ゲージ理論とコンタクト構造

飯田暢生　(東京工業大学)*

1 コンタクト構造

この予稿において, 可微分多様体, ベクトル束やその切断, 微分形式や接続といった場合, C^∞ の範疇で考えることとする. まず, コンタクト構造 (接触構造) の定義を述べることから始める.

定義 1.1. 次元が奇数 $2n+1$ である有向可微分多様体 Y を考える. Y 上の余次元 1 接分布, すなわち, Y の接束の実階数 $2n$ の部分束 $\xi \subset TY$ がコンタクト構造であるとは, Y 上のある 1 形式 λ であって, 次の 2 つの条件を満たすものである.

1. 多様体 Y の各点 $y \in Y$ において, 接分布 ξ が与える接束の $2n$ 次元部分空間 $\xi_y \subset T_yY$ は, λ が定める線型写像 $\lambda\colon T_yY \to \mathbb{R}$ の kernel に一致している:
$$\xi = \mathrm{Ker}\lambda.$$
一般に, 余次元 1 接分布 ξ に対し, この条件を満たす 1 形式 λ は ξ の法束の実直線束としての自明化 $\lambda\colon TY/\xi \to \underline{\mathbb{R}}$ と等価である. [*1] λ の取り方には Y 上の実数値可微分関数空間 $C^\infty(Y,\mathbb{R})$ 分の不定性がある. この予稿では商束 TY/ξ の向き (ξ の coorientation とよぶ) が固定されているとする. すると, λ の不定性は Y 上の正値可微分関数空間 $C^\infty(Y,\mathbb{R}^{>0})$ に落ちる. [*2]
2. 次の, コンタクト条件とよばれる条件が満たされている:
$$\lambda \wedge (d\lambda)^n > 0.$$
すなわち, 左辺の $2n+1$ 形式が Y の向きについて正である. [*3]

このとき, λ をコンタクト形式とよぶ.

$\diamondsuit$

一般に, 可微分多様体上の余次元 1 接分布 $\xi = \mathrm{Ker}\lambda$ に対する Frobenius の可積分条件は, $\lambda \wedge d\lambda = 0$ であった. 従って, コンタクト条件は, 接分布 ξ がどの点の周りでも可積分でないことを意味している. このためしばしば, 「コンタクト構造とは奇数次元多様体上の最大限非可積分な余次元 1 接分布のことである.」と言われる.

---

* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1
e-mail: `iidanobuo1224@gmail.com`
web: `https://sites.google.com/view/iidanobuo/home?authuser=0`
有益なコメントをくださった遠藤久顕先生, 鎌田聖一先生, 古田幹雄先生, 今野北斗さん, 谷口正樹さんに感謝を申し上げる. また, 第 70 回トポロジーシンポジウムでの講演の機会をくださった, 世話人の小林毅先生, 鎌田聖一先生, 茂手木公彦先生, 山下靖先生, 張娟姫先生, 村井紘子先生に感謝申しあげる. 本研究は科研費 (課題番号:22J00407) の助成を受けたものである.
キーワード : ゲージ理論, Seiberg-Witten 理論, シンプレクティック幾何学, コンタクト幾何学

[*1] λ の存在を Y 全体で大域的には仮定しない場合もあるが, ここではそれを仮定する. 大域的存在を仮定しない場合には Y の向きづけ可能性を仮定しない場合もある.

[*2] Y が向き付けられていると仮定したので, ξ に向きを与えると ξ の coorientation が定まる. Y が奇数次元であることから, $TY = \xi \oplus TY/\xi, TY = TY/\xi \oplus \xi$ どちらの流儀でも同じ coorientation になる. よって ξ の coorientation の代わりに ξ の向きを与えても等価である.

[*3] $\lambda \wedge (d\lambda)^n > 0$ を満たすものを正のコンタクト構造, $\lambda \wedge (d\lambda)^n < 0$ を満たすものを負のコンタクト構造という流儀もあるが, それらは Y の向きを逆にすれば違いに移り合うので, ここでは常に正のコンタクト構造を考えることにする.

例 1.2. 奇数次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n+1}$ の座標を $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$ と書く．その上の 1 形式 $\lambda_{\mathrm{std}} = dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n$ の kernel

$$\xi_{\mathrm{std}} = \mathrm{Ker}\lambda_{\mathrm{std}}$$

は λ_{std} をコンタクト形式にもつコンタクト構造である．これは $\mathbb{R}^{2n+1}$ の標準的コンタクト構造とよばれる．

$\diamondsuit$

また,「コンタクト構造は, シンプレクティック構造の奇数次元の兄弟である」ということもよくいわれる．例えばコンタクト幾何とシンプレクティック幾何の共通点として, Darboux の定理によって局所的なモデルが与えられ, 従って, 局所的な不変量はなく, 大域的な現象に興味があるということが挙げられる．すなわち, 上で述べた $(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathrm{Ker}\lambda_{\mathrm{std}})$ が $2n+1$ 次元コンタクト構造の局所的なモデルを与える．文脈によって, 接分布であるコンタクト構造に興味がある場合と, 1 形式であるコンタクト形式に興味がある場合がある．例えば, Reeb 力学系を考える場合に興味があるのは後者である．コンタクトトポロジーの主要な興味の一つは, コンタクト構造のアイソトピー類の分類であり, 現在までに多くの研究がある．(コンタクト同相による分類を考える場合もあり, 一般には異なる.) また, コンタクト構造はシンプレクティック多様体の境界に, さまざまな場面で現れる．

コンタクト構造全般についての基本的な教科書としては Geiges の [7], 3 次元コンタクト構造と 4 次元シンプレクティック構造に焦点を当てた教科書としては Ozbagci-Stipsicz による [25], h 原理に焦点を当てた教科書として Chelibak-Eliashberg による [3] が挙げられる．

1.1 歴史

Geiges の教科書 [7] の序文によると, コンタクト幾何学が初めて一つのテーマとして認識されたのは,「Lie 群」にもその名を残す Sophus Lie の 1870 年代の論文「コンタクト変換の不変式論の基礎」においてである．[*4]

1983 年に Bennequin により発見された, $\mathbb{R}^3$ 上には標準的なものとアイソトピックでないコンタクト構造が存在するという驚くべき事実は, しばしばコンタクトトポロジーのはじまりと言われる．1989 年に Eliashberg は, 3 次元において, コンタクト構造は, 全く異なる挙動を示す二つのクラスに分けられるということを見出した (tight vs overtwisted dichotomy とよばれる)．一方は overtwisted とよばれるもので, overtwisted disk とよばれるある性質を持つ埋め込まれた 2 次元円板の存在により特徴づけられる．他方は tight とよばれ, overtwisted でないものとして定義される．Eliashberg は, overtwisted なコンタクト構造のアイソトピー類は, h 原理的に分類されることを示した．ここで, h 原理とは, シンプレクティック構造やコンタクト構造という微分幾何的, 微分方程式的な対象が, 下部構造であるバンドルトポロジーのレベルで分類されるというタイプの一連の結果を指す．具体的に Eliashberg が証明した事実は, 有効閉 3 次元多様体上の overtwisted コンタクト構造のアイソトピー類による分類は, 下部構造である有向 2 平面場のホモトピー類による分類と同じであるということである．

