

第 69 回

トポロジーシンポジウム

講演集

2022 年 8 月 17 日～8 月 19 日

北見工業大学（ZOOM ハイブリッド開催）

はしがき

この講演集は 2022 年 8 月 17 日から 8 月 19 日までの 3 日間、北見工業大学にてハイブリッド形式で開催される第 69 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって、後々の資料として役立つことにある。

世話人：石川昌治（慶應義塾大学）

蒲谷祐一（北見工業大学）

鎌田聖一（大阪大学）

寺垣内政一（広島大学）

森藤孝之（慶應義塾大学）

共催：日本数学会トポロジー分科会

北見工業大学

第69回トポロジーシンポジウム

日程： 2022年8月17日（水）午前～8月19日（金）午後
場所： 〒090-8507 北海道北見市公園町165番地
北見工業大学2号館C122講義室（ZOOMによるハイブリッド形式）

プログラム

8月17日（水）

9:30～10:30 門田 直之（岡山大学）
写像類群の生成系に関する研究の変遷

10:50～11:50 中島 直道（北海道大学 JSPS 特別研究員 DC2）
ルジャンドル特異点と情報幾何学

13:30～14:30 丸山 修平（名古屋大学 JSPS 特別研究員 PD）
拡張不可能な不変擬準同型の空間について

14:50～15:50 湯浅 亘（大阪公立大学）
曲面のスケイン代数と量子クラスター代数

8月18日（木）

9:30～10:30 吉瀬 流星（九州大学 D2）
Topological complexity of Khalimsky circle

10:50～11:50 大井 志穂（新潟大学）
 C^* 環に値をとる連続写像のなすバナッハ環上の保存問題

13:30～14:30 佐久間 一浩（近畿大学）
折り目写像のトポロジー

14:50～15:50 森 淳秀（大阪歯科大学）
複素3次元空間の座標の絶対値で理解する葉層と Milnor 束のトポロジー

16:10～17:10 藤田 玄（日本女子大学）
非コンパクト多様体に対するあるトーラス同変指数について

8月19日(金)

9:30～10:30 滝岡 英雄（金沢大学）
絡み目の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の係数多項式

10:50～11:50 小鳥居 祐香（広島大学／理化学研究所）
リボン Yetter-Drinfeld 加群とタングル不変量

13:30～14:30 田中 康平（信州大学）
CW 複体上の境界を跨がないモーション設計とその複雑さ

14:50～15:50 木原 浩（会津大学）
無限次元 C^∞ -多様体の滑らかなホモトピー

写像類群の生成系に関する研究の変遷

門田 直之 (岡山大学)*

概要

曲面の写像類群は、3次元や4次元トポロジーなどを研究する際にも現れる重要な群の一つであるが、写像類群それ自身も非常に興味深い研究対象である。本講演では、曲面の写像類群の代数構造の研究、特に生成系に関する研究の変遷を講演者の視点から紹介したい。

1. Introduction

曲面の**写像類群**とは、曲面の自己同相写像のアイソトピー類のなす群である(より細かい定義は後で紹介する)。曲面の写像類群は、3次元多様体の Heegaard 分解における貼り合わせや、円周上の曲面束や Lefschetz fibration のモノドロミーとして現れる。また、種数 g の有向閉曲面 Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は、種数 g のタイヒミュラー空間 \mathcal{T}_g (i.e. Σ_g 上の複素構造のアイソトピー類) に固有不連続に作用する。特に、商空間 $\mathcal{T}_g/\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は、代数幾何学において重要な空間である種数 g の Riemann 面のモジュライ空間 \mathbb{M}_g になる。さらに、 \mathbb{M}_g の orbifold 基本群と写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は同型であり、加えて、 \mathbb{M}_g と $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の有理数係数のコホモロジー群には自然な同型が存在する。このように、写像類群は様々な数学の分野で活躍することから、数学における重要な研究対象の一つである。

さて、与えられた有限生成群 G に対し、次のような古典的かつ基本的な2つの問題を考えよう。

問題 1.1. 群 G の最小の生成系を与えよ。

問題 1.2. 群 G が torsion (特に involution) で有限生成できるとき、torsion (特に involution) からなる最小の生成系を与えよ。

ここで、torsion とは有限位数の元であり、involution とは位数2の元のことである。上記2つの問題は有限単純群 (i.e. 自明群と自分自身以外の正規部分群を持たない群) において、広く研究されてきた (例えば [10] を参照)。本講演では、曲面の写像類群について、これらの問題に関する研究の変遷を講演者の研究結果も含めながら紹介したい。また、講演者が疑問に生じた部分を問題として提示したい。

全体を通し、記号について次のような注意を述べておく。曲面の自己同相写像を f としたとき、そのアイソトピー類 (つまり写像類群の元) は $[f]$ とかく方が好ましいと思われるが、記号が煩雑になるため、 f のアイソトピー類も同様に f とかくことにする。

2. 有向曲面の写像類群

まず始めに、有向曲面の写像類群の定義と元の例を紹介する。

本研究は科研費 (課題番号:20K03613) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M07, 57N05

キーワード: 写像類群, 生成系

* 〒 700-8530 岡山市北区津島中三丁目 1-1

e-mail: n-monden@okayama-u.ac.jp

定義 2.1. 種数 g の有向閉曲面 Σ_g 上の p 個の点 x_1, x_2, \dots, x_p を指定する. $\Sigma_g - \{x_1, \dots, x_p\}$ を $\Sigma_{g,p}$ とかき (図1参照), 集合

$$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p}) = \{\Sigma_{g,p} \text{の向きを保つ自己同相写像全体}\} / \text{isotopy}$$

を $\Sigma_{g,p}$ の写像類群という (実際, 写像の合成を積とすることで群となる).

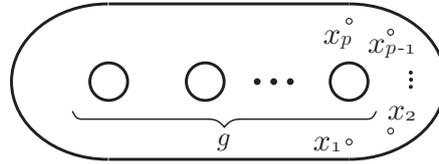


図 1:

Σ_g には標準的な向きを入れ, $\Sigma_{g,p}$ には Σ_g から向きを誘導する. 点 x_i を抜き取ったあとの穴も x_i とよぶことにする. $\Sigma_{g,p}$ の自己同相写像は穴 x_1, x_2, \dots, x_p の入れ替えを許すことに注意してほしい. $p = 0$ のとき, 簡単のため $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0}) = \mathcal{M}(\Sigma_g)$ とかく.

この節では, Dehn twist と half twist とよばれる $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の代表的な元を紹介したい.

定義 2.2. $\Sigma_{g,p}$ 上の単純閉曲線 c に沿って $\Sigma_{g,p}$ を切断し, 切断面の片方を右回りに 2π ねじってから貼り付けることでえられる $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の元を, c についての right-handed **Dehn twist** といい, t_c とかく (図 2 参照). t_c は, c の正則近傍の外側では恒等写像である.

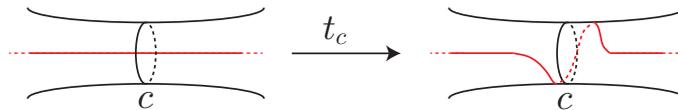


図 2: 単純閉曲線 c についての right-handed Dehn twist t_c

定義から, Dehn twist は穴 x_1, x_2, \dots, x_p を入れ替えることができない. よって, $p \geq 2$ のとき, 穴を入れ替えるような $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の元を考える必要がある. そのような元の例として, half twist があげられる.

定義 2.3. $\Sigma_{g,p}$ の穴 x_i と x_j を結ぶ弧 l を考え, 正則近傍 $N(l)$ を考える. $\sigma_\ell(l) = l$, $\sigma_\ell(x_i) = (x_j)$, $\sigma_\ell(x_j) = x_i$, $\sigma_\ell^2 = t_{\partial N(l)}$ となるような写像類群の元 σ_ℓ を, l についての right-handed **half twist** という (図 3 参照).

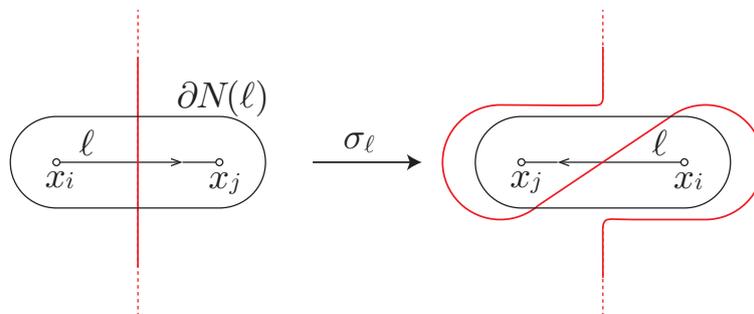


図 3: 弧 l についての right-handed half twist σ_ℓ

以上の例をもとに, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系について紹介する.

3. 有向曲面の写像類群の生成系

まず, $p = 0, 1$ の場合の $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系について紹介する. $\mathcal{M}(\Sigma_{0,p})$ は自明群になることが知られているため, $g \geq 1$ を仮定しておく. $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が有限生成であることが示されたのは1938年で, Dehnの結果である ([9]).

定理 3.1 ([9]). $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は有限個の Dehn twist で生成される (よって, 有限生成可能).

Dehn twist は代数・幾何的に便利な性質があるだけでなく, トポロジーにおいて様々な場所で現れることもあり, Dehn twist から成る $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の生成系を考えるとというのはメリットが多い. とはいえ, Dehn の生成系は $2g(g-1)$ 個も元があり, いささか数が多い. Lickorish は, 1964年にこの数を次のような数まで減らした.

定理 3.2 ([27]). $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は $3g-1$ 個の Dehn twist で生成される ($g \geq 1$).

定理 3.1, 3.2 から, 「Dehn twist のみで $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ を生成する場合, 最低何個必要だろうか?」という問題が考えられる. この問題について, Humphries は $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ に対し (1979年), Johnson は $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ に対し (1983年), それぞれ解答を与えている. つまり, 彼らは, Dehn twist のみから成る $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系を与えた ($p = 0, 1$).

定理 3.3 ([16, 20]). $p = 0, 1$ とする. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は $2g+1$ 個の Dehn twist で生成される. さらに, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は $2g$ 個以下の任意の Dehn twist で生成できない ($g \geq 2$).

次に, $p \geq 2$ に対して, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系を紹介する. $\mathcal{M}(\Sigma_{0,p})$ は $p-1$ 個の half twist で生成されるという事実があるため, やはり $g \geq 1$ を仮定する. Dehn twist は穴の入れ替えができないので, $p \geq 2$ で $\mathcal{M}_{g,p}$ を生成するには half twist などの穴を入れ替える元も必要となる. 実際, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は $2g+p$ 個の Dehn twist と $p-1$ 個の half twist で生成されるという事実がある. この生成系から Dehn twist や half twist の個数をどれだけ減らせるかを考えよう. half twist σ_ℓ を穴の集合 $P = \{x_1, x, \dots, x_p\}$ 上に制限すると, $\sigma_\ell|_P$ は P の対称群 Sym_p の互換になるため, half twist は $p-1$ 個から減らすことができない. 一方, Laburuere–Paris は Dehn twist の個数を減らしている (2001年).

定理 3.4 ([24]). $\mathcal{M}_{g,p}$ は $2g+2$ 個の Dehn twist と $p-1$ 個の half twist で生成される.

定理 3.4 から, Dehn twist の個数はどこまで減らすことができるのだろうかという疑問が生じるが, 講演者はその答えや関連する結果を知らない.

問題 3.5. $p \geq 2$ とする. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ を Dehn twist と half twist で生成する場合, Dehn twist の個数を $2g+2$ 個から減らすことは可能か?

4. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系

この節では, 写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系について紹介する. すなわち, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ に対する **問題 1.1** の解答を紹介する.

$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系の元を Dehn twist と half twist だけにこだわらなければ, より小さい生成系を与えることができる. 実際, 1964年に, Lickorish は $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が4個の元で生成できることを示した ([27]). この結果から24年後の1988年に, Lu は $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の生成元を3個に減らしている ([29]). ここで, 次のような事実がある.

事実 4.1. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は任意の巡回群と同型でない ($g \geq 1$). よって, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は1元生成不可能であり, 生成元は2個以上必要である.

この事実のもと、1996年、Wajnrybは $p = 0, 1$ の場合に $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は2元で生成されることを示した ([53]). つまり、 $p = 0, 1$ に対し、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系を与えた。ちなみに、KorkmazはWajnrybと異なる最小の生成系を与えている ([22]). 次に、 $p \geq 2$ に関する研究を紹介したい。まず、2003年にKassabovにより $g \geq 8$ の場合に、4元から成る $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系が与えられた ([21]). そののち、2011年に講演者は、 $g \geq 1$ に対し、3元で生成できることを示し ([36]), 2021年には $g \geq 3, p \geq 2$ でも $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ が2元生成可能であることを示した ([39]). これまでの話をまとめると、次のようになる。

定理 4.2 ([53, 39]). $g = 1, 2$ かつ $p \geq 2$ の場合を除き、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は2元生成可能である。

一方、 $g = 1, 2$ かつ $p \geq 2$ の場合は未解決であるので、問題として挙げておく。

問題 4.3. $g = 1, 2$ かつ $p \geq 2$ のとき、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は2元生成可能であるか?

5. 有限位数の元からなる写像類群の生成系

ここでは、写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ に対し**問題 1.2**を考えよう。

無限個の torsion からなる $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系を与えたのは Maclachlan で、1971年のことである ([31]). 1979年には、Pattersonがこの結果を拡張し、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ が(無限個の)torsionで生成されることの必要十分条件は $(g, p) \neq (2, 5k + 4)$ であることを示した ([42]). 系として、彼らはリーマン面 $\Sigma_{g,p}$ のモジュライ空間が単連結であることを示している ($(g, p) \neq (2, 5k + 4)$). 無限個の involution からなる生成系が与えられた ($g \geq 3$) のは1987年で、McCarthy–Papadopoulosの結果である ([40]). 一方、 $g = 1, 2$ のとき、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は involution で生成できないことが知られている ($p \geq 0$).

Birmanは1971年に $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ が $4g + 4$ 個の torsion で生成できることを示した ([5]). $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の有限個の involution からなる生成系が見つかったのは2000年のことで、Luoにより与えられた ([30]). Luoの生成系の involution の個数は g と p に依存するため、 g と p に依存しない個数の torsion で $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ を生成できるかという問題が提案された。 $p = 0, 1$ の場合に答えたのが Brendle–Farb で、2004年に彼らは3つの torsion から成る $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ の生成系を与えた ([7]). さらに、 $g \geq 3, p = 0$ と $g \geq 4, p = 1$ のとき、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ が6つの involution で生成できることを示している。 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ の torsion から成る最小の生成系を与えたのは Korkmaz で、2005年に以下のことを示した。

定理 5.1 ([22]). $p = 0, 1$ のとき、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は2つの torsion で生成される。

$p \geq 2$ に対しては2003年のKassabovの結果 ([21]) と2011年の講演者の結果 ([37]) があり、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は4つの involution で生成されることがわかっている ($g \geq 7, p \geq 0$). この結果から次のような問題が考えられる。

問題 5.2. $(g, p) \neq (2, 5k + 4), p \geq 2$ とする。 n 個の torsion で $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ が生成できるとき、 n の最小値は2, 3, 4のどれか?

写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ を torsion で生成するという研究は他にもたくさんあるが、ページ数の都合上、文献を挙げるに留めさせていただく ([38, 11, 25, 56, 55]).

さて、2つの involution で生成される群は virtually abelian であるため、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ を involution で生成するには3つ以上必要となる。2020年にKorkmazは、 $g \geq 8$ かつ $p = 0$ に対し、次のような最善の結果を与えている (後にYildizにより $g \geq 6$ に改善された)。

定理 5.3 ([23, 54]). $g \geq 6$ のとき、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ は3つの involution で生成される。

$p \geq 1$ のとき, 上述の Kassabov と講演者の結果 ([21, 37]) より鋭い結果はえられていないため, 以下を問題として挙げたい.

問題 5.4. $g \geq 3, p \geq 0$ のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は 3 つの involution で生成可能だろうか?

6. 向き付け不可能閉曲面の写像類群の生成系

ここでは, 向き付け不可能閉曲面の写像類群の生成系について紹介する.

定義 6.1. 球面から g 個の開円板を取り除き, 各境界の対蹠点を同一視することでえられる曲面を N_g とかき, **種数 g の向き付け不可能閉曲面** とよぶ (図 4 参照). また, 境界の対蹠点を同一視した部分を **crosscap** という. さらに,

$$\mathcal{M}(N_g) = \{N_g \text{ の自己同相写像全体} \} / \text{isotopy}$$

を N_g の **写像類群** という.

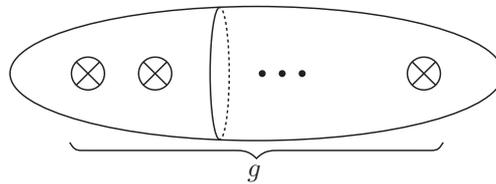


図 4: 種数 g の向き付け不可能閉曲面 (\otimes は crosscap を表す)

$\mathcal{M}(N_g)$ の代表的な元として, Dehn twist と crosscap slide がある. Dehn twist はすでに紹介したので, crosscap slide について紹介する.

定義 6.2. μ, α をそれぞれ N_g 上の単純閉曲線とし, μ の正則近傍がメビウスの帯, α の正則近傍がアニュラスとなり, μ と α は 1 点で横断的に交わるものとする (このとき, $\mu \cup \alpha$ の正則近傍は境界を 1 つもつクラインの壺であるので, 2 つの crosscap をもつ). また, α には向きを入れておく. 図 5 のように, μ の正則近傍を α の向きに沿って移動させ, もとの位置にもどすことでえられる $\mathcal{M}(N_g)$ の元を α に沿った μ の **crosscap slide** (あるいは Y -homeomorphism) といい, $Y_{\mu,\alpha}$ とかく.

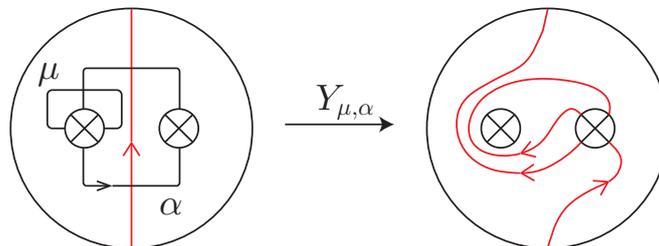


図 5: 単純閉曲線 α に沿った単純閉曲線 μ についての crosscap slide $Y_{\mu,\alpha}$

Lickorish は, 1963 年に $\mathcal{M}(N_g)$ が Dehn twist と crosscap slide で (無限) 生成されることを示し ([26]), さらに Dehn twist だけでは生成されないことを示している ([28]). 1969 年には Chillingworth により $\mathcal{M}(N_g)$ の有限生成系が与えられた ([8]). 2013 年になって Szepietowski は [8] の生成系を減らし, 以下のような結果を与えた.

定理 6.3 ([52]). $\mathcal{M}(N_g)$ は g 個の Dehn twist と 1 つの crosscap slide で生成される.

さらに, 廣瀬氏により, 2018 年に次のような Humphries の結果の類似が与えられた.

定理 6.4 ([13]). $g \geq 4$ とする. $\mathcal{M}(N_g)$ が n 個の Dehn twist と k 個の crosscap slide で生成されるならば, $n \geq g$ かつ $k \geq 1$ である.

$\mathcal{M}(N_g)$ に対する **問題 1.1** と **問題 1.2** に関する話題について紹介する. Szepietowski の 2006 年の結果より, $\mathcal{M}(N_g)$ は $g \geq 3$ について 3 元で生成できることが判明した ([52]). 特に, 1972 年の Birman-Chillingworth の結果 ([6]) から, $\mathcal{M}(N_3)$ が 3 つの involution で生成されることがわかる. これに対し, Szepietowski は 2004 年に $g \geq 4$ で $\mathcal{M}(N_g)$ が involution で生成できることを示し ([49]), 2006 年には 4 つの involution で生成できることを示した ([50]). また, $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ と同様の理由により, $\mathcal{M}(N_g)$ を生成するには 2 元以上必要となり, involution で生成するには 3 つ以上必要となることがわかる. $\mathcal{M}(N_g)$ に対する **問題 1.1** と **問題 1.2** の解答を与えたのは Altunöz-Pamuk-Yildiz である (2022 年)

定理 6.5 ([2]). $g \geq 19$ に対し, $\mathcal{M}(N_g)$ は 2 元生成可能である. また, $g \geq 26$ に対し, $\mathcal{M}(N_g)$ は 3 つの involution で生成される.

7. Torelli 群と level L 写像類群の生成系

定義 7.1. F_g を種数 g の閉曲面 (つまり, $F_g = \Sigma_g$ または $F_g = N_g$) とし, $\mathbb{Z}_L = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ とおく ($L \geq 2$). ただし, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$ と定義しておく. 次の $\mathcal{M}(F_g)$ の部分群

$$\Gamma_L(F_g) := \{f \in \mathcal{M}(F_g) \mid f_* = \text{id} : H_1(F_g; \mathbb{Z}_L) \rightarrow H_1(F_g; \mathbb{Z}_L)\}$$

を F_g の level L 写像類群という ($L \geq 2$). $\Gamma_0(F_g)$ を $\mathcal{I}(F_g)$ とかき, F_g の Torelli 群という.

次の理由で, Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ や level L 写像類群 $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は活発に研究されている.

- 種数 g のタイヒミュラー空間 \mathcal{T}_g を $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ で割った空間は Torelli 空間とよばれ, 代数幾何においても重要な研究対象の 1 つである. また, 3 次元球面 S^3 から Σ_g を境界にもつハンドル体 H_g を抜きとり, そのときえられる貼り合わせ写像と $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ の元の合成で再び H_g を貼りなおすと, ホモロジー 3 球面がえられる. 実は, 任意のホモロジー 3 球面はこのような方法でえられる.
- $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は, level L 構造をもつ種数 g のリーマン面のモジュライ空間の orbifold 基本群として現れる. さらに, $L \geq 3$ のとき, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ と level L 構造をもつ種数 g のリーマン面のモジュライ空間の整係数ホモロジー群は一致する.

まずは Torelli 群 $\mathcal{I}(F_g)$ の生成系についての話題を紹介しよう. $\mathcal{I}(F_g)$ の代表的な元として, 分離的単純閉曲線 c についての Dehn twist t_c (以後, **BSCC-map** とよぶ) と **BP-map** $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$ がある. ただし, c_1, c_2 は非分離的単純閉曲線で $F_g - \{c_1, c_2\}$ が連結成分が 2 つになるものである.

$F_g = \Sigma_g$ のとき, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ は torsion-free であるため, 残念だが **問題 1.2** を考えることができない. そこで, **問題 1.1** に話を絞ろう. 1971 年の Birman の結果 ([4]) に基づき, Powell は $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ が BSCC-map と BP-map で無限生成されることを 1978 年に示した ([44]). この 1 年後の 1979 年, Johnson は $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ を生成するには BSCC-map が不要であることを示し ([18]), さらに, 1983 年に次のような結果を与えた.

定理 7.2 ([20]). $g \geq 3$ について, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ は BP-map で有限生成される.

正確には, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ は $9 \cdot 2^{2g-3} - 4g^2 + 2g - 6$ 個の BP-map で生成される ($g \geq 3$). 一方, $\mathcal{I}(\Sigma_2)$ は有限生成でなく ([34]), 無限階数の自由群である ([35]). Johnson は $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ のアーベル化を決定しており ([19]), この結果から $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ を生成するには最低 $\frac{1}{3}(4g^3 - g)$ 個の元が必要であることがわかる. 特に, $g = 3$ のとき, Johnson の与えた生成系は最小である. $g \geq 4$ に対し, $\binom{57g}{3}$ 個 (つまり $O(g^3)$ の個数) の元からなる生成系が Putman により与えられた ([46]) が, 最小の生成系は知られていない.

問題 7.3. $g \geq 4$ に対し, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ の最小の生成系を見つけよ.

$F_g = N_g$ の場合については, 次の廣瀬氏と小林氏の 2017 年の結果がある.

定理 7.4 ([20]). $g \geq 4$ について, $\mathcal{I}(N_g)$ は BSCC-map と BP-map で無限生成される.

しかし, $\mathcal{I}(N_g)$ に対して **問題 1.1** と **問題 1.2** はほとんど未解決のようである.

問題 7.5. $\mathcal{I}(N_g)$ は有限生成可能であるか? また, torsion で (有限) 生成可能か?

最後に, level L 写像類群 $\Gamma_L(F_g)$ に関する話題を紹介する. $\Gamma_L(F_g)$ は, $\mathcal{M}(F_g)$ の指数有限部分群であることが知られており, その理由から有限生成である. しかし, $F_g = N_g$ かつ $L = 2$ の場合を除き, 具体的な有限生成系は知られていないようである.

問題 7.6. $(F_g, L) \neq (N_g, 2)$ のとき, $\Gamma_L(F_g)$ の具体的な有限生成系を与えよ.

$F_g = \Sigma_g$ の場合, L が 4 で割り切れないとき, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ のアーベル化が決定されているため ([43, 48, 45, 47]), $\Gamma_L(\Sigma_g)$ を生成するために必要な元の個数の下からの評価がわかっている. ちなみに, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ の無限生成系として, 以下のものが知られている.

定理 7.7. $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は非分離的単純閉曲線についての Dehn twist の L 乗と BSCC-map により無限生成される ([32]). 特に, $L = 2$ のときと, $g = 2$ かつ $L = 3$ のとき, BSCC-map は必要ない ([17]).

$\Gamma_L(\Sigma_g)$ に対する **問題 1.1** の話題はまだ未解決な部分が多い. 一方, 残念なことに, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ に対し **問題 1.2** を考えることはできない. なぜなら, $L \geq 3$ のとき, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は torsion-free だからである. $\Gamma_2(\Sigma_g)$ は torsion-free ではないが, torsion は hyperelliptic involution と共役な元のみである. 佐藤氏の結果 ([48]) から, $\Gamma_2(\Sigma_g)$ は involution で生成できないため, やはり **問題 1.2** を考えることができない.

$F_g = N_g$ の場合, $L = 2$ のときのみ様々な結果が存在する. 2012 年に Szepietowski は Dehn twist の 2 乗と crosscap slide が $\Gamma_2(N_g)$ の元であることと, $\Gamma_2(N_g)$ は crosscap slide で無限生成されることを示した ([51]). 2013 年には $\Gamma_2(N_g)$ の有限生成系を具体的に与えている ([52]). $\Gamma_2(N_g)$ の最小の生成系は佐藤氏と廣瀬氏により与えられた ([15]).

定理 7.8 ([15]). $g \geq 4$ とする. $\Gamma_2(N_g)$ は $\binom{g}{3} + \binom{g}{2}$ 個の元で生成できる. さらに, これより少ない個数の元では $\Gamma_2(N_g)$ を生成できない.

