Higher homotopy normalities in topological groups

蔦谷 充伸　(九州大学)*

2023 年 8 月 13 日

1 導入

1.1 なぜ higher なものを考えるのか

高次元の空間などをはじめとする「目に見えない図形」の幾何学において，**（コ）ホモロジー群**や**ホモトピー群**（特に**基本群**）などは人の目の代わりとして，大きな役割を果たしてきた．これらの不変量の重要な性質として**ホモトピー不変性**がある．ホモトピー不変性とはホモトピックな写像（以下位相空間の間の写像と言えば，常に連続写像を意味する）$f \simeq g\colon X \to Y$ がホモロジー群などに等しい写像を誘導することである．このことからホモトピー同値な空間のホモロジー群などが同型になることが従うのであった．これらの不変量の重要性を動機の一つとして，up to homotopy の性質に焦点を当てた**ホモトピー論**が発展した．ホモトピー論においては写像は全て up to homotopy で考えてしまえばよいように思われるが，実はそれほど話は単純ではない．

例 1.1. Milnor [Mil56a] は連結な基点付き可算単体複体 X 上の基点付きループ空間の位相群モデル G_X を構成した．G_X は通常の基点付きループ空間 ΩX と H-同値（up to homotopy で演算を保つ写像によってホモトピー同値）であり，X を底空間とする普遍主 G_X-束を持つことも証明している（つまり X は G_X の分類空間 BG_X のホモトピー型を持つ）．また一般に位相群の間の連続準同型 $f\colon H \to G$ がホモトピー同値写像ならば，分類空間の間のホモトピー同値写像 $BH \simeq BG$ を誘導する．さて，n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の $G_{\mathbb{C}P^n}$ は $n \geq 2$ のとき，直積群 $S^1 \times G_{S^{2n+1}}$ と H-同値となることが知られている．しかし対応する分類空間はそれぞれ $\mathbb{C}P^n$ と $\mathbb{C}P^\infty \times S^{2n+1}$ であり，これらはホモトピー同値ではない．準同型かつホモトピー同値な写像が存在するなら分類空間のホモトピー同値が従うが，H-同値写像の存在だけでは分類空間のホモトピー同値は従わないということである．この問題に対して，菅原 [Sug61] は **strongly homotopy-multiplicative map** という高次ホモトピーで記述される概念によって，分類空間がホモトピー同値となるための必要十分条件を記述した．これによって分類空間のホモトピー型は，up to homotopy ではコントロールできないが（準同型でなくとも）「up to higher homotopy」ではコントロールできることが分かった．この概念は Stasheff [Sta63] により一般化され，**A_n-写像**の理論が生まれた．

* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744　九州大学大学院数理学研究院
e-mail: tsutaya@math.kyushu-u.ac.jp
web: https://www3.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/

この例のように，up to homotopy の性質と等式で表される性質（準同型の定義 $f(gh) = f(g)f(h)$ など）との間に，高次ホモトピー的な現象が潜んでいることがある．この例の場合，$G_{\mathbb{C}P^n}$ から $S^1 \times G_{S^{2n+1}}$ への A_{n+1}-写像でホモトピー同値写像であるものが存在しないことを Stasheff が証明しており，ある意味でこれが準同型でかつホモトピー同値なものが存在しないことに対する最も本質的な障害となっている．

1.2 A_n-写像

上で少し A_n-写像について触れたが，本講演の主題に関わるため詳しく説明する．なお，当記事および講演では本質を見やすくするため技術的な条件を幾分か不正確に記述することがある．まず位相モノイドの間の写像 $f\colon H \to G$ が **H-写像**（この H は定義域の位相群 H のことでなく Hopf の頭文字からとられている）であるとは，f は単位元を単位元に写す写像であって，$f \circ m \simeq m \circ (f \times f)$（ホモトピック）となることである．ここで $m\colon H \times H \to H$ と $m\colon G \times G \to G$ は位相モノイドの積を与える写像である．これは f が 2 個の元の積を up to homotopy で保つということであるが，より多くの元の積をより「よい」形で保つことを要請するのが次の A_n-写像である．

