

フィルター付き集合で豊穡化した圏のマグニチュード

浅尾 泰彦 (福岡大学)*

概要

2000年代に Leinster によって導入された「マグニチュード」と呼ばれる距離空間の‘不変量’について解説し、最近の研究について紹介する。誤解を恐れずに端的に言えば、マグニチュードは「距離構造のオイラー標数」であり、マグニチュードの理論は「位相幾何学の適用範囲を距離構造まで拡張する試み」である。ここで距離構造とそこから誘導される位相は切り離して考えている。

1 有限距離空間のマグニチュード

距離空間 (X, d) が $\#X < \infty$ を満たすときこれを有限距離空間と呼ぶ。2000年代に Leinster は有限距離空間 (X, d) に対してそのマグニチュードを次のように定義した ([12, 13])。まず X 上に1つ全順序を固定し、実数 $t \geq 0$ に対して行列 $Z_X = (e^{-td(x,y)})_{x,y \in X}$ を定める。これが可逆の時、マグニチュードを逆行列の成分和

$$\text{Mag}X := \sum_{x,y} (Z_X^{-1})_{xy}$$

で定める。この値は全順序の取り方によらない。一般には Z_X は可逆とは限らず、不定元 $q = e^{-t}$ を用いて $Z_X = (q^{d(x,y)})_{x,y \in X}$ を考えることもある。例えば、 $X = \{0, 1\}$, $d(0, 1) = d(1, 0) = \frac{1}{2}$ の時、 $\text{Mag}X = \frac{2}{1+e^{-t/2}}$ であり、 $\text{Mag}X = \frac{2}{1+q^{1/2}}$ と書いたりもする。また‘冪級数展開’して $\text{Mag}X = 2 - 2q^{1/2} + 2q - 2q^{3/2} + \dots$ と書くこともある。

マグニチュードは一見何の意味がある量なのか分からず、また未だあまり分からないが、少なくとも定義そのものは位相幾何学的に極めて自然であるのでそれを解説する。また講演者による研究成果についても紹介する。これらの解説は講演者の解釈 ([1]) に大きく依存していてマグニチュード理論が誕生した際の際の原論文の説明とは定義の順序や仕方が違う箇所があることを注意しておく。誤解を恐れずに端的に言えば、マグニチュードは「距離構造のオイラー標数」であり、マグニチュードの理論は「位相幾何学の適用範囲を距離構造まで拡張する試み」であると講演者は考えている。ここで距離構造とそこから誘導される位相は切り離して考えている。

* 〒814-0180 福岡県福岡市城南区七隈 8 丁目 19-1 福岡大学 理学部応用数学科

e-mail: asao@fukuoka-u.ac.jp

web: <https://sites.google.com/view/yasuhikoasao>

2010 Mathematics Subject Classification: 55N35

キーワード：マグニチュード, オイラー標数, マグニチュードホモロジー, ホモロジー

2 単体複体のオイラー標数

オイラー標数は位相幾何学における根源的なアイデアであり、図形の点・辺・面などの個数の交代和として定義される。正確には有限単体複体 S に対して

$$\chi(S) = \sum_n (-1)^n \#\{n\text{-face}\}$$

で定義される。一方で、単体複体の重心細分はその幾何実現の位相を保つことが知られており、特にオイラー標数も保存する。単体複体 S の重心細分の定義を振り返ってみると、まず face 全体に包含によって順序を入れた face poset $F(S)$ を構成し、その poset の chain, つまり $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ なる点列を face とし部分列を subface とするような単体複体を構成すればそれが重心細分であった。したがって一般の poset に対しても上のようにして構成した単体複体（順序複体）のオイラー標数が考えられ、これは単体複体のオイラー標数の拡張になっている。つまり poset P に対して

$$\chi(P) = \sum_n (-1)^n \#\{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$$