一方, tight なコンタクト構造に対してはそのような一般的な分類の結果は知られておらず, 1980 年代以降に発展したゲージ理論や擬正則曲線といった解析的手法が有効な場合がある．また, 3 次元コンタクト構造を埋め込まれた曲面を使って調べる理論も重要な役割を果たしており, convex surface theory は tight なコンタクト構造の分類理論において用いられる強力な手法である．

2002 年には 3 次元においてコンタクト構造のアイソトピー類が, オープンブック分解を正の安定化で同一視したものと 1 対 1 対応するという Giroux の対応が証明された．これは, 4 次元において, 微分幾何的対象であるシンプレクティック構造の存在が, トポロジカルな対象である Lefschetz ペンシルの存在と同値であるという Donaldson と Gompf 結

[*4] Geiges の教科書「Geiges」の序文には 1896 年と書かれているがこの論文の出版は 1875 年であるようである．D.H.Delpheneich による英訳がインターネット上で読める．L.D. Kay による「Flex Klein, Sophus Lie, contact transformations, and connexes」により詳細な経緯が書かれている．

果と比較されるべきものである. オープンブック分解は Heegaard Floer 理論と相性がよいという事情と合わせて, コンタクト構造のトポロジカル・組み合わせ的な観点からの理解が急激に進んだ.

現在発展途上である研究として, 高次元のコンタクト構造に対しても, 3 次元同様の手法がどれほど通用するか, 3 次元では見られなかった現象があるかという観点で様々な結果がある. 例えば, convex surface theory や Heegaard Floer ホモロジー, オープンブック分解の高次元版が本田公氏らにより展開されている. また大場貴裕氏により, ホモトピー型が異なる無限個の Stein 充填を持つ高次元接触多様体が与えられた.

1.2 シンプレクティック多様体の境界としてのコンタクト多様体

コンタクト構造はシンプレクティック多様体の境界に, さまざまな場面で現れ, シンプレクティック多様体を余次元 1 部分多様体に沿って切り貼りする際の, 自然な切り口やのりしろになる. とはいえ, シンプレクティック多様体の境界や, 余次元 1 部分多様体に, 勝手にコンタクト構造が誘導されるわけではない. Liouville ベクトル場とよばれるベクトル場がその近傍上にあるとき, コンタクト構造が誘導される.

定義 1.3. (X, ω) をシンプレクティック多様体とする.

1. X の開集合上定義されたベクトル場 v が Liouville ベクトル場であるとは,
$$\mathcal{L}_v \omega = \omega$$
を満たすことをいう. ここで, $\mathcal{L}_v$ はベクトル場 v についての Lie 微分を表す.
2. Y を X の余次元 1 閉部分多様体がコンタクト型 (あるいはコンタクト超曲面) であるとは, Y の環状近傍上定義された Liouville ベクトル場 v であって, Y に横断的なものが存在することをいう. このとき, シンプレクティック形式に v による内部積を施して定義される 1 形式の制限
$$\lambda_v := \iota_v \omega|_Y$$
は Y 上のコンタクト形式を与える. コンタクト条件が満たされていることは, Cartan の公式とシンプレクティック形式が定義から閉形式であることを用いて確かめられる.
3. Y が X の境界成分一つであるとする. 同様に, Y のカラー近傍上定義された Liouville ベクトル場 v であって, Y に横断的なものは Y 上のコンタクト形式を与えることが確かめられる. そのような Liouville ベクトル場 v であって, Y に横断的かつ外向きであるものが存在するとき, コンタクト多様体 $(Y, \mathrm{Ker}\lambda_v)$ は (X, ω) の凸境界である, あるいは (X, ω) は $(Y, \mathrm{Ker}\lambda_v)$ の強シンプレクティック充填であるという. 「外向き」を「内向き」に変えて同じ条件を満たす Liouville ベクトル場 v が存在するとき, コンタクト多様体 $(Y, \mathrm{Ker}\lambda_v)$ は (X, ω) の凹境界である, あるいは (X, ω) は $(Y, \mathrm{Ker}\lambda_v)$ のシンプレクティックキャップであると言われる.

$\diamondsuit$

Liouville ベクトル場の内向きと外向きという違いは, 非対称である. 例えば, 任意の閉コンタクト 3 次元多様体に対しシンプレクティックキャップが存在することが Etnyre-Honda により証明されている. 一方, Gromov-Eliashberg の定理によれば, overtwisted コンタクト 3 次元多様体は強シンプレクティック充填を持たない [*5].

閉コンタクト多様体 (Y, ξ) があるシンプレクティック多様体 X_1 の凸な境界でありかつあるシンプレクティック多様体 X_2 の凹な境界でもあるとき, 貼り合せ $X_1 \cup_Y X_2$ をシンプレクティック構造込みで構成することができる. 正確なステイトメントは例えば Etnyre によるサーベイ [4] [5] を見よ.

1.2.1 Stein 充填

コンタクト多様体を一つ固定したとき, それを境界に持つようなどういう種類のシンプレクティック多様体がありうるかという問題が考えられる. これに対しては, シン

[*5] より強く, 弱シンプレクティック充填を持たないということが示された.

プレクティック多様体にどのような付加構造を考えるか, 境界のコンタクト構造とのcompatibility 条件としてどういうものを考えるかに応じて, さまざまな結果がある. ここでは, 多くの文脈で最も良いクラスとみなされる, Stein 充填というものを定義する. Stein 充填は特に強シンプレクティック充填である. コンタクトトポロジーの視点からのStein 充填の比較的新しい解説として, Ozbagci の [24] がある. Stein 充填は, トポロジーの文脈だけでなく, 複素幾何解析の文脈でも多くの研究がある対象である.

定義 1.4. (X', J) を非コンパクト複素多様体, $f : X' \to \mathbb{R}$ を C^∞ 関数であって, exhausting(i.e. 固有かつ下に有界) かつ J-凸であるものとする. ここで, f が J-凸であるとは,

$$\omega := -d(df \circ J) \in \Omega^2(X'), \quad g := \omega(\bullet, J\bullet)$$

と定義するとき, g が Riemann 計量の定義を満たすことをいう. このとき, X' を Stein 多様体という. f の正則値 $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}^{\leq c}), \quad Y = \partial X$$

と書くと $\xi = TY \cap JTY$ (complex tangency とよばれる) は $\lambda := -df \circ J|_Y$ をコンタクト形式とする Y 上のコンタクト構造であり, $(X, \omega = d\lambda)$ を強シンプレクティック充填にもつ. Liouville ベクトル場は $\nabla_g f$ により与えられる. このとき (X, J) は (Y, ξ) の Stein 充填であるという.

