２１世紀のルネ・トム 〜 生誕１００周年に寄せて

大本　亨（早稲田大学理工学術院）*

2023 年 8 月 12 日

本講演では，数え上げ幾何学の基礎づけに掛かる私の研究（トム多項式理論 [16, 17, 18, 19, 21]）を軸に，その源泉たるトムの数学の現代に与える意味と価値を再考する．

1　トムとコボルディズム理論

1.1 ルネ・トム（René Thom） 私の学生時代の指導教員は福田拓生先生でその師がルネ・トムであった．福田先生は Manifold Tokyo (1970) でのトム来日の翌年に IHES に留学し，当時懸案だった「トムの第 1 アイソトピー補題」を証明して位相的構造安定性の理論に貢献した．その頃のトムや IHES の様子は福田先生の小文 [6] の中で垣間見ることができる．

R. Thom (1923-2002)

よく知られるようにトムは彼の創始したコボルディズム理論で 1958 年にフィールズ賞を受賞した．その理論のインパクトは，アティヤとサリバンが追悼記事 [2, 23] で述懐している．またトムは，ほぼ同時期に，写像の特異点理論，力学系，特性類理論，分類空間，半代数的集合のトポロジーなどの諸分野を開拓したパイオニアであった．現在ではこれらの分野群は独自に分化し深化しているが，少なくとも当時のトムの考えでは，彼の横断性定理に依拠した《構造安定性の理論》の文脈の中で一続きの一貫した内容として捉えていたに違いない．確かにこれらのアイデアの多くは，彼の学位論文 [24] の中にすでにその原型が現れている．こうした 20 世紀の抽象数学を駆使する一方で，トムはフランス古典数学にも親しんでいた．実際，彼の初等カタストロフィーで重要な役割を果たす多項式標準形（非退化特異点，カスプ，ツバメの尾...）とその判別式は極めて古典的であるし，縮閉線・伸開線などの古典平面微分幾何は彼のコースティクスの理論の源泉である．モンジュやポンスレーによる曲面の輪郭線の射影幾何は今で言うところのポーラー指数や特性類の話であって，後述するトム多項式の話題に直結する．

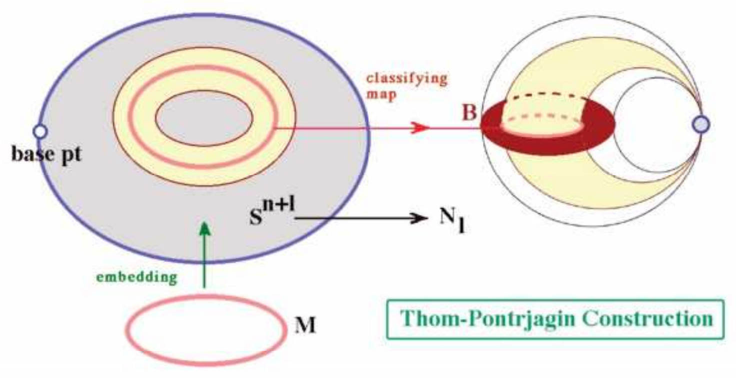
* toruohmoto@waseda.jp

トムはIHESで同僚だったグロタンディークとは不仲であったが，広中平祐先生とは相性がたいへんよかったとテシエやレーから聞いた（[6] 参照）．人間的な部分のみならず数学的な指向性も近かったのかも知れない—確かに特異点解消とコボルディズムの考え方には一脈通じるものがある．そこでまず，コボルディズム理論を振り返ってみよう．

1.2 トム・ポントリャーギン構成　C^∞ 多様体の特異サイクルがいつ部分多様体で実現できるか？という素朴な問いが出発点となって，コボルディズムの概念まで一気に駆け上がる [23]．有向閉 n-多様体 M_1, M_2 が**コボルダント**とは，ある境界付きコンパクト有向 $(n+1)$-多様体 W が存在して $\partial W = (\partial M_1) \sqcup (-\partial M_2)$ を満たすときにいう．これは有向閉多様体に関する同値関係をなして，その同値類全体 $MSO^* \,(= MSO^*(pt))$ は非交和と直積から可換環の構造が入る．

ホイットニーの埋め込み定理により，有向閉 n-多様体 M を十分高い次元の球面 $S^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \cup \{\infty\}$ に埋め込む．この法束 ν の普遍ベクトル束 $ESO(k) \to BSO(k)$ への分類写像 $\rho : (\nu, M) \to (ESO(k), BSO(k))$ を 1 点コンパクト化すれば，M のアンビエント空間の球面からトム空間への基点付き写像 $\bar\rho : S^{n+k} \to MSO(k)$ を得る（基点付近以外は C^∞ 級としてよい）．そこでトムは，普遍ベクトル束の零切断 $BSO(k)$ に対する横断性定理を用いて次の安定ホモトピー群との同型を示した [25]：

$$MSO^{-n} \xrightarrow{\simeq} \pi_n(MSO) := \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(MSO(k)). \qquad (\star)$$