と定義すれば $\chi(S) = \chi(F(S))$ である。

3 群のホモロジー

オイラー標数からホモロジー群への飛躍が代数トポロジーの原点と言っても過言ではなく、ホモロジーとは加群列 H_n であってランク交代和 $\sum_n (-1)^n \text{rank } H_n$ がオイラー標数に一致するようなもののうち‘良い加群’たちである。単体複体の場合は chain complex (C_*, ∂_*) を

$$\begin{aligned} C_n &= \mathbb{Z}\langle n\text{-face} \rangle, \\ \partial_n(n\text{-face}) &= \sum_k (-1)^k \text{k-th } (n-1)\text{-subface}, \end{aligned}$$

で定めると一般にそのホモロジー群は振れを持ち、オイラー標数よりも多い情報量を持つ上に、有限とは限らない単体複体に対しても定義ができる。poset の場合も上を拡張する形で

$$\begin{aligned} C_n &= \mathbb{Z}\langle x_0 < x_1 < \dots < x_n \rangle, \\ \partial_n(x_0 < x_1 < \dots < x_n) &= \sum_k (-1)^k (x_0 < x_1 < \dots < \check{x}_k < \dots < x_n), \end{aligned}$$

と定義する。ここで \check{x} は「 x を省く」ことを意味する。

ところで poset とは集合 X の任意の 2 元のペア (x, y) に対してその間に順序関係が「あるかないか」が定まり、さらにその関係が反射律と推移律を満たすことを要請したものである。そこで $x \leq y$ の場合は $T(x, y) = \{*\}$ (1 元集合), $x \not\leq y$ の場合は $T(x, y) = \emptyset$ (空集合) と定めれば、積について結合的に振る舞う写像の族 $\{*\} \rightarrow$

$T(x, x), T(x, y) \times T(y, z) \longrightarrow T(x, z)$ が得られ, 逆にこのような対応 $T : X \times X \longrightarrow \text{Set}$ は poset の概念そのものである. T が $\{*\}$ や \emptyset 以外の集合も値として取りうるように拡張したものは小圏そのものであり, 上の定義を拡張する形で小圏のホモロジーを次の chain complex によって定義することができる.

$$C_n = \bigoplus_{x_i \in X} \mathbb{Z}T(x_0, x_1) \times T(x_1, x_2) \times \cdots \times T(x_{n-1}, x_n),$$

$$\partial_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_k (-1)^k (f_1, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_n),$$

ただし $(f_1 \circ f_0, f_2, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n), (f_1, f_2, \dots, f_{n+1} \circ f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$ とした. 例えば群 G を対象が 1 つで射集合が G である小圏と同一視した場合はよく知られている群ホモロジーの定義と一致する.

4 グラフ・有向グラフ・距離空間

ここで本来扱いたい対象である距離空間について振り返っておくと, これは集合 X と写像 $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ のペアであって, 次の性質を満たすものである.

- (1) $d(x, x) = 0,$
- (2) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z),$
- (3) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y,$
- (4) $d(x, y) = d(y, x).$

距離空間の間の写像は距離を大きくしないとき **1-Lipschitz 写像** と呼ばれ, 以降では距離空間と 1-Lipschitz 写像のなす圏を考える. 距離空間の例として**グラフ**が挙げられる. ここではループと多重辺を持たない連結なものを考える. グラフの頂点集合に, 2 点間の距離をそれらを結ぶ最短のパスの長さによって定めることで距離空間になる. この距離構造はグラフの構造を覚えていることに注意する (距離 1 の 2 点間に辺を引けば良い). 言い換えるとこの対応によってグラフの圏から距離空間の圏への忠実充満関手が得られる (辺を潰すことも許している). グラフを一般化した対象として**有向グラフ**というものがあり, これは辺に向きのついたものである. 有向グラフについても有向辺のなすパスの長さによって距離構造を入れたいが, 残念ながら任意の 2 点間を結ぶ有向パスがあるとは限らず, もしあったとしても対称性 (上の (4)) を満たすとは限らない. とはいえ (1) ~ (3) は満たすのであるから, これはほとんど距離空間であり, 距離空間の定義を微修正する方が自然という見方もできる. そこで距離関数の値域を $[0, \infty]$ に広げ, 条件 (4) を取り除いた定義を採用すれば, 有向パスで結べない 2 点間の距離を ∞ とすることで有向グラフに距離構造を与えられる. この対応によって有向グラフの圏から距離空間の圏への忠実充満関手が得られる. 距離 ∞ を許すことで通常のグラフの場合も連結性を仮定する必要がなくなる. ちなみにグラフとは辺で結ばれた 2 点間には両向きに一つづつの有向辺がある有向グラフと思うことで, グラフの圏は有向グラフの圏に忠実充満に埋め込める.

