曲面群の円周への作用の剛性と調和測度について (足立真訓 (静岡大), 松田能文 (青山学院大) との共同研究)

野澤　啓　(立命館大)*

概　要

本講演では [2] に基づき，曲面群の円周への作用の剛性について，懸垂束上の調和測度，つまり，懸垂葉層の葉ごとの熱流で不変な測度を用いて調べる．足立が調和測度から構成した懸垂束上の S^1 接続に対して，Burger–Iozzi–Wienhard の有界オイラー数を考えるとガウス＝ボネの定理が成り立つことについて説明する．また，その応用として，Burger–Iozzi–Wienhard によるカスプ付き曲面に対するミルナー＝ウッド不等式，およびその等号成立の場合に成り立つ剛性である松元の剛性定理の一般化の別証明を与えられることも述べる．

1　導入: ミルナー＝ウッド不等式と円周への群作用の剛性

本講演の主題は円周への曲面群作用の剛性であり，ミルナー＝ウッド不等式はその起源の一つである．正確な主張は次節に回し，ここでは歴史的経緯を見る．まず 1958 年に Milnor [26] が曲面上の階数 2 実ベクトル束上の平坦接続の存在のためのオイラー数に関する必要条件を示した．Wood [32] が 1971 年に曲面上の一般の S^1 束に対して一般化して得られたのがミルナー＝ウッド不等式である．ミルナー＝ウッド不等式は Sullivan による一般化に加えて以下のような様々な方向に発展・関係し，その内のいくつかの分野は現在も盛んに研究されている．

- Sullivan [30] によるミルナー不等式のアファイン多様体への一般化．
- ミルナー＝ウッド不等式において等号が成立するのはフクス作用に半共役な円周への曲面群の作用に限る，という松元の剛性定理 [23]．皆川による軌道体版 [27], Mann による幾何的作用への一般化 [22].
- ミルナー＝ウッド不等式，松元の剛性定理のカスプ付き曲面の場合への一般化 [6].
- Ghys による有界コホモロジーを用いた研究 [16].
- 3 次元ザイフェルト多様体の横断的葉層の存在問題の研究 [13, 18, 19, 28].
- 一般の次元の次元（複素）双曲多様体の基本群の作用に対する体積不変量への拡張 (一般化ミルナー＝ウッド不等式)，モストー剛性定理の派生 [17, 12, 10].

---

* 〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1 びわこ・くさつキャンパス ウェストウィング 409 号室
e-mail: hnozawa@fc.ritsumei.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:20K03620) の助成を受けたものである。
2020 Mathematics Subject Classification: 57M60, 57R30
キーワード：曲面群, 円周への群作用, 円周の同相群，オイラー数，ガウス＝ボネ公式，調和測度

- アノソフ表現，トレド不変量，高次元タイヒミュラー理論などの曲面群の表現の研究 [6].
- 多様体の微分同相群の代数的性質の研究 ([8] などを参照).

なお，**フクス作用**とは双曲曲面群のポアンカレ円板の境界への自然な作用である．上のリストの通り，ミルナー＝ウッド不等式は高次元化されているが，それらの一般化においては，離散群からリー群への準同型が扱われる．元のミルナー＝ウッド不等式や松元および Mann の剛性定理は，曲面群の円周への位相的な作用全体，つまり，曲面群から円周の同相群 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ への準同型全体という無限次元の対象を扱っている点が魅力的である．

本講演では，懸垂束上の調和測度（4 節参照）というミステリアスな概念を用いて，曲面群の円周への作用の剛性を調べる．なお，調和測度を用いたミルナー＝ウッド不等式や松元剛性へのアプローチについては，Frankel [14], Thurston [31] などの仕事があるが前者は未出版，後者は未完である [*1]．Thurston のアイディアは [9] でも言及されている．

2 主結果：調和測度に付随する S^1 接続のガウス＝ボネ公式とその応用

便宜上，有限型の有向曲面群の代わりに $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ の捩れのない格子 Γ を考えることとする．対応する双曲曲面 $\Gamma\backslash\mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$ はポアンカレ円板) を Σ で表す．Σ は有限体積のため高々有限のカスプを持ち，カスプを持たないことと Σ が閉であることが同値である．理想境界 $\partial\mathbb{D}$ への Γ 作用

$$\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) \to \mathrm{Homeo}_+(\partial\mathbb{D})$$

