Finite path integral model and toric code based on homological algebra

Minkyu Kim (Korea Institute for Advanced Study)

Abstract

本稿の目的は、有限経路積分という位相的場の理論の構成法とその局所的な描像を与えるトーリックコードのホモロジー代数的な観点による一般化を解説することである。

1 はじめに

Witten[13] は経路積分を用いる位相的場の理論の構成で 3 次元トポロジーの研究に貢献した。Dijkgraaf-Witten[2, 3] はその数学的な議論として**有限経路積分**を提案した。有限経路積分は有限群のゲージ理論から位相的場の理論を構成する数学的な方法論であり、次元の制約を受けないのが特徴である。一方、三次元では有限次元のホップ代数のゲージ理論 [9]（一般的には 6j-symbols）と関係する状態和モデルに拡張する [11]。その応用として、例えば、Drinfeld double（準三角ホップ代数の標準的な構成法）及びその表現圏の位相的な解釈ができる。

トーリックコード [8] とは位相的量子計算における誤り訂正符号であり、位相的物性物理におけるエニオン統計の基本的な例を提供する。数学として、トーリックコードは有限群（一般的に $\mathbb{C}$ 上の半単純な有限次元のホップ代数）から多面体分割付き曲面に互いに可換な射影作用素の族を与える枠組である。アーベル群上のトーリックコードはチェイン複体から再構成できる [12]。トーリックコードの射影作用素の固有空間が上記の位相的場の理論を誘導することで有限経路積分モデルの局所的な描像を与える [1]。

体 $\mathbb{K}$ 上の双可換ホップ代数の圏 $\mathsf{Hopf}^{\mathsf{bc}}_{\mathbb{K}}$ はアーベル圏であり [10]、アーベル群の線型化の役割を果たす。本稿では双可換ホップ代数上のホモロジー代数に注目して、ホモロジー（一般的に、マイヤー・ヴィートリス関手）とチェイン複体による有限経路積分とトーリックコードの拡張を解説する。Figure 1はその概略図を表す。

先行研究は「ギャップをもつハミルトニアン系は極低エネルギーで位相的場の理論で近似される」[14] という物理的な推測の一つの根拠である。本稿では、その部分的な定式化の試みとして**局所的安定化モデル**を導入及び正当化する。

2 トーリックコードとチェイン複体

この章ではトーリックコードの代数的な一般化を考え、双可換ホップ代数のチェイン複体と関連づける。トーリックコードの背後の代数的な原理を把握し、その抽象化に踏まえてトーリックコードを含む枠組の定式化を提案する。

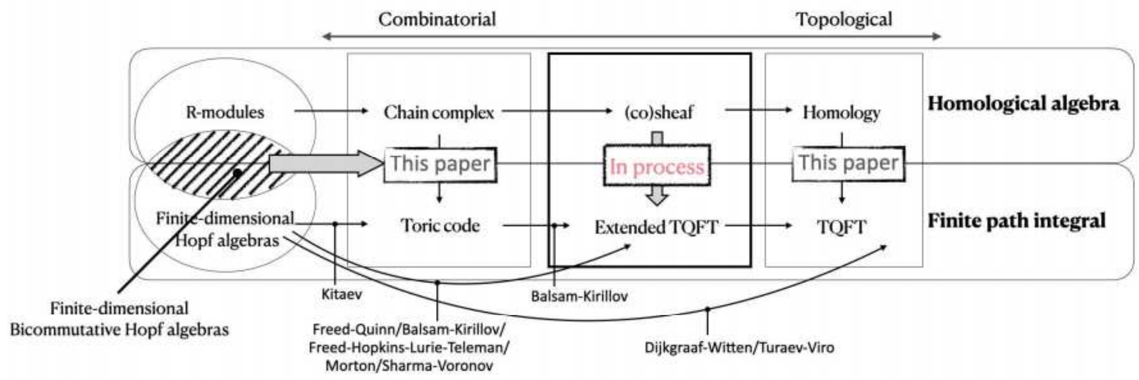

Figure 1: 本研究の概略図

2.1 代数的なモデル

ここでは空間の代わりにチェイン複体上のトーリックコードを定式化する。チェイン複体の情報からトーリックコードのハミルトニアンに該当する作用素を導入する。トーリックコードのハミルトニアンのゼロ固有空間が位相的不変量であることが知られているが [1]、類似な定理としてその作用素のゼロ固有空間がチェイン複体のホモロジーと同型であることを述べる。