彼らは, Szepietowski の生成系から元を減らし, $\Gamma_2(N_g)$ のアーベル化を求めることで最小性を示している. $\Gamma_2(\Sigma_g)$ は involution で生成できないことはすでに述べたが, $\Gamma_2(N_g)$ は involution で生成できることが示されている ([51]). 講演者は, 最近, Altunöz-Pamuk-Yildiz との共同研究により, $\Gamma_2(N_g)$ に対し, 次のような **問題 1.2** の解答を与えた. これは, 佐藤氏と廣瀬氏の与えた $\Gamma_2(N_g)$ の最小の生成系 ([15]) から, 上手く involution を作り出すことで示された.

定理 7.9 ([1]). $g \geq 4$ とする. $\Gamma_2(N_g)$ は $\binom{g}{3} + \binom{g}{2}$ 個の *involution* で生成できる. さらに, これより少ない個数の *involution* では $\Gamma_2(N_g)$ を生成できない.

一般に有限表示群 G の指数有限部分群 H は有限表示可能である. 写像類群 $\mathcal{M}(F_g)$ は有限表示可能であるので (例えば, [33, 41] など), $\mathcal{M}(F_g)$ の指数有限部分群である level L 写像類群 $\Gamma_L(F_g)$ も有限表示可能である. 一方, Torelli 群 $\mathcal{I}(F_g)$ は指数有限でない. そこで, この予稿集の最後に, 次の未解決問題を挙げておく.

問題 7.10. $g \geq 3$ に対し, $\mathcal{I}(F_g)$ は有限表示可能であるか?

謝辞

第 69 回トポロジーシンポジウムにお招き下さった石川昌治氏 (慶應義塾大学), 蒲谷祐一氏 (北見工業大学), 鎌田聖一氏 (大阪大学), 寺垣内政一氏 (広島大学), 森藤孝之氏 (慶應義塾大学) に心から感謝いたします.

参考文献

- [1] T. Altunöz, N. Monden, M. Pamuk and O. Yildiz, *Generating the Level 2 Subgroup by Involutions*, arXiv:2202.06224.
- [2] T. Altunöz, M. Pamuk and O. Yildiz, *Generating the Mapping Class Group of a Nonorientable Surface by Two Elements or by Three Involutions*, Bull. Braz. Math. Soc. New Series (2022).
- [3] J. Birman, *Mapping class groups and their relationship to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238.
- [4] J. Birman, *Abelian quotients of the mapping class group of a 2 manifold*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 147–150; Erratum **77** (1971), 479.
- [5] J. Birman, *The algebraic structure of surface mapping class groups*, in: W. Harvey (Ed.), Discrete Groups and Automorphic Functions, 1977, pp. 163–198.
- [6] J. Birman and D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*. Proc. Camb. Philos. Soc. **71**, (1972), 437–448.
- [7] T. E. Brendle and B. Farb, *Every mapping class group is generated by 3 torsion elements and by 6 involutions*, J. Algebra **278** (2004), 187–198.
- [8] D. R. J. Chillingworth, *A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 409–430.
- [9] M. Dehn, *Papers on group theory and topology*, Springer-Verlag, New York, 1987 (Die Gruppe der Abbildungsklassen, Acta Math, Vol. **69** (1938), 135–206.
- [10] L. DiMartino and M. C. Tamburini, *2-generation of finite simple groups and some related topics*, in: A. Barlotti, et al. (Eds.), Generators and Relations in Groups and Geometries, 1991, pp. 195–233.
- [11] X. Du, *Generating the mapping class groups by torsions*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 7, 1750037, 8 pp.
- [12] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton Math. Ser., (Princeton University Press, 2012), 623–658.
- [13] S. Hirose, *Generators for the mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 154–159.
- [14] S. Hirose and R. Kobayashi, *A normal generating set for the Torelli group of a non-orientable closed surface*, Fund. Math. **238** (2017), no. 1, 29–51.
- [15] S. Hirose and M. Sato, *A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **157** (2014), no. 2, 345–355.

- [16] S. P. Humphries, *Generators for the mapping class group*, Topology of low-dimensional manifolds. Proc. Second Sussex Conf. Chelwood Gate 1977 Lecture Notes in Math. **722** (Springer, 1979), 44–47.
- [17] S. P. Humphries, *Normal closures of powers of Dehn twists in mapping class groups*, Glasgow Math. J. **34** (1992) 313–317.
- [18] D. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 119–125.
- [19] D. Johnson, *Quadratic forms and the Birman-Craggs homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 235–254.
- [20] D. Johnson, *The structure of Torelli group I: A finite set of generators for I*, Ann. of Math. **118** (1983), 423–442.
- [21] M. Kassabov, *Generating Mapping Class Groups by Involutions*, arXiv:math.GT/0311455 v1 25 Nov 2003.
- [22] M. Korkmaz, *Generating the surface mapping class group by two elements*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 3299–3310.
- [23] M. Korkmaz, *Mapping class group is generated by three involutions*, Math. Res. Lett. **27** (2020) Number 4, 1095–1108.
- [24] C. Labruere and L. Paris, *Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups*, Algebr. Geom. Topol., **1** (2001), 73–114.
- [25] J. Lanier, *Generating mapping class groups with elements of fixed finite order*, Journal of Algebra, **511** (2018), 455–470.
- [26] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Camb. Phils. Soc. **59** (1963), 307–317.
- [27] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Camb. Phils. Soc. **60** (1964), 769–778.
- [28] W. B. R. Lickorish, *On the homeomorphisms of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Phils. Soc. **61** (1965), 61–64.
- [29] N. Lu, *On the mapping class groups of the closed orientable surfaces*, Topology Proc. **13** (1988), 293–324.
- [30] F. Luo, *Torsion Elements in the Mapping Class Group of a Surface*, arXiv:math.GT/0004048 v1 8 Apr 2000.
- [31] C. Maclachlan, *Modulus space is simply-connected*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 85–86.
- [32] J. D. McCarthy, *On the first cohomology group of cofinite subgroups in surface mapping class groups*, Topology **40** (2001), no. 2, 401–418.
- [33] J. McCool, *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group*, J. Algebra **35** (1975), 205–213.
- [34] D. McCullough and A. Miller, *The genus 2 Torelli group is not finitely generated*, Topology Appl. **22** (1986), no. 1, 43–49.
- [35] G. Mess, *The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces*, Topology **31** (1992), no. 4, 775–790.
- [36] N. Monden, *The mapping class group of a punctured surface is generated by three elements*, Hiroshima Math. J. **41** (2011), no. 1, 1–9.
- [37] N. Monden, *Generating the mapping class group of a punctured surface by involutions*, Tokyo J. Math. **34** (2011), no. 2, 303–312.
- [38] N. Monden, *Generating the mapping class group by torsion elements of small order*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **154** (2013), no. 1, 41–62.
- [39] N. Monden, *On minimal generating sets for the mapping class group of a punctured*

surface, arXiv:2103.01525

- [40] J. McCarthy and A. Papadopoulos, *Involutions in surface mapping class groups*, Enseign. Math. **33** (1987), 275–290.
- [41] L. Paris, and B. Szepietowski, *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, Bull. Soc. Math. France **143** (2015), no. 3, 503–566.
- [42] D. B. Patterson, *The fundamental group of the modulus space*, Michigan Math. J. **26** (1979), no. 2, 213–223.
- [43] B. Perron, *Filtration de Johnson et groupe de Torelli modulo p , p premier*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 11-12, 667–670.
- [44] J. Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 347–350.
- [45] A. Putman, *The abelianization of the level L mapping class group*, arXiv:0803.0539.
- [46] A. Putman, *Small generating sets for the Torelli group*, Geom. Topol. **16** (2012), no. 1, 111–125.
- [47] A. Putman, *The Picard group of the moduli space of curves with level structures*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 4, 623–674.
- [48] M. Sato, *The abelianization of the level d mapping class group*, J. Topol. **3** (2010), no. 4, 847–882.
- [49] B. Szepietowski, *Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces*. Collect. Math. **55**, (2004), no. 3, 253–260.
- [50] B. Szepietowski, *The mapping class group of a nonorientable surface is generated by three elements and by four involutions*, Geom. Dedicata **117**, (2006), no. 1, 1–9.
- [51] B. Szepietowski, *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata **160** (2012), 169–183.
- [52] B. Szepietowski, *A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **36** (2013), 1–14.
- [53] B. Wajnryb, *Mapping class group of a surface is generated by two elements*, Topology. **35** (1996), 377–383.
- [54] O. Yildiz, *Generating the mapping class group by three involutions*, arXiv:2002.09151.
- [55] O. Yildiz, *Generating mapping class group by two torsion elements*, arXiv:2003.05789.
- [56] K. Yoshihara, *Generating mapping class groups of surfaces by torsion elements*, PhD thesis, Kyushu University, 2018.

ルジャンドル特異点と情報幾何学

中島 直道 (北海道大学大学院情報科学院, JSPS 特別研究員 DC2)*

1 はじめに

情報幾何学では、統計モデルや機械学習モデルのパラメータ空間を、フィッシャー情報行列をリーマン計量とするリーマン多様体とみなし、さらにその上にある双対性を満たす二種類のアファイン接続を考える。統計多様体とは、この双対的な構造を微分幾何学的な観点から定式化した概念である。

情報幾何学は、このような空間構造を通してパラメータ空間を扱うことにより、統計学や機械学習、最適化問題等への統一的な幾何学的解釈をもたらし、様々な解析を可能とする [2, 3].

特に情報幾何学における主要な空間概念として、甘利・長岡により導入された双対平坦多様体がある [2]. 双対平坦多様体は、アファイン接続が平坦である統計多様体であり、これはアファイン微分幾何学におけるヘッセ多様体と同一の概念である (志摩 [17]). すなわち、双対平坦多様体では、局所アファイン座標系においてリーマン計量が局所凸ポテンシャル関数のヘッセ行列で与えられる。さらに、二種類の平坦アファイン接続それぞれに付随する局所凸ポテンシャルは互いにルジャンドル双対性により結びついている。

双対平坦多様体は実応用の観点からも注目されている一方で、深層学習を含め実応用で現れる空間ではしばしば計量が退化する [19]. すなわち、局所ポテンシャル関数は非凸で変曲的あるいは多価になり得る。このような場合には、厳密には、双対平坦多様体の理論が適用できない。そこで著者らは、計量の退化性を許容する双対平坦多様体の理論の一般化として概ヘッセ多様体の理論を接触幾何学と特異点理論の観点から建設した [15]. 理論刷新の核は、波面、すなわち非凸ポテンシャルあるいは多価ポテンシャルのグラフに依然として働くルジャンドル双対性である。

本稿では [15, 14] に基づき、情報幾何学の概説を行い、概ヘッセ多様体の理論について、統計多様体の幾何学との関連を踏まえて紹介する。統計多様体の幾何学は、コントラスト関数の理論と密接に関連する。コントラスト関数は、多様体上のある条件を満たす非対称な“距離 (二乗) 関数”であり、統計多様体上にさまざまなテンソルを導入する。これらのテンソルは統計多様体の幾何学を特徴づけ、その関連について江口は徹底的に調べている [9]. 特に 4 次テンソルに基づく統計多様体の幾何学は、概ヘッセ多様体の幾何学との関連が示唆されるものである。

本稿を通して、写像や多様体は全て滑らかなものを考え、太字は列ベクトルを表すものとする、e.g., $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

* 〒060-0814 札幌市北区北 14 条西 9 丁目
e-mail: nakajima-n@ist.hokudai.ac.jp

2 情報幾何学の概観

本節では情報幾何学に登場する諸概念についての定義を整理しながら、双対平坦多様体の理論についての紹介を行う。

M を n 次元多様体, h をその上の擬リーマン計量 (非退化な対称 $(0, 2)$ テンソル場) とする. ∇ を接束 TM の振率がゼロであるアファイン接続とする. (M, h, ∇) が統計多様体であるとは, $(0, 3)$ テンソル場 $C := \nabla h$ が全対称であるとき, すなわち任意のベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して次が成り立つときをいう:

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z).$$

このときテンソル C を Amari-Chentsov の 3 次テンソルと呼ぶ [2]. 統計多様体 (M, h, ∇) に対し, TM の接続である ∇ の双対接続 ∇^* を次式で定義する:

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X^* Z).$$

ここで, X, Y, Z は M 上の任意のベクトル場である. このとき, 双対接続 ∇^* もまた振率が消えている. 上記の統計多様体の定義と同値な定義として Lauritzen によるものがある [11]. すなわち, 擬リーマン多様体 (M, h) 上に対称な $(0, 3)$ テンソル場 C が与えられているとき, 次式によりアファイン接続 ∇, ∇^* を定義すると (M, h, ∇) は統計多様体となる:

$$h(\nabla_X Y, Z) = h(\bar{\nabla}_X Y, Z) - \frac{1}{2}C(X, Y, Z), \quad h(\nabla_X^* Y, Z) = h(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{2}C(X, Y, Z).$$

ここで, $\bar{\nabla}$ は h のレビ・チビタ接続である. いずれの定義であっても統計多様体の幾何学を考える上では (h, C, ∇, ∇^*) を考えることが重要である.

統計多様体 (M, h, ∇) において, ∇ が平坦であることと, その双対接続 ∇^* が平坦であることが同値となる. このような統計多様体 (M, h, ∇, ∇^*) を双対平坦多様体 [2] あるいはヘッセ多様体 [17] と呼び, (h, ∇, ∇^*) を M 上の双対平坦構造と呼ぶ. 双対平坦多様体 (M, h, ∇, ∇^*) は次の重要な性質をもつ.

命題 2.1 M の各点 p の周りにおいて ∇ に関するアファイン座標系 (∇ -アファイン座標系) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とその上の関数 $z = f(\mathbf{x})$ が存在して, 次が成り立つ:

- (1) 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対し, $h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$;
- (2) $p_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq n$) で定義される $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ は ∇^* -アファイン座標系である ;
- (3) $h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}) = \delta_{ij}$;
- (4) ∇^* -アファイン座標系 \mathbf{p} 上の関数 $z' = \varphi(\mathbf{p})$ が存在して, $z + z' - \mathbf{x}^T \mathbf{p} = 0$ を満たす ;
- (5) $C(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$.

上記の命題 2.1 における ∇^* -アファイン座標系 \mathbf{p} は ∇ -アファイン座標系 \mathbf{x} の双対座標と呼ばれ、関数 $f(\mathbf{x})$ はポテンシャル関数、 $\varphi(\mathbf{p})$ は f の双対ポテンシャル関数あるいはルジャンドル変換と呼ばれる。

双対平坦多様体 (M, h, ∇, ∇^*) では、局所的にポテンシャル関数 $f(\mathbf{x})$ と双対ポテンシャル関数 $\varphi(\mathbf{p})$ が存在するが、これらを用いて定義される

$$D : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(p, q) = f(\mathbf{x}(p)) + \varphi(\mathbf{p}(q)) - \mathbf{x}(p)^T \mathbf{p}(q)$$

をブレグマンダイバージェンスという（厳密には、 M の対角線集合の近傍で定義される）。上式の定義はアファイン座標系 \mathbf{x}, \mathbf{p} やポテンシャル関数 f, φ の取り方にはよらないことに注意する。情報幾何学の応用を考える上でブレグマンダイバージェンスは重要な役割を果たすものである [2]。

3 接触幾何学と概ヘッセ多様体の理論

本節では、2 節で述べた双対平坦多様体の理論の一般化である概ヘッセ多様体の理論の紹介を行う。証明等の詳細は [15] を参照されたい。

N を $2n+1$ 次元多様体、 ξ をその上の超平面場とする。 (N, ξ) が接触多様体であるとは、超平面場 ξ が局所的に $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ なる 1 次微分形式 θ の核で表されるときをいう。このとき、 θ を（局所）接触形式という。 $2n+1$ 次元接触多様体 (N, ξ) に対して、 n 次元部分多様体 $L \subset N$ がルジャンドル部分多様体であるとは、各点 $p \in N$ において $T_p L \subset \xi_p$ なることをいう。

$\mathbb{R}^{2n+1} (= T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ に対して、 $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, z)$ でその標準的な座標系を表すものとする。ここで、 \mathbf{x} と \mathbf{p} はそれぞれ $T^*\mathbb{R}^n$ の底空間とファイバーの座標系を表し、これら二つの空間を \mathbb{R}_x^n と \mathbb{R}_p^n と書き、区別することにする。 \mathbb{R}^{2n+1} 上の 1 次微分形式 θ を

$$\theta := z - \mathbf{p}^T d\mathbf{x} = z - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$$

で定める。このとき、 $(\mathbb{R}^{2n+1}, \theta)$ は接触多様体であり、この接触多様体を標準接触多様体と呼ぶ。

標準接触多様体 $(\mathbb{R}^{2n+1}, \theta)$ に対して、ファイバー束

$$\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{p}, z) \mapsto (\mathbf{x}, z)$$

はルジャンドルファイブレーション（各ファイバーがルジャンドル部分多様体である）を与える。変換 $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, z) = (\mathbf{x}', \mathbf{p}', z') = (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^T \mathbf{p} - z)$$

を考えると、これは微分同相写像であり接触超平面場を保つ。ファイバー方向への射影

$$\pi' := \pi \circ \mathcal{L} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_{z'}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{p}, z) \mapsto (\mathbf{p}, \mathbf{x}^T \mathbf{p} - z)$$

もまたルジャンドルファイブレーションとなる。このとき、二つのルジャンドルファイブレーションからなる次の図式を標準接触多様体 $(\mathbb{R}^{2n+1}, \theta)$ に対するダブルファイブレーション構造と呼ぶ。

$$\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z \xleftarrow{\pi} \mathbb{R}^{2n+1} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_{z'}$$

$L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ をルジャンドル部分多様体とする。 L に対し、ルジャンドル写像

$$\pi^e := \pi \circ \iota : L \rightarrow \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z, \quad \pi^m := \pi' \circ \iota : L \rightarrow \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_{z'}$$

をそれぞれ e/m -ルジャンドル写像という。ここで、 $\iota : L \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ は包含写像である。

定義 3.1 ([15]) e/m -ルジャンドル写像 π^e と π^m に対して、

$$W_e(L) := \pi^e(L) \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z, \quad W_m(L) := \pi^m(L) \subset \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_{z'}$$

をそれぞれ L に付随する e/m -波面と呼ぶ。

L 上のベクトル束 $E (= E_L)$ を

$$E := \{ (p, w) \in L \times (\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z) \mid dz_p(w) - \mathbf{p}(p)^T d\mathbf{x}_p(w) = 0 \}$$

で定める。 L はルジャンドル部分多様体であることから、 $d\pi^e(T_p L) \subset E_p$ が各点 $p \in L$ において成り立つ。ここで E_p は p におけるファイバーである。このことから、束写像

$$\Phi : TL \rightarrow E, \quad v_p \mapsto d\pi_p^e(v_p)$$

が意味を持つことに注意する。

$\tilde{\nabla}$ を $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z$ 上の平坦アファイン接続とし、 $\psi_p : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z \rightarrow E_p$ を z -軸に沿った線形射影とする。このとき、

$$\nabla_X^E \eta(p) := \psi_p \circ \tilde{\nabla}_X \eta(p)$$

により E 上のアファイン接続 ∇^E を定義する。ここで、 X は L 上のベクトル場であり η は E の切断である。

命題 3.2 ([15]) 接続 ∇^E は平坦であり、任意の L 上のベクトル場 X, Y に対し

$$\nabla_X^E(\Phi(Y)) - \nabla_Y^E(\Phi(X)) = \Phi([X, Y])$$

が成り立つ。

(E, Φ, ∇^E) を e -波面 $W_e(L)$ に付随する連接接束と呼ぶ (cf. [16])。同様にして、 m -波面 $W_m(L)$ に対しても連接接束 $(E', \Phi', \nabla^{E'})$ を定める。

これらベクトル束 E, E' は L 上で定義されたものであるが、 \mathbb{R}^{2n+1} 上で定義され得るものである。超平面場 ξ は直和分解

$$\xi_p = \ker d\pi_p' \oplus \ker d\pi_p \simeq E_p \oplus E'_p \simeq \mathbb{R}_x^n \oplus \mathbb{R}_p^n$$

をもつことに注意する. このとき, ξ 上にシンプレクティック形式 ω と (n, n) 型の擬リーマン計量 τ が

$$\omega := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i, \quad \tau := \sum_{i=1}^n dx_i dp_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (dx_i \otimes dp_i + dp_i \otimes dx_i)$$

により自然に定義される.

定義 3.3 ([15]) L 上の概ヘッセ計量 h を τ の引き戻しにより定義する:

$$h(Y, Z) := \tau(\iota_* Y, \iota_* Z) \quad (Y, Z \in TL).$$

ここで, $\iota_* = \Phi \oplus \Phi' : TL \hookrightarrow \xi = E \oplus E'$ は包含写像である.

一般に, ルジャンドル部分多様体 $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ は局所的に母関数 $g(\mathbf{x}_I, \mathbf{p}_J)$ を用いて

$$L = \{(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J, \mathbf{p}_I, \mathbf{p}_J, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \mathbf{p}_I = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_I}, \mathbf{x}_J = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_J}, z = \mathbf{p}_J^T \mathbf{x}_J + g(\mathbf{x}_I, \mathbf{p}_J)\}$$

のように表される [5]. ここで, $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$ は分割であり, $(\mathbf{x}_I, \mathbf{p}_J)$ は L の局所座標系である. また, $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_I}$ は列ベクトル $(\frac{\partial g}{\partial x_i})_{i \in I}^T$ を表すものとする.

命題 3.4 ([15]) $g(\mathbf{x}_I, \mathbf{p}_J)$ を L の母関数とする. このとき,

$$h = \sum_{i,k \in I} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k - \sum_{j,l \in J} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_l} dp_j dp_l.$$

$\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z$ と $\mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_{z'}$ 上のアファイン変換

$$F(\mathbf{x}, z) = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}, z + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d), \quad F^*(\mathbf{p}, z') = (A'\mathbf{p} + \mathbf{b}', z' + \mathbf{c}'^T \mathbf{p} + d')$$

はアファインルジャンドル同値 $\mathcal{L}_F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$\mathcal{L}_F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, z) = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}, A'\mathbf{p} + \mathbf{b}', z + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d)$$

を定める. ここで, A は正則行列で, $A' = (A^T)^{-1}$, $\mathbf{b}' = A'\mathbf{c}$, $\mathbf{b} = A\mathbf{c}$, $d' = \mathbf{b}'^T \mathbf{b} - d$ である. この変換 \mathcal{L}_F はダブルファイブレーション構造と接触構造を保つ (従って ω と τ も保つ).

二つのルジャンドル部分多様体 L_1, L_2 がアファインルジャンドル同値 \mathcal{L}_F により同一視されているとする: $\mathcal{L}_F(L_1) = L_2$. このとき, \mathcal{L}_F は概ヘッセ計量を保ち, 接続接束間の同型 $E_{L_1} \simeq E_{L_2}$, $E'_{L_1} \simeq E'_{L_2}$ を自然に引き起こす. この同型はまた, 接続接束上の平坦アファイン接続を自然に同一視する.

定義 3.5 ([15]) 概ヘッセ多様体 $(M, \mathcal{U} = \{L_\alpha\})$ とは, ルジャンドル部分多様体 $L_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ をアファインルジャンドル同値により張り合わせてできたものである. このとき, 各 L_α の構造から, M 上に退化し得る $(0, 2)$ 型テンソル h と接続接束 (E, Φ, ∇^E) , $(E', \Phi', \nabla^{E'})$ が well-defined に定まる. 各 L_α を M の局所モデルと呼ぶ.

以上の構成により概ヘッセ多様体 M を含む接触多様体が自然に定義されることに注意する.

$(M, h, (E, \Phi, \nabla^E), (E', \Phi', \nabla^{E'}))$ を概ヘッセ多様体とする. M 上の任意のベクトル場 Y, Z に対して,

$$(\eta, \eta') := (\Phi \oplus \Phi')(Y), (\zeta, \zeta') := (\Phi \oplus \Phi')(Z), \tau(\eta, \zeta') := \tau(\eta \oplus 0, 0 \oplus \zeta')$$

とおく.

定義 3.6 ([15]) 概ヘッセ多様体 M に対して, 標準 3 次テンソル C を次で定義する:

$$C(X, Y, Z) := \tau(\eta, \nabla_X^{E'} \zeta') + \tau(\zeta, \nabla_X^{E'} \eta') - \tau(\nabla_X^E \eta, \zeta') - \tau(\nabla_X^E \zeta, \eta').$$

ここで, X, Y, Z は M 上のベクトル場である.

命題 3.7 ([15]) 標準 3 次テンソル C は局所的に母関数 $g(\mathbf{x}_I, \mathbf{p}_J)$ の 3 次導関数である: 任意の k, l, m に対し

$$C(\partial_k, \partial_l, \partial_m) = \partial_k \partial_l \partial_m g.$$

ここで, $\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k \in I$) または $\partial_k := \frac{\partial}{\partial p_k}$ ($k \in J$) である. 従って, C は対称である.

注意 3.8 概ヘッセ計量 h がいたるところ非退化であるとき, M 上には従来の双対平坦構造が自然に復元される. 実際このとき Φ, Φ' は同型写像であり, $\Phi(\nabla_X Y) = \nabla_X^E \Phi(Y)$, $\Phi'(\nabla_X^* Y) = \nabla_X^{E'} \Phi'(Y)$ により TM 上の接続 ∇, ∇^* が一意的に定まる. ここで, X, Y は M 上の任意のベクトル場である. さらにこのとき,

$$\begin{aligned} \tau(\nabla_X^E \eta, \zeta') &= \tau(\nabla_X^E \Phi(Y), \Phi'(Z)) = \tau(\Phi(\nabla_X Y), \Phi'(Z)) = \frac{1}{2} h(\nabla_X Y, Z), \\ \tau(\eta, \nabla_X^{E'} \zeta') &= \tau(\Phi(Y), \nabla_X^{E'} \Phi'(Z)) = \tau(\Phi(Y), \Phi'(\nabla_X^* Z)) = \frac{1}{2} h(Y, \nabla_X^* Z). \end{aligned}$$

である. このため Amari-Chentsov テンソルも自然に復元される:

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}(h(\nabla_X^* Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z)) + \frac{1}{2}(h(\nabla_X^* Z, Y) - h(\nabla_X Z, Y)) \\ &= (\nabla h)(X, Y, Z). \end{aligned}$$

双対平坦多様体上のブレグマンダイバージェンスは概ヘッセ多様体上の正準ダイバージェンスとして以下のように一般化される. $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ をルジャンドル部分多様体とする. $p \in L$ について, \mathbb{R}^{2n+1} の座標系 $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, z)$ を用いて

$$p = (\mathbf{x}(p), \mathbf{p}(p), z(p)) \in \mathbb{R}^{2n+1}, \quad z'(p) = \mathbf{x}(p)^T \mathbf{p}(p) - z(p) \in \mathbb{R}$$

と書くことにする. L 上の正準ダイバージェンス $\mathcal{D}_L : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{D}_L(p, q) = z(p) + z'(q) - \mathbf{x}(p)^T \mathbf{p}(q)$$

で定義する. 概ヘッセ計量が非退化であるとき, \mathcal{D}_L はブレグマンダイバージェンスに他ならない. \mathcal{D}_L はアファインルジャンドル同値の下で不変である [15]. このため, 自然に概ヘッセ多様体 $(M, \mathcal{U} = \{L_\alpha\})$ 上に正準ダイバージェンス \mathcal{D}_M が定義される.

