ρ-多様体の上のある Q コホモロジー類の構成

原子 秀一 (東京大学大学院数理科学研究科)*

本研究は科研費 (課題番号:22J13678,22KJ0912) の助成を受けたものである。

1 序

超幾何 (supergeometry) とは大まかにいえば、座標どうしの積が可換とは限らず、積の順番を交換した際に -1 が現れうるような幾何を指す。超幾何は素粒子物理におけるボソンとフェルミオンの間の超対称性 (supersymmetry, SUSY) を記述することを動機としている。反対称な座標に対応するフェルミオンの数学的な議論としては、たとえば F. A. Berezin や G. I. Kats[2, 3] によってフェルミオンの上の積分、すなわち Berezin 積分が導入された。超幾何における多様体の定式化としては主に G^∞-超多様体、GH^∞-超多様体、H^∞-超多様体、次数付き超多様体が知られている。G^∞-、GH^∞-、および H^∞-超多様体とは、通常の Euclid 空間の代わりに Grassmann 代数を用いた superpoint の空間の上の解析を考え、それを局所的に貼り合わせて得られるものである。一方で、次数付き超多様体は代数幾何的な定式化とも呼ばれ、多様体の上の関数のなす代数を値とする局所環付き空間を考え、この可換代数を超可換代数に拡張して得られるものである。これらの定式化は、superpoint の空間に DeWitt 位相を課した上ですべて次数付き超多様体と等価となることが知られている [1]。本講演では主に代数幾何的な定式化を用いる。

超可換代数や超 Lie 代数における $\mathbb{Z}_2$ 次数付きの条件を一般化した代数として ρ-可換代数や ρ-Lie 代数の概念が考えられている。ρ-可換代数 [4, 7] は ϵ-可換代数 [14]、(Γ, λ)-可換代数 [8]、概可換代数 [6] などと呼ばれており、ρ-Lie 代数は colour (超) 代数 [13] とも呼ばれている。ここでは ρ-可換代数および ρ-Lie 代数という呼び方を採用する。これらは M. Scheunert によって後述の形で明示的に導入され、Ado の定理が ρ-Lie 代数の設定でも成り立つことが示されている [14]。その後 Y. Kobayashi と S. Nagamachi[10, 11] によって、ρ-可換代数の元を要素に持つ行列代数とその上の行列式やトレース、Berezinian が導入された [10]。さらに、超幾何における superpoint のなす空間とその上の G^∞ な関数に相当するものを ρ-可換代数の上で議論している [11]。ここで導入された行列式、トレース、Berezinian は T. Covolo と J.-Ph. Michel によって可換因子や積の取り替えの影響も含めた圏論的な特徴付けが与えられている [8]。また、P. J. M. Bongaarts と H. G. J. Pijls や C. Ciupală によって量子平面の上の微積が代数的に議論されている [4, 7]。

本講演では超多様体の一種である Q 多様体における Q コホモロジー群およびモジュ

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
e-mail: `harako@ms.u-tokyo.ac.jp`
2010 Mathematics Subject Classification: 58A50, 57R20, 16W50, 17B75, 53D17
キーワード：Graded manifolds, Q-manifolds, graded algebras, modular classes

ラー類の概念について紹介し、これらを ρ-可換代数に拡張した ρ-多様体、ρ-Q 多様体とモジュラー類についての結果を示す。以下の内容は主に [9] に基づく。

2 超多様体と Q 多様体

積の対称性および反対称性は、統一的に次数付き代数の次数付き可換性として記述される。G をアーベル群としたとき **G-次数付き代数 (G-graded algebra)** とは、代数の構造をもつ次数付きベクトル空間 $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$ であって、任意の $f \in A_i$ および $g \in A_j$ に対して $fg \in A_{i+j}$ を満たすものをいう。$f \in A$ が**斉次 (homogeneous)** であるとはある $i \in G$ が存在して $f \in A_i$ となることであり、このとき f の **(G-) 次数 ((G-)degree)** は i であるという。斉次元 f の次数を $|f|$ と書く。