は**フクス作用**と呼ばれる．

曲面群の円周への作用の基本的な不変量はオイラー数である．Σ が閉ならば，Γ の円周への作用 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ が与えられたとき，オイラー数 $e(\rho) \in \mathbb{Z}$ が普遍オイラー類 $\mathrm{eu} \in H^2(\mathrm{Homeo}_+(S^1))$ を用いて，

$$e(\rho) = \langle [\Sigma], [\rho^* \mathrm{eu}] \rangle$$

と定義されるのだった．ただし，$[\Sigma] \in H_2(\Gamma)$ は Σ の基本類に対応する元である．Σ がカスプを持つときには基本類が自明になるので，このようには定義できない．Burger–Iozzi–Wienhard は実係数有界コホモロジーを使うことで，Σ がカスプを持つ場合にオイラー数の定義を拡張した (3 節参照).

本講演では，懸垂葉層の調和測度と呼ばれる概念を用いて，曲面群の円周への作用の剛性を考える．まずは，懸垂束について思い出す．**懸垂束** $M := \Sigma \times_\rho S^1 := \Gamma\backslash(\mathbb{D} \times S^1)$ は Σ 上の S^1 束であって，ファイバーに横断的な懸垂葉層 $\mathcal{F}$ を持ち，そのモノドロミー

[*1] トポロジーシンポジウムにおいて [31] が Thurston の論文全集に含まれて出版されていることを吉田健一さんから教えていただきました．感謝いたします．

準同型 $\Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は ρ と一致するのだった．ここで，$\gamma \cdot (z,t) = (\gamma z, \rho(\gamma)t)$, $(\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathbb{D}, \forall t \in S^1)$ である．また，M 上の懸垂葉層 $\mathcal{F}$ は直積葉層 $\mathbb{D} \times S^1 = \sqcup_{w \in S^1} \mathbb{D} \times \{w\}$ から導かれるのだった．

次に，調和測度について簡潔に述べる（厳密な定義は 4 節参照）．懸垂葉層の各葉はファイバーに横断的であり，射影 $M \to \Sigma$ の制限の引き戻しにより双曲計量を持つ．懸垂束 M 上の測度が調和的であるとは，およそ，その測度が葉に沿った熱流で不変であるときにいう．難しい概念であるが，Garnett の定理 [15] により，あらゆるコンパクトな葉層付き多様体が非自明な調和測度を持つことが大きなアドバンテージである．

さて，本講演の主結果を述べる．足立 [1] は，**調和測度に付随する S^1 接続**，つまり，調和測度に関する平坦接続のファイバーごとの平均をとることで得られる懸垂束上の S^1 接続を考え，その曲率の絶対値が 1 で抑えられることを示した．Σ が閉の場合にはガウス＝ボネの公式と組み合わせてミルナー＝ウッド不等式が示される．一方で，Σ がカスプを持つ場合には，有界オイラー数を考える必要があり，公式が成り立つかどうかは非自明である．本講演の主結果は，調和測度に付随する S^1 接続に対するガウス＝ボネ公式である．

定理 2.1 ([2])**.** Γ を $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ の捩れのない格子とし，$\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ を S^1 への作用であって有限軌道を持たないとする．ρ の懸垂束を考え，その上の調和測度 μ を考える．μ に付随した S^1 接続を $\bar{\omega}$ とするとき，$\bar{\omega}$ が弱い意味で持つ曲率を $K\,\mathrm{vol}$ とすると，

$$e(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} K(z)\,\mathrm{vol}(dz),$$

を満たす．ここで $e(\rho)$ は Burger–Iozzi–Wienhard の有界オイラー数 (3 節参照) であり，vol は $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ の双曲体積形式である．

Σ が閉の場合には，このガウス＝ボネ公式は実質的に古典的定理と同様に示される．5 節で述べる通り，Σ がカスプを持つ場合の証明では，カスプ周りについての考察が必要になる．足立による曲率評価と合わせて，Σ がカスプを持つ場合にも，ミルナー＝ウッド不等式を示すことができる．さらに，等号成立条件について考察し，松元の剛性定理の別証明も与えることができた．