4 コントラスト関数の理論と概ヘッセ多様体の幾何学

本節では、江口によるコントラスト関数の理論を通して、統計多様体の幾何学と概ヘッセ多様体の幾何学の関連について述べる。

多様体 M 上の関数 $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ とベクトル場 $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_l$ を用いて、関数 $\rho[X_1 \cdots X_k | Y_1 \cdots Y_l]: M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\rho[X_1 \cdots X_k | Y_1 \cdots Y_l](r) = (X_1)_p \cdots (X_k)_p (Y_1)_q \cdots (Y_l)_q (\rho(p, q))|_{p=q=r}$$

を定義する。関数 $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ がコントラスト関数であるとは、任意の $r \in M$ と M 上のベクトル場 X, Y に対して次を満たすときをいう：

- (i) $\rho[-|-](r) = \rho(r, r) = 0$,
- (ii) $\rho[X|-](r) = \rho[-|X](r) = 0$,
- (iii) $-\rho[X|Y]$ は M 上の擬リーマン計量である。

一般に、 M 上にコントラスト関数 $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$h(X, Y) := -\rho[X|Y], \quad C(X, Y, Z) := -\rho[Z|XY] + \rho[XY|Z] \quad (1)$$

により M 上に擬リーマン計量 h と対称 3 次テンソル C が導入され、 (M, h, C) は統計多様体になる。このとき同時に、

$$h(\nabla_X Y, Z) = -\rho[XY|Z], \quad h(\nabla_X^* Y, Z) = -\rho[Z|XY]$$

により、アファイン接続 ∇ とその双対接続 ∇^* も導入されることに注意する。江口はこのようなコントラスト関数から導入される統計多様体の幾何学を徹底的に調べている [9]。また、統計多様体 (M, h, C) に対し、上式 (1) によって統計多様体の構造を復元するコントラスト関数が存在することが知られている [12]。

(1, 1) テンソル場 B, B^* をコントラスト関数の 4 階微分を用いて次で定義する：

$$h(B(X, Y)Z, W) = -\rho[XYZ|W] - h(\nabla_X \nabla_Y Z, W), \quad (2)$$

$$h(Z, B^*(X, Y)W) = -\rho[Z|XYW] - h(Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* W). \quad (3)$$

これらテンソルは江口により [9] で与えられたものであり、また、[13] においては (双対) バートレットテンソルと呼ばれ、 h や ∇, ∇^* の曲率との関連が調べられている。

2 節で扱ったブレグマンダイバージェンスは双対平坦多様体上のコントラスト関数であり、その構造を復元する。

命題 4.1 双対平坦多様体 (M, h, ∇, ∇^*) と 3 次テンソル $C = \nabla h$ に対し、ブレグマンダイバージェンス $\mathcal{D}: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ は次を満たす：

$$h(X, Y) = -\mathcal{D}[X|Y], \quad C(X, Y, Z) = -\mathcal{D}[Z|XY] + \mathcal{D}[XY|Z].$$

命題 4.2 ([9]) 双対平坦多様体 (M, h, ∇, ∇^*) において、ブレグマンダイバージェンス $\mathcal{D} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ から定義されるテンソル B, B^* は共に消える。すなわち、

$$\begin{aligned} h(\nabla_X \nabla_Y Z, W) &= -\mathcal{D}[XYZ|W], \\ h(Z, \nabla_X^* \nabla_Y^* W) &= -\mathcal{D}[Z|XYW]. \end{aligned}$$

概ヘッセ多様体 $(M, h, (E, \nabla^E, \Phi), (E', \nabla^{E'}, \Phi'))$ における正準ダイバージェンス $\mathcal{D}_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ は、コントラスト関数の条件式 (i), (ii) を満たし、(iii) は一般には満たさない。このような関数を弱コントラスト関数と呼ぶ [15]。正準ダイバージェンスは概ヘッセ多様体の構造を復元する。

定理 4.3 ([15]) 概ヘッセ多様体 $(M, h, (E, \nabla^E, \Phi), (E', \nabla^{E'}, \Phi'))$ と標準3次テンソル C に対し、正準ダイバージェンス $\mathcal{D}_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ は次を満たす：

$$h(X, Y) = -\mathcal{D}_M[X|Y], \quad C(X, Y, Z) = -\mathcal{D}_M[Z|XY] + \mathcal{D}_M[XY|Z].$$

概ヘッセ多様体上では、概ヘッセ計量の非退化性は一般には保証されないため式 (2) や (3) のようにしてパートレットテンソルを定義することはできないが、特に次の定理の式 (5) は双対平坦多様体におけるブレグマンダイバージェンスとパートレットテンソルの関係を反映したものである。

定理 4.4 ([14]) X, Y, Z, W を M 上のベクトル場とする。このとき、次が成り立つ：

$$\tau(\Phi(Z), \nabla_Y^{E'} \Phi'(W)) = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_M[Z|YW], \quad (4)$$

$$\tau(\Phi(Z), \nabla_X^{E'} \nabla_Y^{E'} \Phi'(W)) = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_M[Z|XYW]. \quad (5)$$

注意 4.5 定理 4.4 の式 (4), (5) に現れる $\tau(\Phi(Z), \nabla_Y^{E'} \Phi'(W))$ や $\tau(\Phi(Z), \nabla_X^{E'} \nabla_Y^{E'} \Phi'(W))$ は、概ヘッセ多様体における e/m -波面のある特異点を判定する量になっている。詳細は [14] を参照されたい。

5 機械学習との関連と今後の展望

本節では概ヘッセ多様体の理論と機械学習との関連、および今後の展望について述べる。情報幾何学の典型的な応用として、統計的推定の幾何学的解釈や em -アルゴリズムがある [2]。

$M = \{p(\mathbf{x}|\theta)\}_{\theta \in U}$, $p(\mathbf{x}|\theta) = \exp(\mathbf{x}^T \theta - \psi(\theta))$ を指数型分布族とする。ここで $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は確率変数（測度は $d\mu$ ）であり、 $\theta \in U$ はパラメータである ($U \subset \mathbb{R}^n$ は開集合)。 M をパラメータ空間 U と同一視することにより指数型分布族を可微分多様体とみなす。このとき、 M 上のフィッシャー・ラオ計量 h と、座標系 θ をアファイン座標系とする接続 ∇ を考え、正規化関数 $\psi(\theta)$ をポテンシャル関数とみることにより (M, h, ∇, ∇^*) は双対平坦多様体になる [2]。ここで、 ∇^* は ∇ の双対接続である。さらにブレグマンダイバー

ジェンス $\mathcal{D} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ は情報理論で知られている KL ダイバージェンスとなる：

$$\mathcal{D}_{KL}(p, q) = KL[q, p] := \int q(\mathbf{x}) \log \frac{q(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\mu.$$

統計モデル $S := \{p(\mathbf{x}|\theta(\mathbf{u}))\}_{\mathbf{u} \in V} \subset M$ が曲指数型分布族，すなわち S が M の部分多様体であるとする．ここで $V \subset \mathbb{R}^m$ は開集合で， $\mathbf{u} \in V$ はパラメータである．統計的推定では，観測データ $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ が定める観測点 $\hat{p} \in M$ に対し， \hat{p} の最も良い近似 $p(\mathbf{x}|\theta(\mathbf{u}_0)) \in S$ を求めることを考える．統計的推定の一つである最尤推定とは，観測データ $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ から定義される尤度関数 $l(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^N \log p(\mathbf{x}_i|\theta(\mathbf{u}))$ を最大にするパラメータ \mathbf{u}_0 を求めるものであり，この \mathbf{u}_0 は最尤推定値と呼ばれる．情報幾何学は最尤推定の幾何学的解釈を与える．すなわち，最尤推定値 \mathbf{u}_0 は関数 $\mathcal{D}_{KL}(-, \hat{p}) : S \rightarrow \mathbb{R}$ を最小にするものであり，また， \hat{p} から S への ∇^* -測地線に関する直交射影により与えられる．

一般に最尤方程式 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} l(\mathbf{u}) = 0$ の解として最尤推定値を求めることが多い一方で，最尤方程式は複数の解を持つことがあり，その個数は観測点 $\hat{p} \in M$ の位置に応じて変化する（分岐現象）．最尤方程式の複数解が与える推定への影響については実験的に調べられているが [18]，統一的な理論的枠組みは存在しない．

関数 $F : S \times M \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(q, p) = \mathcal{D}_{KL}(\iota(q), p)$$

で定義する．ここで， $\iota : S \rightarrow M$ は包含写像である．このとき， F を大域的な母関数族とみなすことで得られる $T^*M \times \mathbb{R}$ 内のルジャンドル部分多様体 L_S [5] は概ヘッセ多様体の典型例であり， L_S に付随するコースティクスにより解の分岐現象を特徴づけられ得る．

この枠組みは，*em*-アルゴリズムにも有効である．*em*-アルゴリズムとは，二つの部分多様体 $S, D \subset M$ に対し， ∇ -測地線および ∇^* -測地線に関する直交射影を S と D の間で交互に繰り返すことにより， $S \times D$ 上におけるダイバージェンスの最小化を図るアルゴリズムである．このアルゴリズムは統計学における EM-アルゴリズム [8] の幾何学的解釈を与えるものであり，実際，これらアルゴリズムは適切な仮定の下で一致する [1, 7]．この場合，二つの部分多様体 S, D それぞれに付随する概ヘッセ多様体を通じて EM/*em*-アルゴリズムの挙動が記述され得る．

また，多くの統計モデルはそのフィッシャー情報行列が退化する特異統計モデルであり [19]，深層学習等に現れる多層ニューラルネットワーク（MLP）はその典型例である．回帰の設定においては，しばしば MLP の出力に一定の分散を持つガウスノイズを加えることで，MLP を統計モデルとみなす [2]．このとき，重みパラメータからなるパラメータ空間 M 上では 3 次テンソル C が消え， M は退化したフィッシャー・ラオ計量 h を持つ自己双対なリーマン多様体 $(M, h, \nabla = \nabla^*)$ とみなされる．この観点に基いた深層学習の解析として，従来の逆伝播学習法（back-propagation method）に替わり，甘利により自然勾配学習法（natural gradient method）が提案されている [4]．

しかしながら，上記の枠組みではガウスノイズの分散は固定されている一方で，より

一般に分散をパラメータに含めるほうが理論上は自然であろう [6, 10]. この場合, パラメータ空間上では 3 次テンソルはゼロにはならず, 真に特異な計量を許す双対平坦構造 (すなわち概ヘッセ構造) からの解析が必要となる. これは今後の課題である.

参考文献

- [1] S. Amari, *Information geometry of the EM and em algorithms for neural networks*, Neural Networks, **8** (1995), 1379–1408.
- [2] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Applied Math. Sci., 194, Springer (2016)
- [3] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, A.M.S., Oxford Univ. Press (2000).
- [4] S. Amari and T. Ozeki, *Differential and Algebraic Geometry of Multilayer Perceptrons*, IEICE Trans., **84** (2001), 31–38.
- [5] V.I. Arnol'd et al., *Singularities of Differentiable Maps I*, Monographs in Math. 82, Birkhäuser (1986).
- [6] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer (2006).
- [7] I. Csizsár and G. Tusnády, *Information Geometry and Alternating Minimization Procedures*, Statistics and decisions, Supplementary Issue, No. 1 (1984), 205–237.
- [8] A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin, *Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm*, J. R. Stat. Soc. Ser. B. Stat. Methodol., **39** (1977), 1–38.
- [9] S. Eguchi, *Geometry of minimum contrast*, Hiroshima Math. J., **22** (1992), 631–647.
- [10] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep Learning*, MIT Press (2016).
- [11] S. L. Lauritzen, *Statistical manifolds*, IMS Lecture Notes - Monograph Series (1987), 96–163.
- [12] T. Matsumoto, *Any statistical manifold has a contrast function – On the C^3 -functions taking the minimum at the diagonal of the product manifold*, Hiroshima Math. J., **23** (1993), 327–332.
- [13] H. Matsuzoe, *Geometry of contrast functions and conformal geometry*, Hiroshima Math. J., **29** (1999), 175–191.
- [14] N. Nakajima, *Local normal forms of em-wavefronts in affine flat coordinates*, preprint, arXiv:2204.13288 (2022).
- [15] N. Nakajima and T. Ohmoto, *The dually flat structure for singular models*, Info. Geom., **4** (2021), 31–64.
- [16] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169** (2009), 491–529.
- [17] H. Shima, *The geometry of Hessian Structures*, World Scientific (2007).
- [18] C. Small and W. Jinfang, *Numerical Methods for Nonlinear Estimating Equations*, Oxford Univ. Press (2003).
- [19] S. Watanabe, *Algebraic Geometry and Statistical Learning Theory*, Cambridge Univ. Press (2008).

拡張不可能な不変擬準同型の空間について

丸山 修平 (名古屋大学)*

1 序

本稿では不変擬準同型の理論について, 主に [KKM⁺21] と [MMM22] の内容に焦点を当てて概略を述べる. これらは川崎盛通氏 (青山学院大学), 木村満晃氏 (京都大学), 松下尚弘氏 (琉球大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究である.

1.1 拡張不可能な不変擬準同型の空間

群 G 上の実数値関数 $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\sup_{g,h \in G} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)| < \infty$$

を満たすものを擬準同型 (quasimorphism) という. さらに任意の巡回部分群上で準同型となる擬準同型を斉次擬準同型 (homogeneous quasimorphism) という. 以下では斉次擬準同型のことを単に擬準同型と書く. G 上の擬準同型全体のなす実線形空間を $Q(G)$ で表す. 定義から $Q(G)$ は G 上の実数値準同型全体 $H^1(G; \mathbb{R})$ を部分空間として含むが, その差は非常に巨大になり得る. 例えば G が有限階数の自由群や曲面群 (より一般に非初等的双曲群) の場合には, $H^1(G; \mathbb{R})$ は有限次元な一方で $Q(G)$ は連続無限次元である ([Bro81], [EF97]).

以下では, 擬準同型の定義域の拡張問題, つまり G の正規部分群 N 上の擬準同型が G 上の擬準同型に拡張できるか, という問題を考える. この拡張問題を扱う上で基本的な概念に G 不変性がある. N 上の擬準同型 $\mu: N \rightarrow \mathbb{R}$ が G 不変であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in N$ に対し

$$\mu(gxg^{-1}) = \mu(x)$$

が成り立つときをいう. G 不変性は N 上の擬準同型の G への拡張の必要条件である. つまり, N 上の擬準同型が G 上に拡張可能だとすると, それは G 不変でなければならない. これは, N 上の G 不変擬準同型全体を $Q(N)^G$ で表したとき, 「包含写像 $i: N \rightarrow G$ による引き戻しが写像 $i^*: Q(G) \rightarrow Q(N)^G$ を誘導する」と言い換えることができる.

本稿では, この自明な必要条件を満たした上での拡張問題, つまり不変擬準同型の拡張問題を扱う. そこで, 以下の「拡張不可能な不変擬準同型の空間」を導入する;

$$Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G)).$$

* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科

e-mail: m17037h@math.nagoya-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:JP18J00765, JP21K13790, JP20H00114, JP21J11199, JP19K14536, JP17H04822, JP21K03241) の助成を受けたものである.

分母に現れる空間はそれぞれ

- $H^1(N; \mathbb{R})^G$: N 上の G 不変実数値準同型の空間
- $i^*Q(G)$: G 上に擬準同型として拡張可能な G 不変擬準同型の空間

である. この商空間の非零元は, 不変準同型で調整しても G 上の擬準同型に拡張不可能な N 上の不変擬準同型で代表される.

1.2 有限次元性

上述のように擬準同型の空間 $Q(G)$ は連続無限次元となる場合がある (G が非初等的双曲群のときなど). また, $Q(N)^G$ が連続無限次元となる例も豊富に存在する (G が非初等的双曲群で G/N がアーベル群となるときなど). したがって拡張不可能な不変擬準同型の空間 $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ は, その次元が有限次元となるか無限次元となるかすら直ちには判断がつかない.

[KKM⁺21] において, 比較的緩やかな条件で $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ が有限次元となることを示した.

定理 1 ([KKM⁺21]). 商群 G/N が boundedly 3-acyclic^{*1} のとき

$$\dim_{\mathbb{R}} (Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))) \leq \dim_{\mathbb{R}} H^2(G; \mathbb{R})$$

が成り立つ. ここで $H^2(G; \mathbb{R})$ は G の実数係数 2 次群コホモロジーである.

定理 1 より, 例えば G が有限表示群, N がその交換子部分群の場合において, $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ の次元は有限次元となる.

次に非自明性を考える. $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G)) \neq 0$ となる例 (で筆者の知る限り最初の例) は [KK22] で与えられた. その例は, G が種数 2 以上の閉曲面のシンプレクティック微分同相群, N がそのハミルトン微分同相群である. とくにこの場合 G や N は無限次元リー群である. G が有限生成群で $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G)) \neq 0$ となる例を [KKM⁺21] で与えた. より強く, 以下の定理 2 の形でその次元決定まで行った.

定理 2 ([KKM⁺21]). 拡張不可能不変擬準同型の空間 $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ の次元は

- (i) G が自由群で N が交換子部分群のとき 0 次元,
- (ii) G が種数 2 以上の閉曲面の基本群で N が交換子部分群のとき 1 次元,
- (iii) G が 3 次元閉双曲写像トーラスで N がファイバーの基本群の交換子部分群のとき

$$1 + \dim_{\mathbb{R}} H^1(\Sigma; \mathbb{R})^{\varphi^*},$$

^{*1} 群 Γ が boundedly 3-acyclic とは, Γ の実数係数有界コホモロジーが 3 次まで消滅するときをいう. 例えば従順群, とくにアーベル群や可解群などは条件を満たす.

(Σ はファイバー, $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は写像トーラスのモノドロミー写像, $H^1(\Sigma; \mathbb{R})^{\phi^*}$ は実数係数コホモロジー群 $H^1(\Sigma; \mathbb{R})$ の φ の作用に関する不変部分空間)

となる.

定理 1 により, 多くの組 (G, N) に対し $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ が有限次元となる. 次に気になるのは, $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ の非零元を代表する不変擬準同型はどのようなものか, である. しかし定理 1 や定理 2 の証明手法は構成的でなく, 不変擬準同型の形をその証明から見ることは難しい.

[MMM22] において, G の円周への作用を用いた N 上の G 不変擬準同型の記述を与えた. 例えば, 定理 2 の (iii) の例における拡張不可能不変擬準同型は, 3 次元閉双曲写像トーラス上の taut foliation から誘導される円周への作用 (universal circle 表現) を用いて記述できる (定理 5). また, この拡張不可能不変擬準同型の具体的な記述は, 安定交換子長の比較問題に応用を持つ (定理 9).

本稿の構成は以下である. 2 章で群コホモロジーや有界コホモロジーの言葉の準備をし, 3 章で定理 1 と定理 2 の証明の概略を述べる. 4 章で不変擬準同型の具体的な記述のアイデアを述べ, 5 で安定交換子長への応用について述べる.

2 準備

2.1 群コホモロジー

この節と次節では, 群コホモロジー, 有界コホモロジー, および擬準同型について, 本稿に関係する範囲で述べる. これらに関する教科書にはそれぞれ [Bro82], [Fri17], [Cal09] がある.

M をアーベル群とする. 群 G の n 個 ($n \geq 0$) の直積 G^n から M への写像を G 上の M 係数 n コチェインといい, G 上の M 係数 n コチェイン全体を $C^n(G; M)$ で表す. ここで G^0 は自明群とみなす. コバウンダリ写像 $\delta: C^n(G; M) \rightarrow C^{n+1}(G; M)$ を $n > 0$ のとき

$$\delta c(g_1, \dots, g_{n+1}) = c(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i c(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(g_1, \dots, g_n)$$

で定め, $\delta: C^0(G; M) \rightarrow C^1(G; M)$ は零写像として定義する. このとき, $(C^*(G; M), \delta)$ はコチェイン複体をなし, そのコホモロジー $H^*(G; M)$ を G の M 係数群コホモロジーという.

低次の群コホモロジーについては以下の言い換えが知られている. まず 0 次コホモロジー $H^0(G; M)$ は M と同型である. また 1 次コホモロジー $H^1(G; M)$ は G から M への擬準同型全体と同型である. これらはコバウンダリ写像の定義から直ちに従う.

G の M 係数 2 次コホモロジーは G の中心 M 拡大の同値類全体との一対一対応

$$H^2(G; M) \xleftarrow{1:1} \{G \text{ の中心 } M \text{ 拡大}\} / \sim \quad (1)$$

が存在する. ここで群 G の中心 M 拡大とは, 群の完全列

$$1 \rightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

であって, $i(M)$ が E の中心に入るときをいう. また, 二つの中心拡大が同値であるとは, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

が存在するときをいう. (1) の一対一対応の下で中心 M 拡大 $1 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$ に対応する 2 次コホモロジー類を $e(E)$ と書き, 中心拡大 E のオイラー類という.

中心拡大のオイラー類は群準同型の持ち上げの障害を与える.

命題 1 ([Fri17, Lemma 2.4]). Γ を群, $1 \rightarrow M \rightarrow E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ を中心拡大とし, $\psi: \Gamma \rightarrow G$ を群準同型とする. このとき, 引き戻し $\psi^*e(E)$ が 0 であることと, 群準同型 ψ の E への持ち上げが存在することは同値である. ここで群準同型 ψ の E への持ち上げとは, 群準同型 $\Psi: \Gamma \rightarrow E$ であって $p \circ \Psi = \psi$ を満たすものである.

2.2 有界コホモロジーと擬準同型

以下ではコホモロジーの係数を \mathbb{R} とする. G^n 上の実数値有界関数 (有界コチェイン) 全体からなる線形空間を $C_b^n(G; \mathbb{R})$ で表すと, これは $(C^*(G; \mathbb{R}), \delta)$ の部分複体を定める. そのコホモロジー $H_b^*(G; \mathbb{R})$ を (実数係数) 有界コホモロジーという. コチェインの間の包含写像 $C_b^n(G; \mathbb{R}) \rightarrow C^n(G; \mathbb{R})$ がコホモロジーに誘導する写像を比較写像といい, $c_G: H_b^n(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^n(G; \mathbb{R})$ で表す.

(有界) コホモロジーと擬準同型との関係においては $\delta: C^1(G; \mathbb{R}) \rightarrow C^2(G; \mathbb{R})$ が重要である. このコバウンダリ写像を具体的に書き下すと次のようになる:

$$\delta c(g_1, g_2) = c(g_2) - c(g_1 g_2) + c(g_1).$$

ここで $g_1, g_2 \in G$ である. つまりコチェイン $c \in C^1(G; \mathbb{R})$ が (斉次とは限らない) 擬準同型であることと $\delta c \in C_b^2(G; \mathbb{R})$ となることが同値である. また, $\delta\delta = 0$ より δc は有界コサイクルであり, 有界コホモロジー類を定める. さらに δc は (有界でない) 群コチェインとしてはコバウンダリであり, したがってこの有界コホモロジー類は群コホモロジー内で消滅する. 以上のことは次の完全列の形に言い換えることができる.

命題 2 ([Cal09, Theorem 2.50]). 次は完全列である:

$$0 \rightarrow H^1(G; \mathbb{R}) \rightarrow Q(G) \rightarrow H_b^2(G; \mathbb{R}) \xrightarrow{c_G} H^2(G; \mathbb{R}).$$

擬準同型のなす空間 $Q(G)$ はよりコホモロジカルに記述することができる. コチェイン複体 $(C^*(G; \mathbb{R}), \delta)$ とその部分複体 $(C_b^*(G; \mathbb{R}), \delta)$ の相対コホモロジー $H_{/b}^*(G; \mathbb{R})$ を考え

る. ここで相対コホモロジー H_b^* は商複体 C^*/C_b^* のコホモロジーである. この商複体の 1 次コホモロジー $H_b^1(G)$ が擬準同型の空間 $Q(G)$ と同型となる. この見方をすると, 命題 2 の完全列はコチェイン複体の短完全列

$$0 \rightarrow C_b^*(G; \mathbb{R}) \rightarrow C^*(G; \mathbb{R}) \rightarrow C^*(G; \mathbb{R})/C_b^*(G; \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

から誘導されるコホモロジー長完全列の最初の 4 項だと解釈することもできる.

擬準同型の例を一つだけ紹介する.

例 1 (Poincaré translation number). 円周の向きを保つ同相群を $\text{Homeo}_+(S^1)$ で表し, その普遍被覆群を $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ で表す. $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ は以下の表示を持つ:

$$\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{同相写像}, f \circ T = T \circ f\}.$$

ここで $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $+1$ 平行移動である. このとき, $f \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ に対し

$$\tau(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(0)}{n}$$

は well-defined であり, $\tau: \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ は擬準同型となる. この擬準同型 τ を Poincaré translation number という.

3 五項完全列と定理 1, 定理 2

本稿のメインテーマは不変擬準同型の拡張問題である. 不変擬準同型の前にまず不変準同型の拡張問題, つまり G を群, N をその正規部分群とし, N 上の G 不変準同型であって G 上に準同型として拡張できないものが存在するか, を考える. つまり, 包含写像 $i: N \rightarrow G$ の誘導する写像 $i^*: H^1(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(N; \mathbb{R})^G$ が全射かどうか考える. この問題については群コホモロジーの五項完全列が完全な解答を与える.

定理 3 (群コホモロジーの五項完全列). $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \rightarrow 1$ を群の完全列とする. このとき, 次の完全列が存在する:

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \xrightarrow{p^*} H^1(G; \mathbb{R}) \xrightarrow{i^*} H^1(N; \mathbb{R})^G \xrightarrow{d_2} H^2(\Gamma; \mathbb{R}) \xrightarrow{p^*} H^2(G; \mathbb{R}).$$

この五項完全列により, 写像 $i^*: H^1(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(N; \mathbb{R})^G$ が全射であることと写像 $p^*: H^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})$ が単射であることが同値である. したがって, 例えば商群 $\Gamma = G/N$ の 2 次コホモロジーが消滅するとき, N 上の G 不変準同型は常に G 上の準同型に拡張可能である.

不変擬準同型の拡張問題に戻る. 擬準同型の空間の完全列として次のものは知られていた.