以上は相対版にすぐに拡張される．すなわち，有向閉 n-多様体からの C^∞ 写像 $f_i : M_i \to Y$（$i = 1, 2$）がコボルダントとは，有向コンパクト $(n+1)$-多様体 W と C^∞ 写像 $h : (W, \partial W) \to (Y \times I, Y \times \partial I)$ が存在して $h|_{\partial W} = f_1 \sqcup f_2$ となるときにいう（$I = [0,1]$）．これにより，一般コホモロジー理論である $MSO^\kappa(Y)$ が導入される（$\kappa := \dim Y - n$）．すなわち，$(\star)$ の相対版は無限ループ空間への写像のホモトピー集合との同型である：

$$MSO^*(Y) \xrightarrow{\simeq} [Y, \Omega^\infty MSO]. \qquad (\star\star)$$

$\{MSO(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ をトム・スペクトラムと呼ぶ．$U(n) \subset SO(2n)$ を取れば複素コボルディズム理論 $MU^*(\text{-})$ が定義される．

1.3 代数的コボルディズム　代数幾何学の側で（ボレル・ムーア）ホモロジー論に相当するものとして，代数的スキーム Y における i 次元代数的サイクルの有理同値類全体であるチャウ群 $\mathrm{CH}_i(Y)$ がある．これを Y が非特異な場合に制限して，交叉により乗法を入れることでチャウ環（交叉環）$\mathrm{CH}^i(Y) := \mathrm{CH}_{l-i}(Y)$ $(l = \dim Y)$ が定まる*1．高次チャウ群や代数的 K 理論などの進展を経て 21 世紀に入る前後にようやく，複素コボルディズム理論 MU^* の代数幾何版として，モレル・ヴォエヴォドスキーによる代数的コボルディズム（モティビック・コホモロジー）理論 $\mathrm{MGL}^{*,*}$ が現れ，続いてレヴィン・モレル [11] およびレヴィン・パンドハリパンデ [12] による代数的コボルディズム理論 Ω^* が登場した．前者 $\mathrm{MGL}^{p,q}(Y)$ はトポロジーにおける同型 $(\star)$ の右辺の代数幾何ヴァージョンであって，モティヴィック・トム・スペクトラムを用いた $\mathbb{A}^1$-ホモトピー論的構成物である．後者の $\Omega^\kappa(Y)$ は $(\star)$ 左辺の代数的アナロジーであって，任意の固有射 $f : X \to Y$（X は非特異で $\kappa = \dim Y - \dim X$）の同型類全体で生成される自由アーベル群を形式群 (formal group law) に対応する関係（二重点退化関係式という）で割った商群として定義される*2 [12]．これら出自の異なる理論の間に $(\star\star)$ に相当する同型が知られている（レヴィンほか）：

$$\Omega^\kappa(Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{MGL}^{2\kappa,\kappa}(Y). \qquad (\star\star')$$

微分トポロジー（Thom）	代数幾何
写像の特異点論	特異点論＆ Hilbert スキーム（Grothendieck）
（特異）部分多様体の横断性	交叉理論（Kleiman, Fulton-MacPherson ’80）
同変コホモロジー	代数的ボレル構成：同変交叉理論（Totaro-Edidin-Graham ’90）
コボルディズム理論	代数的コボルディズム（Levine-Morel/Pandharipande ’00, ’09）
トム空間	モティヴィック・トムスペクトラム（Morel-Voevodsky ’00）
ホモトピー論	$\mathbb{A}^1$-ホモトピー論（Morel-Voevodsky ’00）
コホモロジー作用素	代数的コホモロジー作用素（Vishik ’19）

2　特異点の数え上げ幾何学〜トム多項式理論

2.1 ヒルベルト第 15 問題の最終的解決？　20 世紀初頭にヒルベルトは 23 の未解決問題を提出した．その 15 番目を雑駁に述べれば

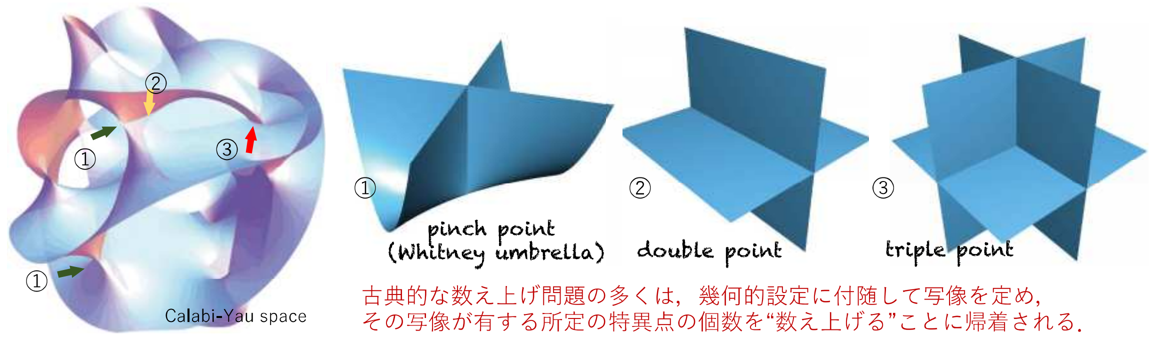
「シューベルトとその時代における数え上げ幾何学の厳密な基礎付けを与えよ」

という問いである．いわゆる《シューベルト・カルキュラス》はグラスマン多様体や旗多様体などのモジュライ空間のコホモロジーの環構造に関する理論全般の総称であって，現代においても幾何学的表現論の一翼として発展している分野である．一方でシューベルトの大著 [22] の大半は，彼が発見したこの記号計算を道具に様々な古典的数え上げ問題を大

*1 トポロジーでのように加群のクロネッカー双対として定義するのではない．

*2 $f_i : X_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ が同型とは，$f_2 \circ \sigma = f_1$ となる同型射 $\sigma : X_1 \to X_2$ が存在するときにいう．Ω^* 理論は特異点解消の存在が欠かせないため，（広中の特異点解消定理から）標数 0 を仮定する．