$\mathbb{Z}_2$-次数付き代数のことを**超代数 (superalgebra)** といい、$|f| = 0$ を満たす元を **even** な元、$|f| = 1$ を満たす元を **odd** な元という。さらに超代数 A であって、任意の斉次元 $f, g \in A$ について

$$fg = (-1)^{|f||g|} gf$$

を満たすものを**超可換代数 (supercommutative algebra)** という。

代数幾何的な定式化の動機は通常の滑らかな多様体が局所環付き空間の言葉で特徴づけられることによる。たとえば、次の 2 つの事実が知られている。ここでは、滑らかな多様体 M について、M の開部分集合にその上の滑らかな関数を対応させる層を $\mathcal{C}^\infty_M$ と書く。

補題 2.1. $(M, \mathcal{O})$ を可換代数の圏に値をもつパラコンパクト Hausdorff 空間 M の上の局所環付き空間とする。次は同値である。

(1) M は n 次元の滑らかな多様体で $(M, \mathcal{O}) \cong (M, \mathcal{C}^\infty_M)$ である。
(2) $(M, \mathcal{O})$ は局所的に $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})$ に同型である。すなわち、各点 $p \in M$ においてある開近傍 $p \in U \subset M$ が存在して、同型 $\mathcal{O}(U) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。

補題 2.2. M, N を滑らかな多様体とする。滑らかな写像 $M \to N$ たちと局所環付き空間の準同型 $(M, \mathcal{C}^\infty_M) \to (N, \mathcal{C}^\infty_N)$ たちの間には 1 対 1 対応が存在する。

次数付き多様体としての超多様体は多様体の局所的な関数のなす代数を超可換代数に置き換えることで得られる。

定義 2.3. 次元 (n, m) の超多様体とは局所環付き空間 $(M, \mathscr{A})$ であって、次のを満たすものである。

(1) M は n 次元の滑らかな多様体である。
(2) 任意の $p \in M$ に対しある座標近傍 $p \in U$ および切断 $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+m} \in$

$\mathscr{A}(U)$ が存在し

$$\mathscr{A}(U) \cong C^\infty(U) \otimes \wedge^\bullet \langle x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+m} \rangle$$

となる。

$m = 0$ のときは通常の滑らかな多様体に他ならない。(2) のような座標近傍 U においては、U の通常の滑らかな座標を $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ としたとき

$$x^i x^j = \begin{cases} x^j x^i & (1 \leq i \leq n \text{ または } 1 \leq j \leq n \text{ のとき}), \\ -x^j x^i & (n+1 \leq i, j \leq n+m \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって関数環 $\mathscr{A}(U)$ は超可換代数の構造をもつ。

超多様体におけるベクトル場も代数的な特徴付けにより定義される。超多様体 $(M, \mathscr{A})$ の上のベクトル場 X とは代数 $\mathscr{A}(M)$ の上の超導分 (superderivative)、すなわち任意の $f, g \in \mathscr{A}(M)$ に対し

$$X(fg) = X(f)g + (-1)^{|X||f|} f X(g)$$

が成り立つ $\mathscr{A}(M)$ 上の線型自己準同型をいう。超多様体 $(M, \mathscr{A})$ の上のベクトル場全体がなす集合 $\mathrm{Vect}(M)$ は超交換子 (supercommutator)

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{|X||Y|} Y \circ X \quad (X, Y \in \mathrm{Vect}(M))$$

によって超 Lie 代数をなす。

多様体の次数付けにより生じる構造として、Q 多様体の概念がある。

定義 2.4. 超多様体 M とその上のベクトル場 Q の組が **Q 多様体**であるとは、Q は odd なベクトル場であり $[Q, Q] = 0$ を満たすことをいう。

$|Q| = 1$ より、条件 $[Q, Q] = 0$ は $Q \circ Q = 0$ と言い換えられる。

例 2.5. $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする。$\mathfrak{g}$ の括弧積 $[,]\colon \wedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は双対写像 $d\colon \mathfrak{g}^* \to \wedge^2 \mathfrak{g}^*$ を誘導し、さらに導分として拡張することで $d\colon \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \to \wedge^{\bullet+1} \mathfrak{g}^*$ を誘導する。すると括弧積の Jacobi 恒等式より d は $d \circ d = 0$ を満たす。$\mathfrak{g}$ の全ての元を odd な元と思ったものを $\Pi\mathfrak{g}$ とおくと、$\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$ は超多様体 $\Pi\mathfrak{g}$ の関数環とみなせる。よって、$(\Pi\mathfrak{g}, d)$ は Q 多様体となる。