系 2.2 (ミルナー＝ウッド不等式，松元の剛性定理 [26, 32, 23, 6])**.** Γ を $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ の捩れのない格子，$\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ とし，$\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ をその S^1 への作用とする．このとき，

$$|e(\rho)| \leq |e(\Sigma)| \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし，$e(\Sigma)$ は Σ のオイラー数である．さらに，$e(\rho) = e(\Sigma)$ (resp. $e(\rho) = -e(\Sigma)$) が成り立つことと ρ がフクス作用 ρ_0 (resp. フクス作用の複素共役 $\overline{\rho}_0$) に半共役になることは同値である．

なお，ρ が ρ_0 に**半共役**であるとは，ここでは，単調かつ写像度 1 であるような連続写

像 $f: S^1 \to S^1$ が存在して $f \circ \rho(\gamma) = \rho_0(\gamma) \circ f$ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ が成り立つときに言う．

松元 [25] では，Burger–Iozzi–Wienhard によるカスプを持つ曲面の場合の松元剛性を，閉曲面の場合の松元剛性に帰着させることで示されている．

松元の剛性は，オイラー数が極大，つまり $e(\rho) = \pm e(\Sigma)$ となるような作用について，フクス作用との半共役写像を与えることで示される．調和測度からどのように半共役写像を与えられるか，次の定理を見ることで理解できる．

定理 2.3 ([2])**.** $e(\rho) = \pm e(\Sigma)$ が成り立つとき，M の普遍被覆 $\mathbb{D} \times S^1$ への調和測度の引き戻しは $h(z,t)\,\mathrm{vol}(z)\nu(t)$ の形であらわされる．ここで，vol は葉向体積形式，ν は S^1 上のあるボレル測度であり，

$$h(z,t) = C(t)\frac{1-|z|^2}{|\mathfrak{m}(e^{it}) - z|^2} \qquad (\forall z \in \mathbb{D}, \forall t \in S^1).$$

ここで，$C(t)$ は各葉上で定数となるある関数，$\mathfrak{m}: S^1 \to S^1$ は写像度 ± 1 のある連続写像でありかつ (ρ, ρ_0) 同変，つまり $\mathfrak{m} \circ \rho(\gamma) = \rho_0(\gamma) \circ \mathfrak{m}$ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ を満たす．

さて，オイラー数が極大になるような作用については上記の通り，調和測度から松元の剛性定理が示される．Σ が閉であるとき，Mann [22] はフクス作用の一般化として $\Gamma \to G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ のようにあるリー群 G を経由する作用を**幾何的作用**と呼び，幾何的作用にホモトピックな作用に対して松元剛性と同様の結果を示した．このような作用についても調和測度が記述できれば，Mann の定理も調和測度を用いて示すことができ，理解が深まる．

問 2.4. 曲面群 Γ の幾何的作用にホモトピックな作用の調和測度を記述せよ．

3 Burger–Iozzi–Wienhard による有界オイラー数

ここでは，Burger–Iozzi–Wienhard による有界オイラー数の定義を思い出す．Γ を $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ の捩れのない格子とし，$\rho: \Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ をその S^1 への作用とする．Γ が一様でない，つまり $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ がカスプを持ち，コンパクトでないときには，Σ の基本類が自明となってしまい，オイラー数が通常のやり方では定義できない．Burger–Iozzi–Wienhard は有界コホモロジーを用いて次のように自然にオイラー数の定義を拡張した．まず，全てのカスプを切り落とし，Σ を境界付きのコンパクトな曲面とみなす．Gromov の同型より，Σ および $\partial\Sigma$ の有界コホモロジーは基本群の有界コホモロジーに同型である．$\pi_1\partial\Sigma$ は従順であることから，その実係数有界コホモロジーは自明である．よって，実係数有界コホモロジーの相対完全列

$$\cdots \longrightarrow H_b^1(\partial\Sigma) \longrightarrow H_b^2(\Sigma, \partial\Sigma) \xrightarrow{f} H_b^2(\Sigma) \longrightarrow H_b^2(\Sigma, \partial\Sigma) \longrightarrow \cdots$$

より，写像 $f: H_b^2(\Sigma, \partial\Sigma) \to H_b^2(\Sigma) \cong H^2(\Gamma)$ が同型となる．ρ の**オイラー数** $e(\rho)$ を

$$e(\rho) = \langle f^{-1}\rho^* \mathrm{eu}, [\Sigma, \partial\Sigma]\rangle,$$

で定義する．ここで，$[\Sigma, \partial\Sigma]$ は Σ の相対基本類である．$e(\rho) \in \mathbb{Z}$ とは限らず，Γ が自由群であることから，ホモトピー不変にならないことも分かる．以下の公式 (3.1) を見ると，有界オイラー数はある意味で境界付き版であることが理解できる．