5 poset と距離空間

poset とは対応 $T : X \times X \rightarrow \{\emptyset, \{*\}\} \subset \text{Set}$ であって自然な写像の族 $\{*\} \rightarrow T(x, x), T(x, y) \times T(y, z) \rightarrow T(x, z)$ を備えたもののことであった。これは上の距離空間の定義と似ており、条件 (1), (2) がそれぞれ写像の族に対応していると考えられる。対称性 (4) だけでなく非退化性 (3) まで落として、距離関数 $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ で条件 (1), (2) を満たすものを**一般距離空間 (Lawvere metric space)** と呼ぶ。poset と一般距離空間の違いは対応の値域 ($\{\emptyset, \{*\}\} \subset \text{Set}$ と $[0, \infty]$)、そこでの演算記号 (\times と $+$)、そして矢印の記号 (\rightarrow と \geq もしくは $=$) であり、これらの記号の違いを除けば本質的にはほとんど同じものである。そこで poset のオイラー標数を真似て一般距離空間のオイラー標数を考えてみると (小圏の場合とも見比べながら)、

$$\chi(X) = \sum_{x_i \neq x_{i+1}} (-1)^n "d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)"$$

と定義できそうである。しかし \sum の足し算と $d(x_i, x_{i+1})$ たちの足し算は区別して考えたので不定元 q を用いて次のように定義する。名前も**マグニチュード**にする。

$$\text{Mag}X = \sum_{x_i \neq x_{i+1}} (-1)^n q^{d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)},$$

ただし $q^\infty = 0$ とする。しかし、poset の場合と違って例えば $x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x, \dots$ のように「行ったり来たり」の列も考えられるため、例え X が有限集合であっても \sum は無限和である。したがってもしグラフのように d の値が整数か ∞ であれば $\text{Mag}X$ は形式的冪級数である。それ以外の場合は正の実数冪も許容した **Novikov 級数** として定義する。級数の各係数が有限の値に収まるか考えていないし、実際退化した点があれば ($d(x, y) = 0, x \neq y$) 収束しないがここでは無視することにする。退化した点がなければ問題なく、そうでない場合は少し工夫を要する。ちなみに Novikov 級数環の単元は定数項が非 0 の元であり、また形式的冪級数環を部分環として持つ。

最初に出てきた行列 $Z_X = (q^{d(x, y)})_{x, y \in X}$ を考える。グラフの隣接行列の場合と同様に考えて、 $(Z_X - I)^n$ の xy 成分は「 x から y に止まることなく $(n+1)$ ステップで、かつ距離 ℓ で到達する経路の数」を q^ℓ の係数にもつ級数である。このことを考慮すると、

$$\sum_n (I - Z_X)^n \text{ の成分和} = \sum_{x_i \neq x_{i+1}} (-1)^n q^{d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)},$$

であり、 $\sum_n (I - Z_X)^n = (I - (I - Z_X))^{-1} = Z_X^{-1}$ と計算できる。退化した点がない場合は $\det Z_X$ は単元なので逆行列は存在する。この議論は Novikov 級数環上の行列環の位相を考えることで正当化できる。