$\diamondsuit$

例 1.5. $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ を

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$$

と定義する. $D^{2n} = f^{-1}(\mathbb{R}^{\leq 1})$ の境界 $S^{2n-1} = f^{-1}(1)$ に上の構成により定まるコンタクト構造を S^{2n-1} の標準的コンタクト構造とよび, ξ_{std} と書く. これは D^{2n} を Stein 充填にもつ.

他にも, Brieskorn 球面が Milnor ファイバーを Stein 充填に持つというのも基本的な例である.

2 ゲージ理論

Donaldson による対角化定理の証明は, ASD 方程式の解空間の考察に基づく, これがゲージ理論の低次元トポロジーへの応用の起源である. ASD 方程式を用いて Donaldson 不変量が構成された. 物理学者 Seiberg と Witten は, 素粒子物理学における超対称ゲージ理論の考察に基づき, Seiberg-Witten 方程式を導入し, そこから構成される Seiberg-Witten(SW) 不変量が Donaldson 不変量とある意味で等価になることを予想した.

2.1 Seiberg-Witten 不変量

ここでは, Seiberg-Witten 不変量の定義を概説する. 詳細は, Morgan の教科書 [22](二木氏による邦訳もある) を参照. [*6]

2.1.1 Seiberg-Witten 不変量のインプットとアウトプット

まず, インプットとアウトプットを数学的に正確に述べる. インプットは次の二つのデータである.

1. 連結有向閉 4 次元多様体であって, $b^+(X) \geq 2$ であるもの.
2. 実ベクトル空間

$$H^0(X;\mathbb{R}) \oplus H^1(X;\mathbb{R}) \oplus H^+(X;\mathbb{R})$$

[*6] Salamon による未出版の pdf「Spin Geometry and Seiberg-Witten Invariants」や Perutz によるレクチャーノートもある.

の向き．これは homology orientation とよばれ, Seiberg-Witten 不変量の符号を定めるためのデータである．

アウトプットとして X 上の $Spin^c$ 構造の各同型類に対し, 整数を与える関数が定まる

$$SW_X : \mathrm{Spin}^c(X) \to \mathbb{Z}.$$

これが Seiberg-Witten 不変量である．ここで定義域は X 上の $Spin^c$ 構造の同型類の集合である．

2.1.2 Seiberg-Witten 不変量の構成のあらすじ

まず, 連結有向閉 4 次元多様体 X を固定する．X 上に Riemann 計量 g と $Spin^c$ 構造 $\mathfrak{s} = [(S, \rho)]$ を固定する．*7 そして, Seiberg-Witten 方程式 (微分幾何的な記号の定義は説明しない)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(F^+_{A^t}) - (\Phi\Phi^*)_0 = \eta \\ D^+_A\Phi = 0 \end{cases}$$

の, いわゆる「解の数え上げ」により Seiberg-Witten 不変量 $SW_X(\mathfrak{s})$ が定義される．

「解の数え上げ」と言った部分をより詳しく説明する．Seiberg-Witten 方程式は, $Spin^c$ 接続 A と正のスピノル Φ の組 (A, Φ) を未知変数とする方程式である．解 (A, Φ) の空間には $U(1)$ ゲージ変換群 $C^\infty(X, U(1))$ が作用する．その商を Seiberg-Witten 方程式の解のモジュライ空間とよびここでは

$$\mathcal{M}(g, (S, \rho), \eta) = \{(A, \Phi) |\ \text{摂動項}\eta\text{付きの Seiberg-Witten 方程式の解}\ \}/C^\infty(X, U(1))$$

と書く．$b^+(X) \geq 1$ であれば, generic な η に対しこれは実次元が

$$d(X, \mathfrak{s}) := \frac{1}{4}(c_1^2(\mathfrak{s}) - 2\chi(X) - 3\sigma(X)) = e(S^+) = \mathrm{index}_{\mathbb{R}}(d^+ + d^* + D^+_A)$$

(これをモジュライ空間の virtual dimension という) である閉 C^∞ 多様体の構造を持つ．この上で適切なコホモロジー類を積分することで $SW_X(\mathfrak{s})$ が定義される．$b^+(X) \geq 2$ であれば, Riemann 計量 g, 固定された同型類内の $Spin^c$ 構造 $(S, \rho) \in \mathfrak{s}$, および, Seiberg-Witten 方程式の摂動項 η を取り替える操作の下で $SW_X(\mathfrak{s})$ の値は不変であることが示せる．

2.2 Seiberg-Witten 理論とシンプレクティック・コンタクト幾何学

この節では, Seiberg-Witten 理論と 4 次元シンプレクティック構造・3 次元コンタクト構造に関する結果を説明する．

2.2.1 シンプレクティック多様体に対する Taubes の SW 不変量の非消滅定理

SW 方程式が発見された 1994 年のうちに, Taubes は, 閉 4 次元多様体 X がシンプレクティック構造 ω を持つ場合の, SW 不変量の非消滅定理を示した．

定理 2.1. X を有向閉 4 次元多様体とする．X 上のシンプレクティック構造 ω であって X の向きと整合する (すなわち $\omega \wedge \omega > 0$ である) ものが存在するならば, ω からカノニカルに定まる $Spin^c$ 構造の同型類 $\mathfrak{s}_\omega$ に対し

$$SW_X(\mathfrak{s}_\omega) = \pm 1$$

である． □

---

*7 Seiberg-Witten 方程式を考えるためには Riemann 計量を固定し, $Spin^c$ 構造を同型類レベルではなくバンドルレベルで固定することが必要である ($\mathfrak{s}$ という記号は一つの文献の中でも, 同型類を指すときもあれば同型類をとる前のものを指すときもあるということが通常であり, どちらであるかは文脈から読み取る必要がある.)

この非消滅定理の証明を説明する前に, ω からカノニカルに定まる $Spin^c$ 構造の同型類 $\mathfrak{s}_\omega$ について説明する. ω と compatible な概複素構造 J を一つとる. スピノル束を

$$S^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}, \quad S^- = \Lambda^{0,1},$$

Cliford 積 $\rho : T^*X \oplus S^+ \to S^-$ を

$$\rho = (\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^* : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \to \Omega^{0,1}) \text{ の主表象})$$

として定義する (ここで adjoint は ω と J が定める Riemann 計量 g_J についてとる) ことで, $Spin^c$ 構造の同型類 $\mathfrak{s}_\omega$ が定まる. Tabues の非消滅定理の証明の証明のポイントは, 概 Kähler4 次元多様体上では, Taubes の摂動項とよばれる摂動項 (具体形は後述の KM 不変量の構成中の SW 方程式を参照) を付した SW 方程式に対するカノニカルな解 (A_0, Φ_0) が明示的に構成されることである.

Taubes はシンプレクティック 4 次元多様体上の Seiberg-Witten 方程式の解析をさらに発展させ, 埋め込まれた擬正則曲線の数え上げにより定義される Gromov-Taubes 不変量と Seiberg-Witten 不変量が等しくなるといういわゆる「Gr=SW」定理を証明した [28]. 後に Taubes は, そこで用いられたテクニックの 3 次元版として, Reeb 力学系の重要問題であった Weinestein 予想を, 閉 3 次元の場合に肯定的に解決した. Embedded contact homology(ECH) は Gr=SW の Gr 側の 3 次元版とみなされる. Weinestein 予想の解決の議論をさらに発展させ, Taubes は Gr=SW の 3 次元版である ECH=HM を証明した.