以下では単位元をもつ可換環 R を固定する。

定義 2.1. **R 上の短い抽象的複体**（short abstract complex over R）とは 3 つの有限集合 $X_+, X_\circ, X_-$ と 2 つの写像 $I_+ : X_+ \times X_\circ \to R$、$I_- : X_\circ \times X_- \to R$ で構成され、次の式を満たす。

$$\forall x_+ \in X_+, \forall x_- \in X_-, \sum_{x_\circ \in X_\circ} I_+(x_+, x_\circ) \cdot I_-(x_\circ, x_-) = 0$$

$I_+(x_+, x_\circ), I_-(x_\circ, x_-) \in R$ はそれぞれ $(x_+, x_\circ)$ の**隣接数**、$(x_\circ, x_-)$ の隣接数と呼び、混乱がなければ $[x_+ : x_\circ], [x_\circ : x_-]$ と書く。隣接数を成分にする行列を考えるとチェイン複体 $RX_* := (RX_+ \to RX_\circ \to RX_-)$ が得られる。R 加群 M に対して $H(X; M) := H_\circ(RX_* \otimes_R M)$ と定義する。

定義 2.2. A を双可換ホップ代数とし、A 上の R 作用 ϕ を考える。X を R 上の短い抽象的複体とする。チェイン複体 RX_* に R 作用 ϕ を適用すると双可換ホップ代数のチェイン複体 $\bigotimes_{x_+ \in X_+} A \to \bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} A \to \bigotimes_{x_- \in X_-} A$ が得られる。我々は（アーベル圏 $\mathsf{Hopf}^{bc}_{\mathbb{K}}$ の中での）第 $\circ$ ホモロジーを $H(X; A, \phi)$ と書く。

例 2.3. 有限アーベル群 G に対して双可換ホップ代数 $A = \mathbb{K}G$ を考える。G 上の $R = \mathbb{Z}$ 作用は $\mathbb{K}G$ 上の $\mathbb{Z}$ 作用 ϕ を誘導する。するとホモロジー $H(X; A, \phi)$ はアーベル群 $H(X; G)$ の誘導するホップ代数 $\mathbb{K}H(X; G)$ と同型である。この事実は群環の構成がアーベル群の圏から双可換ホップ代数の圏への完全関手を誘導することから従う。

群論におけるハール積分の一般化としてホップ代数の積分及び余積分という概念がある。ホップ代数 A の右積分とは $\sigma \in A$ であり任意の $x \in A$ に対して $\sigma x = \varepsilon(x)\sigma$ を満たすものである。条件式を左右反転することで同様に左積分を定義し、右積分かつ左積分であるものを単に積分と呼ぶ。なお、$\varepsilon(\sigma) = 1$ ならば積分 σ は正規化されたという。有限次元のホップ代数が半単純であるとき、そのときに限り、正規化された積分をもつことが古典的に知られている。双対的に（正規化された）余積分を定義及び議論することができる。

定義 2.4. A を半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数とし、σ_A と σ^A をそれぞれ A の正規化された積分と余積分とする。$V(X;A) := \bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} A$ と定義する。A に付属する内積、即ち対称的かつ非退化なペアリング、を用いて $V(X;A)$ を内積空間とみなす。

A 上の R 作用 ϕ を考える。$V(X;A)$ 上の対称作用素 $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)$ と $\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$ を次のように定義する。まず A の余積を繰り返して適用することで $a \in A$ は $V(X;A)$ の元を誘導する。その元を表すために以下の Sweedler 表記法を使う。A が余可換なのでこの表記は well-defined である

$$\Delta^{X_\circ}(a) = \left(\cdots \otimes a^{(x_\circ)} \otimes \cdots\right) = \bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} a^{(x_\circ)}$$

この表記法に基づいて対称作用素 $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)$ は次のように定義する。

$$\left(\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)\right)\left(\bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} v_{x_\circ}\right) := \bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} \left((\phi([x_+ : x_\circ])\sigma_A^{(x_\circ)}) \cdot v_{x_\circ}\right).$$

この定義はストリングダイヤグラムを用いて Figure 2の左側のように表すことができる。それぞれのストリングは A を表し、上の頂点と下の頂点がそれぞれドメインとコドメインである。また、Δ, ∇ はそれぞれ反復して施した余積と積を表す。双対的に対称作用素 $\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$ を定義する。

$$\left(\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)\right)\left(\bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} v_{x_\circ}\right) := \sigma^A\left(\prod_{x_\circ \in X_\circ} (\phi([x_\circ : x_-]) v_{x_\circ}^{(2)})\right) \cdot \bigotimes_{x_\circ \in X_\circ} v_{x_\circ}^{(1)}.$$

