text{order } C^{*}\text{-embedding} &
\end{tikzcd}$$

Figure 2: 位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ における拡張の関係

4 経済学における選好と効用関数

経済学において, ある消費者の選好を '最善' のものから並べるモデルとして効用関数が用いられる. 位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ 上の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が順序同型写像 (*isomorphism*) であるとき, すなわち,

$$\forall x, x' \in X \ (x \preceq x' \iff f(x) \leq f(x))$$

をみたすとき, f を**連続な効用関数** (*utility function*) といい, X は $\preceq$ の**連続な効用表現** (*utility representation*) をもつと呼ばれる. 連続な効用関数 $f : (X, \tau, \preceq) \to \mathbb{R}$ が存在するとき, 前順序 $\preceq$ は完備性をみたす. 閉全前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ 上の効用関数の存在については, 次の 2 つの定理が基本的である.

定理 4.1. (Eilenberg [11]) *閉全前順序 $\preceq$ をもつ連結な可分空間 $(X, \tau, \preceq)$ 上には, 連続な効用関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在する.*

定理 4.2. (Debreu [7]) *閉全前順序 $\preceq$ をもつ第 2 可算空間 $(X, \tau, \preceq)$ 上には, 連続な効用関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在する.*

定理 4.2 の証明に使われている次の補題はそれ自身として有名である. $\mathbb{R}$ の部分集合 S について, $\mathbb{R} \setminus S$ の有界な自明でない連結成分は *gap* とよばれる.

補題 4.3. (Open Gap Lemma, [7] [8]) *S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. このとき, $g(S)$ の gap がすべて開集合となるような狭義増加関数 $g : S \to \mathbb{R}$ が存在する.*

補題 4.3 は, 増加関数から (順序位相に関する) 連続増加関数を作ることができるという有力な手法である一方, 証明が複雑であるためにこれまで多くの別証明が与えられてき

た ([5], [23], [9], [3], [4] and [19] など). 一方, order C^*-embedding を用いることで, 定理 4.2 に対し補題 4.3 を回避する別証明を与えることができる.

現在では, 連続な効用関数をもつことの特徴づけが数多く与えられているが, それらの中から 1 つ紹介する. 前順序集合 $(X, \preceq)$ において, $\preceq$ が **Debreu の意味での order-separable** であるとは, 高々可算な集合 $Z \subset X$ が存在し, $x \prec y$ のとき $z \in Z$ が存在し $x \preceq z \preceq y$ とできるときをいう.

定理 4.4. (Brigde-Mehta [6]) $(X, \tau, \preceq)$ を全前順序集合とする. このとき, 連続な効用関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在するための必要十分条件は, $\preceq$ が *Debreu* の意味での *order-separable* で, 順序位相 $\tau_{\preceq}(X)$ は $\tau_{\preceq}(X) \subset \tau$ をみたすことである.

連続な効用関数 $f : (X, \tau, \preceq) \to \mathbb{R}$ が存在するとき $\preceq$ は完備となるので, 一般の (完備とは限らない) 前順序の効用表現とはならない. そのため, 複数組の連続増加関数を用いるマルチユーティリティ表現が Aumamm [2], Dubra-Maccheroni-Ok, [10], Evren-Ok [13], Ok [31] 等により導入された.

位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ が $\preceq$ の**連続なマルチユーティリティ表現** (*continuous multi-utility representation*) をもつとは, X が次の条件 $(*)$ を満たすときをいう.

$$(*) \quad \forall x, x' \in X \ \left[\ x \preceq x' \iff (f(x) \le f(x') \text{ for } \forall f : X \to \mathbb{R} : \text{連続増加関数})\ \right]$$

以下の事実が知られている.

- 位相前順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ が $\preceq$ の連続なマルチユーティリティ表現をもつとき, 前順序 $\preceq$ は閉である.
- 半閉な前順序 $\preceq$ をもつ normally preordered 空間 $(X, \tau, \preceq)$ は, $\preceq$ の連続なマルチユーティリティ表現をもつ.
- 局所コンパクト, σ-コンパクトなハウスドルフ空間 (X, τ) は, X の任意の閉前順序 $\preceq$ の連続なマルチユーティリティ表現をもつ (Levin [25]).
- 閉前順序 $\preceq$ をもつ k_ω-空間 $(X, \tau, \preceq)$ は, normally preordered 空間である. よって, X は $\preceq$ の連続なマルチユーティリティ表現をもつ (Minguzzi [28]).
- 条件 $(*)$ は, 定理 2.6 の条件 (2) と一致する. (order C^*-embedding は, 経済学ではマルチユーティリティ表現として現れてくる.)