6 Filtered set category

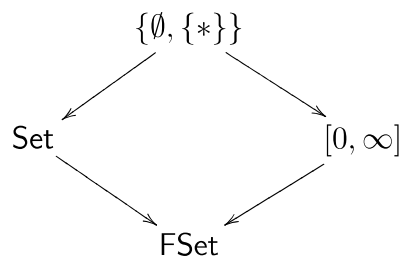
poset と距離空間が「似ている」からオイラー標数の定義を真似てマグニチュードを定義したわけであるが、実はこの二つは似ているだけでなく「血が繋がっている」。その祖先

は **filtered set (enriched) category** と (講演者に) 呼ばれているものである. 上で小圏は対応 $X \times X \rightarrow \text{Set}$ であると紹介したが, filtered set category は対応 $X \times X \rightarrow \text{FSet}$ のことである. FSet は以下で定義される **filtered set** の圏である.

1. filtered set X とは $\ell \in [0, \infty]$ で添字づけられた部分集合族 X_ℓ をもつ集合 X であって, $X_\ell \subset X_{\ell'}$ ($\ell \leq \ell'$) と $X_\infty = X$ を満たすものである.
2. filtered set X, Y の間の filtered map とは写像 $f : X \rightarrow Y$ であって $fX_\ell \subset Y_\ell$ を満たすものである.
3. filtered set X, Y の積 $X \times Y$ を $(X \times Y)_\ell = \cup_{\ell_1 + \ell_2 = \ell} X_{\ell_1} \times Y_{\ell_2}$ で定義する.

ちなみに $[0, \infty]$ を \geq を射, $+$ を積とするモノイダル圏と見た時, FSet は $[0, \infty]$ 上の separated presheaf のなす圏と同一視でき, filtered set の積は Day convolution である. また Set は $X = X_0$ を満たす filtered set とみなすことができ, この対応によって忠実充満関手 $\text{Set} \rightarrow \text{FSet}$ が得られる. 小圏を対象, 射, 射の合成で説明したことを延長すると, filtered set category とは対象, 射, 射の合成があって小圏と同じルールを満たしており, さらに射には正実数による次数がついていて $\deg(g \circ f) \leq \deg f + \deg g, \deg \text{id} = 0$ を満たすものである ($\deg f = \ell \Leftrightarrow f \in X_\ell \setminus \cup_{r < \ell} X_r$). この次数条件は恣意的につけたわけではなく積の定義と射の合成則から自然に要請される.

小圏 (\supset poset) は全ての射の次数が 0 の filtered set category, 距離空間は対象 x から y へ一つだけ次数 $d(x, y)$ の射をもつ filtered set category とみなせる. ただし次数 ∞ の射はないことにする. 次数に関する条件 $\deg(g \circ f) \leq \deg f + \deg g$ が三角不等式の一般化になっている. これらの同一視は埋め込みの列



から誘導されている. ここで $\text{FSet} \supset [0, \infty]$ は米田埋め込みであり, 実数 r を $X_\ell = \begin{cases} \{*\} & \ell \geq r, \\ \emptyset & \ell < r, \end{cases}$ で定まる filtered set に対応させる. ただし ∞ は \emptyset に対応させる. また右上の矢印は $\emptyset \mapsto \infty, \{*\} \mapsto 0$ である.

filtered set にもマグニチュードが定義でき ([1]), それは距離空間のマグニチュードと poset のオイラー標数を含んでいる. さらには有限群の軌道体オイラー標数も含む.