2.2.2 コンタクト境界を持つ 4 次元多様体に対する Kronheimer-Mrowka の不変量

Kronheimer-Mrowka は, 境界にコンタクト構造が与えられた有向コンパクト 4 次元多様体 (X, ξ) に対し, Seiberg-Witten 不変量の変種

$$KM_{(X,\xi)} : Spin^c(X, \xi) \to \mathbb{Z}/\pm 1$$

を構成した [17]. ここで, $Spin^c(X, \xi)$ は X 上の $Spin^c$ 構造であって, 境界上でコンタクト構造から定まる 3 次元 $Spin^c$ 構造との同型が与えられたものの同型類である. この空間には, $H^2(X, \partial X; \mathbb{Z})$ が自由かつ推移的に作用する. この不変量の構成は次の手順でなされる. X の境界を Y と書く. ξ の複素構造 J とコンタクト形式 λ と ξ を固定すると, Y 上に $g_Y = \lambda \otimes \lambda + \frac{1}{2} d\lambda(\bullet, J\bullet)$ という Riemann 計量が定まる. 直積 $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ を考え, それにシンプレクティック構造 $\omega_0 = \frac{1}{2}(t^2\lambda)$ および Riemann 計量 $g_0 = dt^2 + t^2 g_Y$ を付与する. ここで $\mathbb{R}^{\geq 1}$ の座標を t と書いた. 計量は, コーン上に広がっている. このコーン状の端を X に取り付けた

$$X^+ = X \cup (\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y)$$

という多様体を考える.

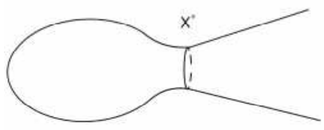

図 1　コーン状の端を取り付けた多様体 X^+

端 $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ には g_0, ω_0 から概 Kähler 構造が定まり, 従ってカノニカルな $Spin^c$ 構造および, Taubes の解 (A_0, Φ_0) がある.

Riemann 計量 g_0 を X^+ 全体に滑らかに拡張する. カノニカルな $Spin^c$ 構造は $\mathfrak{s} \in Spin^c(X, \xi)$ と貼り合わさって X^+ 上の $Spin^c$ 構造を定める. (A_0, Φ_0) の内部への滑らかな拡張をとる. $g_0, (A_0, \Phi_0)$ の内部への拡張の取り方の可能性は可縮であるという事

実を, 不変量の well-definedness を保証するのに使う. X^+ 上の, Taubes の摂動項付き Seiberg-Witten 方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(F^+_{A^t}) - (\Phi\Phi^*)_0 = \frac{1}{2}\rho(F^+_{A^t_0}) - (\Phi_0\Phi_0^*)_0 \\ D^+_A\Phi = 0 \end{cases}$$

の解 (A,Φ) であって, 端において (A_0,Φ_0) に「漸近する」ものを, 端において 1 に「漸近する」ゲージ変換の下で同一視した解のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{KM}$ を考える. ここで, 「漸近する」の定義はそれぞれ,

$$A - A_0, \Phi - \Phi_0 \in L^2_{l,A_0}, \quad u : X^+ \to U(1), 1 - u \in L^2_{l+1}$$

である. ただし, 整数 $l \geq 4$ を固定し, Sobolev ノルムを

$$\|s\|^2_{L^2_{l,A}} = \int_{X^+} |\nabla^k_A s|^2 + \cdots + |\nabla_A s|^2 + |s|^2$$

と定義し, このノルムでコンパクト台を持つ C^∞ 切断のなす空間を完備化した Sobolev 空間 $L^2_{k,A}$ を考えている. 非コンパクトな端を持つため解析的議論が必要となるが, 結論としては, $\mathcal{M}^{KM}$ は滑らかな閉多様体となり [*8], その次元は相対 Euler 数

$$d(\xi,\mathfrak{s}) := \langle e(S^+,\Phi_0), [X,\partial X]\rangle$$

で与えられることが示せる. また, モジュライ空間の向きづけは overall の符号を除いて定まる (例えば, $\mathcal{M}^{KM}$ が 0 次元で n 個の点であったとするとき, 2^n 通りの向きのうち, あるやり方で, ある向きとその逆の 2 通りにまで絞られる.) Kronheimer-Mrowka(KM) 不変量 $KM_{X,\xi}(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}/\pm 1$ が

$$KM_{X,\xi}(\mathfrak{s}) := \#\mathcal{M}^{KM}$$

と定義される. ただし, $d(\xi,\mathfrak{s}) \neq 0$ のときには, 右辺はゼロと解釈する.

(A_0,Φ_0) を固定するゲージ変換は 1 しかない (すなわち (A_0,Φ_0) が既約である) ため, $U(1)$ 対称性はない. そのため evaluate されるべきコホモロジー類にあたるもないというのがない. これが閉 4 次元多様体の SW 不変量と異なり, モジュライ空間の次元が 0 でないときに不変量の値を 0 とする理由である. また, 閉のときに SW 不変量についていた制約 $b^+ \geq 2$ にあたるものがないのも, 漸近条件を与える (A_0,Φ_0) が既約であるため可約解が存在しないからである.

3 Floer ホモロジー理論

3.1 ゲージ理論における Floer ホモロジー: 閉 4 次元多様体の不変量の (3+1)TQFT 化

Floer ホモロジー理論は, 1980 年代に Floer によって導入されて以来, 様々な変種が構成され, 現在なお, 低次元トポロジーやシンプレクティック, コンタクト幾何学に新しい成果をもたらし続けている. Floer ホモロジー理論は, ゲージ理論におけるもの (インスタントン Floer ホモロジー, SW モノポール Floer ホモロジー) とシンプレクティック幾何学におけるもの (Hamiltonian, Lagrangian intersection) の二種類に大別できる. Floer ホモロジー理論の構成は, 一言で言うと, Morse ホモロジーの構成をシンプレクティック

[*8] 正確にはここで, 横断性を確保するため, SW 方程式の第一式に, さらなる摂動項 η であって C^r 指数的減衰 $(r \geq l)$ を持つものを generic に選んで足したものを考える.

多様体上のループや path の空間や, 3 次元多様体上の接続の空間といった ∞ 次元の空間に対して行ったものである.