Σ が閉のとき，円周への群作用のオイラー数がポアンカレ移動数を用いて計算できることはよく知られている．Σ がカスプを持つ場合も，同様に計算できることが Burger–Iozzi–Wienhard によって示されている．準同型としての持ち上げ $\tilde{\rho} : \Gamma \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ をとる．ここで．

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) = \{\, f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R}) \mid f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi, \forall x \in \mathbb{R} \,\}$$

は $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の普遍被覆群である．**ポアンカレ移動数** $\tau : \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbb{R}$ は

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - x}{n},$$

として，$x \in \mathbb{R}$ の選び方に依らず定義できるのだった ([29] 参照). [6] より，もし $\partial\Sigma \neq \emptyset$ である場合,

$$e(\rho) = -\sum_{i=1}^{m} \tau(\tilde{\rho}(c_i)). \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで，c_i は i 番目のカスプを一周するループである．

有界オイラー数の定義のためには，境界の基本群が従順であることが大切だった．定理 2.1 を高次元化するような次の問題が考えられる．

問 3.1. カスプを持つ有限体積双曲多様体上の平坦 S^1 束について，その調和測度に付随する S^1 接続を構成し，ガウス＝ボネの定理を証明せよ．

4 葉層構造の調和測度とは

ここでは，調和測度の定義，存在定理，構造定理について簡潔に述べる．葉層付き多様体 $(M, \mathcal{F})$ の各葉の上にリーマン計量が定まっているとする．コンパクトな葉 L があるとき，関数を L 上で積分するという M 上の測度が得られる．この測度は葉の方向に移動しても不変（ホロノミー不変）であり，**横断的不変測度**と呼ばれる．このような測度があれば $\mathcal{F}$ の性質を知るのに役立つが，稀にしか存在しない．$(M, \mathcal{F})$ 上の調和測度とは，$\mathcal{F}$ に沿った熱流で不変であるような M 上の測度のことであり，Garnett [15] により導入された横断的不変測度の一般化である．その利点は，Garnett が示した通り，M がコンパクトでありさえすれば，非自明な調和測度が存在する，という事実である．これまで様々な広いクラスの葉層構造に対して応用がなされてきた．例えば，Thurston による不変円周の構成（未完）や Deroin–Kleptsyn の C^1 級葉層構造の研究などがある．

今回の発表に即して，調和測度を定義する．Γ を $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ の捩れのない格子とし，$\Sigma := \Gamma\backslash\mathbb{D}$ とする．Γ の円周への作用 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ に対して，懸垂束 $M := \Sigma \times_\rho S^1 := \Gamma\backslash(\mathbb{D} \times S^1)$ を考える．$M \to \Sigma$ は S^1 束であり，M 上には各葉が双

曲計量を持つような余次元 1 の葉層構造が定義されるのだった．それから定まる葉向ラプラシアンを Δ で表す．

定義 4.1 (Garnett [15])**.** M 上のボレル測度 μ が懸垂葉層上の**調和測度**であるとは，

$$\int_M \Delta f(x)\mu(dx) = 0 \tag{4.1}$$

が次の性質を満たす任意の f について成り立つときに言う．f はコンパクト台を持ち，各葉への制限が C^2 級であり，Δf が連続となる．

この定義中の関数 f については，式 (4.1) が意味を持つような十分に大きいクラスの関数たちを考えるということである．

上述の通り，調和測度の特徴はその存在性にある．もし M がコンパクト，つまり $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ が閉のとき，Garnett の定理により非自明な調和測度が存在する ([15, 7])．Σ がカスプを持つとき M がコンパクトでないが，Alvarez は S^1 への Γ 作用の平衡測度を使って調和測度を構成した．