定義 1.2. 位相モノイド G, H の間の単位元を保つ写像 $f\colon H \to G$ の A_n**-形式**（$n = 1, 2, \ldots, \infty$）とは以下を満たす写像の族 $\{f_i\colon [0,1]^{i-1} \times H^i \to G\}_{i=1}^n$ である．

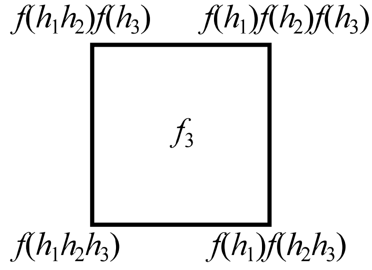
(1) $f_1 = f$,

(2) $$f_i(t_1, \ldots, t_{i-1}; h_1, \ldots, h_i) = \begin{cases} f_{i-1}(t_1, \ldots, t_{i-1}; h_1, \ldots, h_k h_{k+1}, \ldots, h_i) & (t_k = 0) \\ f_k(t_1, \ldots, t_{k-1}; h_1, \ldots, h_k) f_{i-k}(t_{k+1}, \ldots, t_{i-1}; h_{k+1}, \ldots, h_i) & (t_k = 1) \end{cases}$$

(3) $$f_i(t_1, \ldots, t_{k-1}; h_1, \ldots, h_{k-1}, *, h_{k+1}, \ldots, h_i) = f_i(t_1, \ldots, \max\{t_{k-1}, t_k\}, \ldots, t_{k-1}; h_1, \ldots, h_{k-1}, h_{k+1}, \ldots, h_i)$$

ここで $*$ は単位元を表し，$\max\{t_0, t_1\}$ や $\max\{t_{i-1}, t_i\}$ はそれ自身を除くことを意味する．これらの対 $f = (f, \{f_i\}_i)$ を A_n**-写像**という．

単位元に関する条件 3 を除けば，A_2-写像と H-写像は同じものである．H-写像であるためのホモトピーは $f(h_1h_2)$ と $f(h_1)f(h_2)$ をつなぐ h_1, h_2 に関して連続な道の族である．A_3-写像であるための「高次ホモトピー」は次の図のようなものになる．



例 1.3. 位相モノイドの間の準同型写像は A_∞-写像である．実際，準同型写像 $f\colon H \to G$ の A_∞ 形式 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ として次のようにとればよい（標準的な A_∞-形式）．

$$f_i(t_1, \ldots, t_{i-1}; h_1, \ldots, h_i) = h_1 \cdots h_i.$$

例 1.4. （単位元が「非退化な基点」であるならば）$f\colon H \to G$ が A_n-形式を持つとき，f と基点を保ってホモトピックな写像 $g\colon H \to G$ もまた A_n-形式を持つ．証明はホモトピー拡張性質を適当に使えばよい．このことと上の例から，写像 $f\colon H \to G$ が A_n-形式を持たないならば，その写像はいかなる準同型ともホモトピックでないことがわかる．

1.3 ホモトピーファイバー列

ファイバー束の被覆ホモトピー性質のみを取り出して一般化した概念として，**Hurewicz ファイブレーション**や **Serre ファイブレーション**が知られている．$\pi\colon E \to B$ がこのようなファイブレーションであるとき，B の基点上のファイバーの包含写像を $i\colon F \to E$ とすると，次の**ホモトピー長完全列**が得られるのであった．

$$\cdots \to \pi_2(B) \to \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B) \to \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{\pi_*} \pi_0(B)$$

ファイブレーションに対しては **Serre スペクトル系列**のような（コ）ホモロジーの計算に使える道具もあり，ファイブレーションは理論面でも応用面でも重要である．さらにホモトピー論の教科書によく書かれているように，任意の写像 $f\colon X \to Y$ はある意味であたかもファイブレーションであるかのように扱うことができ，そのファイバーに相当する**ホモトピーファイバー** $i\colon F_f \to X$ が定義される．すると，ホモトピー長完全列

$$\cdots \to \pi_2(Y) \to \pi_1(F_f) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \to \pi_0(F_f) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \xrightarrow{f_*} \pi_0(Y)$$