胆に解くことに費やされている．ただし，現在の観点からすれば彼の議論は厳密性に難があった．この厳密化の一般論は，代数多様体の交叉の理論あるいは方程式の変数の消去理論と位置づけられて（ファン・デル・ヴェルデンほか），20 世紀中葉のヴェイユやグロタンディークらによる代数幾何学の確立を経て，セールの交叉公式および 80 年代のフルトンとマクファーソンによる**代数幾何的交叉理論（Intersection Theory）** [7] をもってひとまずは完成したと言って良いだろう．しかし，以下で述べる**《多重特異点の数え上げ問題》**は，シューベルトらの重要な核心的課題であったにもかかわらず，現在に至るまで包括的な理論的考察がなされていない．実際そこには，フルトン [7] で触れられていない本質的に深い題材—点配置のモジュライ空間—が隠されている．この節は代数幾何の文脈で議論を進める．単に多様体と書くときは非特異な代数多様体を意味する．簡単のため，基礎体 k は複素数体 $\mathbb{C}$ とするが，標数 0 の代数的閉体で構わない．



2.2 写像の多重特異点　多様体間の射 $f: X \to Y$ の**特異点**とは，微分 df_p の階数が最大でない点 $p \in X$，およびその点における写像芽 $f: (X,p) \to (Y,q)$ を指す．特異点は座標変換芽による分類がなされる．本稿ではいわゆる $\mathcal{K}$-同値（f が定めるイデアルが同型）を扱い，特異点型（同値類）を η などと表す．多重写像芽とは，その像が一致ような X の複数の点における写像芽 $f: (X,S) \to (Y,q)$ のことである（$S = \{p_1, \cdots, p_r\} \subset X$）．順序付けられた組 $\underline{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_r)$ を**多重特異点型**と呼ぶ．写像 $f: X \to Y$ の**定義域・値域の $\underline{\eta}$-型多重特異点跡** $M_{\underline{\eta}}(f) \subset X$ および $N_{\underline{\eta}}(f) \subset Y$ とは，次を満たす点 $p_1 \in X$ および $q \in Y$ がなす集合の X, Y におけるザリスキー閉包を意味する（正しい定義は後述）：$p_2, \cdots, p_r \in X$ が存在して，$p_i \neq p_j$ $(1 \leq i \neq j \leq r)$ で $f(p_1) = \cdots = f(p_r) =: q$ を満たし，$1 \leq i \leq r$ について写像芽 $f: (X, p_i) \to (Y, q)$ が η_i 特異点型である．

　その典型例は多重点型，つまりはめ込み芽の集まり $A_0^r = (A_0, \cdots, A_0)$ である．値域多様体 Y の二重点跡 $N_{A_0^2}(f)$ や三重点跡 $N_{A_0^2}(f)$ は局所的には上図のようなものを想起されたらよい．

　特異点跡 $M_{\underline{\eta}}(f)$，$N_{\underline{\eta}}(f)$ は各々 X，Y の（特異）部分多様体となり，その特異点跡の次数あるいは個数を ‘数え上げること’ が我々の課題である．しかし，多重特異点の数え上げは X 上の複数個の特異点の点配置が関わるために本質的に難しく，とりわけ後述する**トム・カザリアン予想（原理）**[8, 9] は数十年来の未解決問題である．これは数多ある数

え上げ公式の“博物学”を一貫した観点から体系化するものである．例えば，弦理論におけるインスタントンの数え上げに関する「ゲッチェ（Göttsche）予想」（現在は定理）は，最も単純な r 重 A_1 特異点型に関する**普遍多項式（トム多項式）**$n(A_1^r)$ からすぐに導かれる．あるいは多くの古典的な問題，例えば非特異超曲面 $V \subset \mathbb{P}^r$ の射影双対に現れる r 重点の数え上げも，同じ普遍多項式 $n(A_1^r)$ を用いて（代入する f の情報を変えるだけで）表される．A_1^r 特異点型を任意の多重特異点型 $\underline{\eta}$ に置き換えてこれを定式化する．

2.3 主結果と例　以降，X, Y をそれぞれ m, l 次元の多様体とする．写像 $f : X \to Y$ の**余次元**とは $\kappa := l - m \in \mathbb{Z}$ を指す．写像芽 $f : (X, p) \to (Y, q)$ の $\mathcal{K}$-特異点型とは，剰余環 $Q(f) := \mathcal{O}_{X,p}/f^*\mathfrak{m}_{Y,q}\mathcal{O}_{X,p}$ の同型類のことである．写像芽が有限確定とは有限次のテイラー展開で特異点型が定まるときにいい，その次数の最小値を k_η と記し，特異点型 η のイデアルを $I_\eta := f^*\mathfrak{m}_{Y,q}\mathcal{O}_{X,p} + \mathfrak{m}_{X,p}^{k_\eta+1}$（の同型類）で定める．多重特異点型 $\underline{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_r)$ において，各 η_i は有限確定と常に仮定する．多重特異点型 $\underline{\eta}$ の重複度を

$$n = n(\underline{\eta}) := \sum \dim \mathcal{O}_{X,p_i}/I_{\eta_i} \ < \infty$$

とし，$\underline{\eta}$ の $\mathcal{K}_e$-余次元を $\ell = \ell(\underline{\eta})$ と記す（$=$ $\underline{\eta}$-特異点型の安定写像芽の値域の最小次元）．