ゲージ理論における Floer ホモロジーとして, インスタントン Floer ホモロジー, SW モノポール Floer ホモロジーの二つがあり, それぞれ Donaldson 不変量, SW 不変量の (3+1)TQFT 化を与えている. これは閉 4 次元多様体の不変量の境界つき 4 次元多様体への拡張であって, 4 次元多様体の余次元 1 閉部分多様体に沿った切り貼りによる不変量の振る舞いを系統的に扱う方法を与えるものである. Z が (3+1)TQFT であることは次を意味する:

有向閉 3 次元多様体 Y に対し加群 $Z(Y)$ が与えられる. $Z(Y)$ と $Z(-Y)$ の間にはペアリングがあり, 「数」を返す. 閉 4 次元多様体 X に対しては「数」$Z(X)$ が与えられる. $X = X_1 \cup_Y X_2$ という余次元 1 閉部分多様体に沿った分割があるとき, 元 $Z(X_1) \in Z(Y)$, $Z(X_2) \in Z(-Y)$ が定まり, それらのペアリングにより $Z(X)$ が復元される. このように境界つき 4 次元多様体に対しては, その境界の閉 3 次元多様体に対して定まる加群の元が定まる. このようなものを, 「数」として定まる閉多様体の不変量と対比して, 「相対不変量」という.

ただし実際のインスタントン, モノポール Floer ホモロジーはゲージ対称性に由来する群作用について同変理論として定式化されるという事情のため, 複数種類の Floer ホモロジー群を組み合わせて閉 4 次元多様体の不変量が扱われる場合がある. そのためここで説明した TQFT は Floer 理論の説明としては簡略化されすぎたものである.

3.2 KMOS コンタクト不変量: SW モノポール Floer ホモロジー類としてのコンタクト不変量

境界にコンタクト構造を持つ 4 次元多様体 (X, ξ) に対し, Kronheimer-Mrowka の不変量が, 符号を除いて定まる整数として定義されるのであった. TQFT としての SW モノポール Floer ホモロジーの枠組みから見ると, KM 不変量は, 境界付き 4 次元多様体 X の情報と境界 $Y = \partial X$ 上のコンタクト構造 ξ の情報の混合物である. 言い換えると, X, ξ に対しそれぞれ Y, $-Y$ の Floer ホモロジー群に値を持つ不変量が定まり, そのペアリングとして KM 不変量が復元される. コンタクト構造 ξ に対して定まるのが KMOS コンタクト不変量

$$c_{HM}(\xi) \in \check{HM}_\bullet(-Y, \mathfrak{s}_\xi)$$

である [15]. その構成は, 相対 SW 不変量の構成と並行している. 境界付き多様体 X の相対 SW 不変量を, シリンダー状に延びた端を境界に沿って X に取り付けて, Chern-Simon-Dirac(CSD) 汎関数の臨界点 (=3d SW 解のゲージ同値類) の線型結合 (係数がその臨界点に漸近する 4dSW 解の個数の数え上げ) として与えられる. それと同様に, KMOS コンタクト不変量はコーン $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ にシリンダー状に延びた端 $\mathbb{R}^{\leq 1} \times Y$ を境界に沿って取り付けて, CSD 臨界点の線型結合として定義される. 各臨界点の係数は, シリンダー状の端でその臨界点に漸近し, コーンの方では Taubes のに漸近するような 4dSW 解の個数の数え上げである. 正確には, Kronheimer-Mrowka による SW モノポール Floer ホモロジーの構成 [18] では, $U(1)$ 同変理論を実現するために, 実ブローアップされた SW 方程式を考える.

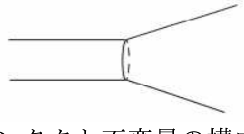

図 2　KMOS コンタクト不変量の構成

3.3 HM=ECH=HF とコンタクト不変量

SW モノポール Floer ホモロジー (HM) には, それと同型であることが知られている Floer ホモロジーがもう二つある. 一つが, Gr=SW のところで出てきた embedded contact homology(ECH) である. これは, Reeb 力学系の周期軌道の形式的積を生成元とし, 埋め込まれた擬正則曲線の数えあげで微分を定義することで構成される. もう一つが, Ozsváth-Szabó の展開した Heegaard Floer ホモロジー (HF) である. Heegaard Floer ホモロジーは, Atiyah-Floer 予想の SW 版のシンプレクティック側に当たるものとして, そ

して SW モノポール Floer ホモロジーのよりトポロジカル・組み合わせ的な記述を与えることを念頭において導入された.

HM と同じく ECH, HF にもコンタクト不変量が定義される. HM ではコンタクト構造を微分幾何的に扱い, コーン状の端を持つ多様体上の SW 方程式の解析により KMOS コンタクト不変量が定義されるのだった. ECH のコンタクト不変量は「空集合」が定める生成元により与えられる. HF のコンタクト不変量は, オープンブック分解を用いて与えられ, いくつかの等価な定義がある.

同型 HM=ECH およびその下でのコンタクト不変量の対応は Taubes により証明された. 同型 ECH=HF およびその下でのコンタクト不変量の対応は Colin-Ghiggini-Honda により証明された:

$$HM \overset{Taubes}{=} ECH \overset{CGH}{=} HF$$

$$c_{HM}(\xi) \overset{Taubes}{=} c_{ECH}(\xi) \overset{CGH}{=} c_{HF}(\xi).$$

同型 HM=HF の別の証明が Kutulhan-Lee-Taubes により与えられており, その証明においても途中で embedded contact homology の変種を経由する. コボルディズム写像のレベルでの一致は未だ示されていない.

4 Floer ホモトピー理論

4.1 古田の有限次元近似と Bauer-Furuta 不変量

1994 年に SW 理論が登場して数年のうちに, 古田は, SW 方程式の有限次元近似という手法を導入し, それを用いて有名な 10/8 不等式を証明した [6]. この有限次元近似の手法を用いて, Bauer と古田の共著論文において閉 4 次元多様体に対する Bauer-Furuta(BF) 不変量が構成された [2].

定理 4.1. X を $b_1(X) = 0$ である有向閉 4 次元多様体とし, $\mathfrak{s}$ をその上の $Spin^c$ 構造とする. このとき, X 上の SW 方程式の有限次元近似により, $U(1)$ 同変基点付き安定ホモトピー類

$$BF(X, \mathfrak{s}) : (\mathbb{R}^{M-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{N+\frac{c_1^2(\mathfrak{s})-\sigma(X)}{8}})^+ \to (\mathbb{R}^M \oplus \mathbb{C}^N)^+$$

が定まる. ここで, $U(1)$ は $\mathbb{R}$ には自明に作用し, $\mathbb{C}$ には掛け算で作用する. $+$ は一点コンパクト化を表す. $U(1)$ 同変基点付き安定ホモトピー類が定まるとは, この写像が十分大きな自然数 M, N に対して定義され, さらにそのような M, N の取り方を変えたとき, $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ をサスペンションすることで up to $U(1)$ 同変ホモトピーで移り合うということを指す. □

さらに $\mathfrak{s}$ が $Spin$ ならば, $BF(X, \mathfrak{s})$ は $U(1)$ より大きな $Pin(2) = S^1 \cup jS^1 \subset Sp(1)$ の対称性を持ち, これに $Pin(2)$ 同変 K 理論を適用することで 10/8 不等式が示された. BF 不変量は, SW 不変量の (安定) ホモトピー論的精密化である. もう少しラフにいうと, SW 不変量と BF 不変量の関係は, 写像度と写像のホモトピー類の関係に喩えられる. 実際には $U(1)$ 作用込みで見る必要があるためこの説明は簡略化しすぎである. 一方, コンタクト境界の KM 不変量の設定では $U(1)$ 作用がないため, 後述する筆者が構成した BF 型不変量の写像度が KM 不変量であるという主張はそのままの意味で正しい.