定理 4.2 (Alvarez [4])**.** M 上の懸垂葉層の非自明な調和測度が存在する．

調和測度は，Garnett の構造定理により，普遍被覆上の各葉の上での正調和関数を用いて表される．今の状況では，調和測度 μ を $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ に持ち上げると，

$$\tilde{\mu} = h(z,t)\,\mathrm{vol}(z)\nu(t) \tag{4.2}$$

という形にあらわされる．ただし，vol は葉向体積形式，ν は $\mathbb{R}$ 上のあるボレル測度であり，$h(z,t)$ はあるボレル可測関数であって，ν-a.e. t に対して $\mathbb{D}\times\{t\}$ への制限が正かつ調和的となるものである．

5 調和測度に不随する S^1 接続とガウス＝ボネ公式

ここでは，定理 2.1 の証明のアイディア・概要を述べる．まず，足立による調和測度に不随する S^1 接続の構成と曲率の評価について述べる．Γ を $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$ の捩れのない格子とし，$\rho:\Gamma\to\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ をその S^1 への作用とする．$\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{D}$ とする．前節で述べた通り，Σ 上の懸垂束 $M = \Sigma\times_\rho S^1$ は調和測度 μ を持つ．

μ に付随した S^1 接続の構成のためには，いくつかのステップが必要となる．$\tilde{\mu}$ を μ の $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ への持ち上げとする．まず，$\tilde{\mu}$ を各 S^1 ファイバー上の測度に分解する．まず，μ を $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ に持ち上げると，Garnett の分解定理 [15] により，

$$\tilde{\mu} = h(z,t)\,\mathrm{vol}(z)\nu(t),$$

の形で表されるのだった．ここで，vol は $\mathbb{D}$ の葉向体積形式，ν は $\mathbb{R}$ 上のボレル測度，h は $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ 上の $\mathrm{vol}(z)\nu(t)$ に関する局所可積分関数であって，ν–a.e. t に対して $h(\cdot,t)$ は

$\mathbb{D}$ 上の正調和関数である．$z \in \mathbb{D}$ に対して $\mu_z = h(z,t)\nu(t)$ と $\mathbb{R}$ 上の測度をおくことで，$\tilde{\mu}$ を μ_z たちに分解できる．

定義 5.1. 各 $z \in \mathbb{D}$ に対し，μ_z によって平坦接続の平均をとって得られる S^1 接続を，μ **に付随する** S^1 **接続**とよぶ．

これでリプシッツ連続な S^1 接続が得られ，弱い意味で曲率を持つことを示すためには，μ_z が測度が正になる点の不存在を示すなど細かい議論が必要であり，$\mathbb{D}$ 上の正調和関数に関するハルナック不等式 [3] および Li, Li-Schoen の定理 [20, 21] などを用いるがここでは説明を割愛する．

足立による曲率評価について簡潔に述べる．$z = x_1 + \sqrt{-1}x_2$ とし，平坦接続 $\bar{\omega}$ の x_j 方向の傾きを ω_j とおくと，μ に付随する S^1 接続の曲率は次で表されることが分かる．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\omega_1}{\partial\theta}(z,\theta)\omega_2(z,\theta) + \frac{\partial\omega_2}{\partial\theta}(z,\theta)\omega_1(z,\theta)\right)d\theta.$$

これは $(\omega_1(z,\theta),\omega_2(z,\theta))$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ という $\mathbb{R}^2$ 上のリプシッツ連続曲線の囲む領域の符号付き面積になっている．この曲線の接ベクトルはほとんど至る所で定義され，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_j(z,\theta) = \frac{\partial \log h}{\partial x_j}(z,\tau(z,\theta))$$

であることが分かる．（τ についての説明は省略する．）よって，等周不等式より

$$\begin{aligned} |K| &\le \frac{(1-|z|^2)^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial \log h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log h}{\partial x_2}\right)^2}d\theta\right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^{2\pi}|d\log h|_{\mathrm{hyp}}d\theta\right)^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

であり，ハルナック不等式 $|d\log h|_{\mathrm{hyp}} \le 1$ より $|K| \le (2\pi)^2/4\pi^2 = 1$ が従う．

もし Σ が閉，つまりカスプを持たない場合には，ガウス＝ボネの定理

$$e(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma K(z)\,\mathrm{vol}(dz). \tag{5.2}$$

はほぼ古典的な場合と同様に示される．しかし，カスプを持つ場合には，そもそもオイラー数の定義からして古典版とはずれがあり，Burger–Iozzi–Wienhard による有界オイラー数についてガウス＝ボネの公式 (5.2) が成り立つことは非自明である．