写像 $f : X \to Y$ に付随する商チャーン類 $c_i(f)$ を次で定める：

$$c(f) := 1 + c_1(f) + c_2(f) + \cdots = \frac{1 + f^*c_1(TY) + f^*c_2(TY) + \cdots}{1 + c_1(TX) + c_2(TX) + \cdots}$$

さらに**ランドウェーバー・ノヴィコフ類（LN 類）**とは, $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ を添字として

$$s_I = s_I(f) := f_*(c^I(f)) = f_*(c_1(f)^{i_1}c_2(f)^{i_2}\cdots c_k(f)^{i_k}) \in \mathrm{CH}^{|I|}(Y)$$

あるいはその引き戻し $f^*s_I \in \mathrm{CH}^{|I|-\kappa}(X)$ として定義される（$|I| = \sum_{s=1}^k si_s$）．主結果はトム・カザリアン予想 [8, 9] の肯定的解決であって，ここではその一部を紹介する．

定理 1（Target multi-singularity Thom polynomials の存在 [19, 18]）

任意の多重特異点型 $\underline{\eta}$ に対して，次の $(\star)$ を満たす普遍同次チャーン多項式

$$R_{\underline{\eta}} = \sum a_I(\underline{\eta})c^I \in \mathbb{Q}[c_1, c_2.\cdots]$$

（$|I| = \ell - \kappa$）が唯一存在する．$(\star)$ 任意の固有射 $f : X \to Y$（$\kappa = \dim Y - \dim X$）に対して有理係数の $\underline{\eta}$ 型多重特異値跡類 $n_{\underline{\eta}}(f) \in \mathrm{CH}^\ell(Y)_\mathbb{Q}$ は次の表示を持つ：

$$n_{\underline{\eta}}(f) = \sum f_*(R_{J_1})\cdots f_*(R_{J_s}). \tag{1}$$

ここで, 右辺の和は $\{1, \cdots, r\}$ の順序付きの空でない部分集合への分割 $\{1, \cdots, r\} = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_s$ $(s \geq 1)$ すべてに関するもので，各 $J = \{j_1, \cdots, j_k\}$ について，R_J は $R_{(\eta_{j_1}, \cdots, \eta_{j_k})}$ に $c_i = c_i(f)$ を代入したものである．

定理 1 の帰結として，定義域 X の $\underline{\eta}$ 型多重特異点跡類 $m_{\underline{\eta}}(f) \in \mathrm{CH}^{\ell-\kappa}(X)_{\mathbb{Q}}$ について，

$$m_{\underline{\eta}}(f) = \sum R_{J_1} \cdot f^* f_*(R_{J_2}) \cdots f^* f_*(R_{J_s}) \tag{2}$$

（$1 \in J_1$）の形の Thom 多項式表示がある良い条件下で示される（詳細は省略）．(1) の右辺は LN 類 s_I の多項式であり，(2) の右辺は LN 類 $f^* s_I$ および $c_i(f)$ の多項式であって，その形は特異点型 $\underline{\eta}$ のみから定まる．この普遍多項式を（値域および定義域の）**多重特異点型 $\underline{\eta}$ に対するトム多項式**と呼ぶ．

安定写像 $f : X \to Y$（任意の有限部分集合 S における写像芽 $f : (X, S) \to (Y, f(S))$ が局所安定）では，多重特異点跡類 $m_{\underline{\eta}}(f)$, $n_{\underline{\eta}}(f)$ はそれぞれ多重特異点跡 $M_{\underline{\eta}}(f)$, $N_{\underline{\eta}}(f)$ の（ある重複度を除いた）有理同値類に他ならない．

例 2.1 **（多重点跡公式）** 余次元 $\kappa = \dim Y - \dim X > 0$ の写像 $f : X \to Y$ について，二重点および三重点公式は 70-80 年代に知られている：

$$\begin{aligned} m_{A_0^2}(f) &= f^* f_*(1) - c_\kappa(f), \\ m_{A_0^3}(f) &= f^* f_*(m_{A_0^2}(f)) - 2c_\kappa f^* f_*(1) + 2\left(c_\kappa^2 + \sum_{i=0}^{\kappa-1} 2^i c_{\kappa-i-1} c_{\kappa+i+1}\right). \end{aligned}$$

しかし，４重点公式以降は，いわゆる曲線形写像（curvilinear map）と呼ばれる限定された写像以外では実に今まで考察されて来なかった[*3]．その理由は次の 2.4 節で述べる．$\underline{\eta} = A_0^r$ の場合で定理 1 (1) と (2) は，一般の多重点公式の存在を保証する．さらにトーラス同変の局所化手法を用いたある種の未定係数法による計算方法 [20, 8] により

$$R_{A_0} = 1, \quad R_{A_0^2} = -c_\kappa, \quad R_{A_0^3} = 2\left(c_\kappa^2 + \sum_{i=0}^{\kappa-1} 2^i c_{\kappa-i-1} c_{\kappa+i+1}\right)$$