命題 3 ([Cal09, Remark 2.90]). $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \rightarrow 1$ を群の完全列とする. このとき, 次の完全列が存在する:

$$0 \rightarrow Q(\Gamma) \xrightarrow{p^*} Q(G) \xrightarrow{i^*} Q(N)^G.$$

この完全列のままだと、不変擬準同型の拡張問題にうまく適用できない (i^* の全射性の議論ができない). そこで、この完全列を延長するような以下の完全列を [KKM⁺21] で与えた.

定理 4 ([KKM⁺21], 相対コホモロジーの五項完全列). $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \rightarrow 1$ を群の完全列とする. このとき、次の完全列が存在する:

$$0 \rightarrow Q(\Gamma) \xrightarrow{p^*} Q(G) \xrightarrow{i^*} Q(N)^G \xrightarrow{d_2} H_{/b}^2(\Gamma; \mathbb{R}) \xrightarrow{p^*} H_{/b}^2(G; \mathbb{R}).$$

また、次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(G; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(N; \mathbb{R})^G & \longrightarrow & H^2(\Gamma; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^2(G; \mathbb{R}) \\ & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Q(\Gamma) & \longrightarrow & Q(G) & \longrightarrow & Q(N)^G & \longrightarrow & H_{/b}^2(\Gamma; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{/b}^2(G; \mathbb{R}). \end{array}$$

この完全列により、 $Q(G) \rightarrow Q(N)^G$ が全射 (つまり不変擬準同型が常に拡張可能) なことと $H_{/b}^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H_{/b}^2(G; \mathbb{R})$ が単射なことが同値である.

Remark 1. 例えば Γ が有限群のときや、切断 $\Gamma \rightarrow G$ が存在するときは $H_{/b}^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H_{/b}^2(G; \mathbb{R})$ が単射となり、不変擬準同型は常に拡張可能である. これらの事実はそれぞれ [Ish14], [Sht16] で直接示されている. また、拡張可能性のためのこれらの充分条件は「 $G \rightarrow \Gamma$ が virtually split する」という条件にまで一般化されている [KKMM20].

また、上可換図式で diagram chasing をすることにより、次を示すことができる.

系 1 ([KKM⁺21]). Γ が boundedly 3-acyclic とする. このとき、拡張不可能不変擬準同型の空間 $Q(N)^G / (H^1(N; \mathbb{R})^G + i^*Q(G))$ は

$$\text{Im}(p^*: H^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})) \cap \text{Im}(c_G: H_b^2(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R}))$$

と同型である.

Γ が boundedly 3-acyclic であるという仮定により、写像 $H^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H_{/b}^2(\Gamma; \mathbb{R})$ が同型となる. 系 1 の同型は、上の可換図式上で $Q(N)^G$ から $H^2(G; \mathbb{R})$ へ写像を右上右と辿った写像から誘導される.

系 1 により、 N 上の不変擬準同型の拡張問題を G や Γ の群コホモロジーおよび有界コホモロジーの問題に帰着することができる. 系 1 から定理 1 が直ちに導かれる.

定理 2 の証明の概略 (i) は系 1 と自由群の 2 次コホモロジーが自明なことから従う. (ii) と (iii) は、系 1, 双曲群に対し比較写像 $c_G: H_b^2(G; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})$ が全射なこと、そして写像 $p^*: H^2(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})$ がそれぞれのケースでともに全射となることから従う. □

4 円周への作用と不変擬準同型

以下, 曲面群と書いたら種数 $g \geq 2$ の閉曲面の基本群を指し, G_g で表す. 定理 2 の (ii) により, 曲面群の交換子部分群 G'_g 上の不変擬準同型で G_g に拡張出来ないものは, $H^1(G'_g; \mathbb{R})^{G_g} + i^*Q(G_g)$ の差を除いて一意に定まる. この一意に存在する不変擬準同型のある程度具体的な記述を [MMM22] で与えた.

アイデアを述べる. 曲面群の $\text{Homeo}_+(S^1)$ への表現 $\rho: G_g \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ を一つとる. このとき, 中心拡大 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1) \rightarrow 1$ のオイラー類 e の引き戻し $\rho^*e \in H^2(G_g; \mathbb{Z})$ が非零であるようにとる (例えば Fuchsian 表現 $G_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Homeo}_+(S^1)$ などをとる). 交換子部分群 G'_g は自由群であり, 2 次コホモロジーが自明である. とくに包含写像 $i: G'_g \rightarrow G_g$ によるオイラー類の引き戻し $i^*\rho^*e$ は 0 である. このことと命題 1 を合わせると, 以下の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} G'_g & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \\ \downarrow i & & \downarrow \\ G_g & \xrightarrow{\rho} & \text{Homeo}_+(S^1). \end{array}$$

$\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ 上には Poincaré translation number τ が存在するので, それを $\tilde{\rho}$ で引き戻すことで G'_g 上に擬準同型を得ることができる. 一方, ρ^*e は非零なことから $\rho: G_g \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ の持ち上げ $G_g \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ が存在せず, 故に G_g 上に同様の方法で擬準同型を構成することはできない.

一般に Poincaré translation number τ の引き戻しは不変性を満たすとは限らない. そのため上の構成そのものでは不変擬準同型を構成できないが, 次を示すことができる.

命題 4 ([MMM22]). $\rho, \tilde{\rho}$ を上のものとする. このとき, ある準同型 $h \in H^1(G'_g; \mathbb{R})$ が存在して, $\tilde{\rho}^*\tau + h$ が拡張不可能 G_g 不変擬準同型となる.

命題 4 の不変擬準同型を $\mu_\rho (= \tilde{\rho}^*\tau + h)$ とおく. この μ_ρ は $H^1(G'_g; \mathbb{R})^{G_g}$ の差を除いて一意に定まる. この μ_ρ について以下が成り立つ.

命題 5 ([MMM22]). 任意の $g_1, \dots, g_n \in G_g, x_1, \dots, x_n \in G'_g$ に対し

$$\mu_\rho([g_1, x_1] \cdots [g_n, x_n]) = -\tau([\widetilde{\rho}(g_1), \widetilde{\rho}(x_1)] \cdots [\widetilde{\rho}(g_n), \widetilde{\rho}(x_n)])$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{\rho}(g_i), \widetilde{\rho}(x_i) \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ はそれぞれ $\rho(g_i), \rho(x_i) \in \text{Homeo}_+(S^1)$ の持ち上げである.

定理 2 の (iii) の例についても, 同様の方法で拡張不可能不変擬準同型を構成することができる. まず, 定理 2 の (iii) では 3 次元閉双曲写像トーラス X の基本群を考えていた. X 上の taut foliation \mathcal{F} を一つとると, universal circle 表現という表現

$\rho: \pi_1(X) \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ が得られる^{*2}. 曲面群のケースでの不変擬準同型の構成を universal circle 表現に対して行えば, 定理 2 の (iii) の例における不変擬準同型が得られる. とくに, taut foliation のオイラー類が非零のとき, 得られる不変擬準同型は拡張不可能である. また以下の意味で, 写像トーラスの例における拡張不可能不変擬準同型は全て上の構成で得られる.

定理 5 ([MMM22]). X を 3 次元閉双曲写像トーラス, G をその基本群, N をファイバーの基本群の交換子部分群とする. X 上の taut foliation の universal circle 表現から構成される不変擬準同型を $\mu_{\mathcal{F}}$ とおく. このとき,

$$\{\mu_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ は } X \text{ 上の taut foliation}\}$$

は $\mathbb{Q}(N)^G / (\mathbb{H}^1(N; \mathbb{R})^G + i^*\mathbb{Q}(G))$ を張る.

5 安定交換子長への応用

この章では, 拡張不可能不変擬準同型とその空間の, 安定交換子長への応用を紹介する.

G の交換子部分群 G' の元 x に対し, それを交換子の積として表すために必要な交換子の最小数を x の交換子長 (commutator length) といい, $\text{cl}_G(x)$ で表す. 交換子長は劣加法性を満たすので, 極限

$$\text{scl}_G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{cl}_G(x^n)}{n}$$

が存在する. これを x の安定交換子長 (stable commutator length) という.

安定交換子長と擬準同型には以下の関係がある.

定理 6 ([Bav91], Bavard 双対定理). G を群とする. 任意の $x \in [G, G]$ に対し

$$\text{scl}_G(x) = \sup_{[\mu] \in \mathbb{Q}(G)/\mathbb{H}^1(G; \mathbb{R})} \frac{|\mu(x)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ. ここで $\mathbb{Q}(G) = \mathbb{H}^1(G; \mathbb{R})$ のときには右辺を 0 とみなす.

N を G の正規部分群とする. 群 G の元 g と N の元 x に対し, $[g, x] = gxg^{-1}x^{-1}$ を混合交換子 (mixed commutator) といい, 混合交換子により生成される群を $[G, N]$ で表す. 元 $y \in [G, N]$ に対し, y を積の形で表すために必要な混合交換子の最小数を $\text{cl}_{G,N}(y)$ で表し, y の混合交換子長 (mixed commutator length) という. 混合交換子長も劣加法性を満たすので, その安定化

$$\text{scl}_{G,N}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{cl}_{G,N}(y^n)}{n}$$

^{*2} 余次元 1 の foliation \mathcal{F} が taut であるとは, 任意の葉 λ に対し, \mathcal{F} に横断的な円周で λ と交わるものが存在するときをいう. taut foliation や universal circle 表現については [CD03], [Cal07] 参照.

が存在する. これを y の安定混合交換子長 (stable mixed commutator length) という.

混合安定交換子長と不変擬準同型の間にも Bavard 双対定理と同様の関係は成立する.

定理 7 ([KKMM20]). G を群, N をその正規部分群とする. 任意の $y \in [G, N]$ に対し

$$\text{scl}_{G,N}(x) = \sup_{[\mu] \in \mathcal{Q}(N)^G / \mathcal{H}^1(N; \mathbb{R})^G} \frac{|\mu(y)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{Q}(N)^G = \mathcal{H}^1(N; \mathbb{R})^G$ のときには右边を 0 とみなす.

以上のことから, $[G, N]$ の元 y に対して安定交換子長と安定混合交換子長

$$\text{scl}_G(y), \text{scl}_{G,N}(y)$$

を考えることができる. 定義から不等式

$$\text{scl}_G(y) \leq \text{scl}_{G,N}(y)$$

が成り立つ.

[KKM⁺21] において, これら二つの安定交換子長と拡張不可能不変擬準同型の空間の関係を明らかにした.

定理 8 ([KKM⁺21]). $\mathcal{Q}(N)^G / (\mathcal{H}^1(N; \mathbb{R})^G + i^* \mathcal{Q}(G)) = 0$ のとき, ある $C \geq 1$ が存在して, 任意の $y \in [G, N]$ に対し

$$\text{scl}_G(y) \leq \text{scl}_{G,N}(y) \leq C \cdot \text{scl}_G(y)$$

が成り立つ. とくに scl_G と $\text{scl}_{G,N}$ は $[G, N]$ 上で双リプシッツ同値である.

例えば G が自由群で N がその交換子部分群のとき $\mathcal{Q}(N)^G / (\mathcal{H}^1(N; \mathbb{R})^G + i^* \mathcal{Q}(G)) = 0$ となる (定理 2) ので, 定理 8 より scl_G と $\text{scl}_{G,N}$ は $[G, N]$ 上で双リプシッツ同値となる.

次に scl_G と $\text{scl}_{G,N}$ は $[G, N]$ 上で双リプシッツ同値とならない例を考える. 定理 8 により, そのような組 (G, N) は $\mathcal{Q}(N)^G / (\mathcal{H}^1(N; \mathbb{R})^G + i^* \mathcal{Q}(G)) \neq 0$ を満たす必要がある. 先述のように $\mathcal{Q}(N)^G / (\mathcal{H}^1(N; \mathbb{R})^G + i^* \mathcal{Q}(G)) \neq 0$ となる最初の例は [KK22] で与えられていた. その例は G が種数 2 以上の閉曲面のシンプレクティック微分同相群, N がハミルトン微分同相群というものだったが, この場合には scl_G と $\text{scl}_{G,N}$ が $[G, N]$ 上で双リプシッツ同値とならないことも [KK22] で証明されている. G が有限生成群の場合では, 例えば定理 2 の (ii) や (iii) が双リプシッツ同値とならない例の候補となる. これらの例でもやはり双リプシッツ同値とならないことを [MMM22] で証明した.

定理 9 ([MMM22]). 以下の組 (G, N) について, scl_G と $\text{scl}_{G,N}$ は $[G, N]$ 上で双リプシッツ同値とならない:

- G が種数 2 以上の閉曲面の基本群で N がその交換子部分群.

- G が 3 次元閉双曲写像トーラスで N がファイバーの基本群の交換子部分群.

これらは, G が有限生成群であって scl_G と $\text{scl}_{G,N}$ が $[G, N]$ 上で双リプシッツ同値とならないことの判明した初めての例である.

参考文献

- [Bav91] Christophe Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.
- [Bro81] Robert Brooks, *Some remarks on bounded cohomology*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 53–63.
- [Bro82] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Cal07] Danny Calegari, *Foliations and the geometry of 3-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [Cal09] ———, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
- [CD03] Danny Calegari and Nathan M. Dunfield, *Laminations and groups of homeomorphisms of the circle*, Invent. Math. **152** (2003), no. 1, 149–204.
- [EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289.
- [Fri17] Roberto Frigerio, *Bounded cohomology of discrete groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 227, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [Ish14] Tomohiko Ishida, *Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk via braid groups*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **1** (2014), 43–51.
- [KK22] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura, *\hat{G} -invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, Israel J. Math. **247** (2022), no. 2, 845–871.
- [KKM⁺21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, arXiv:2107.08571 (2021).
- [KKMM20] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard’s duality theorem for mixed commutator length*, arXiv:2007.02257v3, to appear in Enseign. Math. (2020).
- [MMM22] Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *SCL and mixed SCL are not equivalent for surface groups*, arXiv:2203.09221 (2022).
- [Sht16] Alexander I. Shtern, *Extension of pseudocharacters from normal subgroups, III*, Proc. Jangjeon Math. Soc. **19** (2016), no. 4, 609–614.

曲面のスケイン代数と量子クラスター代数

湯浅 亘 (大阪公立大学数学研究所)*

0. はじめに

本稿は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ に付随するスケイン代数と量子クラスター代数に関する石橋典氏 (東北大学) との共同研究 [IY21, IY22] について、スケイン代数の視点から解説したものである。まずスケイン代数 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ と量子クラスター代数 $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ の関係について \mathfrak{sl}_2 の場合を例に解説して、その一般化を \mathfrak{sl}_3 や \mathfrak{sp}_4 の場合に行う上での困難や、その困難をどのように回避するかを中心に解説した。そのため [IY21, IY22] の内容の一部しか紹介できていないが、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ を $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ の包含関係を示す方針を理解してもらうことを目標として解説した。

1. 背景 : \mathfrak{sl}_2 における Muller 氏の仕事

まず始めに、我々の研究の発端となる \mathfrak{sl}_2 の場合における Muller [Mul16] の仕事を振り返ろう。

1.1. Muller の定理

\mathfrak{sl}_2 に付随する曲面のスケイン代数は Kauffman bracket スケイン代数として、低次元トポロジーにおいて広く知られている対象だと思う。その元は曲面上の結び目図式の $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -係数の線型結合であり、**Kauffman bracket スケイン関係式**

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = q \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + q^{-1} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad \bigcirc = -(q^2 + q^{-2}) \bigcirc$$

を満たす。これは曲面の内部の局所的な図を描いて関係式を表したものであり、関係式に描いていない部分の図は全て一致している。Muller は境界に指定点 \mathbb{M} を持つ曲面 Σ を考え、指定点に端点を持つタングルを元として含むような $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 係数の Kauffman bracket スケイン代数 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ を定義した。 \mathbb{M} の 1 点 p に対してタングルの端点がいくつ刺さっていても良いが、 p に刺さる端点の間には (同じ高さを持つことも許す) 上下関係の情報が付加されている。この上下情報は、下にある端点ほど p から離して描くことで表す。さらに、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ においては、上下が隣り合う端点についてスケイン関係式が定義されている:

$$q^{-\frac{1}{2}} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = q^{\frac{1}{2}} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \bigcirc = 0.$$

2 つタングルを表す図 D_1 と D_2 の積 $D_1 D_2$ を D_2 の上に D_1 を重ねた図で定義し、その積を \mathbb{Z}_q 上線形に拡張することで $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ における積を定める。Muller はこのようなスケイン代数 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ を定義し、その分数体 $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ の中に量子クラスター代数 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ を構成した。

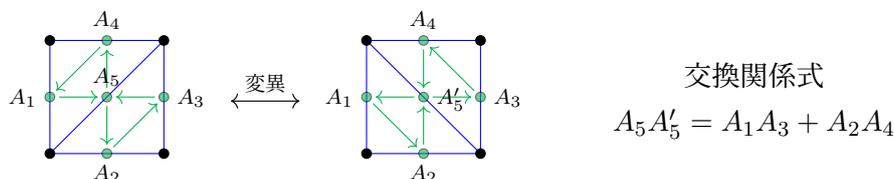
量子クラスター代数 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ は **クラスター変数** と呼ばれる \mathbb{M} を結ぶ単純アークに対応する生成元を持っており、境界弧に対応する可逆な **frozen 変数** とそれ以外の **unfrozen 変数** が存在する。クラスター変数全体の集合は **クラスター** と呼ばれる q -可換なクラスター変数の部分集合によって覆われている。このクラスターは頂点をそのクラスターに含まれるクラスター変数でラベル付けしたクイバーを用いて表すことができる。また、このクイバーの unfrozen 変数に対応する各頂点に対して **変異** と呼ばれる操作で別のクイバーを得ることができる。この変異に

本研究は科研費 (課題番号: JP19K14528) の助成を受けたものである。

キーワード: スケイン代数, 量子クラスター代数

* e-mail: wyuasa@kurims.kyoto-u.ac.jp

よってクラスターは別のクラスターと移り合い、それらのクラスター変数の間にはクイバーを用いて計算される量子交換関係式¹が成立する。 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}$ の場合は、理想三角形分割とクイバーが一一対応しており、フリップが変異に対応している。



また、全てのクラスターにおいてクラスター変数の Laurent 多項式として表される元のなす $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ の \mathbb{Z}_q -部分代数を量子 upper クラスター代数とよび $\mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ で表す。 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ であることは量子 Laurent 現象 (Berenstein–Zelevinsky [BZ05]) により知られている。このとき、Muller は次を証明した。

Theorem 1.1 (Muller [Mul16]). Σ を連結で境界に指定点 \mathbb{M} を持つ向き付け可能曲面とする。 $\#\mathbb{M} \geq 2$ のとき、 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ が成り立つ。

ここで、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}]$ は境界弧に対応する積閉集合 (Ore 集合) で局所化したスケイン代数であり、frozen 変数が可逆であることからこのような局所化を考える必要がある。

1.2. 四角形における対応

量子 (upper) クラスター代数については何も説明しないが、上の同型を通して四角形 Q (4 点の指定点を境界にもつ円盤) の場合に $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, Q} \cong \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, Q}[\partial^{-1}]$ による同一視を通してクラスター代数の構造を見てみよう。まず、クラスター変数は \mathbb{M} の 2 点を結ぶ単純アークになるので $e_1 = \square, e_2 = \square, e_3 = \square, e_4 = \square, e_5 = \square, e'_5 = \square$ の 6 つになる。ここで、 e_1, e_2, e_3, e_4 は frozen 変数に対応するので可逆な元である。クラスターは理想三角形分割に対応するので、 $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ と $\mathcal{C}' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e'_5\}$ の 2 つである。同じクラスターに入っている元が q -可換であることも指定点におけるスケイン関係式からすぐに分かる。そしてこの 2 つの理想三角形分割はフリップで移りあう。このフリップに対応する変異における量子交換関係式はスケイン関係式 $e_5 e'_5 = q e_1 e_3 + q^{-1} e_2 e_4$ となる。このように、量子交換関係式は unfrozen 変数をひとつ A_i から A'_i に取り替える関係式で $A_i A'_i = q \bullet X + q \bullet Y$ (X, Y は共通のどちらにも含まれるクラスター変数の単項式) という形になっている。また、この関係式から $e'_5 = q e_1 e_3 / e_5 + q^{-1} e_2 e_4 / e_5$ と $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ の中で Laurent 多項式で書けることから $e'_5 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ も簡単に見ることができる。しかし、一般の曲面 (または \mathfrak{g}) においてはクラスター \mathcal{C} に含まれるクラスター変数を \mathcal{C}' に含まれるクラスター変数で展開するとき、複数回の変異を経由するので、任意のクラスター変数が Laurent 展開できるか (つまり、量子 Laurent 現象 $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$) は明らかではない。

1.3. Muller の手法

ここでは Muller が論文 [Mul16] で $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ を証明する際に用いた方法を簡単に紹介して、それが \mathfrak{sl}_2 における特殊な状況を用いていることを理解してもらう。そ

¹ 正確には q の冪を定める compatibility 行列の情報も必要である。ここで述べているのは正確な定義ではなくスケイン代数から簡単に見ることができる量子クラスター代数のいくつかの構造を述べているだけなので、正確な定義は [BZ05] などを参照していただきたい。

して、我々の $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ におけるクラスプ付きスケイン代数と量子クラスター代数の比較に用いた新しい手法の説明へと移りたい。Muller の証明は次の手順で行われる。

(Ore 整域) まず Muller は単純アークが零因子でないことを示すことで、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ が Ore 整域であることを証明²している。よって $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M}) \subset \text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ が分かる。

($\mathcal{A}^q \subset \mathcal{S}^q$) 次に、クラスター変数を対応する単純アークが表すスケイン代数の元へ送ること
で $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}]$ を示した。

($\mathcal{S}^q \subset \mathcal{U}^q$) 任意のタングルが任意の理想三角形分割 Δ に付随するクラスターで Laurent 展開できることを示す。これは任意のタングルが理想三角形分割の単純アークを十分たくさん掛けることで理想三角形分割と横断的に交わらないタングルの線形和になることからわかる。実際、スケイン関係式  により、理想三角形分割とタングルとの横断的な交差を減らすことができる。これは単なるスケイン関係式であるが我々は *cutting trick* と呼び $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ の場合も同様の手法を用いる。

($\mathcal{A}^q = \mathcal{U}^q$) Muller は [Mul14] で量子化されていないクラスター代数が “locally acyclic” なときに upper クラスター代数と一致するということを証明している。この定理の量子化版を証明して $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ が条件を満たすことを確認し $\mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ との一致を示した。

以上の手順により

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M}) \quad \text{かつ} \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$$

が示されたので、はさみうちにより $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$ がわかる。

我々の目標は、Theorem 1.1 を \mathfrak{sl}_2 以外の単純リー代数 \mathfrak{g} について拡張することである。しかし、Muller の方法をそのまま適用しようとしても特に ($\mathcal{A}^q \subset \mathcal{S}^q$) や ($\mathcal{A}^q = \mathcal{U}^q$) の手順で困難が生じる。これらの手順においては \mathfrak{sl}_2 におけるクラスターが理想三角形分割と一対一対応しているという事実が重要となっているが、一般の \mathfrak{g} についてはそうでない。実際に本稿で扱う $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ においても、理想三角形分割に対応していないクラスターが存在しているだけでなく、理想三角形分割に付随するクラスターにおいても弧に対応するクラスター変数以外に三角形（面）に対応するクラスター変数が存在する。このような理想三角形分割の面に付随するクラスター変数がどのようなスケインの元で表されるかという問題も自明ではない。しかし、我々は sticking trick と呼んでいる手法で [Mul16] とは逆の包含関係 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ の場合に証明した。

次の節では、[IY21, IY22] で得られたクラスプ付きスケイン代数 (\mathfrak{sl}_2 の場合は Muller のスケイン代数) と量子クラスター代数の包含関係を [IYprep] で取り扱ったステイト付きスケイン代数との対応も込めてまとめる。

² この命題は量子クラスター代数との比較からは少し話題がずれたスケイン代数の代数的性質の証明となる。とても大切なことではあるが、今の目的を考えるとその証明は脇道に逸れてしまうので解説はしない。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ のときも Muller とは違う手法ではあるがステイト付きスケイン代数を使う少し脇道に逸れる形で証明を行なっている。

Theorem 2.2 (state-clasp 対応 [IYprep]). $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ とする。このとき、ウェブを境界付近で変形させることで構成される代数準同型写像 $\mathcal{S}_{\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{B}}: \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \rightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}}$ と $\mathcal{S}_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{M}}: \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}]$ が存在し、互いに逆写像となる。ここで $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}}$ はステイト付きスケイン代数を “bad arcs” のなすイデアルで割って得られる被約ステイト付きスケイン代数⁴である。

さらに、 $q = 1$ において Wilson line の行列要素にステイト付きのアークを対応させることで準同型写像 $\mathcal{O}(\mathcal{A}_{G, \Sigma}^{\times}) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^1(\mathbb{B})_{\text{rd}}$ が作れる。また [IOS22] の結果 $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma} = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma} = \mathcal{O}(\mathcal{A}_{G, \Sigma}^{\times})$ を併せることで次の同型が得られる。

Theorem 2.3 ([IYprep]). $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ とする。 $\#\mathbb{M} \geq 2$ のとき、

$$\mathcal{O}(\mathcal{A}_{G, \Sigma}^{\times}) \cong \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^1(\mathbb{B})_{\text{rd}} \cong \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^1(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma} = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma}$$

が成り立つ。

2.2. $\mathcal{S}^q \subset \mathcal{A}^q$ の証明方法

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ において Theorem 2.1 の包含関係を構成するレシピは以下になる。さらに、この他の単純リー代数に対しても同様の指針で証明が進められると考えている。以後は、ステイト付きスケイン代数については取り扱わないのでクラスプ付きスケイン代数を単に $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})$ と書く。

手順 1. 境界に指定点を持つ曲面 $\Sigma = (\Sigma, \mathbb{M})$ に対して、 \mathbb{M} におけるスケイン関係式を定義して、クラスプ付きスケイン代数 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ を定義する。そして、Ore 整域であることを示す。

手順 2. $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ をクラスプ付きスケイン代数の分数体 $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ の中に構成する。

- (i) 三角形 T において $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, T}^q$ の各クラスターに対応するウェブの集合 (q -可換なウェブの集合たちで量子交換関係を満たすもの) を探す。クラスターに対応するウェブの集合をウェブクラスターと呼ぶ。各ウェブクラスターは “decorate” された T に対応している。
- (ii) Σ の decorated 理想三角形分割 Δ に付随するウェブクラスターは各理想三角形に対して (i) で見つけたウェブクラスターを集めることで Σ の Δ に付随するウェブクラスターが構成できる。
- (iii) decorated 理想三角形分割のフリップを実現する変異列が存在するので、対応するウェブクラスターの列を特定し、量子交換関係がスケイン関係式で実現できることを示す。 (\mathfrak{sl}_2 のときは一回の変異でフリップが実現できた。)
- (iv) decorated 理想三角形分割に付随するクラスターと隣接するクラスターをウェブクラスターとして実現すると、[BZ05, Theorem 5.1] によって $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ が分かる。

手順 3. 境界弧に沿うウェブで局所化したクラスプ付きスケイン代数 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$ の単純な生成元を “stiking trick” によって構成して、これらの生成元が上で特定したウェブクラスターのどれかに含まれることを確かめる。

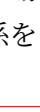
⁴ \mathfrak{sl}_3 の被約ステイト付きスケイン代数 [Hig20] では定義されておらず [IYprep] で定義している。

次節以降では、クラスプ付きスケイン代数について紹介して、手順 2. における decorated 理想三角形分割に付随するウェブクラスターの紹介と、手順 3. において重要となるクラスプ付きスケイン代数の生成元について \mathfrak{sp}_4 の場合を例として解説する。もう一度、これまで説明したスケイン代数とクラスター代数の関係をまとめると次のようになる。

$$\mathcal{S}_{g,\Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}} \xrightleftharpoons[\text{state-clasp 対応}]{\cong} \mathcal{S}_{g,\Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \xrightarrow{\text{sticking trick}} \mathcal{A}_{g,\Sigma}^q \xrightarrow{\text{Laurent 現象}} \mathcal{W}_{g,\Sigma}^q \xrightarrow{\quad} \text{Frac} \mathcal{S}_{g,\Sigma}^q(\mathbb{M})$$

3. スケイン関係式と sticking trick

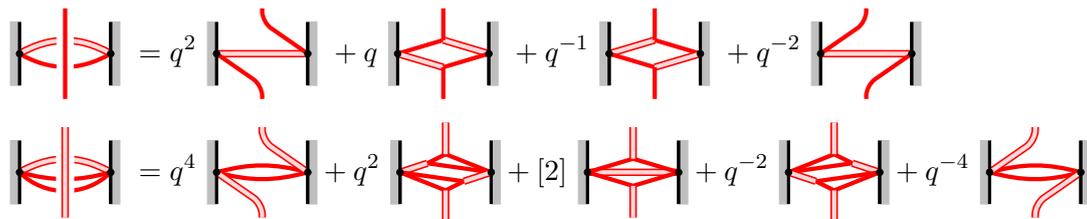
3.1. スケイン関係式

まず $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ に関するスケイン関係式について紹介する。 \mathfrak{sl}_2 の場合は、Section 1 で紹介したように Muller [Mul16] が Kauffman bracket スケイン関係式を境界の指定点において拡張した。Kuperberg [Kup94, Kup96] によって rank 2 の単純リー代数 $\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4, \mathfrak{g}_2$ ⁵ に対応するウェブが導入され、内部におけるスケイン関係式が定義された。 \mathfrak{sl}_3 のウェブは各辺が向き付けられており、3 価頂点は sink  もしくは、source  となっている。境界の指定点におけるスケイン関係式は [FS20]⁶ で定義されている。 \mathfrak{sp}_4 のウェブは各辺が type 1 (一重線) と type 2 (二重線) の二種類で、3 価頂点は  となっている。その境界の指定点におけるスケイン関係式は [IY22] において定義している。紙面の都合上、スケイン関係式を載せることができなかったため [IY21, IY22] を参照していただきたい。基本的にこれら境界の指定点におけるスケイン関係式は、内部のスケイン関係式と指定点におけるライデマイスター変形  を要請することで自然に導かれる。

3.2. cutting trick と sticking trick

ここで、 \mathfrak{sp}_4 の場合を例にとってスケイン関係式から導かれる 2 つの公式を紹介する。一つは *cutting trick* と我々が呼んでいるものである。

Lemma 3.1 (cutting trick).