4.2 Manolescu の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプと相対 Bauer-Furuta 不変量

Floer ホモトピー理論の根幹にある問題は, 「ホモトピー群あるいはホモロジー群が Floer ホモロジーになるような空間 (Floer ホモトピータイプ) を構成せよ.」というものである. この空間が Floer ホモロジーの精密化を与える. そして, 一般コホモロジー理論やコホモロジー作用素といったホモトピー論の道具を適用して, Floer ホモロジーでは届かない情報を取り出そうという目的意識がある. Floer ホモトピーという 考え方を提唱したのは Cohen-Jones-Segal[6] である. 現在, Floer ホモトピータイプの構成が実現された

ものとして, Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプ (Manolescu), Khovanov/odd Khovanov/Bar-Natan ホモトピータイプ (Lipshitz-Sarkar/Sarkar-Scaduto-Stoffregen/佐野岳人), Hamilton Floer ホモトピータイプ (Abouzaid-Blumberg), knot Floer ホモトピータイプ (Sarkar-Manolescu) がある.

この予稿で解説するのは Manolescu による Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプである. Manolescu は, Bauer-Furuta 不変量の TQFT 化として, Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプと相対 Bauer-Furuta 不変量を定式化した [20]. 技術詳細に目をつぶると, この枠組みは次を与える *9:

$Spin^c$ 構造が与えられた閉 3 次元多様体 $(Y, \mathfrak{s})$*10に対し, 「S^1 作用つき ($Spin$ ならば $Pin(2)$ 作用付き) 基点付き空間」$SWF(Y, \mathfrak{s})$ であって, その (S^1 同変 reduced) ホモロジーが SW モノポール Floer ホモロジー $\check{HM}_\bullet(Y, \mathfrak{s})$ であるものを与える. 境界付き $Spin^c$ 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s}_X)$ であって $b_1(X) = 0$ であるものに対し, 相対 BF 不変量

$$BF(X, \mathfrak{s}_X) : (\mathbb{R}^{-b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^{\frac{c_1^2(\mathfrak{s}_X) - \sigma(X)}{8}})^+ \to SWF(\partial X, \mathfrak{s}_X|_{\partial X})$$

が S^1 同変 ($Spin$ ならば $Pin(2)$ 同変) 基点つき安定ホモトピー類として定まる. さらに, 双対ペアリング

$$\eta : SWF(Y, \mathfrak{s}) \wedge SWF(-Y, \mathfrak{s}) \to S^0$$

があり, 閉 4 次元多様体の余次元 1 閉多様体に沿った分割 $X = X_1 \cup_Y X_2$ を考えるとき, X_1, X_2 の相対不変量のペアリングとして閉 4 次元多様体の BF 不変量が復元される. また, 相対 BF 不変量はコボルディズムに対しても定義され, 合成則が成り立つ.

Manolescu の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプの構成では, 古田の有限次元近似 (の 3 次元版) と Conley 指数理論が用いられる.

5 Floer ホモトピー理論とコンタクト構造: 筆者の周辺の研究

5.1 BF 版 KM 不変量 (筆者)

筆者は, KM 不変量の BF 版を構成した [8].

定理 5.1. (筆者 [8]). X をコンパクト有向 4 次元多様体であって, $b_3(X) = 0$ であるものとする. を X の境界上にコンタクト構造 ξ が与えられているとする. $\mathfrak{s}$ を X 上の $Spin^c$ 構造であって, 同型 $\mathfrak{s}|_{\partial X} \to \mathfrak{s}_\xi$ が与えられているものとする.

このとき, KM 不変量の設定での SW 方程式の有限次元近似により, 次の性質を持つ不変量

$$\Psi(X, \xi, \mathfrak{s}) \in \pi^{st}_{d(\xi,\mathfrak{s})}(S^0)/\pm 1$$

が構成される. ここで,

$$\pi^{st}_d(S^0) = \mathrm{colim}_{N\to\infty}\, \pi_{N+d}(S^N) = \mathrm{colim}_{N\to\infty}[S^{N+d}, S^N]_*$$

は球面の d 次の安定ホモトピー群である.

---

*9 より正確な不変量の定式化には, $S^1/Pin(2)$ 同変版 Spanier-Whitehead 圏を考える. Spanier-Whitehead 圏とは, 基点付きホモトピータイプと, その形式的 desuspension の次元というデータの組を object とし, その間の連続写像の安定ホモトピー類を morphism とする圏であった. $SWF(Y, \mathfrak{s})$ はその object, 相対 BF 不変量はその morphism として定式化される. ここでは morphism は十分次元の大きなサスペンションを省略して表記する

*10 正確には $b_1(Y) = 0$ が課される. $b_1(Y)$ がゼロではない場合への拡張の試みとして, Kronheimer-Manolescu[19], Khandhawit-Lin-Sasahira [13][14], Sasahira-Stoffregen[27] がある. また, Khandhawit は, 相対 Bauer-Furuta 不変量の構成に slice の取り方に対するギャップを修正した (double-Coulomb スライス)[12].

1. (KM 不変量の回復). $d(\xi,\mathfrak{s})=0$ のとき, $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ の写像度は $KM_{(X,\xi)}(\mathfrak{s})$ である．すなわち, 写像度が与える同型 $\pi_0^{st}(S^0)\cong\mathbb{Z}$ の下で $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ と $KM_{(X,\xi)}(\mathfrak{s})$ は対応する．
2. (非消滅定理)*11 (X,ω) が $(\partial X,\xi)$ の強シンプレクティック充填であるとする *12. このとき, $d(\xi,\mathfrak{s}_\omega)=0$ であり, さらに,
$$\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})=\pm[id]\in\pi_0^{st}(S^0)$$
である．
3. (連結和公式) $(X_1,\mathfrak{s}_1)$ を閉 $Spin^c$ 4 次元多様体であって $b_1(X_1)=0$ であるものとし, $(X_2,\xi,\mathfrak{s}_2)$ を境界にコンタクト構造をもつ 4 次元多様体であって, $b_3(X_2)=0$ であり, $\mathfrak{s}_2\in Spin^c(X_2,\xi)$ が与えられたものとする．このとき,
$$BF(X_1,\mathfrak{s}_1)\wedge\Psi(X_2,\xi,\mathfrak{s}_2)=\Psi(X_1\#X_2,\xi,\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2)$$
が成り立つ．ここで $BF(X_1,\mathfrak{s}_1)$ は $U(1)$ 作用を忘れた BF 不変量であり,
$$\wedge:\pi^{st}_{d(\mathfrak{s}_1)+1}(S^0)\times\pi^{st}_{d(\xi,\mathfrak{s}_2)}(S^0)\to\pi^{st}_{d(\mathfrak{s}_1)+d(\xi,\mathfrak{s}_2)+1}(S^0)=\pi^{st}_{d(\xi,\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2)}(S^0)$$
はウェッジ積である．