5　順序埋蔵定理

位相順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ の順序 $\preceq$ が連続なマルチユーティリティ表現をもつとき, チコノフキューブへ埋め込めるか? という自然な問いが生じる. 位相空間における埋蔵定理と Stone-Čech コンパクト化の理論の位相順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ への一般化について, Fletcher-Lindgren [14], Nachbin [30] から紹介する.

位相順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ において, X が $\preceq$ の連続なマルチユーティリティ表現をもち (すなわち, $(*)$ の条件をみたし), かつ, 次の条件 $(**)$ をみたすとき, **一様化可能前順序空間** (*uniformizable preordered space* [30]) と呼ばれる.

$(**)$ 任意の $x \in X$ とその近傍 V について, 連続な増加関数 $f : X \to [0, 1]$ と連続な減少関数 $g : X \to [0, 1]$ で $f(x) = 1 = g(x)$, かつ, $\inf\{f(y), g(y)\} = 0$ $(\forall y \in X \setminus V)$ をみたすものが存在する.

ハウスドルフである一様化可能前順序空間は, 順序空間となり [30], **完全正則順序空間** (*completely regular ordered space* [30], 一様順序空間, *uniformly ordered* space [14]) と呼ばれる.

$(X, \tau, \preceq)$, $(Y, \tau', \preceq')$ を 2 つの位相順序空間とする. このとき, 関数 $f : X \to Y$ が X の Y への **順序位相同型写像** (*order homeomorphism*) であるとは, f が全単射連続増加写像で, f^{-1} も連続増加写像であるときをいう. また, $f : X \to Y$ が Y の部分集合への順序位相同型写像であるとき, f は X の Y への**順序埋蔵** (*order embedding*), または, X は Y に順序埋蔵されると呼ばれる ([14]).

S を空でない集合, 各 $\alpha \in S$ について X_α を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とし, 積空間 $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ に通常の積順序 $\trianglelefteq$ (すなわち, $(x_\alpha)_{\alpha \in S}, (y_\alpha)_{\alpha \in S} \in \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ について, $(x_\alpha)_{\alpha \in S} \trianglelefteq (y_\alpha)_{\alpha \in S} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_\alpha \leq y_\alpha$ for $\forall \alpha \in S$) を入れたものは**順序キューブ** (*ordered cube*) と呼ばれる.

定理 5.1. (順序埋蔵定理, Fletcher-Lindgren [14]). *任意の完全正則順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ は, 順序キューブに順序埋蔵される.*

位相順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ の**順序コンパクト化** (*order compactification*) とは, コンパクトハウスドルフ順序空間 Y と, $f(X)$ が Y の稠密な部分集合となるような順序埋蔵 $f : X \to Y$ の組 (f, Y) をいい, X と $f(X)$ を同一視する.

- 閉順序 $\preceq$ をもつ位相順序空間 $(X, \tau, \preceq)$ が順序コンパクト化をもつための必要十分条件は, X が完全正則順序空間であることである ([30]).

$C^*_\uparrow(X)$ で X 上の有界な連続増加関数全体を表すとする. 特に, $e : X \to \mathbb{R}^{C^*_\uparrow(X)}$ を評価写像 (evaluation map), nX を $e(X)$ の $\mathbb{R}^{C^*_\uparrow(X)}$ における閉包とするとき, (e, nX) は X の **Nachbin コンパクト化**と呼ばれる. 完全正則順序空間の順序コンパクト化 $(f, Y), (g, Z)$ について, 連続な増加関数 $h : Y \to Z$ が存在し $h \circ f = g$ とできるとき, (f, Y) は (g, Z) を**支配する** (dominate) と呼ばれ, 特に h が順序位相同型写像であるとき, (f, Y) と (g, Z) は**同値**であるという.

- X を完全正則順序空間とするとき, その Nachbin コンパクト化 nX は, X のすべての順序コンパクト化を支配する ([14]).
- X が αX に order C^*-embedded となるような順序コンパクト化 αX は, Nachbin コンパクト化と同値である.
- 離散順序 $\preceq_0$ をもつ位相順序空間 $(X, \tau, \preceq_0)$ の Nachbin コンパクト化 $n(X, \tau, \preceq_0)$ は, 位相空間として Stone-Čech コンパクト化 $\beta(X, \tau)$ と一致する.
- 実数全体 $\mathbb{R}$ に通常の位相 $\tau_\mathbb{R}$ と通常の全順序 $\leq$ を考えるとき, Nachbin コンパクト化 $n(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R}, \leq)$ は, 位相空間として Stone-Čech コンパクト化 $\beta(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$ と一致しない ([14]).
- normally ordered 閉空間 (特に, 閉全順序空間) は必ずしも完全正則順序空間にならない ([14]). よって, $T_2 + (*) \not\Rightarrow (**)$ である.
- 条件 $(**)$ は, X の order cozero-sets と order coone-sets 全体を部分開基とする位相と一致する.