同様にこの定義は Figure 2の右側で説明できる。

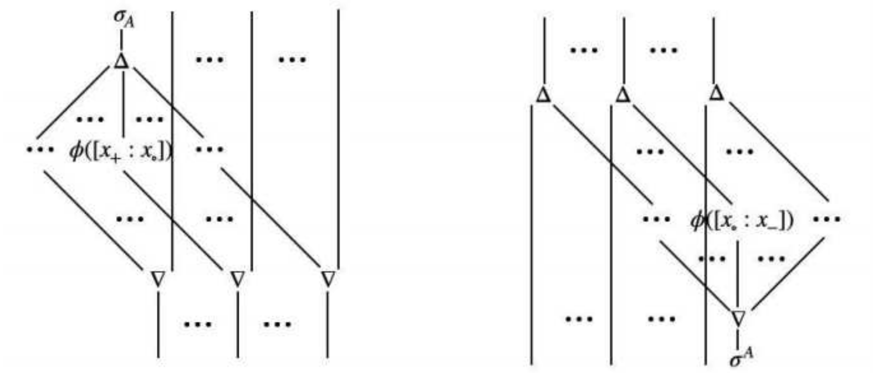

Figure 2: 作用素 $\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)$ と $\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)$

命題 2.5. $\{\mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)\}_{x_+ \in X_+} \cup \{\mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)\}_{x_- \in X_-}$ は互いに可換な射影作用素である。

定義 2.6. (A, ϕ) により誘導される X の**基礎的作用素**（the elementary operator）$\mathbb{H}(X; A, \phi)$ は次のように定義する。

$$\mathbb{H}(X; A, \phi) := \sum_{x_+ \in X_+} (id - \mathbb{S}^+(X, x_+; A, \phi)) + \sum_{x_- \in X_-} (id - \mathbb{S}^-(X, x_-; A, \phi)).$$

なお、その核を $V_0(X; A, \phi) := \{\psi \in V(X;A) \mid \mathbb{H}(X; A, \phi)\psi = 0\}$ と定義する。

命題 2.5より $V_0(X;A,\phi)$ は $\mathbb{S}^+(X,x_+;A,\phi),\mathbb{S}^-(X,x_-;A,\phi)$ の $(+1)$ における共通の固有空間である。

定理 2.7. ([5, Theorem 1.1]) R 上の短い抽象的複体 X に対して次が成り立つ。

1. 基礎的作用素 $\mathbb{H}(X;A,\phi)$ の固有空間は $V(X;A)$ の直和分解を与える。
2. $0\in\mathbb{K}$ は $\mathbb{H}(X;A,\phi)$ の固有値である。さらにそのゼロ固有空間とホモロジーホップ代数 $H(X;A,\phi)$ の間に自然同型が存在する。

$$H(X;A,\phi)\cong V_0(X;A,\phi)$$

例 2.8. 有限アーベル群 G と標数ゼロの $\mathbb{K}$ を考える。するとホップ代数 $A=\mathbb{K}G$ は半単純かつ余半単純である。例 2.3と定理 2.7により $\mathbb{K}H(X;G)$ を $V(X;\mathbb{K}G)\cong\mathbb{K}(GX_\circ)$ の部分空間（詳しくは、基礎的作用素の核 $V_0(X;\mathbb{K}G)$）として実現できる。その埋め込み f の具体的な形をここで述べる。混乱を避けるために $\mathbb{K}G$ の生成元とみなした元 $g\in G$ を $|g\rangle$ と書く。またサイクル $\tau\in GX_\circ$ の誘導するホモロジー類を $[\tau]\in H(X;G)$ と表すと次が成り立つ。

$$f(|[\tau]\rangle)=\sum_{[\tau]=[\tau']}|\tau'\rangle\in V_0(X;\mathbb{K}G)$$

2.2 位相的局所的安定化モデル

本稿ではトーリックコードを代数的に拡張することで位相的局所的安定化モデルの定式化を提案する。以降の章の結果に踏まえると位相的局所的安定化モデルのゼロ固有空間が位相的場の理論に拡張することがわかる。この結論は双可換ホップ代数に基づく有限経路積分とトーリックコードの関係を一般化する。