7 filtered set category のホモロジー

小圏のホモロジーをそのまま拡張する形で filtered set category X から chain complex (C_*, ∂_*) が構成できる.

$$C_n = \bigoplus_{x_i \in X} \mathbb{Z} X(x_0, x_1) \times X(x_1, x_2) \times \cdots \times X(x_{n-1}, x_n),$$

$$\partial_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_k (-1)^k (f_1, \dots, f_{k+1} \circ f_k, \dots, f_n),$$

ここで $X(x_i, x_{i+1})$ は x_i から x_{i+1} への射のなす filtered set である. 各チェイン群は filtered abelian group であり, 射の次数条件 ($\deg(g \circ f) \leq \deg f + \deg g$) から境界作用素は filtration を保つ. したがって C_* は filtered chain complex である. filtration が $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ による場合, 一般に filtered chain complex からスペクトル系列が構成できる. $E_{p,q}^0$ 項は filtration による商 $F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q}$ である. またもし収束すれば収束先は X から射の次数を忘れ去って得られる小圏のホモロジーである. まず E^1 項について次が成り立つ.

Theorem 7.1 (essentially by Hepworth-Willerton and Leinster-Shulman [10, 15])

X が有限距離空間で距離関数の値が整数である時, $E_{\ell, n-\ell}^1 =: \text{MH}_n^\ell(X)$ はマグニチュードを圏化する. つまり

$$\text{Mag} X = \sum_{n, \ell} (-1)^n \text{rank} \text{MH}_n^\ell(X) q^\ell$$

が成り立つ.

同様に X が finite poset の時にも E^1 項はオイラー標数を圏化していることがわかる (この時は E^1 退化する). つまり E^1 項は通常の単体複体のホモロジーを拡張してマグニチュードまで圏化するものである. またスペクトル系列の文脈を無視すれば距離関数の値域に制限をつける必要はない (単に商 $F_{\leq \ell} C_* / F_{< \ell} C_*$ のホモロジー MH_*^ℓ を考えれば良い). MH はマグニチュードホモロジーと呼ばれる. オイラー標数の定義には有限性が必要でホモロジーには必要なかったように, マグニチュードホモロジーにも X の有限性は必要ない.

E^2 項については次が成り立つ.

Theorem 7.2 (A. [2]) X が有限有向グラフの時, $E_{n,0}^2$ は Grigor'yan-Lin-Muranov-Yau ([7]) らの被約パスホモロジー \tilde{H}_n と同型である.

パスホモロジーは有向グラフの '良い' ホモロジー論として一連の研究がなされている. '良い' というのは位相空間の場合のアナロジーで Eilenberg-MacLane 公理を満たしたりホモトピー不変性を持つという意味である ([7]). 一つ応用例を紹介する. マグニチュードホモロジーが「対角成分しか持たない」ようなグラフ, つまりグラフ X であって $\text{MH}_n^\ell(X) = 0$ ($\ell \neq n$) を満たすグラフは対角的と呼ばれマグニチュード理論の研究対

象である。例えばツリーや完全グラフは対角的であるが、どのようなグラフが対角的かを明らかにすることは一つの大きな問題である ([10])。Theorem 7.2 とスペクトル系列の計算によって次が得られる。

Theorem 7.3 (A. [2]) 有限グラフは対角的ならば被約パスホモロジー \tilde{H}_n は全て 0 である。

逆は成り立たない。 E^3 項以降は収束先以外何もわかっていない。

8 ホモトピー不変性

FSet には $r \in [0, \infty)$ で添字付けられるホモトピー関係の列が次のように定義される。 I_r を二つの対象 $0, 1$ と、id でない唯一の射 $0 \rightarrow 1$ を持つ filtered set category で、この射の次数が r であるものとする。 filtered 関手 $F, G : C \rightarrow D$ が **1-ステップ r -ホモトピック** とは filtered 関手 $H : C \times I_r \rightarrow D$ であって $H|_0 = F, H|_1 = G$ を満たすものが存在することを言う。 1-ステップ r -ホモトピーで生成される同値関係を **r -ホモトピー** という。 すぐにわかる事実として $r \leq r'$ に対して r -ホモトピックならば r' -ホモトピックである。 以下に具体例を挙げる。