例 2.6. M を超多様体とし、その座標を $(x^1, x^2, \ldots, x^{n+m})$ で表す。M のシフトされた余接束 $\Pi T^* M$ とは、ファイバー方向の座標 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ と次数付け $|x_a^*| = -|x^a| - 1$ $(1 \leq a \leq n+m)$ および変換則

$$y_a^* = \sum_{b=1}^{n+m} \frac{\partial x^b}{\partial y^a} x_b^*$$

によって定まる M 上のベクトル束である。このベクトル束の上の関数は M の上の多重ベクトル場に対応する。$f, g \in \mathscr{A}(\Pi T^*M)$ に対する Schouten 括弧積は

$$\llbracket f, g \rrbracket = \sum_{a=1}^{n+m} \left((-1)^{(|f|+|x^a|+1)(|x^a|+1)} \frac{\partial f}{\partial x_a^*} \frac{\partial g}{\partial x^a} - (-1)^{|x^a|(|f|+1)} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x_a^*} \right).$$

と表される。(高次)Poisson 多様体の Poisson 構造 $\mathcal{P}$ とは、M の上の多重ベクトル場 $\mathcal{P} \in \mathscr{A}(\Pi T^*M)$ であって $\llbracket \mathcal{P}, \mathcal{P} \rrbracket = 0$ を満たすものである。このとき、odd なベクトル場 $Q_\mathcal{P} \coloneqq \llbracket \mathcal{P}, - \rrbracket \in \mathrm{Vect}(\Pi T^*M)$ を考えると $(\Pi T^*M, Q_\mathcal{P})$ は Q 多様体となる。

3 Q コホモロジー

Q 多様体 (M, Q) においては $Q \circ Q = 0$ が成り立つため、M の上の関数のなす代数 $\mathscr{A}(M) = \mathscr{A}(M)_0 \oplus \mathscr{A}(M)_1$ を $\mathbb{Z}_2$ で次数付けられたコチェイン複体であって微分 Q が作用するものと考えることができる。このコチェイン複体のコホモロジー群

$$H_Q^\bullet(M) \coloneqq H^\bullet(\mathscr{A}(M), Q)$$

を Q 多様体 (M, Q) の **Q コホモロジー群**という。

Q コホモロジー類を構成する方法として、向き付け可能な Q 多様体の上のモジュラー類を考えるものがある。通常の多様体の上の体積形式は行列式直線束を用いて定義される。一方で、超可換代数を要素にもつ行列において行列式に相当するものは Berezinian であり、区分行列で表示された even な行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ に対しては

$$\mathrm{Ber}(X) \coloneqq \begin{cases} \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det(D)^{-1} & (A, D \text{ が可逆なとき}), \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases} \tag{3.1}$$

で定義される。超多様体 $(M, \mathscr{A})$ の **Berezinian 直線束** $\mathrm{Ber}(M)$ とは、自明化被覆として座標近傍系をもち、各座標 $x = (x^a)_a$ の上のある自明化を与える切断 $D(x)$ について座標 $x = (x^a)_a$ と座標 $y = (y^a)_a$ の共通部分の上では

$$D(y) = D(x)\,\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^b} \right)_{a,b}$$

となるものである。$\mathrm{Ber}(M)$ の切断 vol は、座標近傍 U の座標 $x = (x^a)_a$ を用いて局所的に $\mathrm{vol} = D(x)s(x)$ $(s(x) \in \mathscr{A}(U))$ の形で表されるが、任意の座標 $x = (x^a)_a$ に対して $s(x)$ が可逆であるとき vol は **(Berezin) 体積形式**であるという。

さて、体積形式 vol が存在するときベクトル場 $X \in \mathrm{Vect}(M)$ の発散 $\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}} X \in \mathscr{A}(M)$ が

$$\mathrm{vol} \cdot (\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}} X) = L_X(\mathrm{vol}) \tag{3.2}$$

により定まる。さらに、M に Q 構造 $Q \in \mathrm{Vect}(M)$ が存在するとき $Q \circ Q = 0$ より $Q(\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}} Q) = 0$ が従う。すなわち、$\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}} Q$ はコチェイン複体 $(\mathscr{A}(M), Q)$ のコサイク

ルとなる。このコホモロジー類

$$\mathrm{Mod}_Q(M) \coloneqq [\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}} X] \in H_Q^1(M)$$