が得られ，対応する Serre スペクトル系列も使えるため，ホモトピーファイバーも理論や計算においてしばしば活躍する．任意の写像に対してホモトピーファイバーが取れるということは，ホモトピーファイバーの自然な写像 $i\colon F_f \to X$ のホモトピーファイバーも取ることができる．さらにこの操作は繰り返すことができ，写像の列が得られる．このような写像の列は実はホモトピー同値を除いて次のように「周期的」になる．

$$\cdots \to \Omega^2 Y \to \Omega F_f \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \to F_f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

ここで ΩX は X 上の基点付きループのなす空間である．このような写像の列を**ホモトピーファイバー列**という．ホモトピーファイバー列の各写像の左隣はその写像のホモトピーファイバーになっている．

さてホモトピーファイバー列は左には無限に延ばせるが，右にはどうであろうか．一般には右に延ばすのは不可能である．例えば，右端から数えて 4 つ目以降の空間はループ空間となっているため，その基本群が可換でなければならず，ファイバー列を常に右に延ばせるわけではないことがわかる．これは必要条件に着目した議論だが，十分条件については次の位相群を用いた構成がある．

例 1.5. $f\colon H \to G$ を閉部分群の包含写像とする．このとき（ある程度よい条件が必要だが）商空間への射影 $G \to G/H$ は主 H-束となる．$EG \to BG$ を普遍主 G-束とすると，G の G/H への左作用から次の主 G-束

$$EG \times G/H \to EG \times_G G/H$$

を得る．EG が可縮であることから $EG \times G/H$ は G/H とホモトピー同値であり，$EG \times_G G/H = EG/H$ は可縮な空間への H の自由作用（で適当な性質を満たすもの）で割った空間なので，H の分類空間 BH とホモトピー同値である．さらに G/H への G 作用の同伴束 $EG \times_G G/H \to BG$ があるので，次はホモトピーファイバー列となることがわかる．

$$H \xrightarrow{f} G \to G/H \to BH \to BG$$

なお，最後の写像は f から誘導される写像 $Bf\colon BH \to BG$ とホモトピックであることも確認できる．

例 1.6. 正規閉部分群 $N \subset H$ に対し $G = H/N$ もまた位相群となることに注意すると，上の例と同様の議論によって次のホモトピーファイバー列を得る．

$$N \to H \to G \to BN \to BH \to BG$$

このホモトピーファイバー列は重要な示唆を与えてくれる．つまり，ただの写像 $N \to H$ では右に延ばせるかどうか分からないが，「正規閉部分群である」という仮定を置けばこれだけ右に延ばすことが可能になるというのである．実はこれはある意味で逆も成立する．例 1.1 で紹介した Milnor の構成などを用いれば，一般の写像 $X \to Y$ から得られるホモトピーファイバー列と例 1.5，1.6 で得られるホモトピーファイバー列に本質的には同じものであることがわかる．つまり，任意のホモトピーファイバー列は「ホモトピー同値を除いて」次のような構造を持つ．

$$N \xrightarrow{\text{正規部分群}} H \xrightarrow{\text{群準同型}} G \xrightarrow{\text{群作用}} BN \to BH \to BG$$

ホモトピー論的にはこの記述はある意味で十分だが別の意味では不十分である．つまり，ホモトピー不変な性質として直接に記述出来ていないため，そのホモトピー論的な障害がこのままでは扱いにくいのである．本研究で「正規性」の高次ホモトピー版を考える目的の一つはこういった障害理論を構築することである．

1.4 crossed module

正規部分群の高次ホモトピー版を考える前に，正規部分群という性質の包含写像以外への一般化について触れておく．それは crossed module と呼ばれており，少なくとも 1940 年代には MacLane や J.H.C. Whitehead らにより研究されている．

定義 1.7. 位相群の間の準同型 $f\colon H \to G$ が **crossed module** とは，G の H への位相群の同型による連続な作用 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ が与えられていて，次の性質を満たすこと．

(1) 任意の $x, h \in H$ に対し，$\rho(f(h))(x) = hxh^{-1}$ となる．
(2) 任意の $x \in H$ と $g \in G$ に対し，$f(\rho(g)(x)) = gxg^{-1}$ となる．

正確には作用 ρ の連続性の意味をはっきりさせる必要があるがここでは省略する．

例 1.8. H が位相群 G の正規部分群のとき, $x \in H$ と $g \in G$ に対し $\rho(g)(x) = gxg^{-1} \in H$ と定めれば，包含写像 $f\colon H \to G$ は crossed module である．つまり，crossed module は正規部分群の一般化である．