The image shows two equations representing the cutting trick. The first equation shows a web with two crossings on the left being equal to a sum of four webs with different configurations of crossings and lines, with coefficients q^2, q, q^{-1}, q^{-2} . The second equation shows a web with two crossings on the left being equal to a sum of five webs with different configurations of crossings and lines, with coefficients $q^4, q^2, [2], q^{-2}, q^{-4}$.

この公式は Section 1 の $(\mathcal{S}^q \subset \mathcal{W}^q)$ で紹介したウェブを理想三角形分割に沿って切る公式である。今回は説明しないが、 \mathfrak{sl}_3 や \mathfrak{sp}_4 の場合もウェブを Laurent 展開する際に用いる。さらに、全ての係数が正であることを用いて “elevation-preserving” というクラスのウェブが正係数を持つ Laurent 多項式として展開できることを証明した。これはクラスター代数における Laurent 正値性予想という予想に関係する結果である。

もう一つは *sticking trick* と呼んでいるウェブを境界に貼り付けて細かく分割していくための公式である。

⁵ \mathfrak{g}_2 のスケイン関係式には誤りがあるが Yonezawa-Sakamoto [?] で修正されている。

⁶ [FS20] においてウェブの端点は境界弧に刺さっているが、これは描き方が似ているだけでステイト付きスケイン代数とは異なる。我々のウェブの記法における elevation が低い端点から順にずらして境界弧に並べて描いたものが [FS20] のウェブである。

Lemma 3.2 (sticking trick).

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= q \text{Diagram 2} - q^2 \text{Diagram 3} + q^3 \text{Diagram 4} - q^4 \text{Diagram 5}, \\
 \text{Diagram 6} &= q^2 \text{Diagram 7} - q^4 \text{Diagram 8} + q^4 [2] \text{Diagram 9} - q^4 \text{Diagram 10} + q^7 \text{Diagram 11}.
 \end{aligned}$$

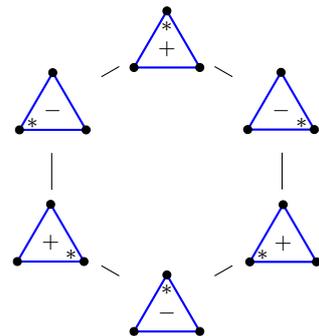
この公式は $\mathcal{S}_{g,\Sigma}$ の生成元の議論に用いる重要な公式である。

4. ウェブクラスターの例 : \mathfrak{sp}_4 の場合

この節では \mathfrak{sp}_4 の場合を例にとって、decorated 理想三角形に付随するウェブクラスターや、フリップを実現するウェブクラスターの列を紹介する。

4.1. 三角形の例

\mathfrak{sp}_4 の場合、理想三角形の decoration は角の指定と符号 $\{\pm\}$ の選び方から 6 種類ある。それぞれの decorated 理想三角形分割にクラスターが対応しており、各クラスターには、各辺に 2 個ずつの frozen 変数と面に 2 個の unfrozen 変数、合計 8 個のクラスター変数が含まれている。変異は unfrozen 変数に対応して行われ、変異で移り合うクラスター同士を線で結ぶと右図のような長さ 6 のサイクルを持つグラフになる。よって

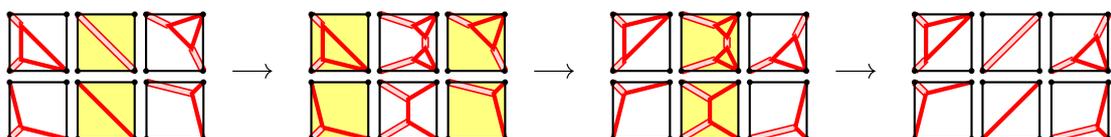


三角形 T の場合は \mathfrak{sl}_2 の場合と同様に全てのクラスター変数に対応するウェブを特定することで $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q[\partial^{-1}]$ が分かる。実際に、これら 6 種類の decorated 理想三角形分割に対応するウェブクラスターは $\triangle_{+,*} = \{ \text{web 1}, \text{web 2} \} \cup \partial$ と $\triangle_{-,*} = \{ \text{web 3}, \text{web 4} \} \cup \partial$ で与えられる。ここで ∂ は境界弧に沿う type 1 と type 2 のウェブの集合である。実際に線で繋がっているウェブクラスター同士はあるウェブ e を e' に取り替えることで移り合うことが簡単に確認できる。そして、これらのウェブの積 ee' が満たすスケイン関係式とクイバーから計算される量子交換関係式の一致も確認できる。

一方で、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q$ の基底をなすウェブは具体的に図で描くことができる。このウェブたちを上記のウェブクラスターに含まれるウェブの積として書くことで $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q[\partial^{-1}] \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,T}$ を示せる。以上より、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q[\partial^{-1}] = \mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,T}$ を得る。

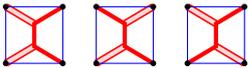
4.2. 四角形の例

四角形の場合、各クラスターは frozen 変数を 12 個（各辺に 2 個ずつ）と unfrozen 変数を 6 個持つ。三角形の場合と異なり、decorated 理想三角形分割に付随するクラスター以外にもクラスターが存在して、さらにクラスター変数全体は無限個となる。よって、全てのクラスター変数にウェブを対応させることは難しいが decorated 理想三角形分割に付随するクラスターを何回か変異して得られるクラスターについては対応するウェブを見つけることも可能である。例えば、Section 2.2 の手順 2. で必要となる decorated 理想三角形分割 $\square_{+,*}$ と $\square_{-,*}$ を繋ぐ変異列に対応するウェブクラスター（境界弧のウェブは省略）には次のようなものがある。



始めの矢印は 2 回、二番目の矢印は 4 回、最後の矢印は 2 回の変異を省略して書いている。各ウェブクラスターは黄色に塗ったウェブでそれぞれ変異することで右のウェブクラスターへと移る。また、これらのウェブクラスターに含まれるウェブが q -可換であることもスケイン関係式を用いて簡単に確かめることができる。この他にも、[IY22] では無限個のウェブクラスターからなる変異列を構成している。

5. クラスプ付きスケイン代数の生成元

Section 4 で四角形の場合に見たように、decorated 理想三角形分割に付随するウェブクラスターから出発して変異列を辿ることで現れるウェブは $\mathcal{A}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$ に含まれることがわかる。例えば、 \mathfrak{sp}_4 の場合は Σ の任意の decorated 理想三角形に付随するウェブ以外に、 Σ の理想四角形内に含まれるウェブ  などが $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}^q$ に含まれることが確認できる。もし、このようなウェブたちがクラスプ付きスケイン代数を生成することが分かれば $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$ の任意の元が $\mathcal{A}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$ に含まれていることがわかり $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q[\partial^{-1}] \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$ が証明できる。この節では、このような理想三角形や理想四角形に付随する“基本的”なウェブによる生成系を得る方法を解説する。この節でも \mathfrak{sp}_4 の場合を例にとって説明する。

5.1. 基底ウェブ

まず、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$ の基底について紹介する。Kuperberg [Kup96] は rank 2 の単純リー代数 \mathfrak{g} に付随する円盤上の（境界上に異なる端点を持つウェブからなる）スケイン加群に対してウェブの囲む elliptic face を定義して、このような elliptic face を持たないウェブが基底となることを証明した。このような elliptic face を持たないウェブを**基底ウェブ**と呼ぶ。さらに、Sikora–Westbury [SW07] はスケイン加群のように図の線形和でその元と関係式が表される加群に対して基底を得る手法を発見した。これはスケイン加群における diamond lemma のようなもので、“複雑”なウェブを“単純”なウェブの線形和で置き換える reduction rules と呼ばれる規則たち（スケイン関係式の“左辺”を“右辺”に置き換える規則）が terminal と locally confluence という条件を満たすと、どのような reduction rule の経路を辿ってウェブを簡単にしても一意的に“既約”なウェブの線形和として表されるという定理である。その既約なウェブがスケイン加群の基底（基底ウェブ）を与える。 \mathfrak{sp}_4 の場合は基底ウェブを得るために 4 個頂点

$$\text{crossroad} := \text{cup} - \frac{1}{[2]} \text{cap} = \text{H} - \frac{1}{[2]} \text{cup}.$$

を用いたウェブの表示が必要になる。これは Kuperberg [Kup96] によって導入されたものである。我々はこの 4 個頂点を *crossroad* と呼び、右辺に現れるような内部にある type 2 の辺を *rung* と呼ぶことにする。そして、crossroad を許す rung を持たないウェブを crossroad ウェブと呼ぶ。任意のウェブはスケイン関係式で交差を持たないウェブに置き換えることができる。そして、任意の rung は crossroad に置き換えて消去することができる。このような reduction rules を定義して、それらが“terminal”で“locally confluence”であることを確認して $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$ の基底ウェブを得た。⁷ $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$ の基底ウェブは elliptic face と交差を持たない crossroad ウェブとして定義される。elliptic face については詳しく述べないが、例えば 3 個以下の crossroad を頂点としてもつウェブで囲まれる Σ の内部にある面は elliptic face である。

⁷ \mathfrak{sp}_4 のスケイン関係式や crossroad の定義を見てわかるように $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$ の自然な係数は $\mathbb{Z}_q[1/[2]]$ である。ここで得られる基底ウェブも $\mathbb{Z}_q[1/[2]]$ -係数の加群として考えたときに得られる基底である。我々は [IY22] でこの基底ウェブの \mathbb{Z}_q -span が部分代数 (\mathbb{Z}_q -形式と呼ぶ) となることを示し、この \mathbb{Z}_q -形式と元から自然に \mathbb{Z}_q 上で定義されている $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$ との比較を行った。

5.2. 下降ウェブによる生成系

次に、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$ の生成元について紹介する。曲面 Σ 上に描かれた交差を持つループもしくは \mathbb{M} の 2 点を結ぶのアーキで表されるウェブを考える。ループの場合はある基点から、アーキの場合は端点から出発して任意の交点においてまず始めに上を通るような図で表されるウェブを下降ループや下降アーキと呼ぶ。そして type 1 の下降ループや下降アーキ γ に対して、 \mathbb{M} の点と γ 上の点を結ぶ交点を持たない type 2 のアーキ（脚と呼ぶ）をいくつか付けて得られるウェブを脚付き下降ループや脚付き下降アーキと呼ぶことにする。このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 5.1. $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$ は下降ループ、下降アーキ、脚付き下降ループ、脚付き下降アーキたちによって生成される。ここで下降ループや下降アーキは type 1、type 2 ともに考える。

証明方針は、任意のウェブ G に対して内部における交差の数と crossroad の個数の和で複雑度 $|G|$ を定義して、複雑度に関する帰納法で証明する。基底ウェブ G の始点を端点（端点が無ければ内部の適当な点）に取る。そして、その始点からウェブに沿って進んでいき crossroad にぶつかるたびにスケイン関係式 $\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} \times \\ \cup \end{pmatrix} - v^{-1} \begin{pmatrix} \times \\ \cap \end{pmatrix}$ によって自分の進む道が overarc となるように crossroad を交差に置き換える。もし脚の生えた 3 価頂点にぶつかったら、脚は無視してもう一方の type 1 の辺へと進む。このように G を変形していくことで G から（脚付き）下降ループやアーキを剥がすことができ、剥がした後に残ったウェブや上のスケイン関係式で出てくる余分な項は複雑度が小さくなる。このようにして帰納法で証明することができる。

5.3. Sticking trick

最後に、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$ の生成元について紹介する。 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$ は境界弧で局所化されているので、境界弧に沿うウェブを分母に持つような Laurent 多項式も扱うことができる。よって、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$ で見た下降ウェブより単純なウェブで生成元を記述することができるが期待される。具体的にこの単純な生成元が本節の始めに挙げた理想四角形に付随するウェブになることの証明を紹介する。

まず、Theorem 3.2 (sticking trick) を思い出そう。この公式はウェブ上の 1 点と境界弧を一つ選ぶことによって、ウェブをその点で分断し、分断された端点をその境界弧に“貼り付けた”ウェブで記述できることを主張している。分断してできた端点の境界弧への貼り付け方は



のいずれかである。このような形をした境界弧の近傍におけるウェブをステイト付き端点⁸と呼ぶことにする。

Theorem 5.2 ([IY22]). $\#\mathbb{M} \geq 2$ のとき、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$ はステイト付き端点を持つ単純アーキ⁹で生成される。

ステイト付き端点を持つ単純アーキは、本節の始めに述べた理想四角形内に含まれるクラスター変数に対応するウェブであるから、この定理から $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}] \subset \mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$ がわかる。

以下では、sticking trick をどのようにして使ってこの定理を得るか解説する。Theorem 5.1 で下降ウェブによる生成系が得られているので、下降ウェブに対して sticking trick を適用して

⁸ これらの境界弧に貼り付けられたウェブは satate-clasp 対応によって、左から順に 1, 2, 3, 4 のステイトを持つステイト付きスケイン代数のウェブに対応している。

⁹ $q = 1$ の場合 Theorem 2.3 の同型を通して $\mathcal{O}(A_{G, \Sigma})$ が単純 Wilson line の行列要素で生成されるという [IOS22] の定理に対応している。

みよう。まず下降ループは sticking trick で始点を適当な境界弧に貼り付けることで脚付き下降アークになる。よって、以下では脚付き下降アークのみを考えよう。まず脚付き下降アークの基点からスタートしてアークを下っていく。そして、脚にぶつかる手前で sticking trick を適用すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = v \text{Diagram 2} - v^2 \text{Diagram 3} + v^3 \text{Diagram 4} - v^4 \text{Diagram 5} \\
 & = v^3 \text{Diagram 6} - v^3 \text{Diagram 7}
 \end{aligned}$$

そして、また進んでいき脚にぶつかる度に sticking trick でウェブを境界弧に貼り付けていく。貼り付けたウェブの交差の上下関係と下降の向きが一致していることから、このような操作で得られる展開はステイト付き端点を持つ下降アークの (Laurent) 多項式であることがわかる。よって、ステイト付き端点を持つ下降アークが自己交差を持たないステイト付き端点を持つ下降アークで展開できることを証明すれば良い。自己交差の個数に関する帰納法と sticking trick を用いて証明する。まず下降アークの始点からスタートして下っていくと、どこかでアークの

下を潜る交差に到達する。そこまでのアークの近傍を描くと、例えば  のようになっている。ここで、交差の下を潜るアークに対して sticking trick を使うと、同じ境界弧にステイト付き端点を二つ持つアークと、自己交差の減ったステイト付き端点も持つ下降アークの積を項に持つ多項式となる。同じ境界弧にステイト付き端点を持つアークはステイト付き端点の部分で交差を持つかもしれないが、($\#M \geq 2$ という条件より) 別の境界弧が存在するのでアークの中点をその境界弧に sticking trick でさらに貼り付けることで自己交差を持たないステイト付き端点を持つアークに展開できる。

このように、何度も sticking trick を用いることでステイト付き端点を持つ単純アークによって $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4, \Sigma}^q$ が生成されることが証明できる。ちなみに、 $q = 1$ の時は交差の上下を気にしないでいいので下降ウェブによる生成系を通さなくてもよい。基底ウェブの全ての辺を sticking trick で境界弧に貼り付けることで証明ができる。

5.4. \mathfrak{sl}_3 の場合

\mathfrak{sl}_3 の場合も \mathfrak{sp}_4 で説明したのと全く同様の手順で証明することができる。つまり、基底ウェブから下降ウェブによる生成元を得て、その生成元を sticking trick で境界弧に貼り付けることによって理想四角形の中のステイト付き端点       を持つ単純アークで生成することが証明できる。

6. Fomin–Pylyavskyy [FP16] の予想

これまで説明したようにクラスプ付きスケイン代数と量子クラスター代数の包含関係 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ で証明することができた。一方で、 \mathfrak{sl}_2 の場合はすでに全てのクラスター変数が M を結ぶ単純アークに対応していることが知られている。同様に、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ の場合にもどのようなウェブがクラスター変数に対応しているのかという自然な問題が思いつく。この問題は $q = 1$ の場合に \mathfrak{sl}_3 で Fomin–Pylyavskyy [FP16] によって多くの具体例の計算とともに tree の形をしたウェブがクラスター変数に対応しているという予想を立てている。そして、我々も \mathfrak{sp}_4 の場合に tree-type というウェブを定義して、同様の予想を立てているが今のところ成立するかどうか全くわからない。しかし、これまで計算で得ているクラスター変数に対応するウェブは全て tree-type となっている。

参考文献

- [BZ05] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. Math. **195** (2005), no. 2, 405–455. 2, 5
- [BW11] F. Bonahon and H. Wong, *Quantum traces for representations of surface groups in $SL_2(\mathbb{C})$* , Geom. Topol. **15** (2011), no. 3, 1569–1615. 4
- [FG06] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **103** (2006), 1–211. 4
- [FP16] S. Fomin and P. Pylyavskyy, *Tensor diagrams and cluster algebras*, Adv. Math. **300** (2016), 717–787. 10
- [FS20] C. Frohman and A. S. Sikora, *$SU(3)$ -skein algebras and webs on surfaces*, Math. Z. **300** (2022), 33–56. 6
- [GS19] A. B. Goncharov and L. Shen, *Quantum geometry of moduli spaces of local systems and representation theory*, arXiv:1904.10491. 4
- [Hig20] V. Higgins, *Triangular decomposition of SL_3 skein algebras*, arXiv:2008.09419. 4, 5
- [IOS22] T. Ishibashi, H. Oya and L. Shen, *$\mathcal{A} = \mathcal{U}$ for cluster algebras from moduli spaces of G -local systems*, arxiv:2202.03168. 4, 5, 9
- [IY21] T. Ishibashi and W. Yuasa, *Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for \mathfrak{sl}_3* , arXiv:2101.00643. 1, 3, 4, 6
- [IY22] T. Ishibashi and W. Yuasa, *Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for \mathfrak{sp}_4* , arXiv:2207.01540. 1, 3, 4, 6, 8, 9
- [IYprep] T. Ishibashi and W. Yuasa, *State-clasp correspondence for skein algebras*, in preparation. 3, 4, 5
- [Kup94] G. Kuperberg, *The quantum G_2 link invariant*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 1, 61–85. 6
- [Kup96] G. Kuperberg, *Spiders for rank 2 Lie groups*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), no. 1, 109–151. 4, 6, 8
- [Le19] I. Le, *Cluster structure on higher Teichmüller spaces for classical groups*, Forum Math. Sigma **7** (2019), e13, 165 pp. 4
- [Lê18] T. T. Q. Lê, *Triangular decomposition of skein algebras*, Quantum Topol. **9** (2018), no. 3, 591–632. 4
- [LS22] T. T. Q. Lê and A. S. Sikora, *Stated $SL(n)$ -skein modules and algebras*, arXiv:2201.00045. 4
- [Mul14] G. Muller, *$\mathcal{A} = \mathcal{U}$ for locally acyclic cluster algebras*, SIGMA Symm. Integrab. Geom. Methods Appl. **10** 094 (2014). 3
- [Mul16] G. Muller, *Skein and cluster algebras of marked surfaces*, Quantum Topol. **7** (2016), no. 3, 435–503. 1, 2, 3, 6
- [SW07] A. S. Sikora and B. W. Westbury, *Confluence theory for graphs*, Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 439–478. 8

TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF KHALIMSKY CIRCLE

吉瀬流星 (九州大学)

1. はじめに

有限集合上の位相空間を finite space という. 一般の finite space は discrete ではなく, それらのトポロジーにはホモトピー論的に興味深いものがある. 例えば, McCord は単体複体に対し, 弱ホモトピー同値な finite space が存在することを証明した [McC66]. 他にも, Cianci, Ottina は [CO16] でホモトピー群が全て自明だが可縮でない最小の finite space を発見している.

finite space は有限集合上の位相空間であるため, そのホモトピー的性質の多くは組み合わせ的に記述することができ, finite space は組み合わせ論とトポロジーを結ぶ重要な数学の対象として研究されている [BM08, FMP16]. finite space のホモトピー論を通じて, トポロジーや代数の未解決問題へのアプローチをしようとしている研究もある [CM13, Bar11].

本講演では, 位相的複雑さ (topological complexity) というホモトピー不変量を finite space に関して調べる. 具体的には, [Tan18] の中で田中氏によって点が少ないケースにおいて部分的に調べられていた Khalimsky circle の位相的複雑さを, 全てのケースで決定し, 結果として, 田中氏が挙げた finite space の位相的複雑さに関する予想が成り立つことを述べる.

2. FINITE SPACE

この章では, finite space の基本的な性質について説明する.

2.1. finite space と半順序集合. まず Alexandroff によって与えられた finite space と順序集合の関係について紹介しよう. X を finite space とする. finite space X 上の点 x に対し,

$$U_x = \bigcap \{U \mid U \text{ は } x \text{ の開近傍}\}$$

とする. X は finite space なので, U_x もまた開集合であることに注意しておく.

次に $P(X)$ を次の関係を持つ集合 X として定義する.

$$x \leq y \iff U_x \subset U_y$$

ここで, $U_x = U_y$ ならば $x = y$ であることは一般には成り立たないため, $P(X)$ は反対称律を満たさない. しかし, 同値関係 $x \sim y$ を

$$x \sim y \iff x \leq y, y \leq x$$

と定めることで, 次が成り立つ.

命題 2.1. 商写像 $q: X \rightarrow X/\sim$ はホモトピー同値写像である.

このとき, 商空間 X/\sim は T_0 -空間である. よって, finite space のホモトピー論を考える上では, finite T_0 -space を対象にすれば十分であることが分かる. 以降, finite space は finite T_0 -space の場合のみを考えることとしよう. Alexandroff は次の定理を証明した.

定理 2.2 ([Ale37]). 次は圏同値である.

$$P: \{\text{finite } T_0\text{-spaces}\} \rightarrow \{\text{finite partial order sets}\}$$

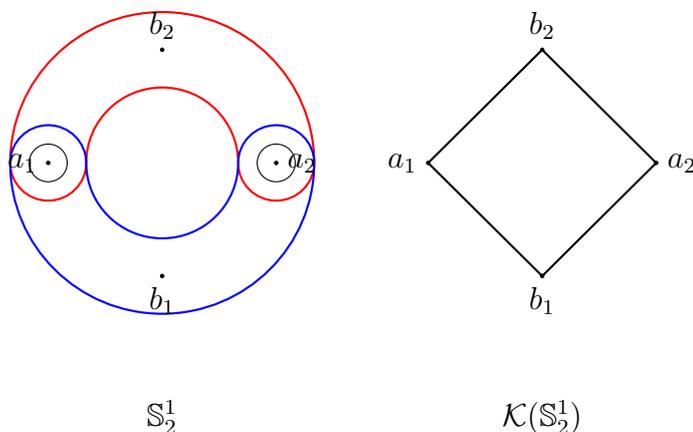
ここで注目すべき点は, P は関手になっていて, 射に対しても対応があるということである. 実際, finite spaces の間の連続写像 f に対して, $P(f)$ は順序を保つ写像になっていることが確かめられる.

2.2. finite space と単体複体. finite T_0 -space に対し, 半順序の構造が入ることがわかった. 一方, 半順序集合 P_0 から (抽象) 単体複体 $\Delta(P_0)$ を構成できる. 半順序 P_0 に対し, $n+1$ 個からなる部分全順序集合 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ を n 単体とみなせばよい.