を Q 多様体 (M, Q) の**モジュラー類**という。

上で定義された Q 多様体のモジュラー類は、(高次)Poisson 多様体において良く知られたモジュラー類と次の意味において一致することが知られている。

定理 3.1 (Bruce [5]). 高次 Poisson 多様体 M のモジュラー類は、Q 多様体 $(\Pi T^* M, Q_{\mathcal{P}})$ のモジュラー類と一致する。

Q コホモロジー群の他の応用例として M. Kontsevich による特性類の構成 [12] が挙げられる。平坦束の接続 1-形式を用いる構成と同様に、シンプレクティック葉層、複素シンプレクティック多様体などの特性類を得ることができるが、この構成は Q 多様体 M の上の $(2n, k)$ 次元のシンプレクティックなファイバーを持つ Q 同変なベクトル束 $E \to M$ を考え、$(2n, k)$ 次元の定数項を持たないハミルトンベクトル場がなす空間の相対連続コホモロジー群から Q 多様体 M の Q コホモロジーを得る準同型

$$H^\bullet_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Ham}^0_{2n|k}, \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}); \mathbb{R}) \to H^\bullet_Q(M)$$

として表される。

4 ρ-可換代数

G をアーベル群とし、$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。

定義 4.1. G の上の**可換因子 (commutation factor)** とは 2 変数関数 $\rho\colon G \times G \to \mathbb{K}$ であって、任意の $i, j, k \in G$ に対して

(1) $\rho(i, j)\rho(j, i) = 1$,
(2) $\rho(i + j, k) = \rho(i, k)\rho(j, k)$ かつ $\rho(i, j + k) = \rho(i, j)\rho(i, k)$

を満たすもののことである。

この定義から、任意の $i, j \in G$ について

$$\rho(i, j) \neq 0, \qquad \rho(i, j) = \rho(-j, i) = \rho(j, -i), \qquad \rho(0, i) = \rho(i, 0) = 1$$

などが直ちに導かれる。とくに、条件 (1) より任意の $i \in G$ について $\rho(i, i) \in \{\pm 1\}$ であるから、$p \in \mathbb{Z}_2$ について

$$G_p \coloneqq \{i \in G \mid \rho(i, i) = (-1)^p\}$$

とおくと、$G = G_0 \sqcup G_1$ と非交叉に分割することができる。G_0 の元を **even** な元、G_1 の元を **odd** な元と呼ぶ。

通常の可換代数や超可換代数が ρ-可換代数と見なせることは容易に確かめられる。

例 4.2. 四元数体 $\mathbb{H}=\langle 1,i,j,k\rangle$ を考える。$G=\mathbb{Z}_2^2$ とし、

$$|1|\coloneqq(0,0),\quad |i|\coloneqq(1,0),\quad |j|\coloneqq(0,1),\quad |k|\coloneqq(1,1)$$

により G-次数を与える。

$$\begin{aligned}\rho\colon\qquad \mathbb{Z}_2^2\times\mathbb{Z}_2^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ ((l,m),(l',m')) &\longmapsto (-1)^{lm'-ml'}\end{aligned}$$

と定めることで ρ は可換因子となり、$\mathbb{H}$ は $\mathbb{Z}_2^2$ で次数付けられた ρ-可換代数とみなせる。

例 4.3. $\Theta=(\theta_{kl})_{k,l}\in M(m,\mathbb{R})$ を歪対称行列とする。生成元と関係式

$$A_\Theta\coloneqq\left\langle u^1,u^2,\dots,u^m\;\middle|\;u^ku^l=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\theta_{kl})u^lu^k\right\rangle$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数を**非可換トーラス (noncommutative torus)** という。

$G=\mathbb{Z}^m$ とし、$\mathbf{i}=(i_1,i_2,\dots,i_m)\in G$ に対し

$$(A_\Theta)_{\mathbf{i}}\coloneqq\mathbb{C}\cdot\{(u^1)^{i_1}(u^2)^{i_2}\cdots(u^m)^{i_m}\}$$

により G-次数付け $A_\Theta=\bigoplus_{\mathbf{i}\in G}(A_\Theta)_{\mathbf{i}}$ を与える。

$$\begin{aligned}\rho\colon\quad G\times G &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (\mathbf{i},\mathbf{j}) &\longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathbf{i}^\top\Theta\mathbf{j})\end{aligned}$$