のように求めることができる．$\{1, 2\}$ および $\{1, 2, 3\}$ の分割の仕方から，確かに，定理 1 より二重点・三重点公式が復元される：

$$\begin{aligned} m_{A_0^2} &= R_{A_0} \cdot f^* f_* R_{A_0} + R_{A_0^2} = f^* f_*(1) - c_\kappa. \\ m_{A_0^3} &= R_{A_0} \cdot (f^* f_* R_{A_0})^2 + R_{A_0} \cdot f^* f_* R_{A_0^2} + 2R_{A_0^2} \cdot f^* f_* R_{A_0} + R_{A_0^3} \\ &= f^* f_*(f^* f_*(1) + R_{A_0^2}) + 2R_{A_0^2} \cdot f^* f_*(1) + R_{A_0^3} \\ &= f^* f_*(m_{A_0^2}) - 2c_\kappa f^* f_*(1) + R_{A_0^3}. \end{aligned}$$

リマーニら [14] は，カザリアン予想を仮定して，同様な手法で $R_{A_0^4}$ を計算していた（詳細は略）．つまり，４重点以降の多重点公式も具体的に計算可能であることが定理 1 で確定したことになる．これにより曲線形に限らない一般の数え上げ幾何学が展開できる．

[*3] 曲線形写像とは，$\kappa \geq 0$ であって A_μ 特異点（局所環 $Q(f)$ が $k[x]/\langle x^{\mu+1}\rangle$ に同型）のみを許容する写像を指す．この場合は 80 年代にクライマンらによってよく研究されていて，４重点以上の数え上げ公式を含む再帰的関係式等が求められている [10]．曲線形でない場合における多重特異点の数え上げ公式の一般論は今に至るまで未開拓であって，例えば前述のゲッチェ予想（$\kappa = -1$）はこの場合に属する．

2.4 ヒルベルト・スキーム上の代数的交叉理論 いままでの写像の特異点論研究において，任意の固有射 $f : X \to Y$ に対する X 上の $\underline{\eta}$ 型多重特異点跡および Y 上の $\underline{\eta}$ 型多重特異点跡それ自体が，代数的スキーム構造を伴う形で厳密には定義されていなかった．そこでこれらの厳密な定義を，点配置空間のコンパクト化であって，かつ関手的によい振る舞いをするヒルベルト・スキームを介して与える．

X 上の n 点の**ヒルベルト・スキーム (Hilbert scheme)** $X^{[n]}$ とは，X 上の colength n の 0 次元部分スキーム，すなわち，有限の閉点 $\{p_i\}$ に台を持ち $\sum \dim \mathcal{O}_{X,p_i}/I_{p_i} = n$ を満たすイデアル層 $\mathcal{I}\,(\subset \mathcal{O}_X)$ 全体をパラメトライズするモジュライ空間である．これはあるグラスマン多様体の部分代数多様体として実現される．ヒルベルト・スキームは次のような普遍性を有する：直積の部分スキーム $Z \subset U \times X$ と平坦射 $\sigma : Z \to U$ でそのファイバーが colength n の 0 次元部分スキームであるものがあれば，分類射 $\rho : U \to X^{[n]}$ が存在して，族 σ は普遍族 $\mathcal{Z}_X^n = \bigcup_{z_I} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X/I) \to X^{[n]}$ の ρ による引き戻しと同型になる．順序付きヒルベルト・スキーム $X^{[[n]]}$ とは，対称積へのヒルベルト・チャウ射 $X^{[n]} \to S^nX = X^n/\mathfrak{S}_n$ とのファイバー積として与えられる：

$$\begin{array}{ccc} X^{[[n]]} & \longrightarrow & X^{[n]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \longrightarrow & S^nX \end{array}$$

第 1 成分への射影を $\mathrm{pr}_1 : X^{[[n]]} \to X^n \to X$ と書き，$\bar{f} = f \circ \mathrm{pr}_1 : X^{[[n]]} \to Y$ とおく．

例 2.1 で紹介した二重点・三重点公式は，$f : X \to Y$ の二重・三重点跡の特異点解消を $X^{[[2]]}$ および $X^{[[3]]}$（これらは常に非特異）を用いて構成することで示される．しかし，$\dim X \geq 3$ で $n \geq 4$ のとき，ヒルベルト・スキーム $X^{[[n]]}$ は特異点を有するために扱うのがとても厄介である．これが今までの数え上げ幾何学の現代史の中で**一般の 4 重点公式**（さらに n 重点公式 $(n \geq 4)$）が全く手つかずであった最大の原因と言ってよい[*4]．

多重特異点型 $\underline{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_r)$ に対して，**幾何的部分集合 (geometric subset)**

$$\Xi(X; \underline{\eta}) \subset X^{[n]}$$

を，構造層 $\mathcal{O}_X$ のイデアル層 $z_I \in X^{[n]}$ で，r 点 $S = \{p_1, \cdots, p_r\} \subset X$ を台に持ち，各点 p_i での stalk が η_i 特異点型のイデアル I_{η_i} と同型であるもの全体のザリスキー閉包と定義する．順序付きの場合でも定義できて，記号の流用で以降は $\Xi(X; \underline{\eta}) \subset X^{[[n]]}$ とする．

そこでマザーの多重ジェット拡張写像の「コンパクト化」として，固有射 $f : X \to Y$ に対して**ヒルベルト拡張写像 (Hilbert extension map)**

$$f^{[[n]]} : X^{[[n]]} \to (X \times Y)^{[[n]]}$$

[*4] 曲線形なイデアルのみからなる $X^{[[n]]}$ の部分集合（curviliner ヒルベルト・スキームと呼ばれる）は非特異であって，すべての議論が非特異な代数多様体の範疇で収まる．それ故に 80 年代に曲線形数え上げ幾何学（curviliner enumerative geometry）が成立し得た．