- 通常の小圏に対しては関手 F から G への 1-ステップ 0-ホモトピーは自然変換そのものである。 したがって通常のコホモロジー同値は 0-ホモトピー同値である。 より強く、随伴対があれば 0-ホモトピー同値であり、したがって poset 間にガロア接続が存在すれば 0-ホモトピー同値である。
- 有向グラフに対しては Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau らのホモトピー ([7]) と 1-ホモトピーは一致する。
- 一般距離空間とその Kolmogorov 商（退化した点を潰す）は 0-ホモトピー同値である。

次が成り立つ。

Theorem 8.1 (A. [2]) 上で定義したスペクトル系列の E^{r+1} 項は r -ホモトピー不変である。 したがって MH は 0-ホモトピー不変であり、 E^2 項はパスホモロジー以外の項も Grigor'yan–Lin–Muranov–Yau らの意味でホモトピー不変である。

したがって FSet にはより精密な意味で（モデル構造などの）ホモトピー論の列があると期待され、それを裏付ける次の結果が知られている。

Theorem 8.2 (Cirici et al. [6]) filtered chain complex の圏には、 E^r に擬同型を誘導する chain map を弱同値射とするモデル構造の列 M_r ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) が存在する。

Theorem 8.3 (Carranza et al. [5]) 有向グラフの圏にはパスホモロジーに同型を誘

導する射を弱同値とする cofibration category の構造（モデル構造より少し弱い）が存在する。

つまり Theorem 8.2 の M_r は FSet の r -ホモトピー論から誘導されていること、1-ホモトピー論は Theorem 8.3 のものを包含していることが期待される。

9 マグニチュードの具体例

マグニチュードの計算例を紹介するために、一般距離空間にも適用できる少し広いマグニチュードの定義を紹介する。上で大まかにしか説明しなかった概念についても定義を述べておく。

Definition 9.1 1. 一般距離空間とは集合 X と写像 $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ の組 (X, d) であって次を満たすものである。

- (a) $d(x, x) = 0$,
- (b) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

集合 X が有限集合の時、 (X, d) を有限一般距離空間と呼び、以下ではこれしか扱わないことにする。

- 2. 写像 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Q}$ が**左有限**とは任意の $L \in [0, \infty)$ について f を $[0, L]$ に制限した時の台が有限集合であることを言う。左有限写像 f を冪級数のように $f = \sum_{\ell} f(\ell)q^{\ell}$ と表示する。左有限写像全体の集合に点ごとの和と積 $f \cdot g(\ell) = \sum_{\ell'+\ell''=\ell} f(\ell')g(\ell'')$ を入れたものを **Novikov 級数環** と呼び、 $\mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ と書く。
- 3. $\mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ 係数行列 Z_X を $Z_X(x, y) = q^{d(x, y)}$ で定める (X には適当な全順序を入れるが以下の定義には影響しない)。ただし $q^{\infty} = 0$ とする。
- 4. 写像 $w : X \rightarrow \mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ が *weighting* とは、 $\sum_{y \in X} Z_X(x, y)w(y) = 1$ が全ての $x \in X$ で成立することをいう。つまり w をベクトルと見たときに $Z_X w = (1)$ となることをいう。ここで全ての成分が1のベクトルを (1) とかいた。
- 5. 写像 $v : X \rightarrow \mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ が *coweighting* とは、 $\sum_{x \in X} Z_X(x, y)v(x) = 1$ が全ての $y \in X$ で成立することをいう。つまり v をベクトルと見たときに $v^T Z_X = (1)^T$ となることをいう。

Lemma 9.2 X が weighting w と coweighting v の両方を持つ時、 $\sum_{x \in X} w(x) = \sum_{x \in X} v(x)$ が成り立ち、この値は w や v の取り方によらない。

証明 $\sum_{x \in X} w(x) = (1)^T w = v^T Z_X w = v^T (1) = \sum_{x \in X} v(x)$. □

Lemma 9.3 X が非退化の時（つまり $d(x, y) = 0$ ならば $x = y$ ）、 X は weighting と coweighting を一意にもつ。