□

ここで, $\mathfrak{s}_\xi$ は平面場 ξ から定まる $Spin^c$ 構造である．通常の BF 不変量は $U(1)$ 同変 (Spin なら $Pin(2)$ 同変) であったが, コンタクト境界の設定ではそのような群作用はない．漸近条件として端に置いている Taubes の解が既約だからである．

KM 不変量は自明であるが, 新しい不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ は非自明であるような例はこれらの性質から容易に与えることができる．たとえば K3 曲面に穴を開けた $K3\#D^4$ がそうである．

5.1.1 不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ の構成: 有限次元近似

不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ の構成は, 閉 4 次元多様体上の SW 方程式の有限近似を, コーン状の端を持つ多様体 X^+ 上に適用できるように変更を加えたものである．あらすじを説明する．$l\geq 4$ とし, 十分小さい重み $\alpha>0$ 付きの Sobolev 完備化の下で, X^+ 上で大域的スライス $d^{*\alpha}$ 付きの Seiberg-Witten 方程式 (KM 同様の Taubes の摂動項も付ける)
$$L^2_{l,\alpha}(X^+;i\Lambda^1\oplus S^+)\to L^2_{l-1,\alpha}(X^+;i\Lambda^0\oplus i\Lambda^+\oplus S^-)$$
を考える．これを $L+C:V\to W$ と書く．L は linear part, C は quadratic part である．解のモジュライ空間は, 値域の 1 点の逆像と同一視され, モジュライ空間のコンパクト性は, それが十分大きな半径 $R>0$ を持つ球体に含まれることを意味する．ここで, スライス $d^{*\alpha}$ をつけることとゲージ変換群で割ることが等価であることをいうのに $b_3(X)=0$ という技術的仮定を使う．値域側の有限次元部分空間の増大列
$$\mathrm{Im}L^\perp\subset W_1\subset\cdots\subset W_n\subset W_{n+1}\subset\cdots\subset W$$
を適切に選ぶ．直交射影を $P_n:W\to W_n$ と書く．増大列
$$\mathrm{Ker}L\subset V_1\subset\cdots\subset V_n\subset V_{n+1}\subset\cdots\subset V$$
を逆像 $V_n=L^{-1}W_n$ として定義する．

*11 これは, KM 不変量の対応する非消滅定理と 1. から直ちに従う．

*12 より弱い条件である弱シンプレクティック充填に対しても成り立つ．

$L+P_nC : V_n \to W_n$ は SW 方程式の「有限次元近似」である．モジュライ空間のコンパクト性の帰結として, 十分大きな n および適切に選んだ点 $w \in W_n$ に対し,

$$L+P_nC : S_R(V_n) \to W_n \setminus w$$

は well-defined となる．ここで, $S_R(V_n)$ は V_n 内の半径 R の球面である．番号 n を大きくして有限次元近似の精度を上げるとき, この写像の変化は恒等写像のサスペンションである．この写像 $L+P_nC$ の安定ホモトピー類が不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ である．

閉の場合にはなかった解析的困難がある．有限次元近似のためには重み付き Sobolev 空間を使う (KM は重み付き Sobolev 空間を使っていなかった)．quadratic part C のコンパクト性を保証するために必要な Rellich の定理が成り立たないからである．KM は解の指数的減衰を示しており, 重みを十分小さくしておけば, 重み付き Sobolev 空間を考えてもモジュライ空間は同じになる．また, $d^{*\alpha}$ が大域的スライスを与えることを示す議論も必要である．

5.2 不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ の応用 (筆者-Mukherjee-谷口, 筆者-今野-谷口)

ここでは KM 版 BF 型不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ の二つの幾何学的応用を述べる．ホモトピカルな不変量の強みとして, 次が挙げられる．

1. ホモトピー論, 一般コホモロジー理論を適用できる．特に同変理論を考えることにより著しい応用が得られる (Donaldson の対角化定理の別証明, 古田の 10/8 不等式, Froyshov 型不変量, Manolescu の三角形分割可能予想の解決などはそのような例と見なすことができる)．
2. 数的な不変量は自明だがホモトピカルな不変量は非自明な場合がある．
3. 横断性に関する技術的困難が回避できる．例えば同変理論を展開するのが容易である．

ここで説明する応用はいずれも 2. にもとづく．不変量の非自明性から SW 解の存在がわかり, SW 解の存在から埋め込まれた曲面の存在に対して障害を与えるという議論がポイントである．いずれも元の KM 不変量では証明が回らないものである．

一つ目の結果は筆者-Mukherjee-谷口 [10] による結び目の H-slice 性の障害である．

定理 5.2. (筆者-Mukherjee-谷口 [10])．$K \subset S^3$ を最大 Thurston-Bennequin 数 $TB(K)$ が正である結び目とする．このとき, K は $K3$ において H-slice でない．すなわち, $K3$ から小さな 4 次元円板を切り取って得られる多様体 $\mathring{K}3 = K3 \setminus \mathrm{int} D^4$ に C^∞ かつ proper に埋め込まれた 2 次元円板 $D = D^2 \hookrightarrow \mathring{K}3$ であって, $\partial D = K$ かつ $[D] = 0 \in H_2(\mathring{K}3;\mathbb{Z})$ であるものは存在しない． □

$K3$ の代わりに, 楕円曲面 $E(2n)$, およびその 3 個までの連結和 $E(2n_1)\#E(2n_2)$, $E(2n_1)\#E(2n_2)\#E(2n_3)$ やその任意回のブローアップでも同じ結果が成り立つ．証明のアイディアは安井弘一氏の議論 [29] に触発されたものである．

二つ目の応用として, 筆者-今野-谷口 [9] は, 不変量 $\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ を用いて, 種数評価の結果を与えた．$\Psi(X,\xi,\mathfrak{s})$ は境界にコンタクト構造をもつ 4 次元多様体に対する不変量であるが, この種数評価は閉 4 次元多様体に対するものである．

定理 5.3. (筆者-今野-谷口 [9])．X を有向閉 C^∞ 多様体であって $b_1(X)=0$ であるものとし, $\mathfrak{s}$ を X 上の $Spin^c$ 構造とする．$U(1)$ 作用を忘れた BF 不変量 $BF(X,\mathfrak{s})$ が非自明であるとする．$\Sigma \subset X$ を滑らかに埋め込まれた連結有向閉曲面であって, 種数 $g(\Sigma)$ が正であるものとする．このとき,

$$|c_1(\mathfrak{s})[\Sigma]| + [\Sigma]^2 \leq 2g(\Sigma)$$

が成り立つ □

adjunction 不等式に比べ, 種数として 1 だけ評価が弱くなっている一方, 負の自己交叉を持つ曲面に対しても, SW 単純型の仮定なしに成り立つ．さらに, Bennequin 不等式の変種も与えた．

証明のアイディアは, Kronheimer-Mrowka の adjunction 不等式 [16], Mrowka-Rollin の一般化された Thurston-Bennequin 不等式 [23] の議論に触発されたものである.