を導入する．これはイデアル層 $z_I \in X^{[n]}$ に対して，イデアル層 $z_{(I,I_\Gamma)} \in (X\times Y)^{[n]}$（$I_\Gamma$ は f のグラフ $\Gamma \subset X\times Y$ の定義イデアル）を対応させて定義する．部分スキーム $X^{[[n]]}\times Y \subset (X\times Y)^{[[n]]}$ の $f^{[[n]]}$ によるスキーム論的逆像が**相対ヒルベルト・スキーム** $X^{[[n]]}(f)$，即ち f のファイバーに台を持つような 0 次元部分スキームをパラメトライズするモジュライ空間である．

$$\begin{tikzcd} X & X^{[[n]]}(f) \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r] & X^{[[n]]}\times Y \arrow[r] & Y \\ \arrow[from=1-2, to=1-4, bend right, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

この $X^{[[n]]}(f)$ は逆像 $(f^{[[n]]})^{-1}(\Xi(X;\underline{\eta})\times Y)$ を含み，これを pr_1 と $\bar{f}$ により X, Y に写像することにより，**多重特異点跡** $M_{\underline{\eta}}(f)\subset X$ および $N_{\underline{\eta}}(f)\subset Y$ を定義する．

命題 [19]：ヒルベルト拡張写像 $f^{[[n]]}: X^{[[n]]}\to (X\times Y)^{[[n]]}$ は正則埋め込み（regular embedding）であり[*5]，その法束は $X^{[[n]]}$ 上のトートロジカル束 $(f^*TY)^{[[n]]}$ である．

フルトン・マクファーソンの交叉理論 [7] の要点は，代数的スキームの間の正則埋め込み $\varphi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ と $\mathcal{Y}$ の閉部分スキーム V との交差積 $\mathcal{X}\cdot V\in \mathrm{CH}_*(\mathcal{X})$ を V の法錐 C_V への変形（moving to the normal cone）を通して定義し，これを礎に φ のギジン写像 $\varphi^!:\mathrm{CH}_*(\mathcal{Y})\to\mathrm{CH}_*(\mathcal{X})$ の理論を確立することにあった．上の命題からギジン写像

$$(f^{[[n]]})^!:\mathrm{CH}_*((X\times Y)^{[[n]]})\to \mathrm{CH}_*(X^{[[n]]})$$

が定まる．そこでギジン写像 $(f^{[[n]]})^!$ と pr_1 と $\bar{f}$ の押出し（pushforward）により，**多重特異点跡類**を定義する（$\ell:=\ell(\underline{\eta})$ は $\underline{\eta}$ の $\mathcal{K}_e$ 余次元，$m=\dim X$，$l=\dim Y=m+\kappa$）：

$$m_{\underline{\eta}}(f):=\mathrm{pr}_{1*}((f^{[[n]]})^![\Xi(X;\underline{\eta})\times Y])\in \mathrm{CH}_{l-\ell}(X)=\mathrm{CH}^{\ell-\kappa}(X),$$

$$n_{\underline{\eta}}(f):=\bar{f}_*((f^{[[n]]})^![\Xi(X;\underline{\eta})\times Y])\in \mathrm{CH}_{l-\ell}(Y)=\mathrm{CH}^{\ell}(Y).$$

これらは各々 $M_{\underline{\eta}}(f)$，$N_{\underline{\eta}}(f)$ に台をもつ[*6]．

2.5 代数的コボルディズムとコホモロジー作用素　複素コボルディズム MU^* は C^∞ カテゴリーで記述されていて，複素解析特異点の分類理論とは全く相性がよくない．そこでトム・カザリアン原理（定理 1 ）を導くためには，すべてを代数幾何に舞台を移した代数的コボルディズム理論の登場が必要であった．

定理 1 の証明にレビンらの Ω^* 理論を用いる．以下で証明の流れをざっくりと紹介する．まず第 1 ステップとして，余次元 κ の任意の固有射 $f:X\to Y$ に対して多重特異値

---

*5 ここで，X, Y が非特異でも $X^{[[n]]}$ と $(X\times Y)^{[[n]]}$ は一般に特異多様体であることに注意しよう．

*6 $M_{\underline{\eta}}(f), m_{\underline{\eta}}(f)$ および $N_{\underline{\eta}}(f), n_{\underline{\eta}}(f)$ は任意の固有射 f に対して定義できていることに注意する．一方，固有射 f が‘良い写像’（局所安定写像）のとき，$M_{\underline{\eta}}(f), N_{\underline{\eta}}(f)$ は §2.2 で述べた定義と一致し，正しい余次元を持つ—それぞれの基本類がちょうど（しかるべき定数倍を除いて）$m_{\underline{\eta}}(f), n_{\underline{\eta}}(f)$ を表す．

跡類 $n_{\underline{\eta}}(f)$ を対応させる仕方は，f の代数的コボルディズム類 $[f: X \to Y] \in \Omega^\kappa(Y)$ のみに依ることを示す．第 2 ステップとして，まず残余多項式 $\Delta n_{\underline{\eta}}$ を帰納的に次で与える：

- 特異点型 η（$r=1$）に対して

$$\Delta n_\eta(f) := f_*(m_\eta(f)) = n_\eta(f) \quad \in \mathrm{CH}^{\ell(\eta)}(Y).$$

- 多重特異点型 $\underline{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_r)$ $(r \geq 2)$ に対して

$$\Delta n_{\underline{\eta}}(f) := n_{\underline{\eta}}(f) - \sum \Delta n_{J_1}(f) \cdots \Delta n_{J_s}(f) \quad \in \mathrm{CH}^{\ell(\underline{\eta})}(Y)$$