例 1.9. $E \to B$ をファイブレーションとし，そのファイバーを F とする．このとき，誘導準同型 $\pi_1(F) \to \pi_1(E)$（これは単射とは限らない）は（離散的な）crossed module となることが知られている．

crossed module に対しても例 1.6 と同様の構成が出来ることは Farjoun と Segev [FS10] が証明している．つまり，$f\colon H \to G$ が crossed module のとき，Borel 構成 $EH \times_H G$ は自然に位相群となり，次のホモトピーファイバー列が存在する．

$$H \to G \to EH \times_H G \to BH \to BG \to B(EH \times_H G)$$

1.5　この講演で扱う内容

本講演は筆者による論文 [Tsu23] に基づいて以下の内容を扱う．

- 高次ホモトピー正規性（$N_k(\ell)$-写像）の定義
- $N_k(\ell)$-写像のファイバーワイズ A_n-空間を用いた特徴付け
- $N_k(\ell)$-写像の商空間にどのくらい積構造が遺伝するか
- $\mathrm{SU}(m) \to \mathrm{SU}(n)$ は p-局所的にどの程度の高次ホモトピー正規性をもつか

本研究によって $N_k(\ell)$-写像が Lie 群の高次ホモトピー正規性の「限界」を記述するにはちょうどよいものであることがわかった．しかし $N_k(\ell)$-写像は crossed module のような「真の正規性」からはかなり遠いものである．つまり，さらなる高次ホモトピー的な条件を課さない限りは真の crossed module には近づけない．特に「商空間」（正確には Borel 構成）に遺伝する積構造が非常に弱い．また，本研究ではあまり具体的に扱われてこなかったある種の「二重添え字付き」の高次ホモトピーを扱っており，既に感触としては高次ホモトピー構造を具体的に記述するのには限界が来ている．今回の研究には Joyal や Lurie らによる高次圏論の理論などは用いていないが，これより強い条件を考えるのであれば，より整理された形で扱わざるを得ないだろうと考えている．

2　$N_k(\ell)$-写像

2.1　$N_k(\ell)$-写像

位相群 H, G に対し，H から G への A_n-写像のなす空間を $\mathcal{A}_n(H, G)$ と書く．Moore path を用いて基点付きループ空間と H-同値な位相モノイドを作るときと同様の議論で，

$\mathcal{A}_n$ を対象が位相群で，H から G への射の集合が空間 $\mathcal{A}_n(H,G)$ となるような位相圏（topologically enriched category）が構成できる [Tsu16]．なお，圏 $\mathcal{A}_n$ として他の高次圏論的な定式化を考えたとしても，以下の議論は適当に解釈し直せば同様に行えると思われる．

さて，この設定のとき $\mathcal{A}_n(H,H)$ は合成に関して位相モノイドとなる．そして共役を与える写像 $\mathrm{conj}_H\colon H \to \mathcal{A}_n(H,H)$（$\mathrm{conj}_H(h)(x) = hxh^{-1}$）はモノイドの準同型となる．また，位相モノイドの間の A_n-写像と同様に位相モノイドの作用の間の A_n-同変写像も定義される．この状況で，$N_k(\ell)$-写像は次のように定義される．

定義 2.1. 位相群の間の準同型写像 $f\colon H \to G$ が **$N_k(\ell)$-写像**（$1 \le k, \ell \le \infty$）であるとは，A_k-写像 $\rho\colon G \to \mathcal{A}_\ell(H,H)$ が与えられていて，次が成り立つこと．

(1) $\rho \circ f\colon H \to \mathcal{A}_\ell(H,H)$ は $\mathrm{conj}_H\colon H \to \mathcal{A}_\ell(H,H)$ と A_k-写像としてホモトピック．
(2) 1 点から f を対応させせる写像 $* \to \mathcal{A}_\ell(H,G)$ は G 作用に関して A_k-同変写像であって，その H への制限は自明な A_k-形式とホモトピック．ただし，$*$ には G は自明に作用し，$\mathcal{A}_\ell(H,G)$ には対応 $\alpha \mapsto \mathrm{conj}_G(g) \circ \alpha \circ \rho(g^{-1})$ によって作用する．