と定めることで ρ は可換因子の条件を満たす。A_Θ は $\mathbb{Z}^m$ で次数付けられた ρ-可換代数となる。

超可換代数を要素に持つ行列 (supermatrix) は、行と列をそれぞれ even な部分と odd な部分の 2 つずつに分けて考えていた。ρ-可換代数 $A=\bigoplus_{i\in G}A_i$ を要素にもつ行列では行および列にそれぞれ G による次数付け $I=(i_1,i_2,\dots,i_k)\in G^{\times k}$, $J=(j_1,j_2,\dots,j_l)\in G^{\times l}$ がある状況を考える。このような行列全体を $M_\bullet(I\times J;A)=\bigoplus_{d\in G}M_d(I\times J;A)$ と書く。Kobayashi-Nagamachi は、G が有限生成であり I および J の元が全て even な場合、もしくは全て odd な場合に、行列式

$$\rho\det\colon M_0(I\times J;A)\to A_{\sum_p i_p-\sum_q j_q}$$

が定まることを示した [10]。また、任意の I に対しても、even な行・列と odd な行・列で区分された行列 $X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ について式 (3.1) と同様の形で ρ-Berezinian $\rho\,\mathrm{Ber}\colon M_0(I;A)\to A_0$ が定まる。

Lie 代数についても、可換因子を用いた拡張が知られている。

定義 4.4. G で次数付けられたベクトル空間 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in G}\mathfrak{g}_i$ と $\mathbb{K}$-双線形写像 $[,]\colon\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ の組が**次数 $d\in G$ の ρ-Lie 代数**であるとは、任意の斉次な $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ について以下を満たすことである。

(1) $[,]$ の次数は d である、すなわち $|[X,Y]| = |X| + |Y| + d$ である。
(2) $[X,Y] = -\rho(|X|,|Y|)[Y,X]$ が成り立つ。(ρ-歪対称性)
(3) $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + \rho(|X|+d,|Y|+d)[Y,[X,Z]]$ が成り立つ。(ρ-Jacobi 恒等式)

たとえば、G で次数付けられた結合代数 $A = \bigoplus_{i\in G} A_i$ は **ρ-交換子**

$$[X,Y]_\rho \coloneqq XY - \rho(|X|,|Y|)YX \quad (X,Y \in A)$$

によって次数 0 の ρ-Lie 代数をなす。例として、上に述べた行列代数 $M_\bullet(I;A)$ は ρ-交換子によって ρ-Lie 代数となる。

ρ-可換代数に特徴的な操作として、乗数と呼ばれる 2 変数関数による可換因子および積の取り換えがある。

定義 4.5. 2 変数関数 $\mu\colon G\times G \to \mathbb{K}$ が**乗数 (multiplier)** であるとは、任意の $i,j,k \in G$ について

(1) $\mu(i+j,k)\mu(i,j) = \mu(i,j+k)\mu(j,k)$,
(2) $\mu(0,0) = 1$

を満たすことである。

可換因子 $\rho\colon G\times G \to \mathbb{K}$ と乗数 $\mu\colon G\times G \to \mathbb{K}$ があるとき、

$$\begin{aligned}\rho^\mu\colon\ G\times G &\longrightarrow \mathbb{K}\\ (i,j) &\longmapsto \rho(i,j)\mu(i,j)\mu(j,i)^{-1}\end{aligned}$$

は可換因子となる。さらに、$A = \bigoplus_{i\in G} A_i$ が ρ-可換代数であるとき

$$f \star g \coloneqq \mu(|f|,|g|)fg \quad (f,g \in A)$$

により A の上の積 $\star$ が定まる。もとの構造と区別して、この $\star$ を積とした結合代数 A を A^μ と書く。

命題 4.6. A^μ は ρ^μ-可換代数となる。

補題 4.7. 上で述べた対応は ρ-可換代数全体のなす圏から ρ^μ-可換代数全体のなす圏への圏同型を誘導する。

5 ρ-多様体

超多様体は多様体の上の関数のなす代数を超可換な代数に取り替えたものであったが、この手続きを ρ-可換な代数に適用したものを考える。ここでは、実あるいは複素数に値をもつ、滑らかあるいは解析的な多様体を考え、$\mathscr{O}$ をその上の関数のなす層とする。

定義 5.1. ρ**-多様体**とは局所環付き空間 $(M, \mathscr{O}_\rho)$ であって、次を満たすものである。

(1) M は $\mathscr{O}$ を関数のなす層とする n 次元の多様体である。
(2) 各点 $p \in M$ においてある開近傍 $p \in U \subset M$ と切断 $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \in \mathscr{O}_\rho(U)$ が存在して、同型

$$\mathscr{O}_\rho(U) \cong \mathscr{O}(U)[\![x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+m}]\!].$$