各カスプ周りに考察が帰着できることは次のようにして分かる．まず，M の自明化 σ をとっておく．この σ を用いて有界オイラー数は準同型リフト $\tilde{\rho}:\Gamma \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ をとることで，

$$e(\rho) = -\sum_{i=1}^m \tau(\tilde{\rho}(c_i)), \tag{5.3}$$

と計算できるのであった．ここで，$\tau : \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbb{R}$ はポアンカレ移動数であり，m は Σ の持つカスプの数であり，$c_i \in \Gamma$ は i 番目のカスプを境界の向きに一回周るループに対応する Γ の元である．

それぞれのカスプの近傍には，ホロ円周を葉とする葉層構造がある．ホロ円周たちを $\{c_i^s\}$ のようにパラメータ付けし，$s \to \infty$ のときに c_i^s の長さが 0 に近づくようにする．$s \gg 0$ に対して，$c_1^s, c_2^s, \cdots, c_m^s$ を境界とするコンパクト曲面を Σ^s とおく．古典的なガウス＝ボネの定理によって，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^s} K(z)\,\mathrm{vol}(dz) = \sum_{i=1}^{m} \tau(\widetilde{\mathrm{hol}}_{\bar{\omega}}(c_i^s)), \tag{5.4}$$

であることが分かる．ここで，$\widetilde{\mathrm{hol}}_{\bar{\omega}}(c_i^s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\bar{\omega}$ の c_i^s に沿ったホロノミー写像の σ に関するリフトである．Σ は体積有限であり，$|K(z)| \leq 1$ a.e. z であるので，$s \to \infty$ のとき

$$\int_{\Sigma^s} K(z)\,\mathrm{vol}(dz) \longrightarrow \int_{\Sigma} K(z)\,\mathrm{vol}(dz)$$

が成り立つことが分かる．よって，(5.3) および (5.4) より，(5.2) を示すためには各 i について，∞ に発散する数列 $\{s_n\}$ であって，$n \to \infty$ のとき

$$\tau(\widetilde{\mathrm{hol}}_{\bar{\omega}}(c_i^{s_n})) \longrightarrow -\tau(\tilde{\rho}(c_i)) \tag{5.5}$$

となるものを見つければ良い．この部分は，ハルナック不等式を用いた評価により証明できる．

6 松元剛性への応用

最後に，主定理を応用して松元剛性を示す議論の概要を述べる．証明の要において，松元によって考えられた葉の理想境界への同変写像が現れる．

さて，5 節で述べた通り，足立による調和測度に付随する S^1 接続の曲率評価は，等周不等式とハルナック不等式によって証明されたのだった．オイラー数が極大になるとき，ガウス＝ボネの公式（カスプつきの場合は主定理 2.1) を用いると，これらの両不等式においても等号が成立することが分かる．この内，ハルナック不等式の等号成立から次のようなことが分かる．

命題 6.1 (ハルナック不等式の等号成立条件 [2])**.** h をポアンカレ円板 $\mathbb{D}$ 上の正調和関数とする．$|d\log h|_{\mathrm{hyp}} = 1$ がある 1 点において成り立つならば，h はある $m \in S^1$ を用いて次の形にあらわされる．

$$h(z) = h(0)\frac{1-|z|^2}{|m-z|^2}.$$

つまり，$\mathbb{D}$ 上の正調和関数 h についてハルナック不等式の等号が成立するのは，h がブスマン関数のときのみである．ここで，$\mathbb{D}$ 上のブスマン関数とは，理想境界の一点で無限に発散するような $\mathbb{D}$ 上の正調和関数として特徴づけられる．

さて，この命題より，オイラー数が極大になる場合，その調和測度から得られる葉の上の正調和関数について，理想境界の一点のみで発散することが分かるので，次のような可測写像を考えることができる．

$$
\begin{array}{rccc}
\mathfrak{m}: & S^1 & \longrightarrow & \partial\mathbb{D} \\
& t & \mapsto & t\text{を通る葉の上の正調和関数}h(\cdot,t)\text{が発散する点}
\end{array}
$$

この写像 $\mathfrak{m}$ が $\rho(\Gamma)$ およびフクス作用 $\rho_0(\Gamma)$ に関する同変性は構成から直ちに分かる．