まず短い抽象的複体の圏を定義する。

定義 2.9. R 上の短い抽象的複体 X,Y を考える。X から Y への**包含写像**とは三つ組みの間の単射 $s:(X_+,X_\circ,X_-)\to(Y_+,Y_\circ,Y_-)$ であり、$x_+\in X_+,x_\circ\in X_\circ,x_-\in X_-$ に対して $[s(x_+):s(x_\circ)]=[x_+:x_\circ]$ と $[s(x_\circ):s(x_-)]=[x_\circ:x_-]$ を満たすものである。さらに次の「閉集合」条件を満たす。

- $[s(x_\circ):y_-]\neq 0$ ならば、ある $x_-\in X_-$ が存在して $y_-=s(x_-)$ が成り立つ。
- $[s(x_+):y_\circ]\neq 0$ ならば、ある $x_\circ\in X_\circ$ が存在して $y_\circ=s(x_\circ)$。

$\mathsf{SAC}_R^{\mathsf{inc}}$ は R 上の短い抽象的複体と包含写像のなす圏である。

定義 2.10. R **上の局所的安定化モデル**（local stabilizer model over R）とは基点付き有限 CW 複体と埋め込みの圏から $\mathsf{SAC}_R^{\mathsf{inc}}$ への対称モノイド関手であり、押し出し（pushout）を保つものである。

押し出しを保つという条件は物理でのいわゆる「局所性」の役割を果たす。この条件は誘導された以下のチェイン複体が完全であるということと同等である。

$$0\to C_\bullet(\Xi(K_0\cap K_1))\to C_\bullet(\Xi(K_0))\oplus C_\bullet(\Xi(K_1))\to C_\bullet(\Xi(K_0\cup K_1))\to 0.$$

定義 2.11. R 上の局所的安定化モデル Ξ を考える。Ξ が**位相的**（topological）であるとは任意の R 加群 M について次の条件を満たすことである。

- t 成分への埋め込み $i_t : K \hookrightarrow K \wedge [0,1]^+$ に対して、$H(\Xi(i_0); M) = H(\Xi(i_1); M)$ が成り立つ。

- ホモトピー同値を導く埋め込み $i : K_0 \hookrightarrow K_1$ が同型 $H(\Xi(i); M) : H(\Xi(K_0); M) \to H(\Xi(K_1); M)$ を誘導する。

命題 2.12. R 上の局所的安定化モデル Ξ が位相的であるための必要十分条件は任意の（$\mathbb{K}$ 上の）双可換ホップ代数 A と A 上の R 作用 ϕ をについて次の条件を満たすことである。

- t 成分への埋め込み $i_t : K \hookrightarrow K\wedge[0,1]^+$ に対して、$H(\Xi(i_0); A, \phi) = H(\Xi(i_1); A, \phi)$ が成り立つ。

- ホモトピー同値の埋め込み $i : K_0 \hookrightarrow K_1$ が同型 $H(\Xi(i); A, \phi) : H(\Xi(K_0); A, \phi) \to H(\Xi(K_1); A, \phi)$ を誘導する。

Proof. まず Ξ が位相的であると仮定する。双可換ホップ代数 A と A 上の R 作用 ϕ を考える。$\mathsf{Hopf}^{\mathrm{bc}}_{\mathbb{K}}$ のアーベル部分圏であり A を含む最小のものを $\mathcal{A}$ とおく。すると $\mathcal{A}$ は小さ（small）なアーベル圏である。よって Mitchell の埋め込み定理よりある可換環 $\mathbb{L}$ と fully faithful かつ exact な関手 $\iota : \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{L}}$ が存在する。忘却関手 $\mathsf{Mod}_{\mathbb{L}} \to \mathsf{Ab}$ と合成すると faithful かつ exact な関手 $\tau : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ が得られる。特に R 作用 ϕ は $\tau(A)$ を R 加群に持ち上げる。Ξ が位相的なので $\tau(H(\Xi(i_0); A, \phi)) = H(\Xi(i_0); \tau(A)) = H(\Xi(i_1); \tau(A)) = \tau(H(\Xi(i_1); A, \phi))$ が成り立つ。τ は faithful なので一つ目の条件が導かれる。二つ目の条件も同様に確かめられる。ホモトピー同値の埋め込み $i : K_0 \hookrightarrow K_1$ は同型 $\tau(H(\Xi(i); A, \phi))$ を誘導する。忘却関手 $\mathsf{Mod}_{\mathbb{L}} \to \mathsf{Ab}$ による同型の逆像は同型なので、$\iota(H(\Xi(i); A, \phi))$ は同型であり、ι が fully faithful なので $H(\Xi(i); A, \phi)$ は同型である。