（和は分割 $\{1, \cdots, r\} = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_s$ $(s \geq 2)$ すべてに渡る）．
これにより well-defined な写像

$$\Delta n_{\underline{\eta}} : \Omega^\kappa(Y) \to \mathrm{CH}^\ell(Y)$$

を得る（ここで $\ell = \ell(\underline{\eta})$ とおいた）．そこでこれがアーベル群の間の準同型写像であって引き戻しに対して自然に振る舞うこと（射 $\varphi: Y' \to Y$ に対して，φ^* と $\Delta n_{\underline{\eta}}$ が可換），即ち $\Delta n_{\underline{\eta}}$ が**加法的な代数的コホモロジー作用素**であることを示す．加法的であることは非交和のヒルベルト・スキームの性質

$$(X_1 \sqcup X_2)^{[n]} = \bigsqcup_{k+l=n} X_1^{[k]} \times X_2^{[l]}$$

に基づき，引き戻しに関する可換性はヒルベルト・スキームの普遍性に由来する．以上の議論は $\Omega^\ell(Y)$ に ‘持ち上げる’ ことができる．つまり，幾何的部分集合 $\Xi(\underline{\eta})$ の特異点解消 $\mu: \tilde{\Xi}(\underline{\eta}) \to \Xi(\underline{\eta})$ をひとつ与えることで，すべてを CH^* 値から Ω^* 値に変えて $\Delta n_{\underline{\eta},\mu} : \Omega^\kappa(Y) \to \Omega^\ell(Y)$ を構成できて，これが代数的コホモロジー作用素になる．

　最後のステップとして，以下のヴィシク [28] による定理を用いる．これは複素コボルディズム理論 MU^* においてよく知られた事実の代数幾何版に相当する．

定理（ヴィシク [28]）：任意の加法的コホモロジー作用素 $\varphi: \Omega^\kappa \to \Omega^\ell$ に対して，その有理係数化 $\varphi: \Omega^\kappa \to \Omega^\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ はランドウェーバー・ノビコフ作用素 $s_I: \Omega^\kappa(Y) \to \Omega^\ell(Y)$ の $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 係数の一次結合で表される（$\mathbb{L} = \Omega^*(k)$ はラザード環）．

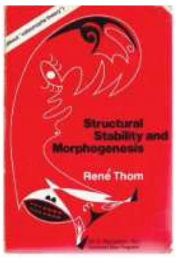
この定理より，あるチャーン多項式 $R_{\underline{\eta}} = \sum_I a_I c^I$（$a_I \in \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$）が存在して，任意の固有射 $f: X \to Y$ に対して $\Delta n_{\underline{\eta},\mu}(f) = f_*(R_{\underline{\eta}})$ を満たす．値を CH^* 値に直して $\Delta n_{\underline{\eta}}$ から $n_{\underline{\eta}}$ を逆に表わすことで，定理 1 の証明を終える*7．

---

*7　1）以上の証明から値は [11] の意味の有向コホモロジー論であれば何であってよく，例えば代数的 K-理論トム多項式も考えられる：$n_{\underline{\eta}}^K(f) \in K_0(Y)[\beta, \beta^{-1}]$．その場合，基本類は構造層である．基礎体が $\mathbb{C}$ のとき，サイクル写像 $\Omega^* \to MU^*$ を通して複素コボルディズムや楕円コホモロジー値でも良い．
2）代数的コボルディズムに依拠する上記の解法は，さらにヴォエヴォドスキー・モレルによるモティヴィックコホモロジー $\mathrm{MGL}^{*,*}$ との関係性を強く示唆する．
3）多重特異点跡類の定義ではヒルベルト・スキーム $X^{[[n]]}$ 上のトートロジカル束に掛かる特性類の積分が本質的であって，代数幾何における数多の話題に関連する．

3 トムとその他の話題

3.1 多様体空間と conical stratification コボルディズムに関して，トムは明らかに「すべての閉多様体がなす位相空間」を想起していた [26, §4]．基点を保つ C^∞ 写像の空間 $\mathcal{M}_k := C^\infty(S^{n+k}, MSO(k))_{base}$ および $BSO(k)$ に横断的でない $h \in \mathcal{M}_k$ からなる判別超曲面 Γ_k を考えて，その補空間 $\mathcal{M}_k - \Gamma_k$ の帰納的極限（$k \to \infty$）がそれである．$\lim(\mathcal{M}_k - \Gamma_k)$ の弧状連結成分をひとつ取ると，ある有向閉 n-多様体 M が同型を除いて決まる—すなわち，連結成分の任意の元 h に対して零切断との横断的交叉 $h^{-1}(BSO(k)) \subset S^{n+k}$ が M と微分同相となり，この連結成分自体は分類空間 $B\mathrm{Diff}^+(M)$ 上のファイブレーションであって M と微分同相な多様体全体の集合に相当する．判別超曲面 Γ_k 自体は $h : S^{n+k} \to MSO(k)$ と $BSO(k)$ との接触の特異性に応じて分割されるはずで，トム・マザー理論を介して，ルーリー（Lurie）ら [13, 3] の意味で $\mathcal{M}_k$ の **錐的滑層化 (conical stratification)** を与えるだろう[*8]．一方，代数的コボルディズム $\mathrm{MGL}^{*,*}(-)$ の文脈においても，最近，**導来代数幾何 (derived algebraic geometry)** の研究者達 [5] が類似のアイデアで ‘代数的スキーム全体がなす分類スタック’ を考えている．この方向は数え上げ幾何学の展望にひとつの指針を与えるに違いない．