証明 X が非退化の時 $\det Z_X$ の定数項は1なので $\mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ の中で可逆である。よって

Z_X は可逆行列なので weighting と coweighting を一意にもつ。 \square

Definition 9.4 X に対して Kolmogorov 商 KQX を次のように定義する。 X に同値関係 \sim を $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = d(y, x) = 0$ で定める。 その商集合を KQX と書き, この上に距離関数を $d([x], [y]) = d(x, y)$ で定めることができる ($x \sim y$ ならば全ての $a \in X$ について $d(x, a) = d(y, a), d(a, x) = d(a, y)$ が成り立つ) 。 KQX は非退化である。

Lemma 9.5 有限一般距離空間 X は常に weighting と coweighting を持つ。

証明 KQX の weighting を w とする。 $x \in X$ に対して $x \sim y$ となる y の個数を C_x と書くことにする。 この時 $k: X \rightarrow \mathbb{Q}[[q^{\mathbb{R}}]]$ を $k(x) = w([x])/C_x$ で定めると,

$$\begin{aligned} \sum_{y \in X} Z_X(x, y)k(y) &= \sum_{y \in X} Z_X(x, y)w([y])/C_y \\ &= \sum_{y \in X} Z_{KQX}([x], [y])w([y])/C_y \\ &= \sum_{[y] \in KQX} Z_{KQX}([x], [y])w([y]) \\ &= 1. \end{aligned}$$

となり k は X の weighting である。 coweighting についても同様にできる。 \square

Definition 9.6 有限一般距離空間 X に対してそのマグニチュードを $\text{Mag}X = \sum_{x \in X} w(x) = \sum_{x \in X} v(x)$ で定める。 ここで w, v はそれぞれ X の weighting と coweighting である。

マグニチュードホモロジーはこの定義のマグニチュードも圏化している。 また X が非退化である時には, MH は直和分解 $\text{MH} = \bigoplus_{x \in X} \text{MH}^x$ を持ち, それぞれの MH^x は weighting の値 $w(x)$ を圏化している。

Example 9.7 ([10]) 完全グラフ K_n に対しては $Z_X(x, y) = \begin{cases} q & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$ なので, $w(x) = \frac{1}{1+(n-1)q}$ とすればこれは weighting である。 よってマグニチュードは

$$\text{Mag}K_n = \frac{n}{1+(n-1)q} = n - n(n-1)q + n(n-1)^2q^2 - \dots$$

である。

Example 9.8 ([1]) まず超平面配置の研究などで用いられる ranked poset を紹介する。

Definition 9.9 最小元 0 を持つ poset P は以下を満たす rank 関数 $r: P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を備

えているとき *ranked poset* と呼ばれる.

$$\begin{cases} r(0) = 0, \\ r(b) > r(a) & \text{if } a < b, \\ r(b) = r(a) + 1 & \text{if } b \text{ covers } a. \end{cases}$$

ここで '*b covers a*' とは $\{c \mid a \leq c \leq b\} = \{a, b\}$ のことを言う.

$$\text{ranked poset } (P, r) \text{ に } d(x, y) = \begin{cases} r(b) - r(a) & \text{if } a \leq b, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \text{によって距離を入れる.}$$

これは P の有向 Hasse 図を有向グラフと見ることと同じである. この時, P の weighting w は一意に存在して $w(0) = \pi_P(-q)$ が成り立つ. ここで $\pi_P(-q)$ は P のメビウス関数 μ_P を用いて次で定義される **Poincare 多項式** である.

$$\pi_P(q) := \sum_{a \in P} \mu_P(0, a) (-q)^{r(a)}.$$

したがってマグニチュードホモロジーの直和成分 MH^0 は $\pi_P(-q)$ を圏化している. これが振れを持つかは知られていない.