逆に命題の条件を仮定する。R 加群 M は群環の構成を通じて双可換ホップ代数 $A = \mathbb{K}M$ と A 上の R 作用 ϕ を誘導する。群環の構成は fully faithful かつ exact な関手 $\mathsf{Ab} \to \mathsf{Hopf}^{\mathrm{bc}}_{\mathbb{K}}$ を誘導することに注意すると、その (A, ϕ) に対して仮定の条件を適用すると定義 2.11の条件が導かれることがわかる。 □

$\mathsf{Vec}^{\mathrm{inn}}_{\mathbb{K}}$ を $\mathbb{K}$ 上の内積付きベクトル空間と線形写像のなす圏とする。

定理 2.13. ([5, Theorem 7.3.2]) 半単純かつ余半単純な双可換ホップ代数 A とその上の R 作用 ϕ を考える。R 上の位相的局所的安定化モデル Ξ に対して、(A, ϕ) 係数の Ξ のゼロ固有空間は位相的場の理論に拡張する。正確には、対称モノイド擬関手 $Z : \mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}^{\mathrm{fin}}_{*}) \to \mathsf{Vec}^{\mathrm{inn}}_{\mathbb{K}}$ が存在して $Z(K) \cong V_0(\Xi(K); A, \phi)$ である。

Proof. 証明の概略を述べる。定理 2.7より位相的局所的安定化モデルのゼロ固有空間はマイヤー・ヴィートリス関手を与える。実際 $V_0(\Xi(K); A, \phi) \cong H(\Xi(K); A, \phi)$ であり、命題 2.12より $H(\Xi(K); A, \phi)$ は半単純かつ余半単純な双可換ホップ代数に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手である。一般にそのようなマイヤー・ヴィートリス関手は有限経路積分で位相的場の理論に拡張することを 4章で説明する。 □

4章では上記の擬関手（即ち、$\mathbb{K}^*$ のスカラーを除いて合成を保つもの）を関手に変形できるかの問題に注目する。

3　相対的な積分

本研究の目的は、有限群や有限次元ホップ代数のゲージ理論の代わりに双可換ホップ代数に基づくホモロジー代数に基づいて有限経路積分とトーリックコードの

拡張することである。その設定で有限経路積分を定式化するためにホップ代数のハール積分の相対版を導入する。

以下では $\mathbb{K}$ を任意の体とする。状態和モデルではホップ代数の表現圏の議論のために代数的閉体 $\mathbb{K}$ を扱うが、本研究では任意の $\mathbb{K}$ 上の双可換ホップ代数に基づいて表現圏を迂回する議論を組み立てる。

3.1 ホップ準同型に沿う積分

この章ではホップ代数の積分及び余積分を同時に一般化して、ホップ準同型に対する相対的な概念を導入する。

定義 3.1. （[4, Definition 3.4]）A, B を $\mathbb{K}$ 上のホップ代数とする。**ホップ準同型** $\xi : A \to B$ **に沿う右積分**（a right integral along ξ）とは次の条件を満たす線型写像 $\mu : B \to A$ である。

$$\forall a \in A, \forall b \in B \ (\ \mu(b)a = \mu(b\xi(a))\ ),$$
$$\forall b \in B \ (\ \mu(b_{(1)}) \otimes b_{(2)} = \mu(b)_{(1)} \otimes \xi(\mu(b)_{(2)})\ ).$$

ここで $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ は余積に関する Sweelder 表記である。条件式を左右反転することで同様に ξ **に沿う左積分**を定義する。ξ **に沿う積分**とは ξ に沿う右積分かつ左積分のことである。

例 3.2. 任意の ξ に対して $\mu = 0$ は ξ に沿う積分である。

例 3.3. ホップ代数 A の積分 σ を考える。すると $\mu(1) = \sigma$ を満たす $\mu : \mathbb{K} \to A$ は余単位 $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ に沿う積分である。

例 3.4. 群の準同型 $\rho : G \to H$ を考える。$\xi : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}H$ を ρ の誘導したホップ準同型とする。すると $\forall h \in H \left(\mu(h) = \sum_{\rho(g)=h} g\right)$ を満たす $\mu : \mathbb{K}H \to \mathbb{K}G$ は ξ に沿う積分である。

定義 3.5. μ を ξ に沿う積分とする。$\xi \circ \mu \circ \xi = \xi$ ならば μ は**正規化**されているという。任意の左または右積分 μ' に対して $\mu' \circ \xi \circ \mu = \mu' = \mu \circ \xi \circ \mu'$ ならば μ を**生成元**であるという。