この定義の条件はちょうど定義 1.7 の対応する条件を「高次ホモトピー版」に緩めたものになっている．

例 2.2. crossed module $f\colon H \to G$ と付随する作用 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ は $N_\infty(\infty)$-写像を与える．

例 2.3. $k' \le k$ かつ $\ell' \le \ell$ のとき，$N_k(\ell)$-写像は $N_{k'}(\ell')$-写像である．

例 2.4. $k = \ell = 1$ のとき，$N_1(1)$-写像であることは McCarty [McC64] によるホモトピー正規写像の定義に一致する．ここで位相群の準同型 $f\colon H \to G$ がホモトピー正規写像であるとは，写像 $\rho'\colon G \wedge H \to H$ が存在して $\rho' \circ (f \wedge \mathrm{id}_H)\colon H \wedge H \to H$ が写像 $(h,x) \mapsto hxh^{-1}x^{-1}$ とホモトピックであって，$f \circ \rho'\colon G \wedge H \to G$ が写像 $(g,x) \mapsto gf(x)g^{-1}f(x)^{-1}$ とホモトピックであって，これらのホモトピーを「つなげた」ものがホモトピーとして写像 $(h,x) \mapsto f(hxh^{-1}x^{-1})$ から動かないホモトピーとホモトピックであること．

$$\begin{tikzcd}
H \wedge H \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_H, \mathrm{id}_H \rangle"] \arrow[d, "f \wedge \mathrm{id}_H"'] & H \arrow[d, "f"] \\
G \wedge H \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_G, f \rangle"'] \arrow[ur, dotted, "\rho'"] & G
\end{tikzcd}$$

2.2 射影空間とファイバーワイズ A_n-空間

位相群 G に対し n 次射影空間 B_nG が定義される．射影空間の構成にはバー構成を用いるものや Dold–Lashof によるものなどがあるが，Milnor の構成 [Mil56b] によれば，B_nG は G の $n+1$ 個の join G^{*n+1} への G の対角的な作用による商 G^{*n+1}/G として実

現できる．自然な包含写像 $B_nG \subset B_{n+1}G$ に関する帰納極限 BG は G の**分類空間**である（BG を底空間とし，全空間が可縮であるような主 G-束（普遍主束）$EG \to BG$ が存在する）．

例 2.5. $S^0 \subset \mathbb{R}, S^1 \subset \mathbb{C}, S^3 \subset \mathbb{H}$ はそれぞれ実数，複素数，四元数の絶対値 1 の元からなる Lie 群と思えるが，対応する n 次射影空間は通常の意味での射影空間 $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ となる．

射影空間は A_n-写像と関係が深い．実際，A_n-写像 $f\colon H \to G$ があると，誘導写像 $B_nf\colon B_nH \to B_nG$ が得られる．さらに次が成り立つ（以下の形は筆者 [Tsu16] によるが，似たような結果はさまざまな形で知られていた）．

定理 2.6. 位相群の間の A_n-写像 $f\colon H \to G$ に対し誘導写像と包含写像の合成

$$B_nH \xrightarrow{B_nf} B_nG \to BG$$

を対応させる写像

$$\mathcal{A}_n(H,G) \to \mathrm{Map}_*(B_nH, BG)$$

（Map_* は基点を保つ写像のなす空間を表す）は弱ホモトピー同値写像である．

この定理は Milnor の基点付きループ群 G_X を用いると自然なホモトピー同値 $X \simeq BG_X$ が存在するので

$$\mathcal{A}_n(H,G_X) \simeq \mathrm{Map}_*(B_nH, X)$$

というある種の随伴性を記述する理論的な結果である．一方，この結果は A_n-写像という高次ホモトピーデータを含む障害理論が通常の空間の障害理論によって記述出来ることも示しており，応用面でも役に立つ．今回の結果は正にこの方向性での応用になる．

位相群の「族」版である**ファイバーワイズ位相群**に対してもファイバーワイズ A_n**-写像**や**ファイバーワイズ射影空間**，**ファイバーワイズ分類空間**などが定義され，同様の結果が成り立つ．

例 2.7. 主 G-束 $P \to B$ に対し，G の G 自身への共役作用に関する同伴束 $P \times_{\mathrm{conj}} G \to B$ はファイバーワイズ位相群である．