そうすると, finite T_0 -space から単体複体への関手 \mathcal{K} が P と Δ の合成によって得られる.

$$\mathcal{K} = \Delta \circ P: \{\text{finite } T_0\text{-spaces}\} \rightarrow \{\text{simplicial complexes}\}$$

例 2.3 (4点からなる Khalimsky circle). $\mathbb{S}_2^1 = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ とする. 左図の各円に囲まれる部分集合族を開基底とすることで, \mathbb{S}_2^1 上の位相を定める.



McCordはこの finite space と単体複体との関係について、次の定理を示した。

定理 2.4 ([McC66]). finite T_0 -space X に対して、弱ホモトピー同値写像

$$\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$$

が存在する。つまり $\mu_{X_*} : \pi_*(|\mathcal{K}(X)|) \xrightarrow{\cong} \pi_*(X)$ が同型となる。

例 2.5. 例 2.3の \mathbb{S}_2^1 は、 $|\mathcal{K}(\mathbb{S}_2^1)| = S^1$ である。よって、 \mathbb{S}_2^1 は S^1 と弱ホモトピー同値である。

3. 位相的複雑さ

3.1. 位相的複雑さの定義. 位相的複雑さは Farber によってロボットの経路計画アルゴリズムの設計に関連したホモトピー不変量として定義された [Far03].

定義 3.1. X を位相空間とする。 X の位相的複雑さは次のように定義される:

$$\text{TC}(X) = \min\{n \mid X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n \text{ s.t. 各開集合 } U_i \text{ は } \pi \text{ の局所的切断をもつ}\}$$

ただし、 $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X; \ell \mapsto (\ell(0), \ell(1))$.

特に、位相的複雑さが 0 のときは、次の意味で“単純な”空間になっている。

命題 3.2. 位相空間 X に対し、 $\text{TC}(X) = 0 \iff X$ は可縮。

位相的複雑さは、次の LS カテゴリーと深い関係がある。

定義 3.3. X を位相空間とする。 X の LS カテゴリーは次のように定義される:

$$\text{cat}(X) = \min\{n \mid X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n \text{ s.t. 各開集合 } U_i \hookrightarrow X \text{ は null-homotopic}\}$$

定理 3.4 ([Far03]). 位相空間 X に対して次が成り立つ。

$$0 \leq \text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X) \leq (\text{cat}(X) + 1)^2 - 1.$$

さらに、 X が正則空間ならば次が成り立つ。

$$\text{cat}(X \times X) \leq 2 \text{cat}(X).$$

注意 3.5. finite space X が正則空間のとき、 X は discrete となるので、一般の finite space の位相的複雑さの評価には、上方の不等式を使うしかない。

3.2. **単体的複雑さ**. 位相的複雑さは位相空間に対して定義されるが, 単体複体で類似のものを定義しようという試みがある. [Gon18] の中で導入された単体的複雑さについて説明しよう. それを見るためには, 次の定義で与えられる, 単体写像における“強いホモトピー”の概念を用いる.

2つの単体写像 $f, g: K \rightarrow L$ に対して,

- $f \sim_c g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = f_0, \exists f_1, \exists f_2, \dots, \exists f_{n-1}, f_n = g \text{ s.t. } \forall i, \forall \sigma \in K, f_i(\sigma) \cup f_{i+1}(\sigma) \in L$
- $f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = f_0, \exists f_1, \exists f_2, \dots, \exists f_{n-1}, f_n = g \text{ s.t. } \forall i, f_i \sim_c f_{i+1}$

と定義する.

$f \sim g: K \rightarrow L$ のとき, 各単体の中でホモトピーを作っていくことで, それらの幾何学的実現 $|f|, |g|: |K| \rightarrow |L|$ はホモトピックであることがわかる.

注意 3.6. X が CW 複体や *finite space* の場合は, *exponential law* を用いることで, 次の定義に置き換えることができる.

$\text{TC}(X) = \min\{n \mid X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n \text{ s.t. 各開集合 } U_i \text{ に対し } \pi_1|_{U_i}, \pi_2|_{U_i} \text{ はホモトピック}\}$
ただし, $\pi_j: X \times X \rightarrow X$ は第 j 成分への射影.

定義 3.7. 単体複体 K に対し, K の 0-単体的複雑さとは

$\text{SC}^0(K) = \min\{n \mid \Delta(K \times K) = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n \text{ s.t. 各部分複体 } L_i \text{ に対し, } \pi_1|_{L_i} \sim \pi_2|_{L_i}\}$
ただし $\Delta(K \times K)$ はプリズム分解によって得られる複体であり, $\pi_j: \Delta(K \times K) \rightarrow K$ は第 j 成分への射影.

注意 3.8. $\text{SC}^0(K)$ はプリズム分解の取り方に依存する可能性がある.

$0 \leq n$ に対して, K の n -単体的複雑さ $\text{SC}^n(K)$ が定義されているが, 全ての組み合わせを確かめて n -単体的複雑さを計算するには, $\text{Sd}^n(\Delta(K \times K))$ の部分複体による被覆のパターンを考える必要があり, n が増えるに従って計算量が増大する. 一方で, K に対してある N_K が存在して, $N_K \leq n$ ならば $\text{SC}^n(K) = \text{TC}(|K|)$ となることが [Gon18] の中で示されている.

注意 3.9. ここでは紹介しないが, 単体的複雑さと別に, 単体複体に対する離散的位相複雑さという量が [FTMVMV18] で導入されている.

3.3. **finite space の位相的複雑さ**. *finite space* X から, 単体複体 $\mathcal{K}(X)$ とその幾何学的実現 $|\mathcal{K}(X)|$ が与えられるが, それらの位相的複雑さには次のような大小関係がある.

定理 3.10 ([Gon18]). X を finite space とする. 任意の $0 \leq n$ に対し,

$$0 \leq \text{TC}(|\mathcal{K}(X)|) \leq \text{SC}^n(\mathcal{K}(X)) \leq \text{TC}(X).$$

CW 複体や多様体などの位相的複雑さは, コホモロジーによるウエイトを計算して下から評価する方法が知られているが, finite space X に関しては $|\mathcal{K}(X)|$ と X が弱ホモトピー同値になるため, 定理 3.10 より, $\text{TC}(|\mathcal{K}(X)|)$ がその評価になってしまう. よって, CW 複体や多様体などの位相的複雑さの研究で用いられている手法は, finite space には適用しにくい. もちろん単体的複雑さや finite space の位相的複雑さは, 原理的には全ての組み合わせを網羅することで決定可能であるが, 点の数が増えるにしたがって, 計算量が膨大になり, 決定するのが困難になる. 事実, 位相的複雑さが決定されている finite space の例は, (今回の Khalimsky circle の結果を除けば), 点の数が少ないいくつかの場合だけである.

4. KHALIMSKY CIRCLE とその位相的複雑さ

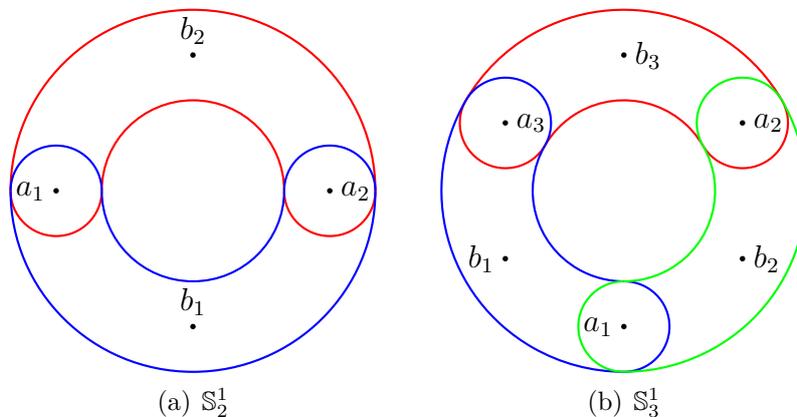
Khalimsky circle \mathbb{S}_n^1 とは, S^1 と弱ホモトピー同値となる $2n$ 個の点からなる finite space である. Khalimsky はデジタルトポロジーの分野の中で, デジタル画像の位相的性質を調べるため, \mathbb{Z}^2 上のある位相構造を導入した [Kha87]. その位相空間 \mathbb{Z}^2 は Khalimsky Plane と呼ばれており, \mathbb{S}_n^1 はその上の Jordan 曲線であることから, Khalimsky circle と呼ばれている.

定義 4.1. $n \geq 2$ に対し, Khalimsky circle \mathbb{S}_n^1 は

$$\mathbb{S}_n^1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

で $\{\{a_i, b_i, a_{i+1}\}\}_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ を準開基底として位相を定めたものである.

例 4.2. \mathbb{S}_2^1 と \mathbb{S}_3^1 の例を図で表す. 色のついた円で囲まれている集合が準開基底となる.



Khalimsky circle は可縮でない基本的な finite space の例であり, finite space の位相的複雑さを考える中で, まず Khalimsky circle について調べてみようと考えるのは自然である.

田中氏は [Tan18] の中で finite space に対する位相的複雑さを, 組み合わせ的な記述で与え, 4 点と, 6 点からなる Khalimsky circle に対して, 位相的複雑さを決定した.

定理 4.3 ([Tan18]).

$$\text{TC}(\mathbb{S}_2^1) = 3, \text{TC}(\mathbb{S}_3^1) = 2.$$

しかし, $n \geq 4$ に関する \mathbb{S}_n^1 の位相的複雑さについては未解決な問題として残っていた. 円周 S^1 については $\text{TC}(S^1) = 1$ が知られているので, π への局所的切断を持つような 2 枚の開集合からなる $S^1 \times S^1$ の被覆が存在する. よって, n が大きい時には, S^1 の開集合を“近似”するように \mathbb{S}_n^1 の開集合を与えれば良さそうな気がするかもしれないが, 一般にこの方法ではうまくはいかない. 田中氏は, すべての $n \geq 2$ について, $\text{TC}(\mathbb{S}_{2n}^1) = 2$ となることを予想していた.

私は $n \geq 4$ に関する \mathbb{S}_n^1 の位相的複雑さを決定するために, π への局所的切断を持つような $\mathbb{S}_n^1 \times \mathbb{S}_n^1$ の部分空間について考察をした. すると, Khalimsky circle 間の写像のホモトピー類を分類する次の補題が重要であることに気づいた.

補題 4.4. 2 つの異なる写像

$$f, g : \mathbb{S}_m^1 \rightarrow \mathbb{S}_n^1,$$

が $\deg f = \deg g > 0$ を満たしているとする. このとき,

$$f \simeq g \iff m > n \cdot \deg f.$$

この補題 4.4 は, Khalimsky circle 間の写像のホモトピー類を分類するためには, 写像度だけでなく定義域の Khalimsky circle の点の個数が関係することを述べている.

補題 4.4 を用いることで $\text{TC}(\mathbb{S}_4^1) = 2$ を示すことができ, さらに補題 4.4 から, 開被覆の目星をつけ, すべての $n \geq 5$ に対し, π への局所的切断を持つような 2 枚の開集合からなる $\mathbb{S}_n^1 \times \mathbb{S}_n^1$ の開被覆を発見した. (開被覆の具体的な形については講演の中で紹介する)

まとめると, 以下の結果になる.

定理 4.5. Khalimsky circle \mathbb{S}_n^1 の位相的複雑さは次で与えられる:

$$\text{TC}(\mathbb{S}_n^1) = \begin{cases} 3, & n = 2, \\ 2, & n = 3, 4, \\ 1, & n \geq 5. \end{cases}$$

この結果は,

『位相的複雑さは, ホモトピー同値で不変だが, 弱ホモトピー同値で不変ではない』
ことがわかる 1 つの例となっている.

さらにこの定理 4.5 の結果は, 次の田中氏の finite space の位相的複雑さに関する次の予想の解決につながった.

予想 4.6 ([Tan18]). finite space X で $\text{TC}(X) < \text{cat}(X \times X)$ をみたすものが存在する.

$5 \leq n$ について, Kandola[Kan18] の結果から $\text{cat}(\mathbb{S}_n^1 \times \mathbb{S}_n^1) = 2$ である. 定理 4.5 と合わせて, $1 = \text{TC}(\mathbb{S}_n^1) < \text{cat}(\mathbb{S}_n^1 \times \mathbb{S}_n^1) = 2$ となり, 田中氏の上記の予想は正しいことが分かる.

5. 今後の課題

ここでは, finite space の位相的複雑さに関連するの問題を 3 つ挙げる.

5.1. $\text{Sd}^r \mathbb{S}^n$ の位相的複雑さ. Khalimsky circle の位相的複雑さの結果を高次元の場合に拡張できないか? というのは自然な疑問である. Khalimsky circle が S^1 と弱ホモトピー同値であったように, S^n と弱ホモトピー同値な finite space が存在する. 例えば, 次で定義される \mathbb{S}^n は S^n と弱ホモトピー同値な最小の finite space である.

定義 5.1. $\mathbb{S}^n = [n] \times \{-1, 1\}$ は次の族を準開基底として位相を定める:

$$\{[k-1] \times \{-1, 1\} \cup [k] \times \{\epsilon\} \mid 0 \leq k \leq n, \epsilon = \pm 1\}$$

ただし, $[-1] = \emptyset$, $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ とする.

例 5.2. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}_2^1$.

単体複体の重心細分と同じように, finite space X に対して, その重心細分 $\text{Sd} X$ が定義される. 例えば, $\text{Sd}^r \mathbb{S}^1 = \text{Sd}^r \mathbb{S}_2^1 = \mathbb{S}_{2^r}^1$.

問題 5.3. $r \geq 1$ に対して,

$$\text{TC}(\text{Sd}^r \mathbb{S}^n) = ?$$

5.2. finite space の間の写像のホモトピー類. 一般の finite space の位相的複雑さを調べるには, 今回の Khalimsky circle の場合のように, 写像のホモトピー類について調べる必要性があると考えられる.

finite space X が $|\mathcal{K}(X)| = S^n$ をみたすと仮定しよう. このとき, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$f, g : \text{Sd}^n X \rightarrow X \text{ がホモトピック} \implies \deg f = \deg g$$

が成り立つ.

逆について考えよう. 次の命題が成り立つ.

命題 5.4. $|\mathcal{K}(X)| = S^n$ となる finite space X に対し, $f, g : \text{Sd}^r X \rightarrow X$ が $\deg f = \deg g = d$ を満たしていると仮定する. このとき,

$$\exists r_{d,X} \geq 0 \text{ s.t. } r_{d,X} < r \implies f, g : \text{Sd}^n X \rightarrow X \text{ がホモトピック.}$$

この命題の証明は, ルベーク数の存在によって証明される. よって $r_{d,X}$ がどのくらい大きくなるかがわからない. Khalimsky circle のケースでは, 補題 4.4 から, $r_{d, S^n} = \log_2(d)$ と取れることが分かる.

問題 5.5. 命題 5.4 の中で出てくる $r_{d,X}$ は, どのくらい大きくなるのか?

5.3. **重心細分と位相的複雑さ.** finite space X に対し, 重心細分をすると, LS カテゴリーは小さくなることが知られている.

定理 5.6 ([FTMVV15]). finite space X に対して,

$$\text{cat}(X) \geq \text{cat}(\text{Sd} X)$$

位相的複雑さに関しては, Khalimsky circle の場合は, 次が成り立っていた.

$$\text{TC}(S^1) > \text{TC}(\text{Sd} S^1) > \text{TC}(\text{Sd}^2 S^1) = \text{TC}(\text{Sd}^3 S^1) = \dots = \text{TC}(S^1)$$

しかし一般の finite space X に対して, $\text{TC}(X) \geq \text{TC}(\text{Sd} X)$ が成り立つかは分かっていない.

問題 5.7. 次の不等式をみたすような finite space X は存在するか?

$$\text{TC}(X) < \text{TC}(\text{Sd} X)$$

REFERENCES

- [Ale37] P. S. Alexandroff. *Diskrete Räume*. In: *Matematicheskii Sbornik 2*, 1937.
- [Bar11] Jonathan A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, volume 2032 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [BM08] Jonathan Ariel Barmak and Elias Gabriel Minian. Simple homotopy types and finite spaces. *Advances in Mathematics*, 218(1):87–104, may 2008.
- [CM13] Manuela Ana Cerdeiro and Elias Gabriel Minian. A new approach to whitehead’s asphericity question. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 9(2):339–348, apr 2013.
- [CO16] Nicolás Cianci and Miguel Ottina. Smallest homotopically trivial non-contractible spaces. 08 2016.
- [Far03] Michael Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.*, 29(2):211–221, 2003.
- [FMP16] Loïc Foissy, Claudia Malvenuto, and Frédéric Patras. Infinitesimal and $b\infty$ -algebras, finite spaces, and quasi-symmetric functions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(6):2434–2458, 2016.
- [FTMVMV18] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, E. Minuz, and J. A. Vilches. Discrete topological complexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(10):4535–4548, 2018.
- [FTMVV15] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, and J. A. Vilches. Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology Appl.*, 194:37–50, 2015.
- [Gon18] Jesús González. Simplicial complexity: piecewise linear motion planning in robotics. *New York J. Math.*, 24:279–292, 2018.
- [Kan18] Shelley Kandola. The topological complexity of finite models of spheres. 12 2018.
- [Kha87] Efim Khalimsky. Topological structures in computer science. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 1(1):25–40, jan 1987.
- [McC66] Michael C. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. J.*, 33:465–474, 1966.
- [Tan18] Kohei Tanaka. A combinatorial description of topological complexity for finite spaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 18(2):779–796, 2018.

\mathbb{C}^* 環に値をとる連続写像のなすバナッハ環上の 保存問題

大井 志穂 (新潟大学)*

1 保存問題について

保存問題とは、大雑把に言うと、「与えられた線形空間の上で定義された写像が、ある関数や集合、関係を保存するとき、その写像の特徴づけを与えよ。」というような問題の総称である。例えば、[28]に書かれているものを少し一般化すると、次の問題は保存問題の一例である。

問題 1.1. X を線形空間とし、 F を X 上のスカラー値写像とする（もしくは F はベクトル値や集合値写像としてもよい）。このとき、線形写像 $T : X \rightarrow X$ が

$$F(T(a)) = F(a), \quad a \in X$$

をみたすとき、 T を特徴づけよ。

問題 1.1 の例として、保存問題の起源とも言える二つの結果を紹介する。一つ目は、1897年の Frobenius [15] の結果で、 X を n 次複素正方行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ 、写像 $F : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ を $F(A) = \det(A)$ とした場合である。すなわち、線形写像 $T : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ が

$$\det(T(A)) = \det(A), \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

をみたすとき、 $\det(MN) = 1$ をみたす $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して、

$$T(A) = MAN, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

もしくは

$$T(A) = MA^tN, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

が成り立つ。二つ目は、等距離写像である。 X をユークリッドノルム $\|\cdot\|$ が定まった n 次元実ユークリッド空間 \mathbb{R}^n とする。写像 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

をみたすとき、ある $n \times n$ 直交行列 U と、 $a \in \mathbb{R}^n$ が存在して

$$T(x) = Ux + a, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ。一般に、有限次元線形空間の間の等距離写像はアフィン写像になるので、これは $F(x) = \|x\|$ とした場合に対する、問題 1.1 の例と言える。

最近では、線形性を仮定しない写像に対して、保存問題を考え、結果としてある種の線形性を導くような研究も盛んに行われている。保存問題は数学において自然な問題であり、多くの対象に対して考えうる問題であろう。一方、現在の保存問題の研究対象は、関数解析学における、ヒルベルト空間上の有界線形作用素全体、バナッハ環、バナッハ空間などノルム構造をもった線形空間やその部分構造がほとんどであることを述べておく。保存問題の理論や研究対象の詳細は Molnár による [32] を参照されたい。

本稿では、保存問題においても基本的で重要とされる問題の一つである、バナッハ空間上の全射線形等距離写像について述べる。

* 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地新潟大学理学部理学科数学プログラム
e-mail: shiho-oi@math.sc.niigata-u.ac.jp

本研究は、科研費（課題番号: JP21K13804）の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 47B49, 47B48, 46E40.

Keywords: 全射等距離写像, Jordan * 同型写像, バナッハ環.

2 全射等距離写像

近代的な等距離写像の研究は、1932年のBanach[2]による。コンパクト距離空間 X に対して、 $C_{\mathbb{R}}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と表す。 $C_{\mathbb{R}}(X)$ の二つの関数の和、積およびスカラーと関数の積を普通の意味の関数の和、積、スカラーとの積で定義し、そのノルムを $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ と定義すれば、 $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ は実バナッハ環となる。Banach はこの間の全射等距離写像について、次を示した。

定理 2.1 ([2] Chapter XI, Theorem 3 and Remark). 二つのコンパクト距離空間 X_1 と X_2 が同相であるための必要十分条件は、 $C_{\mathbb{R}}(X_1)$ と $C_{\mathbb{R}}(X_2)$ の間の全射等距離写像が存在することである。さらに、全射等距離写像 $T : C_{\mathbb{R}}(X_1) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(X_2)$ が $T(0) = 0$ をみたすならば、同相写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ と実数値連続関数 $\alpha : X_2 \rightarrow \{-1, 1\}$ があって、

$$T(f)(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C_{\mathbb{R}}(X_1), \quad y \in X_2$$

が成り立つ。

その後、1937年にStoneは Ω_1, Ω_2 をコンパクトハウスドルフ空間としたときの、全射等距離写像 $T : C_{\mathbb{R}}(\Omega_1) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\Omega_2)$ を特徴づけた [39]。また、 Ω をコンパクトハウスドルフ空間とすると、 $C(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は連続}\}$, $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| \mid x \in \Omega\}$ と定めると、 $C(\Omega)$ は複素バナッハ環となる。一般に任意の単位的可換 C^* 環は、あるコンパクトハウスドルフ空間 Ω が存在して $C(\Omega)$ とバナッハ環として等距離同型である。Banach と Stone の結果を複素化し、得られる定理を今日では Banach-Stone の定理という。すなわち Banach-Stone の定理は、単位的可換 C^* 環の間の全射複素線形等距離写像の特徴づけを与えた定理である。

定理 2.2 (Banach-Stone の定理). 写像 $T : C(\Omega_1) \rightarrow C(\Omega_2)$ が全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は、同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ と連続関数 $\alpha : \Omega_2 \rightarrow S^1 := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$ が存在して、

$$T(f)(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C(\Omega_1), \quad y \in \Omega_2$$

が成り立つことである。

Banach-Stone の定理では、全射等距離写像 T が複素線形であることを仮定しているが、実はこれは本質的ではない。実際、最初に述べたように、有限次元ノルム空間の間の等距離写像は自動的にアフィン写像になるがこれを一般の（無限次元）実ノルム空間に拡張した Mazur-Ulam の定理が良く知られている。

定理 2.3 (Mazur-Ulam の定理). 二つのノルム空間 N_1, N_2 の間の写像 $T : N_1 \rightarrow N_2$ が全射等距離写像であるならば、 $T - T(0)$ は実線形である。

よって、本稿では、全射線形等距離写像を考えることにする。また、以下とくに断らない場合は、バナッハ空間、バナッハ環といえば全て複素バナッハ空間、複素バナッハ環を意味することにする。

2.1 等距離写像と同型写像の不思議な関係性

さて、コンパクトハウスドルフ空間 Ω に対して、 $C(\Omega)$ は可換バナッハ環であった。そこで、 $T : C(\Omega_1) \rightarrow C(\Omega_2)$ の間の多元環としての同型写像を考えることができる。「同型写像を特徴づけよ」という問題も保存問題における自然な問題の一つであり、Gelfand と Kolmogorov による結果がある。

定理 2.4 ([16]). コンパクトハウスドルフ空間 Ω_1, Ω_2 に対して, $T : C(\Omega_1) \rightarrow C(\Omega_2)$ が同型写像であるための必要十分条件は, ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ が存在して,

$$Tf(y) = f(\varphi(y)), \quad f \in C(\Omega_1)$$

が成り立つことである。

これらのことから, $C(\Omega)$ のバナッハ空間としての等距離同型性と多元環としての代数構造が同値であることが分かる。一見すると全く関係のない積の構造を等距離写像は自動的に保存するという結果は大変驚くべき結果である。

2.1.1 Banach-Stone の定理の一般化

Banach-Stone の定理については, 拡張やその類似の結果がこれまでに多く報告されている。詳細については, Fleming and Jamison [12, 13] を参照されたい。ここではそのうちの3つを紹介することにする。コンパクトハウスドルフ空間 Ω に対して, $C(\Omega)$ の部分多元環 \mathcal{U} が, Ω 上の関数環であるとは, (1) \mathcal{U} が $C(\Omega)$ の中で閉であり, (2) $\mathcal{U} \ni 1$, ただし 1 は恒等的に 1 である定数関数, さらに, (3) \mathcal{U} が Ω の点を分離する, つまり Ω の任意の異なる 2 点 y_1, y_2 に対して, ある $f \in \mathcal{U}$ が存在して $f(y_1) \neq f(y_2)$ が成り立つときをいう。関数環は非常に抽象的に定義されるが, もともとは関数論における諸定理を関数解析学の手法を用いて一般化し, 統一的に扱うことを目標として研究されている可換バナッハ環である。関数環の例として基本的なものは, 円板環である。複素平面上の単位円周 S^1 の上で定義された複素数値連続関数で, 単位開円板の解析関数に連続的に拡張できるもの全体は S^1 上の関数環となる。これを円板環という。関数環 \mathcal{U} に対して, \mathcal{U} の極大イデアル空間を $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ と書くことにする。Banach-Stone の定理は, 次のように関数環に拡張されることが知られている。

定理 2.5 (Nagasawa [34], de Leeuw, Rudin and Wermer [10]). 関数環 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ に対して, 写像 $T : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ が全射複素線形等距離写像であるならば, 任意の $y \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_2)$ に対して $|\alpha(y)| = 1$ をみたす $\alpha \in \mathcal{U}_2$ と, 同相写像 $\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{U}_2) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{U}_1)$ が存在して,

$$Tf(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in \mathcal{U}_1, y \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_2)$$

が成立する。またこの逆も成立する。

Banach-Stone の定理が単位的可換 C^* 環上の全射複素線形等距離写像の特徴づけであることを考慮すると, 任意の C^* 環の間の全射複素線形等距離写像に拡張できるかという疑問が自然に生じる。これを解答したのが, Kadison [24] である。 C^* 環 \mathcal{A} において, 任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ と定義された演算 \circ を Jordan 積と呼ぶ。ここで, 二つの C^* 環 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に対して, 全単射な複素線形写像 $\tau : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が条件 $\tau(a^*) = \tau(a)^*$, $\tau(a \circ b) = \tau(a) \circ \tau(b)$ を任意の $a, b \in \mathcal{A}_1$ で満たすとき, τ を Jordan $*$ -同型写像と呼ぶ。Kadison によって与えられた Banach-Stone の定理の非可換化は, 次のとおりである。