定理 3.6. ([4, Theorem 1.1]) A, B を双可換ホップ代数、$\xi : A \to B$ をホップ準同型とする。ξ に沿う積分であり正規化された生成元のものが存在するとき、そのときに限り、次の 2 つの条件が満たされる。

1. ξ の核ホップ代数が正規化された積分をもつ。
2. ξ の余核ホップ代数が正規化された余積分をもつ。

なお、もし正規化された積分が存在すればそれは唯一である。

[4] ではもっと一般的な結果を示す。例えば、ホップ代数もしくはコンパクトリー群に対するハール積分の存在性・一意性の類似な定理を得る。なお、積分の関手性、積分とホップ準同型の可換性等を一般的な設定で議論する。

3.2 半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数

定理 3.6で双可換ホップ代数の間のホップ準同型が特定の積分を持つための必要十分条件を与えた。特にホップ準同型のドメインとコドメインが半単純かつ余半単純な有限次元のものであれば自動的に成り立つ。次章で有限経路積分モデルを定式化するためにそのような双可換ホップ代数のなす圏 $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ を導入する。

定義 3.7. $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ を半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数の圏とする。

命題 3.8. ([7, Corollary 3.4.9]) $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ は $\mathsf{Hopf}^{\mathsf{bc}}_{\mathbb{K}}$ の部分アーベル圏である。なお、$\mathsf{Hopf}^{\mathsf{bc}}_{\mathbb{K}}$ の短完全列 $A \to B \to C$ に対して $A, C \in \mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ ならば $B \in \mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ が成り立つ。

半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数に対しては次のような双対性がある。$\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$ の分離閉包とする。そのとき $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ は拡張 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ のガロア群 Γ の連続的作用を受ける有限アーベル群の圏と反変同値である。

$$(\Gamma - \mathsf{FinAb})^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{A}_{\mathbb{K}}\ ;\quad G \mapsto \mathrm{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}.$$

ここで $\mathrm{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}$ は G から $\mathbb{L}$ への Γ 作用を保つ写像の集合である。この圏同値の下で上で導入した積分は具体的に表すことができる。G, H を Γ 作用を受ける有限アーベル群とし、$\rho : G \to H$ をその作用を保つ群準同型とする。$\xi : \mathrm{Map}(H, \mathbb{L})^{\Gamma} \to \mathrm{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}$ を ρ が誘導するホップ準同型とする。すると ξ に沿う積分 $\mu : \mathrm{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma} \to \mathrm{Map}(H, \mathbb{L})^{\Gamma}$ は ρ に対する相対的なハール積分にすぎない。正確にはある $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在して $f \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{L})^{\Gamma}$ に対して $\mu(f)$ は次のように書ける。

$$(\mu(f))(h) = \lambda \cdot \sum_{\rho(g)=h} f(g),\ \forall h \in H.$$

4 有限経路積分

この章では $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手の位相的場の理論への拡張を説明する。一般にその位相的場の理論は $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ の元を除いて合成を保つ。そのような現象は群の射影表現のようにある種の障害問題を起こすが、我々はその障害類の消滅する十分条件をいくつか与える。

4.1 マイヤー・ヴィートリス関手の経路積分

$\mathsf{CW}^{\mathsf{fin}}_{*}$ を基点付き有限 CW 複体の圏とする。アーベル圏 $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手 $E : \mathsf{CW}^{\mathsf{fin}}_{*} \to \mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ を考える。即ち、E はホモトピー不変性とマイヤー・ヴィートリス公理を満たす。

空間のコスパン $\left(K_0 \xrightarrow{i_0} L \xleftarrow{i_1} K_1\right)$(例えば、コボルディズムはコスパンを誘導する）はホップ代数のコスパン $(E(K_0) \to E(L) \leftarrow E(K_1))$ を誘導する。$E(i_1)$ の積分と $E(i_0)$ を合成することで $E(K_0)$ から $E(K_1)$ への写像を得る。空間のコスパンのホモトピー同値類を射にする圏を $\mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}^{\mathsf{fin}}_{*})$ と書くとこの構成は対称モノイド擬関手（symmetric monoidal pseudo-functor）を与える。つまりコスパンの貼り合わせと合成が $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ の元を除いて両立する。その対称モノイド擬関手を E の**有限経路積分**と呼び $\hat{\mathsf{PI}}(E)$ と書く。その擬関手性のことを 4.3章で体系的に扱う。

$$\hat{\mathsf{PI}}(E) : \mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}^{\mathsf{fin}}_{*}) \dashrightarrow \mathsf{Vec}^{\mathsf{inn}}_{\mathbb{K}}$$