2.3 主定理

主定理のアイデアは「同変」を「ファイブレーション」で翻訳するということである．これは以下の例の類似である．

例 2.8. 位相群 G の空間 X への作用があると，普遍主束 $EG \to BG$ の同伴束 $EG \times_G X \to BG$ が得られる．一方で，空間 Y から BG への写像 $f\colon Y \to BG$ があると，普遍主束の引き戻しの全空間 f^*EG に G が作用する．この「G の作用」と「BG への写像」の間の対応は，適当なホモトピー論的な意味で「1 対 1 対応」であることが知られている．

作用の高次ホモトピー的な障害は取り扱いが難しいが，ファイバーワイズホモトピー論（写像のホモトピー論）の障害理論は古くから多くの研究結果があり，複雑な計算を扱う手法も数多く存在する．主定理は複雑な高次ホモトピーデータの障害理論を，そのような古典的な道具の揃った世界の問題に対応させるものである．

次が本研究の主定理である．この中で**ファイバーワイズ A_ℓ-空間**という対象が出てくるが，これは二項演算の高次ホモトピー結合性を n 個の積まで考えたものである．積構造の整合性をある意味でそのレベルまでしか求めていないことを意味している．また，主 H-束 $E_kH \to B_kH$ は普遍主束 $EH \to BH$ を k 次射影空間 B_kH 上に制限したものである．

定理 2.9. 位相群の間の準同型写像 $f\colon H \to G$ が $N_k(\ell)$-写像となるための必要十分条件はファイバーワイズ A_ℓ-空間 $E \to B_kG$ と f から誘導される写像 $B_kf\colon B_kH \to B_kG$ 上のファイバーワイズ A_ℓ-写像 $\phi\colon E_kH \times_{\mathrm{conj}} H \to E$ と B_kG 上のファイバーワイズ A_ℓ-写像 $\psi\colon E \to E_kG \times_{\mathrm{conj}} G$ が存在して，次を満たすこと．

(1) ϕ は各ファイバー上で弱ホモトピー同値写像である．
(2) $\psi \circ \phi$ は写像 $B_kH \to BG$ 上のファイバーワイズ A_ℓ-写像として f から誘導されるファイバーワイズ準同型 $E_kH \times_{\mathrm{conj}} H \to E_kG \times_{\mathrm{conj}} G$ とホモトピックである．

定理の条件は定義 2.1 の条件とちょうど対応するようになっている．

注意 2.10. 実は上の書き方は少し嘘が入っている．元の論文では実際に定義を書き下すのが難しいために，A_ℓ-空間への A_ℓ-写像と A_ℓ-空間からの A_ℓ-空間の合成は定義していない．代わりに ϕ を「逆向き」にすることで，その問題を回避している．整理された高次圏論の枠組みでは上記の書き方のままで結果が成立するものと思われる．

2.4 商空間への積構造の遺伝

正規部分群の重要な性質としてその商に群構造が遺伝することが挙げられる．crossed module の場合には「ホモトピー商」である Borel 構成に群構造が遺伝する．では $N_k(\ell)$-写像の場合はどうであろうか？詳しくはまだよくわかっていないが，少なくとも以下が成立する．

定理 2.11. 位相群の準同型 $f\colon H \to G$ が $N_k(k)$-写像でかつ Borel 構成 $X = EH \times_H G$ に対し LS カテゴリーの評価 $\mathrm{cat}\, X \leq k$ が成り立つとき，X は H-空間の構造を持つ（つまり単位元を持つ連続な二項演算を持つ）．

注意 2.12. LS カテゴリーはその空間が可縮な開集合何枚で覆えるかを表す数である．この文脈でこのような不変量が現れるのは不思議に思うかもしれないが，射影空間と LS カテゴリーの間に深い関係があることが岩瀬の Ganea 予想の反例に関する仕事 [Iwa98] により知られている．