Structural Stability and Morphogenesis (1972)

3.2 次世代カタストロフ理論 トムは 70 年代以降，いわゆるカタストロフ理論の創出と発展に専心した．この純粋数学から外の世界に向けた大胆かつ野心的試みは，一時の熱狂と喧騒の後，特異点の分類に係る数学理論の部分が，アーノルド，ウォール，泉屋・石川らによって大きく発展し今に至る．中でも，ラグランジュ・ルジャンドル特異点論は最も成功した話題のひとつであろう．さて，私は訳あって数年前から情報科学や工学分野に少し携わり，**情報幾何学**（甘利 [1]）を知った．これは統計的推論，凸最適化，AI や機械学習などの分野においてアフィン微分幾何学からの統一的な理解と手法を与えるものであって，凸ポテンシャルのルジャンドル変換がその基礎になっている．しかし，現実の場面で遭遇する非凸の場合や深層学習アーキテクチャ等の特異モデルでは，計量の退化や空間の縮退が現れるために微分幾何的手法は破綻してしまう—実はその障害としてルジャンドル特異点や特異ルジャンドル多様体が現れる．そこでラグランジュ・ルジャンドル特異点論を足場に《情報幾何学への特異点論的アプローチ》を進めている [15]．その先には「可微分スタック上の初等カタストロフ理論」があるはずである[*9]．その指針を与えるトムの著作 [27] は，現在も未来においても，「連続性の幾何学」の意味と価値を説き，また世に問い続けることだろう．

[*8] これはヴァシリエフ理論とも関わるが，この滑層化の厳密な構成はまだ知られていない．[8] も参照．
[*9] フロベニウス多様体の話題からも情報幾何学との関連がある（マニンら [4]）．

参考文献

[1] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Springer (2016).

[2] M. Atiyah, The impact of Thom's cobordism theory, Bull. A.M.S., **41** (2004), 337–340.

[3] D. Ayaka, J. Francis, H. L. Tanaka, Local structures on stratified spaces, Adv. Math. **307** (2017), 903–1028.

[4] N. Combe, Y.I. Manin, F-manifolds and geometry of information, Bull. L.M.S. (2020), 777–792.

[5] E. Elmanto, M. Hoyois, A. Khan, V. Sosnilo and M. Yakerson, Modules over algebraic cobordism, (2020), Forum Math. Pi **8** (2020), 1–44.

[6] 福田拓生，IHES の関孝和賞受賞によせて，数学通信第 12 巻 3 号 (2007).

[7] W. Fulton, *Intersection Theory*, 2nd edition, Springer (1998).

[8] M. E. Kazarian, Multisingularities, cobordisms and enumerative geometry, Russian Math. Survey **58**:4 (2003), 665–724 (Uspekhi Mat. nauk **58**, 29–88).

[9] M. E. Kazarian, Thom polynomials, Singularity Theory and its application (Sapporo, 2003), Adv. Stud. Pure Math. vol. **43** (2006), 85–136.

[10] S. L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, Real and Complex Singularities (Proc. Conf. Oslo, 1976), Sijthoff & Noordhoff (1977), 297–396.

[11] M. Levine and F. Morel, *Algebraic Cobordism*, Springer (2007).

[12] M. Levine and R. Pandharipande, Algebraic cobordism revisited, Invent. Math. **176** (2009), 63–130.

[13] J. Lurie, Higher algebra, `http://www.math.harvard.edu/~lurie/`

[14] R. Marangell and R. Rimányi. The general quadruple point formula, Amer. J. Math. bf 132 (2010), 867–896.

[15] N. Nakajima and T. Ohmoto, The dually flat structure for singular models, Information Geometry, Springer (2021), 31–64.

[16] T. Ohmoto, Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **140** (2006), 115–134.

[17] 大本 亨, 特異点の数え上げと同変 Chern 類，数学，61 巻 1 号 (2009), 21–39.

[18] T. Ohmoto, Singularities of maps and characteristic classes, Real and Complex Singularities in São Carlos, 2012, Adv. Studies Pure Math. **68** (2016), 191–265.

[19] T. Ohmoto, Universal polynomials for multi-singularity loci of maps, preprint (2023)

[20] R. Rimányi, Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities, Invent. Math. **143** (2001), 499-521.

[21] T. Sasajima and T. Ohmoto, Thom polynomials in $\mathcal{A}$-classification I: counting singular projections of a surface, European Math. Soc. Ser. Cong. Rep. (2018), 203–226.

[22] H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig B.G. Teubner (1879).

[23] D. Sullivan, René Thom's work on geometric homology and bordism, Bull. A.M.S., **41** (2004), 341–350.

[24] R. Thom, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, Ann. Sci. de l'Ecole Normale Sup, Série 3, **69** (1952), 109–182.

[25] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.

[26] R. Thom, The bifurcation subset of a space of maps, Manifolds - Amsterdam 1970, LNM 197, Springer (1971), 202–208.

[27] R. Thom, Structural Stability and Morphogenesis, Benjamin (1972) [彌永・宇敷訳，構造安定性と形態形成，岩波書店 (1980)]

[28] A. Vishik, Stable and unstable operations in algebraic cobordism, Ann. Sci. l'Ecole Normale Sup. **52** (2019), 561–630.