が成り立つ。これらの $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ を**形式的な座標**と呼ぶ。

$\mathscr{O}_\rho(M)$ の上の ρ-導分、すなわち任意の $f, g \in \mathscr{O}_\rho(M)$ に対して

$$X(fg) = X(f)g + \rho(|X|, |f|)fX(g)$$

を満たす $\mathscr{O}_\rho(M)$ の線型自己準同型 X を ρ-多様体の上のベクトル場と呼ぶ。ρ-ベクトル場全体 $\mathrm{Vect}_\rho(M)$ は ρ-Lie 代数をなす。

ρ-多様体の間の射を局所環付き空間の射と定めることで、たとえば逆関数定理に相当する次の事実が示される。

定理 5.2 (H.)**.** $\Phi\colon M \to N$ を形式的な座標の G-次数が 0 でない ρ-多様体の間の射とする。$p \in M$ について、p のまわりで Φ の Jacobi 行列が可逆であれば、ある p のまわりの座標近傍 $U \subset M$ と $\Phi(p)$ のまわりの座標近傍 $V \subset N$ が存在して $\Phi|_U\colon U \to V$ が可逆となる。

ベクトル場の G-次数付けを用いて ρ-多様体においても Q 多様体を考えることができる。

定義 5.3. ρ-多様体 M とその上のベクトル場 Q の組であって、$|Q|$ が odd であり $[Q, Q]_\rho = 0$ を満たすものを ρ**-Q 多様体**と呼ぶ。

一般の ρ-可換代数に対して同様の条件を課したものは almost commutative Q-algebra と呼ばれている [6]。

ρ-多様体の上の体積形式は、超多様体の場合と同様に Berezinian を用いて定義する。ただし、ρ-多様体における Jacobi 行列は ρ-可換な関数を要素にもつ行列となるため、Kobayashi-Nagamachi による ρ-Berezinian を用いる。ρ-多様体 $(M, \mathscr{O}_\rho)$ の上の ρ**-Berezinian 直線束**とは、M の座標近傍系を自明化近傍とする M 上の直線束 $\rho\,\mathrm{Ber}(M)$ であって、座標 $(x^a)_a$ と $(y^a)_a$ の共通部分の上では

$$D(y) = D(x)\,\rho\,\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^b}\right)_{a,b}$$

となるものである。ここで $D(x)$ は自明化近傍 $(x^a)_a$ の上のある自明化を与える切断である。ρ-多様体 M の上の **(**ρ**-Berezin) 体積形式**とは $\rho\,\mathrm{Ber}(M)$ の切断 vol であって、局所的に $\mathrm{vol} = D(x)s(x) \quad (s(x) \in \mathscr{O}_\rho(U))$ と表したとき $s(x)$ が可逆となるものと定める。

ρ-Berezin 体積形式に対しても、式 (3.2) と同じ形でベクトル場 X の発散 $\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}}\, X$ が定まる。また､体積形式 vol をもつ ρ-Q 多様体では超多様体の場合と同様に $Q(\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}}\, Q) = 0$ が示される。$\mathscr{O}_\rho(M)$ の部分空間

$$\mathscr{O}_\rho(M)_Q \coloneqq \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}_\rho(M)_{p|Q|}$$

を微分 Q が作用するコチェイン複体として捉え、そのコホモロジー群 $H^\bullet_Q(M) \coloneqq H^\bullet(\mathscr{O}_\rho(M)_Q, Q)$ をとることで ρ-Q 多様体の Q コホモロジー群が定まる。この Q コホモロジー群の元として、体積形式 vol をもつ ρ-Q 多様体 (M, Q) の**モジュラー類**

$$\mathrm{Mod}_Q(M; \mathrm{vol}) \coloneqq [\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}}\, X] \in H^1_Q(M)$$

が構成される。

例 5.4. 例 4.3 に挙げた非可換トーラス A_Θ は、1 点 $M = \{*\}$ の上の $G = \mathbb{Z}^m$ で次数付けられた ρ-多様体と捉えられる。

$G' \coloneqq \mathbb{Z} \times G$ とおき、G' の上の可換因子

$$\begin{aligned} \rho' \colon \quad G' \times G' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((s, \mathbf{i}), (t, \mathbf{j})) &\longmapsto (-1)^{st}\rho(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \end{aligned}$$