3 計算例

3.1 $\mathrm{SU}(m) \to \mathrm{SU}(n)$ の正規性

$N_k(\ell)$-写像であることが古典的なホモトピー論の問題に帰着されると述べたが，実際に計算結果が得られたので紹介する．実は $\mathrm{SU}(m) \to \mathrm{SU}(n)$ は $2 \leq m < n$ である限り $N_1(1)$-写像ですらない．しかし p**-局所化**（p は奇素数）をするとある程度正規性を持つことがわかる．ここで空間 X の p-局所化 $X_{(p)}$ とは，大雑把に言ってホモトピー群が

$$\pi_i(X_{(p)}) = \pi_i(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

となるような関手的に構成される空間のことである．つまり，p と互いに素なねじれに関する障害は全て無くなった空間である（なお，全てのねじれに関する障害を無くしたホモトピー論に相当するのが有理ホモトピー論である）．位相群の p-局所化は位相群として関手的に実現できるので，その正規性を論ずることができる．

注意 3.1. 可換な連結コンパクト Lie 群はトーラスとなることが知られているが，より強く，ホモトピー可換な連結コンパクト Lie 群もトーラスに限ることが知られている [AJT60]．しかし奇素数 p に関して局所化すると，例えば $\mathrm{SU}(n)_{(p)}$ は $p > 2n$ のときホモトピー可換となることが知られている．この例のように，Lie 群は大きな素数 p で局所化すると高い可換性を持つ傾向がある．これより，可換性だけでなく正規性に関しても同様のことが言えるだろうと予想できる．

定理 3.2. 包含写像の p-局所化 $f\colon \mathrm{SU}(m)_{(p)} \to \mathrm{SU}(n)_{(p)}$（$2 \leq m < n$）について次が成り立つ．

(1) $p \geq kn + \ell m$ ならば f は $N_k(\ell)$-写像である．
(2) $\max\{kn - m, (k-1)n + 2\} < p \leq kn + (\ell - 1)m$ ならば f は $N_k(\ell)$-写像でない．

一つ目の主張は $\mathrm{SU}(n)_{(p)}$ のホモトピー群の計算から，二つ目の主張はファイバーワイズ A_k-空間のファイバーワイズ射影空間の mod p コホモロジーの計算から証明される．この結果はかなりの範囲をカバーしているが，$p \leq \max\{kn - m, (k-1)n + 2\}$ の場合と $kn + (\ell - 1)m < p < kn + \ell m$ の場合はまだよくわかっていない．

例 3.3. $\mathrm{SU}(2)_{(3)} \to \mathrm{SU}(3)_{(3)}$ は $N_1(1)$-写像ではない．

例 3.4. $\mathrm{SU}(2)_{(5)} \to \mathrm{SU}(3)_{(5)}$ は $N_1(1)$-写像であるが，$N_1(2)$-写像ではない．$N_2(1)$-写像かどうかはこの定理からはわからない．

詳細は略すが，$\mathrm{SO}(2m+1) \to \mathrm{SO}(2n+1)$（$\mathrm{Sp}(m) \to \mathrm{Sp}(n)$ としても同様）についても同じような結果が得られている．他の準同型についてはまだ考えられておらず，現時点では計算すべき対象はまだまだ大量に残っている状態である．

参考文献

[AJT60] S. Araki, I. M. James, and Emery Thomas. Homotopy-abelian Lie groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:324–326, 1960.

[FS10] Emmanuel D. Farjoun and Yoav Segev. Crossed modules as homotopy normal maps. *Topology Appl.*, 157(2):359–368, 2010.

[Iwa98] Norio Iwase. Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category. *Bull. London Math. Soc.*, 30(6):623–634, 1998.

[McC64] G. S. McCarty, Jr. Products between homotopy groups and the J-morphism. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 15:362–370, 1964.

[Mil56a] John Milnor. Construction of universal bundles. I. *Ann. of Math. (2)*, 63:272–284, 1956.

[Mil56b] John Milnor. Construction of universal bundles. II. *Ann. of Math. (2)*, 63:430–436, 1956.

[Sta63] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; ibid.*, 108:293–312, 1963.

[Sug61] Masahiro Sugawara. On the homotopy-commutativity of groups and loop spaces. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math.*, 33:257–269, 1960/61.

[Tsu16] Mitsunobu Tsutaya. Mapping spaces from projective spaces. *Homology Homotopy Appl.*, 18(1):173–203, 2016.

[Tsu23] Mitsunobu Tsutaya. Higher homotopy normalities in topological groups. *J. Topol.*, 16(1):234–263, 2023.