定理 2.6 (Kadison [24]). $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を単位的 C^* 環とする。写像 $T : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が全射複素線形等距離写像であるとき, ユニタリー元 $u \in \mathcal{A}_2$ と, Jordan $*$ -同型写像 $\tau : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が存在して,

$$T = u\tau$$

となる。またこの逆も成立する。

つまり, Kadison の定理によって, 二つの C^* 環 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の間の全射複素線形等距離写像は, Jordan 積の構造を保存することが示された。一般の単位的 C^* 環の間の等距離写像が, 結局 Jordan $*$ 環としての代数構造を保存する。

最後は、他のバナッハ環に対しても Banach-Stone の定理と類似の結果が得られるかという問題である。一様ノルムではない完備なノルムを持つ連続関数からなる多元環に対して、その間の全射線形等距離写像を特徴づける問題は、Cambern によって始められた ([8])。のちに詳しく述べることだが、等距離写像を特徴づける一つの鍵は単位球の形である。一様ノルムや作用素ノルムではないノルムの場合、単位球の形が複雑になることが多い。このことが一因となって、その間の等距離写像を特徴づけることは難しい場合が多い。Cambern は、 $[0, 1]$ 上の複素数値連続微分可能関数全体に $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} \{|f(x)| + |f'(x)|\}$ でノルムを定めた Banach 環 $C^1([0, 1])$ と、 $[0, 1]$ 上の複素数値絶対連続関数全体に $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\} + \int_0^1 |f'(x)| dx$ でノルムを定めたバナッハ環 $AC([0, 1])$ に対して、その間の全射線形等距離写像の特徴づけを与えた。Cambern の結果を皮切りに、数多くの一様ノルムとは異なるノルムで定められる可換バナッハ環に対して、その間の全射線形等距離写像を決定する問題が研究されるようになった。特に、Rao と Roy [38] は、閉区間 $[0, 1]$ 上のリップシッツ関数全体に $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ をノルムとしてできるリップシッツ環 $Lip([0, 1])$ の間の全射線形等距離写像を決定した。

定理 2.7 ([38]). 写像 $T : Lip([0, 1]) \rightarrow Lip([0, 1])$ が全射複素線形等距離写像であるとき、 $\alpha \in S^1$ が存在して、

$$T(f)(x) = \alpha f(x), \quad f \in Lip([0, 1]), \quad x \in [0, 1]$$

または

$$T(f)(x) = \alpha f(1-x) \quad f \in Lip([0, 1]), \quad x \in [0, 1]$$

が成り立つ。またこの逆も成立する。

これ以降、リップシッツ環の間の全射複素線形等距離写像の研究が始まった。リップシッツ環の定義は定義 4.4 を参照のこと。また、リップシッツ環の一般論は [41] が詳しい。[38] では、「 X を任意のコンパクト距離空間としたとき、 $Lip(X)$ の間の全射線形等距離写像は荷重合成作用素で表せるか。」という問題が提唱されたが、完全な回答は最近まで得られていなかった。後で述べることに関係するのであるが、 $(Lip(X), \|\cdot\|_L)$ の双対空間の単位球の端点が決定できず、等距離写像を決定するのが難しい (第 2.3 章参照)。[38] の問題は [18] において解決された。証明はここでは紹介しないが、Choquet 境界から必要な情報を得ることにより証明された。双対空間の単位球の端点を決定することは現在のところ未解決と思われることを注意しておく。

定理 2.8 ([18]). 任意のコンパクト距離空間 X_i ($i = 1, 2$) に対して、写像 $T : Lip(X_1) \rightarrow Lip(X_2)$ が全射複素線形等距離写像であるとき、 $\alpha \in S^1$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して、

$$T(f)(x) = \alpha f(\varphi(x)), \quad f \in Lip(X_1), \quad x \in X_2$$

が成立する。また、この逆も成立する。

もちろん任意のバナッハ環に対して Banach-Stone 型の定理が得られるはずはなく、単位的半単純可換バナッハ環の範疇でも Banach-Stone 型の定理が成り立たないバナッハ環が存在する。例えば、局所コンパクト群 G 上のフーリエ環 $A(G)$ は、半単純可換バナッハ環であるが、その間の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素で表せるとは限らない。つまり、全射複素線形等距離写像であっても自動的に積や Jordan 積の構造を保存するとは限らないバナッハ環が存在する。

2.2 Banach-Stone の定理の証明

Banach が [2] で付けた証明は、やや複雑な証明であるが、その後多くの研究者によって別証が与えられ、今では Banach-Stone の定理の証明はいくつも知られている。そのうちの二つを紹介し、等距離写像を決定するための手法について簡単に述べる。

2.3 extreme point argument と技術的困難

定義 2.9. X をノルム空間とし、 X の共役空間を X^* と書く。このとき、 $\text{Ext } X^*$ を $\{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \leq 1\}$ の端点全体の集合とする。

事実 2.10. コンパクトハウスドルフ空間 Ω に対して、

$$\text{Ext } C(\Omega)^* = \{\alpha \delta_x \mid \alpha \in S^1, x \in \Omega\}.$$

ただし、任意の $f \in C(\Omega)$ に対して、 $\delta_x(f) = f(x)$ と定める。

この事実 2.10 を用いて、Banach-Stone の定理を示す。

Banach-Stone の定理の略証 1. $T : C(\Omega_1) \rightarrow C(\Omega_2)$ を全射複素線形等距離写像とする。このとき共役作用素 $T^* : C(\Omega_2)^* \rightarrow C(\Omega_1)^*$ に対して、

$$T^*(\text{Ext } C(\Omega_2)^*) = \text{Ext } C(\Omega_1)^* \quad (1)$$

であることが簡単にわかる。事実 2.10 により、任意の $y \in \Omega_2$ に対して、 $\alpha(y) \in S^1$ と $\varphi(y) \in \Omega_1$ が存在し、

$$T^*(\delta_y) = \alpha(y) \delta_{\varphi(y)}$$

が成り立つ。このとき任意の $f \in C(\Omega_1)$ に対して、 $Tf(y) = T^*(\delta_y)(f) = \alpha(y) \delta_{\varphi(y)}(f) = \alpha(y) f(\varphi(y))$ を得る。 $f = 1$ を考えれば、 $\alpha \in C(\Omega_2)$ であることが分かり、ウリゾーンの補題より、 φ が Ω_2 から Ω_1 への同相写像であることもすぐにわかる。□

実際、(1) はより一般に成立する。すなわち任意のノルム空間 N_1, N_2 の間の全射複素線形等距離写像 T が与えられたとき、

$$T^*(\text{Ext } N_2^*) = \text{Ext } N_1^*$$

が成り立つ。つまり、 $C(\Omega)$ に対する事実 2.10 のように、 $\text{Ext } N^*$ が具体的に決定できれば、Banach-Stone の定理の略称 1 と同様の議論により $T : N_1 \rightarrow N_2$ を決定できる。その際、次がかなり有用である。

定理 2.11 (Brosowski and Deutsch の定理 [7]). E をノルム空間として、 X を $C(\Omega, E)$ の部分空間とする。このとき

$$\text{Ext}(C(\Omega, E)^*) = \{x^* \circ \delta_t \mid x^* \in \text{Ext } E^*, t \in \Omega\}$$

$$\text{Ext}(X^*) \subset \{x^* \circ \delta_t \mid x^* \in \text{Ext}(E^*), t \in \Omega\}$$

が成り立つ。ただし、 δ_t は任意の $F \in C(\Omega, E)$ に対して $\delta_t(F) = F(t)$ で定められる写像である。

双対空間の単位球の端点を決定し、上のように等距離写像を特徴づけるこの手法を extreme point argument といい、現在の等距離写像の研究においては最も主流の手法の一つである。

一方で、この extreme point argument には技術的困難がある。 C^* 環のノルムでないノルムで定まっているバナッハ空間に対しては、その双対空間の単位球の端点を決定することは容易ではないことが多い。例えば、 $\text{Lip}(X)$ の場合は、あるコンパクトハウスドルフ空間 K 上の連続関数空間 $C(K)$ に等長に埋め込むことができるため、定理 2.11 より、双対空間の単位球の端点が決定できそうに思えるかもしれないが、これは簡単ではない。実は K はいくつかの集合の直積であり、集合としてかなり大きくなってしまふからである。よって、extreme point argument は理論上は、非常に有益で任意のバナッハ空間やノルム空間に対して、その上の全射等距離写像を決定するためのアルゴリズムが与えられているともいえるが、双対空間の単位球の端点が決定できなければ、まったく使えない。

2.4 T 集合

そこで、双対空間の単位球の端点に頼らない何か良い方法はないだろうか？次に T 集合を用いた証明を紹介する。ノルム空間上の T 集合は、Myers[33] によって導入された。

定義 2.12. N をノルム空間とする。 N の部分集合 C が

$$x_1, \dots, x_n \in C \implies \|x_1 + \dots + x_n\| = \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$$

をみたし、この性質について極大であるとき、 C を N の T 集合という。

例 2.13. \mathbb{R}^2 上の各単位球に対して、次が T 集合の例である。

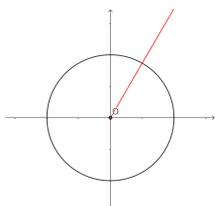


図 1: 円

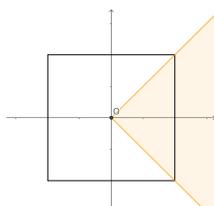


図 2: 正方形

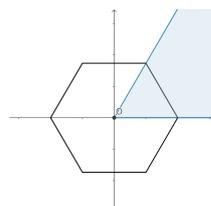


図 3: 正 6 角形

事実 2.14. $C \subset C(\Omega)$ が T 集合のとき、ある $\alpha \in S^1, x \in \Omega$ が存在して、

$$C = \{f \in C(\Omega) \mid \exists r \geq 0 \text{ s.t. } f(x) = r\alpha, |f(x)| = \|f\|_\infty\} := \Delta_{x,\alpha}$$

Banach-Stone の定理の略証 2. 全射複素線形等距離写像 $T : C(\Omega_1) \rightarrow C(\Omega_2)$ に対して、 T は、 $C(\Omega_1)$ の T 集合を $C(\Omega_2)$ の T 集合に写し、その対応は 1 対 1 対応である。よって、任意の $x \in \Omega_1$ に対して、 $T(\Delta_{x,1}) = \Delta_{\psi(x),\alpha(x)}$ を満たす $\alpha(x) \in S^1$ と $\psi(x) \in \Omega_2$ が存在する。ここで任意の $f \in \Delta_{x,1}$ を選ぶと、ある $r \geq 0$ が存在して、 $f(x) = r$ かつ $\|f\|_\infty = r$ となる。 T は等距離写像であり、さらに $Tf \in \Delta_{\psi(x),\alpha(x)}$ であるので、 $Tf(\psi(x)) = r\alpha(x)$ かつ $\|Tf\|_\infty = r$ がなりたつ。すなわち、 $Tf(\psi(x)) = \alpha(x)r = \alpha(x)f(x)$ を得る。ウリゾーンの補題を用いると、 $f(x) = 0$ をみたす $f \in C(\Omega_1)$ に対して、 $Tf(\psi(x)) = 0$ であることがわかるので、任意の $f \in C(\Omega_1)$ に対して、 $T(f - f(x)1)(\psi(x)) = 0$ を得る。以上より、 $Tf(\psi(x)) = f(x)T1(\psi(x)) = \alpha(x)f(x)$ となる。あとは、 ψ が同相写像であること、 α が連続写像であることを証明すればよい。 \square

3 ベクトル値連続関数のなすバナッハ空間上の全射線形等距離写像

3.1 Banach-Stone property

ベクトル値連続関数のなすバナッハ空間 $C(\Omega, E)$ の間の全射線形等距離写像の研究は、Jerison[22] が始めた。補題 3.1 はすぐにわかる。

補題 3.1. E_1, E_2 をバナッハ空間、 Ω_1, Ω_2 をコンパクトハウスドルフ空間とする。さらに、ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ と、任意の $y \in \Omega_2$ に対して、 $y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような全射線形等距離写像 $V_y : E_1 \rightarrow E_2$ が存在したとする。このとき、 $T : C(\Omega_1, E_1) \rightarrow C(\Omega_2, E_2)$ を、

$$TF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in C(\Omega_1, E_1) \quad (2)$$

と定義すると、 $T : C(\Omega_1, E_1) \rightarrow C(\Omega_2, E_2)$ は全射線形等距離写像となる。

この逆が成り立つのか？ということが問題である。すなわち、全射複素線形等距離写像 $T : C(\Omega_1, E_1) \rightarrow C(\Omega_2, E_2)$ が与えられたとき、必ず (2) をみたすような同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ と、全射線形等距離写像 $V_y : E_1 \rightarrow E_2$ の族が存在するだろうか。

定義 3.2 ([9]). E をバナッハ空間とする。 E が *Banach-Stone property* をみたすとは、任意のコンパクトハウスドルフ空間 Ω_1, Ω_2 に対して、全射線形等距離写像 $T : C(\Omega_1, E) \rightarrow C(\Omega_2, E)$ が与えられたとすると、ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ と、任意の $y \in \Omega_2$ に対して、 $y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような全射複素線形等距離写像 $V_y : E \rightarrow E$ が存在し、(2) をみたすときをいう。

ベクトル値連続関数を考える動機は何だろうか？ Banach-Stone の定理は、バナッハ空間 \mathbb{C} が Banach-Stone property をみたすことを主張しているため、[22] を読むと、Jerison 自身のモチベーションは Banach-Stone の定理の一般化を得ることであったようである。一方でベクトル値の連続関数の間の全射等距離写像を調べると、基本的なところに様々な現象が起こる。そこでいくつかの古典的な結果を紹介したい。

3.2 Banach-Stone property を満たす例

定義 3.3. バナッハ空間 E が狭義凸であるとは、 $x, y \neq 0$ である $x, y \in E$ に対して、 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ が成り立つならば、ある $\lambda > 0$ が存在して、 $x = \lambda y$ が成り立つときをいう。二つの T 集合 C_1, C_2 が不一致であるとは、 $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ もしくは、ある T 集合 C_3 が存在して、 $C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \{0\}$ が成り立つときをいう。狭義凸空間ならば、任意の二つの T 集合が不一致であることは明らかである。図 1 より、単位球が円となる 2次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 は、狭義凸である。また、単位球が正方形となる \mathbb{R}^2 空間は、不一致でない二つの T 集合が存在するが (図 2)、単位球が正六角形となる \mathbb{R}^2 空間は、狭義凸空間ではないが任意の二つの T 集合が不一致である (図 3)。

定理 3.4 ([22]). 任意の二つの T 集合が不一致であるような実バナッハ空間 (特に狭義凸空間) は *Banach-Stone property* を満たす。

定理 3.4 は Behrends によって、定理 3.11 と一般化された。説明するために、幾つかの定義と事実を簡単に紹介する。

定義 3.5. E を $\{0\}$ でない (実もしくは複素) バナッハ空間とする。有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ が *multiplier* であるとは、任意の $p \in \text{Ext } E^*$ に対して、 $p \circ T = a_T(p)p$ が成り立つ写像 $a_T : \text{Ext } E^* \rightarrow \mathbb{C}$ が存在するときをいう。さらに、 $\text{Mult}(E) := \{T : E \rightarrow E \mid T \text{ は multiplier}\}$ とする。

任意の $S, T \in \text{Mult}(E)$ に対して、 $\text{Ext } E^*$ 上で、 $(S \circ T - T \circ S)^* = 0$ が成り立つ。Krein-Milman の定理より、 $\text{Mult}(E)$ は E 上の有界線形作用素のなす多元環の 可換な部分多元環 である。

定義 3.6. E を (実もしくは複素) バナッハ空間とする。有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ が *M-bounded* とは、ある $\lambda > 0$ が存在して、 $Tx \in \{\mu x \mid \mu \in \mathbb{K}, |\mu| \leq \lambda\}$ であるときをいう。ただし \mathbb{K} は E のスカラー体である。

ここで、任意の $x \in E, \lambda > 0$ に対して、 $R_\lambda(x) := \bigcap \{D \mid D \text{ は閉球 s.t. } \{\mu x \mid \mu \in \mathbb{K}, |\mu| \leq \lambda\} \subset D\}$ と定める。すると有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ が M-bounded のとき、ある定数 $\lambda > 0$ があって、 $Tx \in R_\lambda(x)$ が任意の $x \in E$ に対して成り立つ。

例 3.7. \mathbb{R}^2 上の各単位球に対して, 点 x_0 における $R_1(x_0)$ は図 4, 5 のとおりである ([3]).

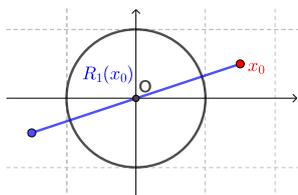


図 4: 単位球が円のとき

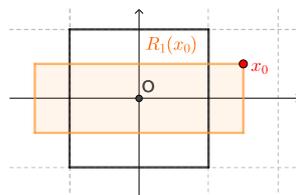


図 5: 単位球が正方形のとき

図 4 より, 次が分かる。

例 3.8. $\|\cdot\|_2$ をユークリッドノルムとする。 $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ が M -bounded のとき, ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して, $T = kI$ となる。

さらに次の事実が知られている。

事実 3.9 ([3]). E を (実もしくは複素) バナッハ空間とする。有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ に対して T が multiplier であることと M -bounded であることは同値である。

定義 3.10. (実もしくは複素) バナッハ空間 E に対して, $T \in \text{Mult}(E)$ に対して, $S \in \text{Mult}(E)$ が T の共役であるとは, $a_S = \overline{a_T}$ のときをいう。また, E の centralizer とは, $Z(E) = \{T \in \text{Mult}(E) \mid \exists S \in \text{Mult}(E) \text{ s.t. } T \text{ は } S \text{ の共役}\}$ のことをいう。 E が実バナッハ空間の場合は $Z(E) = \text{Mult}(E)$ となる。 E が trivial centralizer を持つとは, $Z(E) = \mathbb{K} \text{Id}_E$ であるときをいう。

例 3.8 と事実 3.9 より, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ は trivial centralizer を持つことがわかる。

定理 3.11 ([3]). 二つの (実もしくは複素) バナッハ空間 E_1, E_2 が trivial centralizer を持つとする。任意のコンパクトハウスドルフ空間 Ω_1, Ω_2 に対して, 全射線形等距離写像 $T : C(\Omega_1, E_1) \rightarrow C(\Omega_2, E_2)$ が存在するならば, 同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ と任意の $y \in \Omega_2$ に対して, $y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような全射線形等距離写像 $V_y : E_1 \rightarrow E_2$ が存在して,

$$TF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in C(\Omega_1, E_1), y \in \Omega_2$$

と書ける。特に, $C(\Omega_1, E_1)$ と $C(\Omega_2, E_2)$ が等距離同型ならば, Ω_1 と Ω_2 は同相であり, かつ E_1 と E_2 は等距離同型である。

系 3.12. trivial centralizer をもつバナッハ空間は Banach-Stone property を満たす。

3.3 Banach-Stone property を満たさない例

満たさない例もいくつも知られるが, ここでは有名なものを紹介する。

定理 3.13 ([40]). 任意の $n \geq 2$ をみたす自然数 n に対して, ℓ_n^∞ は Banach-Stone property を満たさない。

$\Omega_1, \Omega_2, M_1, M_2$ をコンパクトハウスドルフ空間とする。このとき $C(\Omega, C(M))$ は $C(\Omega \times M)$ に等距離同型であることと Banach-Stone の定理より, $C(\Omega_1, C(M_1))$ と $C(\Omega_2, C(M_2))$ が等距離同型であるための必要十分条件は, $\Omega_1 \times M_1$ と $\Omega_2 \times M_2$ が同相であることである。よって次が分かる。

定理 3.14 ([14], [3]). $C([0, 1])$ は Banach-Stone property を満たさない。

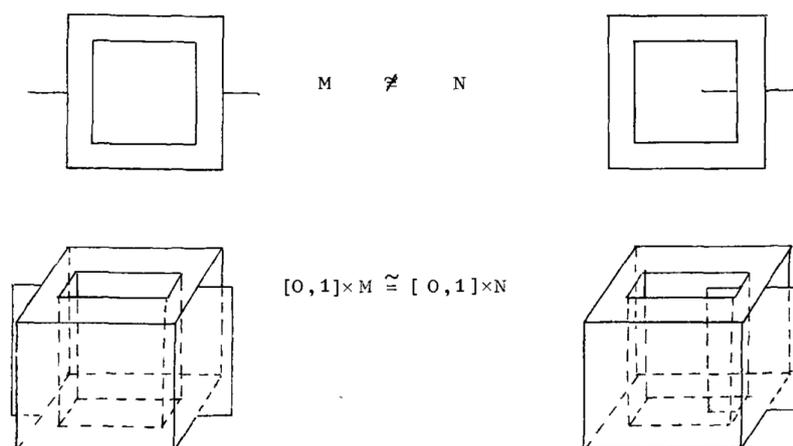


図 6: [3] p143

Proof. M, N を図 6 のように与えられた二つの \mathbb{R}^2 のコンパクト集合とする。 M, N は同相ではない。一方で、 $M \times [0, 1]$ と $N \times [0, 1]$ は同相な位相空間であるので、 $C(M, C([0, 1]))$ と $C(N, C([0, 1]))$ は等距離同型である。

よって、 $C([0, 1])$ は Banach-Stone property を満たさない。 \square

以上より、バナッハ空間 E が、Banach-Stone property をみたすには、かなり強い条件が必要そうである。さらに、その証明についても、バナッハ空間 E の単位球の形や $\text{Mult}(E)$ のような隠れた可換環に着目して、等距離写像の形を決定している。第 2.1 章でも述べた通り、いくつかのバナッハ環上の等距離写像は積の構造を結果として保存するが、そもそも定理の主張や証明の鍵が、可換な部分環に着目することであることを強調しておく。

3.4 バナッハ束

ここでバナッハ束を定義し、ベクトル値連続関数を考えるもう一つのモチベーションを紹介する。

定義 3.15 ([11]). ハウスドルフ空間 Ω に対して、あるハウスドルフ空間 B と、連続で全射な開写像 $\pi : B \rightarrow \Omega$ の組 (B, π) を Ω 上の束という。このとき、任意の $x \in \Omega$ に対して、 $B_x := \pi^{-1}(x)$ を x のファイバーという。連続な cross-section の集合を $\Gamma_\Omega = \{f : \Omega \rightarrow B \mid \pi \circ f = \text{Id}_\Omega, f \text{ は連続}\}$ とおく。 Ω 上のバナッハ束とは、 (B, π) が Ω 上の束であり、各ファイバー B_x がバナッハ空間となり、次を満たすときをいう。

1. $s \in B$ に対して、 $s \mapsto \|s\|$ が連続
2. $\pi(s) = \pi(t)$ である $s, t \in B$ に対して、 $(s, t) \mapsto s + t$ が連続
3. $s \in B, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $s \mapsto \lambda s$ は連続
4. 任意の $x \in \Omega, \{s_i\} \subset B$ s.t. $\|s_i\| \rightarrow 0, \pi(s_i) \rightarrow x \in \Omega$ のとき、 $s_i \rightarrow 0_x$ が成り立つ。ただし 0_x は B_x の零元である。

例 3.16. 任意のバナッハ空間を E とする。このとき $B = \Omega \times E, \pi : B \rightarrow \Omega$ を $\pi(x, a) = x$ とする。すると、 (B, π) は Ω 上のバナッハ束となり、 Γ_Ω は $C(\Omega, E)$ と同一視できる。

定義 3.17 ([11]). バナッハ束 $(B_{\Omega_1}, \pi_{\Omega_1}), (B_{\Omega_2}, \pi_{\Omega_2})$ が *isometrical bundle isomorphic* であるとは二つの同相写像 $\Phi : B_{\Omega_1} \rightarrow B_{\Omega_2}$ と $\psi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ が存在し、次を満たすときをいう。

1. $\pi_{\Omega_2} \circ \Phi = \psi \circ \pi_{\Omega_1}$
2. $\Phi|_{B_x} : B_x \rightarrow B_{\psi(x)}$ は全射線形写像
3. 任意の $b \in B_x$ に対して, $\|\Phi(b)\| = \|b\|$

このとき, $(\Phi, \psi) : (B_{\Omega_1}, \pi_{\Omega_1}) \rightarrow (B_{\Omega_2}, \pi_{\Omega_2})$ は, $\varphi = \psi^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, $h_y = \Phi|_{B_{\varphi(y)}} : B_{\varphi(y)} \rightarrow B_y$ とおき,

$$Tf(y) = \Phi(f(\varphi(y))) = h_y(f(\varphi(y))), \quad f \in \Gamma_{\Omega_1}, y \in \Omega_2$$

とおくと, 全射線形等距離写像 $T : \Gamma_{\Omega_1} \rightarrow \Gamma_{\Omega_2}$ が構成できる。とくに, 例 3.16 で定めた自明束の間の isometrical bundle isomorphism は $C(\Omega, E)$ の間の全射線形等距離写像を誘導する。この逆が成り立つのか? (つまり, 自明束に対して, Γ_{Ω} 間の全射線形等距離写像は, 自明束の間の isometrical bundle isomorphism を導くか?) というのが, $C(\Omega, E)$ の間の全射線形等距離写像の問題である。

4 主結果

$C(\Omega, E)$ やその部分空間の間の全射線形等距離写像や Banach-Stone property の研究は, Jerison や Myers 以来, 現在も盛んに行われている。例えば [1, 4, 5, 6, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 31, 35] などがある。一方, Banach-Stone property をみたくバナッハ空間 E がほかにあるとしたら, それは何らかの意味で積の構造をもち, それが等距離写像と関連をもっていると予想するのは自然であろう。よって, バナッハ環 E に対して, E に値をとる連続関数空間の間の全射複素線形等距離写像を決定してみたい。このような理由から, 筆者は E が単位的 C^* 環 \mathcal{A} である場合に興味がある。

4.1 $C(\Omega, \mathcal{A})$ 上の全射複素線形等距離写像

\mathcal{A} が単位的 C^* 環の場合, $C(\Omega, \mathcal{A})$ もまた単位的 C^* 環であることはすぐにわかる。よって定理 2.6 により, $C(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ から $C(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ の間の単位的全射複素線形等距離写像は Jordan * 同型写像になる。さらに実は, 次の定理が成り立つ。

定理 4.1 ([37]). Jordan * 同型写像 $J : C(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow C(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ に対して, \mathcal{A}_2 の任意の pure state ρ に対してある連続写像 $\varphi_\rho : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ が存在し, また任意の $y \in \Omega_2$ に対して Jordan * 準同型写像 $V_y : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が存在して

$$\pi_\rho(JF(y)) = \pi_\rho(V_y(F(\varphi_\rho(y))))), \quad F \in C(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$$

が成り立つ。ただし, \mathcal{A}_2 の任意の pure state ρ に対して, $\pi_\rho : \mathcal{A}_2 \rightarrow B(H_\rho)$ は \mathcal{A}_2 上の GNS 表現 (既約表現) である。