4.2 関係圏の拡大

アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して関係圏（relation category）$\mathsf{Rel}(\mathcal{A})$ とは $\mathcal{A}$ の対象の間の関係を射にする圏である。アーベル圏の双積（biproduct）は圏 $\mathsf{Rel}(\mathcal{A})$ の上にモノイド圏の構造を誘導する。4.1章での障害問題が生ずる根本的な理由は、ホップ準同型に沿う積分が非自明な関係圏 $\mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}})$ の拡大を誘導するためである。この章ではその圏拡大を導入する。まずホップ準同型に沿う積分とホップ準同型の生成する圏を定義する。

定義 4.1. $\mathsf{C}_{\mathbb{K}}$ を半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数の間のホップ準同型または正規化された積分から生成される圏とする。つまり、$\mathsf{C}_{\mathbb{K}}$ は半単純かつ余半単純な有限次元双可換ホップ代数と線型写像で生成される圏の部分圏であり全てのホップ準同型と正規化された積分を含む最小の部分圏である。

群 $\mathbb{K}^*{:=}\mathbb{K}\backslash\{0\}$ は掛け算で $\mathsf{C}_{\mathbb{K}}$ の射に作用する。以下では $\mathsf{C}_{\mathbb{K}}$ が $\mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}})$ の群 $\mathbb{K}^*$ による圏の拡大になっていることを説明する。記号として、ホップ準同型 $f : A \to B$ の誘導する A から B 関係を R_f と書く。なお、関係 R に対してその転置を $R^{\dagger}$ と書く。

命題 4.2. ([7, Section 8.4.2]) 次の条件で特徴付けられる対称モノイド関手 $\pi : \mathsf{C}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}})$ が存在する。

1. π は対象に対して恒等写像である。
2. ホップ準同型 f と $\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して $\pi(\lambda \cdot f) = R_f$ かつ $\pi(\lambda \cdot \mu_f) = R_f^{\dagger}$ である。
3. 誘導される関手 $\bar{\pi} : \mathsf{C}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^* \to \mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}})$ は圏同値を与える。

$H^2(\mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}^*)$ をモノイド圏 $\mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}})$ の $\mathbb{K}^*$ 係数の第 2 コホモロジーとする。（群の射影表現のように）圏拡大 π は障害類 $\mathbb{O}_{\mathbb{K}} \in H^2(\mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}^*)$ を決める。

定理 4.3. ([6, Corollary 6.2]) 体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 であるとき、そのときに限り、$\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ は消滅する。

この定理より次の性質が直ちにわかる。

系 4.4. 体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 ではなければ $H^2(\mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}^*)$ は非自明である。

4.3 持ち上げ問題

E を $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手とする。空間のコスパン $K_0 \xrightarrow{i_0} L \xleftarrow{i_1} K_1$ は $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ の中で $E(K_0)$ から $E(K_1)$ への関係を誘導する。マイヤー・ヴィートリス公理よりコスパンの張り合わせが対応する関係の合成に保たれる。従って E の拡張として対称モノイド関手 $\hat{E} : \mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}_*^{\mathrm{fin}}) \to \mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}})$ が得られる。4.1章での位相的場の理論の構成は図式 (1) の持ち上げの問題を経由して考えることができる。ここで持ち上げとは以下の可換図式を満たす対称モノイド関手のことである。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{C}_{\mathbb{K}} \arrow[r, "\text{forgetful}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathsf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{inn}} \\
\mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}_*^{\mathrm{fin}}) \arrow[r, "\hat{E}"] \arrow[ur, dashed] & \mathsf{Rel}(\mathsf{A}_{\mathbb{K}}) &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

定理 4.3より標数 2 の場合は持ち上げが存在するが、一般には不明である。その持ち上げの存在性を測るものが次の障害類である。

$$\hat{\mathbb{O}}(E) := \hat{E}^*(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}) \in H^2(\mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}_*^{\mathsf{fin}}); \mathbb{K}^*)$$

例 4.5. 低次元の空間に制限すると第 2 コホモロジー、特に障害類 $\hat{\mathbb{O}}(E)$、が消滅する。実際、$d = 0, 1$ に対して $H^2(\mathsf{Cosp}^{\simeq}_{\leqslant d}(\mathsf{CW}_*^{\mathsf{fin}}); \mathbb{K}^*)$ は自明である。なお、低次元のコボルディズムに引き戻すと同様な現象が起こる。$n = 1, 2$ に対して $H^2(\mathsf{Cob}_n; \mathbb{K}^*)$ も自明である。この観察は各々の圏の生成元・関係の記述に基づいている。