なお，この写像は松元 [24] によって既に考察されている．松元は双曲曲面を葉とする葉層付き空間ではエルゴード的な調和測度が I 型と II 型に分けられることを示した．I 型であれば上記のように，ほぼ全ての葉で付随する調和関数が境界のただ 1 点で発散する．一方，II 型では付随する調和関数が境界のほぼ全ての点で発散する．この節の議論から，ミルナー＝ウッド不等式の等号が成立するような作用は I 型であることが分かる．他には，Mann の幾何的作用も I 型であることが期待される．

問 6.2. 曲面群の円周への作用で I 型の調和測度を持つものを決定せよ．

参考文献

[1] M. Adachi, A differential-geometric approach to the Milnor–Wood inequality, Master Thesis, Nagoya Univ., 2010 (in Japanese).

[2] M. Adachi, Y. Matsuda, H. Nozawa, Harmonic measures and rigidity for surface group actions on the circle, Preprint, arXiv:2207.08411.

[3] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.

[4] S. Alvarez, Discretization of harmonic measures for foliated bundles. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 11-12, 621–626.

[5] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 5, 731–799.

[6] M. Burger, A. Iozzi, A. Wienhard, Higher Teichmüller spaces: from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ to other Lie groups, *Handbook of Teichmüller theory*. Vol. IV, 539–618, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.

[7] A. Candel, The harmonic measures of Lucy Garnett. Adv. Math. **176** (2003), no. 2, 187–247.

[8] D. Calegari, *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007.

[9] D. Calegari. *scl*, Math. Soc. of Japan Mem. Vol. 20, (2009).

[10] K. Corlette, Rigid representations of Kählerian fundamental groups, J. Differential Geom. **33** (1991), 239–252.

[11] B. Deroin, V. Kleptsyn, Random conformal dynamical systems. Geom. Funct. Anal. **17** (2007), no. 4, 1043–1105.

[12] N.M. Dunfield, Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds, Invent. Math. **136** (1999), 623–657.

[13] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann, Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphism of the circle, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 4, 638–660.

[14] S. Frankel, Harmonic Analysis of surface group representations to Diff(S^1) and Milnor type inequalities, Prépublication de l'École Polytechnique **1125** (1996), Preprint.

[15] L. Garnett, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. J. Funct. Anal. **51** (1983), no. 3, 285–311.

[16] É. Ghys, Groupes d'homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée, Contemp. Math., 58, III (1987), 81–105.

[17] W.M. Goldman,Topological components of spaces of representations, Invent. Math. **93** (1988), 557–607.

[18] M. Jankins, W. Neumann, Homomorphisms of Fuchsian groups to PSL$(2;\mathbb{R})$, Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 3, 480–495.

[19] M. Jankins, W. Neumann, Rotation numbers of products of circle homeomorphisms, Math. Ann. **271** (1985), no. 3, 381–400.

[20] P. Li, Uniqueness of L^1 solutions for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds. J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 447–457.

[21] P. Li, R. Schoen, L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds. Acta Math. **153** (1984), no. 3-4, 279–301.

[22] K. Mann, Spaces of surface group representations. *Invent. math.* **201**, (2015), 669–710.

[23] S. Matsumoto, Some remarks on foliated S^1 bundles, Invent. Math. **90** (1987), no. 2, 343–358.

[24] S. Matsumoto, The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations. Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), no. 4, 569–592.

[25] S. Matsumoto, Rigidity Theorem for surface group actions on the circle, Preprint, 2021.

[26] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, Comment. Math. Helv. **32** (1958), 215–223.

[27] H. Minakawa, Milnor–wood inequality for crystallographic groups, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, 13 Année 1994–1995. 167–170, 1995.

[28] R. Naimi, Foliations transverse to fibers of Seifert manifolds. Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 1, 155–162.

[29] A. Navas, *Groups of circle diffeomorphisms.* Translation of the 2007 Spanish edition. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2011. xviii+290 pp.

[30] D. Sullivan, A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations andaffine manifolds, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 2, 183–189.

[31] W. P. Thurston, Three-manifolds, Foliations and Circles II, *Collected works of William P. Thurston with commentary. Vol. I. Foliations, surfaces and differential geometry.*, 413–450, Edited by B. Farb, D. Gabai and S.P. Kerckhoff, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2022.

[32] J. W. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 257–273.