位相順序空間での順序埋め込みは, マルチユーティリティ表現のための条件 $(*)$ に加え, $(**)$ で要求されるある種の局所凸性も求められるため, マルチユーティリティ表現は, 順序埋め込みよりも真に弱い位置づけにある.

References

[1] R. A. Alò and H. L. Shapiro, Normal Topological Spaces, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[2] R. Aumann, *Utility theory without the completeness axiom*, Econometrica **30** (1962), 445–462.

[3] A. F. Beardon, *Debreu's Gap Theorem*, Econ. Theory **2** (1992), 150–152.

[4] A. F. Beardon and G.B. Mehta, *Utility functions and the order type of the continuum*, J. Math. Econ. **23** (1994), 387–390.

[5] R. Bowen, *A new proof of a theorem in utility theory*, Int. Econ. Rev. **9** (1968), 374.

[6] D. S. Bridges and G. B. Mehta, Representation of Preference Orderings, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 422, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1995.

[7] G. Debreu, *Representation of a preference ordering by a numerical function*, in: R. Thrall, C. Coombs, and R. Davies (eds), Decision Processes, New York: John Weley, 1954.

[8] G. Debreu, *Continuity properties of Paretian utility*, Int. Econ. Rev. **5** (1964), 285–293.

[9] G. Droste, *Ordinal scales in the theory of measurement*, J. Math. Psych. **31** (1987), 60-82.

[10] J. Dubra, F. Maccheroni and E. A. Ok, *Expected utility theory without the completeness axiom*, J. Econ. Theory **115** (2004), 118–133.

[11] S. Eilenberg, *Ordered topological spaces*, Amer. J. Math. **63** (1941), 39–45.

[12] R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[13] O. Evren and E. A. OK, *On the multi-utility representation of preference relation*, J. Math. Econ. **47** (2011), 554-563.

[14] P. Fletcher and W. F. Lindgren, Quasi-uniform Spaces, Lecture Note Pure Appl. Math. 77, Marcel Dekker, New York, 1982.

[15] M. Frantz, *Controlling Tietze-Urysohn extensions*, Pacific J. Math. **169** (1995), 53-73.

[16] L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, New York, 1960.

[17] V. Gutev and H. Ohta, *Does C^*-embedding imply C-embedding in the realm of products with a non-discrete metric factor?*, Fund. Math. **163** (2000), 241–265.

[18] G. Herden, *On a lifting theorem of Nachbin*, Math. Soc. Sci. **19** (1990), 37-44.

[19] G. Herden, and G. B. Mehta, *The continuous analogue and generalization of the classical Birkhoff-Milgram theorem*, Math. Soc. Sci. **28** (1994), 59–66.

[20] T. Hoshina, *Spaces with a property related to uniformly local finiteness*, Tsukuba J. Math. **6** (1982), 51–62.

[21] T. Hoshina, Extensions of mappings, II, in: K. Morita, J. Nagata (Eds.), Topics in General Topology, North-Holland, Amsterdam, 1989, pp. 41-80

[22] W. N. Hunsaker, *Extensions of continuous increasing functions*, Topology Proc. **5** (1980), 105-110.

[23] J. Jaffray, *Existence of a continuous utility function: an elementary proof*, Econometrica **43** (1975), 981–983.

[24] H.A.Kunzi and T.A. Richmond, *Completely regularly ordered spaces versus T_2-ordered spaces which are completely regular*, Topology Appl. **135** (2004), 185–196.

[25] V. Levin, *Measurable utility theorems for closed and lexicographic preference relations*, Sov. Math. Dokl. **27** (1983), 639-643.

[26] T. McCallion, *Compactifications of ordered topological spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 463–473.

[27] E. Minguzzi, *Topological conditions for the representation of preorderes by continuous utilities*, Appl. Gen. Topology **13** (2012), 81–89.

[28] E. Minguzzi, *Normally preordered spaces and utility*, Order **30** (2013), 137–150.

[29] K. Morita and T. Hoshina, *P-embedding and product spaces*, Fund. Math. **93** (1976), 7180.

[30] L. Nachbin, Topology and Order, New York, Van Nostrand Reinhold, 1965.

[31] E. A. OK, *Utility representation of an incomplete preference relation*, J. Econ. Theory **104** (2002), 429–449.

[32] A. D. Taĭmanov, *On extension of continuous mappings of topological spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **31** (1952), 459–463.

[33] K. Yamazaki, *Controlling extensions of functions and C-embedding*, Topology Proc. **26** (2001/2002) 323–341.

[34] K. Yamazaki, *Extensions of continuous increasing functions*, Topology Appl. **335** (2023) 108566.