を考える。可換リー代数 $\mathfrak{g} \coloneqq \mathbb{C}^m$ の上の標準的な座標関数を $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m$ で表す。

$$|\eta^a|' \coloneqq (1, (0, 0, \ldots, 0)) \quad \text{および} \quad |u^a|' \coloneqq (0, |u^a|) \quad (1 \le a \le m)$$

で定まる G'-次数付け $|\cdot|'$ によって ρ'-多様体 $\Pi\mathfrak{g} \times M$ を考えると、ベクトル場

$$Q \coloneqq -\sum_{a=1}^{m} 2\pi\sqrt{-1}\eta^a u^a \frac{\partial}{\partial u^a}$$

は Q 構造となる。$M = \{*\}$ の上の自明な体積形式 vol について、モジュラー類は

$$\mathrm{Mod}_Q(\Pi\mathfrak{g} \times M; \mathrm{vol}) = -2\pi\sqrt{-1}\sum_{a=1}^{m}[\eta^a]$$

と計算できる。

また、ここで定義したモジュラー類は乗数による可換因子や積の取り替えについて不変であることが示される。ρ を可換因子、μ を乗数とするとき、補題 4.7 に述べた圏の間の同型は、ρ-多様体がなす圏から ρ^μ-多様体がなす圏への圏同型を誘導する。この同型による M の像を M^μ と書くことにする。M^μ における M 上のベクトル場 X、M 上の体積形式 vol に対応するものをそれぞれ X^μ,vol^μ と書くことにする。Q が M の Q 構造であるとき Q^μ は M^μ の上の Q 構造を定め、vol^μ は M^μ の上の体積形式を定めることが示される。

定理 5.5 (H.)**.** $\mathrm{Mod}_{Q^\mu}(M^\mu; \mathrm{vol}^\mu) = \mathrm{Mod}_Q(M; \mathrm{vol})$ である。

参考文献

[1] C. Bartocci, U. Bruzzo, and D. H.-Ruipérez. *The Geometry of Supermanifolds.* Math. Appl. Springer, Dordrecht, 1991.

[2] F. A. Berezin. *The method of second quantization.* Vol. Vol. 24. Academic Press, New York-London, 1966, pp. xii+228.

[3] F. A. Berezin and G. I. Kac. "Lie groups with commuting and anticommuting parameters". In: *Mat. Sb. (N.S.)* (1970), pp. 343–359.

[4] P. J. M. Bongaarts and H. G. J. Pijls. "Almost commutative algebra and differential calculus on the quantum hyperplane". In: *J. Math. Phys.* 2.35 (1994), pp. 959–970.

[5] A. Bruce. "Modular classes of Q-manifolds: A review and some applications". In: *Arch. Math. (Brno)* 53.4 (May 2017), pp. 203–219.

[6] A. J. Bruce. "Almost commutative Q-algebras and derived brackets". In: *J. Noncommut. Geom.* 14.2 (2020), pp. 681–707.

[7] C. Ciupală. "Differential calculus on almost commutative algebras and applications to the quantum hyperplane". In: *Arch. Math. (Brno)* 41.4 (2005), pp. 359–377.

[8] T. Covolo and J.-Ph. Michel. "Determinants over graded-commutative algebras, a categorical viewpoint". In: *Enseign. Math.* 62.3-4 (2016), pp. 361–420.

[9] S. Harako. *Almost Commutative Manifolds and Their Modular Classes.* 2022. arXiv: `2206.05709 [math.AT]`.

[10] Y. Kobayashi and S. Nagamachi. "Lie groups and Lie algebras with generalized supersymmetric parameters". In: *J. Math. Phys.* 25.12 (1984), pp. 3367–3374.

[11] Y. Kobayashi and S. Nagamachi. "Analysis on generalized superspaces". In: *J. Math. Phys.* 27.9 (1986), pp. 2247–2256.

[12] M. Kontsevich. "Rozansky-Witten Invariants via Formal Geometry". In: *Compos. Math.* 115.1 (Jan. 1999), pp. 115–127.

[13] V. Rittenberg and D. Wyler. "Generalized superalgebras". In: *Nuclear Phys. B* 3.139 (1978), pp. 189–202.

[14] M. Scheunert. "Generalized Lie algebras". In: *J. Math. Phys.* 20.4 (1979), pp. 712–720.