Example 9.10 ([1]) Γ を有限生成群とし S をその生成系とする. その **ケイリーグラフ** $\text{Cay}(\Gamma, S)$ は一般に無限グラフであるため, マグニチュードは定義できない. しかし可算無限サイズの行列 $Z_{\text{Cay}}(\Gamma, S)$ は一意に weighting w を持ち, $w(x) = (\sum_{g \in \Gamma} q^{\text{wl}g})^{-1}$ となる. ここで wl は語長を表す. 右辺は (Γ, S) の **growth series** の逆元である. したがってマグニチュードホモロジーの直和成分は実質的に growth series を圏化している. これが振れを持つかは知られていない.

その他にもマグニチュードホモロジーの計算をした論文はいくつかある ([3, 8, 9, 10, 11, 16]). またマグニチュードホモトピー型と呼ばれる CW 複体でその通常ホモロジーがマグニチュードホモロジーと一致するものも構成されている ([4, 17]). また何も紹介しないがコンパクト距離空間のマグニチュードについても一連の研究がされている. これらはすべて Leinster の Web ページに掲載してある ([14]).

謝辞

トポロジーシンポジウムにお招き下さいました諸先生方に感謝いたします. また理研の吉田純氏と福岡大学の三石史人氏には原稿を細部まで読んで頂き有益なコメントを頂きました. この場をお借りしてお礼申し上げます.

参考文献

- [1] Y. Asao, *Magnitude and magnitude homology of filtered set enriched categories*, (2023), preprint, arXiv:2303.05677.

- [2] Y. Asao, *Magnitude homology and Path homology*, (2022), Bull. London Math. Soc., 55(1)(2023), 375–398.
- [3] Y. Asao, Y. Hiraoka and S. Kanazawa, *Girth, magnitude homology, and phase transition of diagonality*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A: Mathematics, (2023).
- [4] Y. Asao and K. Izumihara, *Geometric approach to graph magnitude homology*, Homology, Homotopy and Applications 23 (2021), 297–310.
- [5] D. Carranza, B. Doherty, M. Opie, M. Sarazola, and L.-Z. Wong, *Cofibration category of digraphs for path homology*, preprint, arXiv:2212.12568, (2022).
- [6] J. Cirici, D. -E. Santander, M. Livernet, S. Whitehouse, *Model category structures and spectral sequences*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A: Mathematics, 150 (6)(2020) , 2815 – 2848.
- [7] A. Grigor'yan, Y. Lin, Y. Muranov and S.-T. Yau, *Homotopy theory for digraphs*, Pure Appl. Math. Q. 10 (2014), no. 4, 619–674.
- [8] K. Gomi, *Magnitude homology of geodesic space*, preprint, arXiv:1902.07044, 2019.
- [9] Y. Gu, *Graph magnitude homology via algebraic Morse theory*, preprint, arXiv:1809.07240, (2018).
- [10] R. Hepworth and S. Willerton, *Categorifying the magnitude of a graph*, Homology Homotopy Appl. **19** (2017), 31–60.
- [11] R. Kaneta and M. Yoshinaga, *Magnitude homology of metric spaces and order complexes*, Bulletin of the London Mathematical Society 53(3) (2021), 893–905.
- [12] T. Leinster, *The magnitude of metric spaces*, Documenta Mathematica 18 (2013), 857–905.
- [13] T. Leinster, *The magnitude of a graph* , Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 166 (2019), 247–264.
- [14] Tom Leinster's web page <https://www.maths.ed.ac.uk/~tl/magbib/>
- [15] T. Leinster and M. Shulman, *Magnitude homology of enriched categories and metric spaces*, Alg. Geom. Topol. 21 (2021), 2175–2221.
- [16] R. Sazdanovic and V. Summers, *Torsion in the magnitude homology of graphs*, Journal of Homotopy and Related Structures 16(2) (2021), 275–296.
- [17] Y. Tajima and M. Yoshinaga, *Causal order complex and magnitude homotopy type of metric spaces*, Int. Math. Res. Not.(2023).