5.3 SW 安定ホモトピーコンタクト不変量 (筆者-谷口)

筆者-谷口 [11] は, Manolescu の SW 安定ホモトピータイプの枠組みを用いることで, 安定ホモトピー版の KMOS コンタクト不変量を定式化した.

定理 5.4. (筆者-谷口 [11]) (Y, ξ) を閉 3 次元コンタクト多様体であって, $b_1(Y) = 0$ であるものとする. このとき, コーン $\mathbb{R}^{\geq 1} \times Y$ 上で APS 境界条件付きの SW 方程式の有限次元近似を行うことで, 不変量

$$\Psi(\xi) : S^0 \to \Sigma^{d_3(Y,\xi)+\frac{1}{2}} SWF(-Y, \mathfrak{s}_\xi)$$

が定まる. ここで $d_3(Y, \xi) \in \mathbb{Q}$ は有向 2 平面場に対する Gompf の有理数値不変量である.

さらに次の 貼り合せ公式が成り立つ. X を境界にコンタクト構造 ξ が与えられた有向コンパクト 4 次元多様体であって, $b_3(X) = 0$ かつ $b_1(\partial X) = 0$ であるものとする. X 上の $Spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}_X$ であった同型 $\mathfrak{s}_X|_{\partial X} \to \mathfrak{s}_\xi$ が与えられたものが固定されているとする. このとき,

$$\eta \circ (BF(X, \mathfrak{s}_X) \wedge \Psi(\xi)) = \Psi(X, \mathfrak{s}_X, \xi)$$

が成り立つ. η は Manolescu の双対ペアリングであり, $BF(X, \mathfrak{s}_X)$ は $U(1)$ 作用を忘れた相対 Bauer-Furuta 不変量, 右辺は筆者の不変量である. □

構成の解析的困難として, 境界とコーン状の端の両方がある状況で, double Coulomb スライスの類似を構成することが挙げられる. 貼り合せ公式の証明は, Manolescu[21], Khandhawit-J.Lin-Sasahira[14] によるコンパクト 4 次元多様体に対する貼り合せ公式をコーン付きの場合に少し修正することで得られる.

5.4 SWF ホモトピー transverse knot 不変量 (筆者-谷口, in progress)

p を素数とする. Baraglia-Hekmati により $\mathbb{Z}/p$ 同変 Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプの理論が展開された [1]. この枠組みを用いて, 筆者-谷口 (in progress) はコンタクト不変量の $\mathbb{Z}/p$ 同変版として, 横断的結び目の不変量を構成した. コンタクト 3 次元多様体 (Y, ξ) 内の結び目の特別なクラスとして, コンタクト平面に常に接している Legendre 結び目と, コンタクト平面に常に横断的である横断的結び目があるが, ここで考えるのは後者である.

定理 5.5. (Y, ξ) を閉コンタクト 3 次元多様体であって, $\mathbb{Z}HS^3$ であるものとする. $K \subset Y$ を transverse 結び目とする. このとき, 各素数 p に対し, ホモトピカルな transverse knot 不変量

$$\Psi_p(\xi, K) : S^0 \to \Sigma^{d_3(\Sigma_p(K),\tilde{\xi})+\frac{1}{2}} SWF(-\Sigma_p(K), \mathfrak{s}_{\tilde{\xi}})$$

が定まる. ここで, $\Sigma_p(K)$ は $\mathbb{Z}/p$ 巡回分岐被覆であり, $\widetilde{\xi}$ はその上に Plamenevskaya の構成 [26] により ξ から誘導されるコンタクト構造である. $SWF(-\Sigma_p(K), \mathfrak{s}_{\tilde{\xi}})$ は Baraglia-Hekmati の $\mathbb{Z}/p$ 同変 Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピータイプである. □

この不変量の性質および応用については講演で述べる予定である.

参考文献

[1] David Baraglia and Pedram Hekmati, *Equivariant seiberg-witten-floer cohomology* (2021), available at `arXiv:2108.06855`.

[2] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19. MR2025298

[3] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. Symplectic geometry of affine complex manifolds. MR3012475

[4] Yakov M. Eliashberg and William P. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series, vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR1483314

[5] John Etnyre, *Lectures on contact geometry in low-dimensional topology* (2006), available at `arXiv:0610798`.

[6] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478

[7] Hansjörg Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2397738

[8] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta type refinement of Kronheimer-Mrowka's invariant for 4-manifolds with contact boundary* (2019), available at `arXiv:1906.07938`.

[9] Nobuo Iida, Hokuto Konno, and Masaki Taniguchi, *A note on generalized Thurston-Bennequin inequalities*, Internat. J. Math. **33** (2022), no. 14, Paper No. 2250089, 8. MR4536259

[10] Nobuo Iida, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi, *An adjunction inequality for the bauer-furuta type invariants, with applications to sliceness and 4-manifold topology* (2021), available at `arXiv:2102.02076`.

[11] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-witten floer homotopy contact invariant* (2020), available at `arXiv:2010.02132`.

[12] Tirasan Khandhawit, *A new gauge slice for the relative Bauer-Furuta invariants*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 3, 1631–1655. MR3352245

[13] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira, *Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2027–2114. MR3784516

[14] ———, *Unfolded seiberg-witten floer spectra, ii: Relative invariants and the gluing theorem* (2018), available at `arXiv:1809.09151`.

[15] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, 457–546. MR2299739

[16] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808. MR1306022

[17] ———, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math. **130** (1997), no. 2, 209–255. MR1474156

[18] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043

[19] Peter B. Kronheimer and Ciprian Manolescu, *Periodic floer pro-spectra from the seiberg-witten equations*, 2002.

[20] Ciprian Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$*, Geom. Topol. **7** (2003), 889–932. MR2026550

[21] ———, *A gluing theorem for the relative Bauer-Furuta invariants*, J. Differential Geom. **76** (2007), no. 1, 117–153. MR2312050

[22] John W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Mathematical Notes, vol. 44, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. MR1367507

[23] Tomasz Mrowka and Yann Rollin, *Legendrian knots and monopoles*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1–69. MR2199446

[24] Burak Ozbagci, *On the topology of fillings of contact 3-manifolds*, Interactions between low-dimensional topology and mapping class groups, 2015, pp. 73–123. MR3609904

[25] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, Geom. Topol. **8** (2004), 311–334. MR2023281

[26] Olga Plamenevskaya, *Transverse knots, branched double covers and Heegaard Floer contact invariants*, J. Symplectic Geom. **4** (2006), no. 2, 149–170. MR2275002

[27] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen, *Seiberg-witten floer spectra for $b_1 > 0$*, 2021.

[28] Clifford Henry Taubes, *Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds* (Richard Wentworth, ed.), First International Press Lecture Series, vol. 2, International Press, Somerville, MA, 2000. MR1798809

[29] Kouichi Yasui, *Geometrically simply connected 4-manifolds and stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **23** (2019), no. 5, 2685–2697. MR4019901