我々は以下のように障害類の消滅するための E の十分条件を得る。

定理 4.6. ([6, Theorem 7.21, 7.33]) マイヤー・ヴィートリス関手 E が次の条件のどちらか一方を満たすならば $\hat{\mathbb{O}}(E)$ は消滅する。

1. E が上あるいは下に有界なホモロジー理論である。
2. E が次元簡約（dimension reduction）である。つまり、ある $\mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ に値を持つマイヤー・ヴィートリス関手 F が存在して $E(K) \cong F(K \wedge (S^1)^+)$ である。

論文 [6] では d 次元以下の CW 複体の圏上で定義されている関手 E に対して上記の結果を拡張する。

定理 4.6の条件が満たされたとき障害類に付属するコバウンダリー方程式を具体的に解くことで次の例を得る。

例 4.7. （[6, Corollary 7.3.5]）定理の一つ目の条件を満たす例を与える。下に有界な簡約ホモロジー理論 $\widetilde{E}_\bullet$ であって有限 CW 複体 K に対して $\widetilde{E}_s(K) \in \mathsf{A}_{\mathbb{K}}$ を満たすものを考える。$q \in \mathbb{Z}$ に対して対称モノイド関手 $Z : \mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}_*^{\mathsf{fin}}) \to \mathsf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathsf{inn}}$ が存在して次を満たす。

1. 対象 K に対して $Z(K) \cong \widetilde{E}_q(K)$ である。
2. 閉コスパン $(* \to L \leftarrow *)$ に対して次の不変量を与える。

$$Z(L) = \left(\prod_{i \geqslant 0} \dim \left(\widetilde{E}_{q-i}(L) \right)^{(-1)^i} \right) \cdot 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}^*$$

例 4.8. 定理の二つ目の条件を満たす例を与える。E が次元簡約であるとする。そのとき対称モノイド関手 $Z : \mathsf{Cosp}^{\simeq}(\mathsf{CW}_*^{\mathsf{fin}}) \to \mathsf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathsf{inn}}$ が存在して次を満たす。

1. 対象 K に対して $Z(K) \cong E(K)$ である。
2. 閉コスパン $(* \to L \leftarrow *)$ に対して次の不変量を与える。ここで定理 4.6の記号を用いる。
$$Z(L) = \dim (F(L)) \cdot 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}^*$$

References

[1] Benjamin Balsam. Turaev-Viro theory as an extended TQFT. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, 2012.

[2] Robbert Dijkgraaf and Edward Witten. Topological gauge theories and group cohomology. Communications in Mathematical Physics, 129(2):393–429, 1990.

[3] Daniel S Freed, Michael J Hopkins, Jacob Lurie, and Constantin Teleman. Topological quantum field theories from compact Lie groups. In CRM proceedings and Lecture notes, volume 50, pages 367–403, 2010.

[4] Minkyu Kim. Integrals along bimonoid homomorphisms. Applied Categorical Structures, pages 1–51, 2021.

[5] Minkyu Kim. Kitaev's stabilizer code and chain complex theory of bicommutative Hopf algebras. Communications in Mathematical Physics, 385(1):291–329, 2021.

[6] Minkyu Kim. A pair of homotopy-theoretic version of TQFT's induced by a Brown functor. International Journal of Mathematics, page 2150053, 2021.

[7] Minkyu Kim. Finite path integral model and toric code based on homological algebra. PhD thesis, University of Tokyo, 2023.

[8] A Yu Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. Annals of Physics, 303(1):2–30, 2003.

[9] Catherine Meusburger. Kitaev lattice models as a Hopf algebra gauge theory. Communications in Mathematical Physics, 353(1):413–468, 2017.

[10] Mitsuhiro Takeuchi. A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras. manuscripta mathematica, 7(3):251–270, 1972.

[11] Vladimir G Turaev. Quantum invariants of knots and 3-manifolds. In Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds. de Gruyter, 2016.

[12] Péter Vrana and Máté Farkas. Homological codes and abelian anyons. Reviews in Mathematical Physics, 31(10):1950038, 2019.

[13] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. Communications in Mathematical Physics, 121(3):351–399, 1989.

[14] Edward Witten. The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian. In Geometry, Topology, & Physics, Conf. Proc. For R. Bott Including papers from the Geometry and Topology Conference, Harvard Univ., Cambridge, 1993, pages 357–422. Int. Press, 1995.