実は, 上の定理では, φ_ρ と V_y が全射であるとは限らない。例えば $C(\{a\}, C(\{b, c\}))$ と $C(\{a, b\}, C(\{c\}))$ の間に * 同型写像が存在するが, $\{a\}$ と $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ と $\{c\}$ が同相でないことから分かるであろう。ただし, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ が因子環つまり, 任意の $y \in \mathcal{A}_i$ に対して $xy = yx$ が成り立つならば $x = \mathbb{C}1$ が成り立つとき, 次がわかる。

定理 4.2 ([17, 37]). $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ が単位的因子 C^* 環とする。このとき写像 $J : C(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow C(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ が Jordan * 同型写像であるための必要十分条件は, ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ と任意の $y \in \Omega_2$ に対して $y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような Jordan * 同型写像 $V_y : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が存在して

$$JF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in C(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$$

が成り立つことである。

以上より, 次がわかる。定理 3.14 ($C([0, 1])$ は単位的可換 C^* 環である) と比較してほしい。

定理 4.3. 単位的因子 C^* 環は Banach-Stone property をみたく。

4.2 $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ 上の全射複素線形等距離写像

リップシッツ環の場合はどうか。まず初めに、リップシッツ環の定義を述べておく。

定義 4.4. コンパクト距離空間 (X, d) とバナッハ環 $(E, \|\cdot\|_E)$ とする。写像 $F : X \rightarrow E$ に対して、 $L(F) := \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|_E}{d(x, y)}$ と定める。このとき、 $\text{Lip}(X, E) := \{F : X \rightarrow E \mid L(F) < \infty\}$ とする。 $\text{Lip}(X, E)$ は通常関数の演算で多元環となり、 $\|F\|_L = \sup_{x \in X} \|F(x)\|_E + L(F)$ でノルムを定めると、バナッハ環となる。

E が単位的 C^* 環 \mathcal{A} のとき、対合 $*$ を $F^*(x) = [F(x)]^*$ で定義することで、 $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ は単位的バナッハ $*$ 環となる。 $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ におけるノルム $\|\cdot\|_L$ は C^* 条件を満たさないノルムであるため、第 2.3 章で述べたように、双対空間の単位球の端点がかかり複雑である。定理 2.11 を使って $\text{Ext}(\text{Lip}(X, \mathcal{A}))^*$ を決定することは避け、第 2.4 章や、第 3 章で紹介したような古典的な道具や対象に立ち返ってヒントを得た。次が $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ 上の等距離写像に関する結果である。

定理 4.5 ([36]). X_1, X_2 をコンパクト距離空間とし、 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を単位的因子 C^* 環とする。写像 $T : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ が単位的全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は、単位的全射線形等距離写像 $V : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して、

$$TF(y) = V(F(\varphi(y))), \quad F \in \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1), y \in X_2$$

が成り立つことである。

4.2.1 定理 4.5 の証明

証明の鍵は、エルミート作用素と T 集合である。エルミート作用素は、Lumer[29] によって提唱された作用素である。

定義 4.6. E をバナッハ空間とする。写像 $[\cdot, \cdot] : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ が任意の $x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、次を満たすとき、 $[\cdot, \cdot]$ を E 上の *semi-inner product* と呼ぶ。

1. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$
2. $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$
3. $x \neq 0$ ならば $[x, x] > 0$
4. $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$

このとき、有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ がエルミート作用素であるとは、 E の *semi-inner product* $[\cdot, \cdot]_E$ に対して

$$[Tx, x]_E \in \mathbb{R}, \quad x \in E$$

を満たすときである。

まず、Hahn-Banach の定理より、任意のバナッハ空間に対して *semi-inner product* が存在することがわかる。さらにエルミート作用素の定義は、*semi-inner product* の選び方に依存しないことが知られている [29]。

注意 4.7. $T \in \text{Mult}(E)$ が、任意の $p \in \text{Ext}^*(E)$ に対して、 $a_T(p) \in \mathbb{R}$ が成り立つとき、 T はエルミート作用素である。

定理 4.8 ([36]). X をコンパクト距離空間, E をバナッハ空間としたとき, $T : \text{Lip}(X, E) \rightarrow \text{Lip}(X, E)$ がエルミート作用素であるための必要十分条件は, あるエルミート作用素 $\phi : E \rightarrow E$ が存在して,

$$TF(x) = \phi(F(x)), \quad F \in \text{Lip}(X, E)$$

が成り立つことである。

また, semi-inner product と等距離写像の関係について, 次が知られている。

定理 4.9 ([27]). ノルム空間 N_1, N_2 の上の全射複素線形等距離写像 $U : N_1 \rightarrow N_2$ に対して, N_i 上の semi-inner product $[\cdot, \cdot]_i$ が存在して, 任意の $x, y \in N_1$ に対して, $[Ux, Uy]_2 = [x, y]_1$ が成り立つ。

$U : N_1 \rightarrow N_2$ を全射複素線形等距離写像とする。するとこの定理より, T が N_1 上のエルミート作用素のとき, UTU^{-1} は N_2 上のエルミート作用素になる。このようにして, N_1 上のエルミート作用素と N_2 上のエルミート作用素の 1 対 1 対応をつけることで, 全射複素線形等距離写像 U に関する情報を取り出すことができる。Lumer[30] によって, エルミート作用素を用いて等距離写像を決定する研究が始められた。

ここで, 定理 4.5 の証明のポイントを述べる。定理 4.8 を用いると, 任意の $f \in \text{Lip}(X_1)$, $x \in X_2$ に対して, $U(f \otimes 1)(x)$ は単位的 C^* 環 \mathcal{A}_2 の center に属することがわかる。今, \mathcal{A}_2 は因子環であったので, ある $g \in \text{Lip}(X_2)$ が存在して, $T(f \otimes 1) = g \otimes 1$ となる。感覚的な言葉で説明すると, $U(f \otimes 1)(x)$ が \mathcal{A}_2 の可換な元となり, \mathcal{A}_i が因子環であることから $\text{Lip}(X_i)$ と \mathcal{A}_i を「分離」することができる。よって X_1 と X_2 の間の全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が構成できる。実は定理 4.5 の証明も, 可換な部分環に着目することが鍵となっていることを強調したい。

このようにして $\text{Lip}(X)$ と \mathcal{A} を「分離」することができたのだが, 再度 $\text{Lip}(X)$ と \mathcal{A} を結合させ, $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ に還元するとき, T 集合がうまく働く。ただし, ノルム空間上の T 集合では, 言葉が不十分であったため, 半ノルム空間上に対しても考えられるように T 集合の定義を拡張し, (定義はノルム空間の場合と同様である) $\text{Lip}(X, E)$ の T 集合を次のように特徴づけた。

定理 4.10 ([36]). E をバナッハ空間とする。 S が $\text{Lip}(X, E)$ の T 集合であるための必要十分条件は, ある E 上の T 集合 \mathbb{U} と, $\text{Lip}(X, E)$ 上の半ノルム $L(\cdot)$ に関する T 集合 \mathbb{T} が存在して,

$$S = \{F \in \text{Lip}(X, E) \mid F(x) \in \mathbb{U}, \|F(x)\|_E = \|F\|_\infty, F \in \mathbb{T}\}$$

が成り立つ。

定理 4.10 を用いて, 「分離」された $\text{Lip}(X)$ と \mathcal{A} を結合させ, 定理 4.5 を示すことができる。さらに次も独立に示せた。

定理 4.11 ([37]). X_1, X_2 をコンパクト距離空間とし, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を単位的原始 C^* 環とする。写像 $J : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ が Jordan $*$ 同型写像であるための必要十分条件は, 任意の $y \in X_2$ に対して $y \mapsto V_y$ が強位相でリップシッツ連続となる Jordan $*$ 同型写像 $V_y : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ とリップシッツ同型写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して,

$$JF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1)$$

を満たすことである。

定理 4.5 と定理 4.11 と定理 2.6 より, 単位的原始 C^* 環 \mathcal{A}_i に対して, 任意の単位的全射複素線形等距離写像 $T : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ は, Jordan $*$ 同型写像であるがその逆は不成立であることが分かった。バナッハ空間としての等距離同型性は, Jordan 積での $*$ 多元環としての代数構造の同型性よりも強い条件であることが分かった。

References

- [1] H. Al-Halees and R. J. Fleming, *Extreme point methods and Banach-Stone theorem*, J. Aust. Math. Soc., **75** (2003), 125–143.
- [2] S. Banach, *Theory of linear operations*, Translated from the French by F. Jellet. With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga, North Holland Mathematica Library, **38**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. x+237 pp.
- [3] E. Behrends, *M-Structure and the Banach–Stone Theorem*, Lecture Notes in Mathematics, 736 (Springer, Berlin, 1979).
- [4] F. Botelho, R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Extreme points and isometries on vector-valued Lipschitz spaces*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 821–832.
- [5] F. Botelho and J. E. Jamison, *Surjective isometries on spaces of vector valued continuous and Lipschitz functions*, Positivity, **17** (2013), 395–497.
- [6] F. Botelho, J. E. Jamison and V. Zheng, *Isometries of spaces of vector valued Lipschitz functions*, Positivity, **17** (2013), 47–65.
- [7] B. Brosowski and F. Deutsch, *On some geometric properties of suns*, J. Approx. Theory, **10** (1974), 245–267.
- [8] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. , **25** (1964/65), 217–225.
- [9] M. Cambern, *On mapping of spaces of functions with values in a Banach space*, Duke Math. J., **48** (1975), 91–98.
- [10] K. de Leeuw, K. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 694–698.
- [11] J.M.G. Fell and R.S. Doran, *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles*, in: Basic Representation Theory of Groups and Algebras, Vol. 1, in: Pure Appl. Math., vol. 126, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [12] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. x+197 pp. ISBN: 1-58488-040-6.
- [13] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces. Vol. 2. Vector-valued function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 138. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. x+234 pp. ISBN: 978-1-58488-386-9; 1-58488-386-3.
- [14] R. H. Fox, *On a problem of S. Ulam concerning Cartesian products*, Fund. Math., **34** (1947), 278–287.
- [15] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), pp. 994–1015.
- [16] I. Gelfand, and A. Kolmogoroff, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (C. R. Acad. Sci. USSR), 22 (1939) 11–15.
- [17] O. Hatori, K. Kawamura and S. Oi, *Hermitian operators and isometries on injective tensor products of uniform algebras and C^* -algebras*, J. Math. Anal. Appl. **472** (2019), no. 1, 827–841.
- [18] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 151–183.
- [19] M. Hosseini, *Isometries on spaces of absolutely continuous vector-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), no. 1, 386–397.
- [20] M.-H. Hsu and N.-C. Wong, *Isometric embeddings of Banach bundles*, Taiwanese J. Math. **15** (5) (2011) 1969–1978.
- [21] J.-S. Jeang and N.-C. Wong, *On the Banach–Stone problem*, Studia Math., **155** (2003), 95–105.

- [22] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Ann Math., **52** (1950), 309–327.
- [23] A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Linear isometries between spaces of vector-valued Lipschitz functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 1381–1388.
- [24] R. V. Kadison, *Local derivations*, J. Algebra, **130** (1990), 494–509.
- [25] K. Kawamura, *Linear surjective isometries between vector-valued function spaces*, J. Aust. Math. Soc. **100** (2016), no. 3, 349–373.
- [26] K. Kawamura, *A Banach-Stone type theorem and topological dimension*, Topology Proc. **55** (2020), 1–12.
- [27] D. Koehler and P. Rosenthal, *On isometries of normed linear spaces*, Studia Math, **36** (1970), 213–216.
- [28] C.-K. Li and N.-K. Tsing, *Linear preserver problems: a brief introduction and some special techniques*, Linear Algebra Appl., 162 (164) (1992) 217–235.
- [29] G. Lumer, *Semi-inner product of bounded maps into Banach space*, Trans.Amer.Math.Soc., **100** (1961), 26–43.
- [30] G. Lumer, *On the isometries of reflexive Orlicz spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **13** (1963), 99–109.
- [31] M. Mojahedi and S.Fereshteh., *Isometries between completely regular vector-valued function spaces*, Period. Math. Hungar., **84** (2022), no. 2, 361–370.
- [32] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1895. Springer-Verlag, Berlin, 2007. xiv+232 pp.
- [33] M. Myers, *Banach spaces of continuous functions*, Ann. of Math., **49** (1948), 132–140.
- [34] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188.
- [35] S. Oi, *Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued Lipschitz maps*, Linear Multilinear Algebra **68** (2020), no. 6, 1096–1112.
- [36] S. Oi, *Isometries and hermitian operators on spaces of vector-valued Lipschitz maps*, preprint, arXiv:2106.11546.
- [37] S. Oi, *Jordan *-homomorphisms on the spaces of continuous maps taking values in C^* -algebras*, Studia Math, to appear.
- [38] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.
- [39] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 375–481.
- [40] K. Sundaresan, *Spaces of continuous functions into a Banach space*, Studia Math., **48** (1973), 15–22.
- [41] H. Weaver, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore (1999).

“折り目写像のトポロジー”

佐久間一浩（近畿大学理工学部）

1 Introduction

本稿では、「折り目写像の存在問題」

“任意の n 次元閉多様体 M^n が折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n \geq p$) を許容するための必要十分条件を求めよ”

を中心に論じるのが目的である．これは同時に，折り目以外の特異点の消去可能性問題でもある．

ここで，折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n \geq p$) とは， M^n を n 次元閉多様体としたとき，その上の写像 f に，特異点として局所的対応が

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm \dots \pm x_n^2)$$

となる折り目特異点のみが現れる写像のことをいう．なお，折り目写像は，しばしば ‘submersion with folds’ とよばれる ([11]) こともある． $p = 1$ のときは， f は Morse 関数に他ならないので，任意の n 次元閉多様体 M^n は折り目写像 (関数) $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ を許容する (したがって， $p = 1$ の場合の折り目写像の存在問題は自明に解決している．ただし，任意の閉多様体上に Morse 関数が存在することの証明は自明ではない.)

続いて $p = 2$ の場合，「写像の特異点消去可能性問題」は，この分野 (大域的特異点論) ではよく知られているように 1960 年代に Thom-Levine により，完全に決着している：

定理 1.1. M^n を n 次元閉多様体とし， $n \geq 2$ とする．折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は，オイラー標数 $\chi(M^n)$ が偶数となることである．

これは「オイラー標数の偶奇」が折り目以外の特異点消去の唯一の障害であるという主張である． $p \geq 2$ のとき，折り目写像の存在に関して，歴史的に最初に与えられたものを紹介しよう． M^n に位相的に強い条件を課すと存在問題は明解な解がある：

定理 1.2. M^n を安定平行化可能な n 次元閉多様体とする．このとき，折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n \geq p \geq 2$) はいつでも存在する．
特に $n = p$ のとき， M^n が向き付け可能ならば，折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在するための必要十分条件は， M^n が安定平行化可能なことである．

これは，Y. Eliashberg によるもので ([9])，彼自身による折り目写像のホモトピー原理 ([10] 参照) の帰結である．これは，1969 年の John Mather によって提起された折り目写像に関する問題：

“球面のホモトピー群 $\pi_n(S^p)$ ($n \geq p$) の任意のホモトピー類には，折り目写像が含まれるか？”

への肯定的解決として与えられたものである。定理 1.2 で M^n が安定平行化可能とは、 M^n の接束 TM^n と自明な直線束 ε^1 の Whitney 和 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ が自明束になるときをいう。安定平行化可能という条件は、多様体の構造に強い制約を課すため、折り目写像の存在を精密に論じるには、安定平行化可能という条件をどこまで緩められるかが重要な問題となる。実際の Eliashberg の定理は、もう少し広く値域多様体をユークリッド空間に限らず、安定平行化多様体 N^p として、証明されている。もちろん、任意の球面は安定平行化可能なので、その結果から Mather の問題が肯定的に解決する。

さて一般に、ジェネリックな写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ には、特異点としては折り目特異点とカスプ特異点のみが現れるので、定理 1.1 は、平面への写像の「カスプ特異点消去問題」の完全解であり、カスプ消去の障害がオイラー標数の偶奇であることを主張している。ここで、カスプ特異点とは局所的対応が

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^3 + x_1 x_p \pm x_{p+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2)$$

となるものである。この場合、カスプ特異点は離散点として現れることに注意する（詳しくは [1] 参照）。

続いて、オイラー標数の偶奇が関連する折り目写像の非存在に関する結果を紹介する：

定理 1.3. M^n をオイラー標数が奇数であるような n 次元閉多様体とする。ただし、次元 n は必然的に偶数である。もしも折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在するならば、 $p = 1, 3$ あるいは 7 でなければならない。

これは、オイラー標数が奇数であることと (J. F. Adams によって解決された) Hopf 不変量 1 の元の (非) 存在問題の解が結びつくことに依る。つまり、オイラー標数が奇数であると折り目以外の特異点が Hopf 不変量 1 の元の (非) 存在に ‘ひっかかり’、その特異点を消去できないことを意味する。このように、折り目写像の存在を考える限り、値域の次元が $p = 3, 7$ の場合は特別な位置を占めるのである（なお、 $p = 7$ に折り目写像が存在する、折り目以外の特異点が現れないというのはとてつもなく強い制限¹⁾を加えるものであることに注意する。） $p = 3, 7$ のときには、実際にオイラー標数が奇数である M^n に対して、折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ を構成することができるが、 $p = 3$ の場合については後で触れることにする。そこで次節でオイラー標数の偶奇が登場することの意味を「多様体上のベクトル場問題」との関連で明らかにしたい。

2 安定スパンと折り目写像

1960 年頃、Smale-Hirsch により、はめ込み写像のホモトピー原理がはめ込み写像の空間から、それぞれの接束へのファイバーの単射準同型写像の空間への対応 $f \mapsto df$ で定まる写像 d の誘導準同型 d_* が弱ホモトピー同値になる ([5]) という形で証明された。

Y. Eliashberg は、1972 年に折り目写像の 1-jet レベル（すなわち、接束 TM^n から接束 TN^p への準同型束； $J^1(M^n, N^p) = \text{Hom}(TM^n, TN^p)$ ）におけるホモトピー原理を証明した ([9])。定理の正確な記述には、場所をとるため詳しくは、[4] の第 8 章を参照いただきたい。ここで折り目写像

¹⁾実際、[16] では例えば $(n, p) = (8, 7)$ において、折り目写像の非存在についての多くの例に触れている。

のホモトピー原理を大雑把に述べると、折り目写像全体の空間からそれぞれの接束へのファイバーを保つ準同型写像の空間への対応 $f \mapsto df$ で定まる連続写像 d の π_0 間の誘導重同型 d_* が全射であるという形で定式化される。これは、Smale-Hirsch の強い結果とは対照的である。それは、はめ込み写像という本来特異点を持たない写像と、折り目写像という本質的に特異点を有する写像の複雑さの違いに起因するのが理由である。折り目写像のホモトピー原理の使い方は、それぞれの接束へのファイバーを保つ準同型写像の空間が空でないことを示せばいいので、簡単には M^n, N^p を安定平行化可能とすれば適当なベクトル場が存在するために、折り目写像の存在が直ちにしようというのが定理 1.2 の意味するところである。

ところで、折り目写像の存在のための必要条件として、1992 年に佐伯修氏が次の重要な命題 ([18, Proposition 3.1]) を証明した：

命題 2.1. もしも tame な折り目写像 $f : M^n \rightarrow N^p$ が存在するならば、fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \rightarrow TN^p$ が存在する。ここで、 ε^1 は M^n 上の自明な直線束を表す。

さてこの命題と関連して、安藤良文氏は折り目写像の 2-jet レベル ([3] 参照)、

$$J^2(M^n, N^p) = \text{Hom}(TM^n, TN^p) \oplus \text{Hom}(TM^n \circ TM^n, TN^p),$$

におけるホモトピー原理を証明した ([7])。ここで、 $TM^n \circ TM^n$ は接束の対称積を表す。安藤のホモトピー原理を述べるためにいくつか準備をする。

折り目写像 $f : M^n \rightarrow N^p$ の折り目特異点集合 ($p-1$ 次元の M^n の正則部分多様体) $F(f)$ への制限写像 (余次元 1 はめこみ) $f|_{F(f)} : F(f) \rightarrow N^p$ の微分の直線法束が自明のとき、 f を ‘tame’ という²⁾。これは、 $\text{Coker}(df|_{F(f)})$ が自明と言っても同じことである。ただし n が偶数、 p が奇数のとき、オイラー標数 $\chi(M^n)$ が奇数であるような多様体が折り目写像 $f : M^n \rightarrow N^p$ を許容するならば、 f は必ず non-tame であることが簡単に証明できる。安藤氏は、2-jet 束まで精密化して、この命題の逆を考察した：

定理 2.2. $n \geq p \geq 2$ とする。もしも fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \rightarrow TN^p$ が存在するならば、折り目写像 $f : M^n \rightarrow N^p$ が存在する。特に、 $n-p$ が偶数ならば、その逆も成り立つ。

定理の後半部分についてだが、 $w_1(\text{Coker}(df|_{F(f)})) = (n-p)\alpha$ が計算できる。したがって、 $n-p$ が偶数ならば $\text{Coker}(df|_{F(f)})$ が自明になるので、命題 2.1 から逆も成り立つのである。我々は、折り目写像 $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の存在を論じるのが目的であるが、その際に定理 2.2 は重要な役割を果たす。定理 2.2 を応用するために、「多様体の安定スパン」の概念に触れる必要がある。

M^n を n 次元閉多様体とすると、 $\text{span}(M^n)$ を M^n 上の一次独立なベクトル場の最大個数を表し、 M^n のスパン (span) という。同じく、 $\text{span}^0(M^n)$ により、ベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の一次独立な切断の最大個数から 1 引いた数と定義し、 M^n の安定スパン (stable span) という。 M^n が安定平行化可能であることと、 $\text{span}^0(M^n) = n$ は同値である。定義から、直ちに $\dim M^n = n \geq$

²⁾用語の定義は、佐伯氏による。

$\text{span}^0(M^n) \geq \text{span}(M^n)$ を得る．また，古典的に知られているスパンおよび安定スパンに関わる微分トポロジーの結果を述べておく：

- (1) $\text{span}(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) = 0$
- (2) $\text{span}^0(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) \in 2\mathbb{Z}$
- (3) $\text{span}(S^n) = \text{span}(\mathbb{R}P^n) = 2^c + 8d - 1 \quad (n+1 = (2a+1)2^{c+4d}, 0 \leq c \leq 3).$
- (4) $\text{span}^0(S^n) = n, \quad \text{span}(\mathbb{R}P^n) = \text{span}^0(\mathbb{R}P^n)$

(1) はよく知られた Poincaré-Hopf の定理 ([6] の第 8 章参照) そのものである．(2) はその安定版の結果 ([13] 参照) である．(3) は，1961 年の有名な J. F. Adams の解であるが，拙著 [4] にこれに関連する話題 (多元体の存在次元，外積の存在次元，球面の平行化可能性問題，Hopf 不変量 1 の元 (非) の存在，オイラー標数が奇数の多様体から \mathbb{R}^p への折り目写像が存在する次元 p の制約，等) とその証明の概説があるので，参照されたい．また，安定スパンに関して，次が成り立つことが容易に確かめられる：

$$\exists \text{ fiberwise epimorphism } TM^n \oplus \varepsilon^1 \rightarrow \varepsilon^p \iff \text{span}^0(M^n) \geq p - 1.$$

したがって，定理 2.2 は安定スパンの言葉で次のように言い換えられる：

定理 2.3. $n \geq p \geq 2$ とする．もしも $\text{span}^0(M^n) \geq p - 1$ ならば，折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在する．特に， $n - p$ が偶数ならば，その逆も成り立つ．

折り目写像の問題はベクトル場の問題としてかなりの部分解くことができる．例えば， $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ をジェネリック写像とすると，その特異点集合 $S(f)$ は一次元部分多様体なので， $\text{Coker}(df|_{S(f)})$ は自明束である．したがって，折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ の存在のための必要十分条件は， $\text{span}^0(M^n) \geq 1$ が成り立つことである．これは上の (2) にあるように， $\chi(M^n) \in 2\mathbb{Z}$ であり，冒頭で述べた定理 1.1 と合致する³⁾．

さてそこで， $\text{span}^0(M^n) \geq p - 1$ の解き方を簡単に述べるが，これはホモトピー論の範疇の問題として解くことができる．まずは， BO を分類空間 ([1]) とするとき，連続写像 $\tau: M^n \rightarrow BO(n+1)$ をベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の分類写像とするならば，連続写像 $M^n \rightarrow BO(n-p+1)$ への持ち上げを見出せばよい．ここで，射影 $\pi: BO(n-p+1) \rightarrow BO(n+1)$ のファイバーは Stiefel 多様体 $V_p(\mathbb{R}^{n+1})$ (\mathbb{R}^{n+1} における正規直交 p 枠全体の空間) であることに注意する．ファイバーのホモトピー群 $\pi_i(V_p(\mathbb{R}^{n+1}))$ は，よく知られているので Postnikov tower による議論に障害理論を適用して，持ち上げが存在するための障害類が計算されるというのが strategy となる ([22] 参照)．一般に， p の値が大きくなると $\text{span}^0(M^n) \geq p - 1$ をホモトピー論的に計算するのは，primary obstruction に加えて，secondary obstruction なども存在するので難しくなる．なお，ベクトル場の問題 $\text{span}^0(M^n) \geq 2$ は $n \geq 3$ の奇数の場合は primary obstruction のみ⁴⁾ で決まるので比較的易

³⁾この事実は，本来 H. Levine により，intrinsic derivative による込み入った計算により示されるが，安藤のホモトピー原理によりベクトル場の問題の帰結として直ちにわかる．

⁴⁾実は，これがカスプの Thom 多項式と一致する．

しくて、これを求めることにより、定理 3.1 および定理 3.2 が得られる。\$n = 4\$ かつ \$M^4\$ が向き付け可能な場合は、\$\text{span}^0(M^n) \geq 2\$ である必要十分条件は、ある特性的ホモロジー類 \$x \in H_2(M^4; \mathbb{Z})\$ が存在して、\$x \cdot x = \langle p_1, [M^4] \rangle\$ を満たさなければならないので、定理 3.3 が得られるのである。

ちなみに、\$\text{span}^0(M^4) \geq 3\$ となるための必要十分条件が計算することができて (詳細は [17] 参照) 、

定理 2.4. \$M^4\$ を 4 次元閉多様体とすると、折り目写像 \$f: M^4 \to \mathbb{R}^4\$ が存在するための必要十分条件は、\$w_2 = 0\$ かつ \$p_1 + (\beta w_1)^2 = 0\$ を満たすことである。ここで、\$\beta\$ は完全系列 \$0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{2} \mathcal{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0\$ に対応する Bockstein 作用素である。

定理 2.4 において、\$w_2\$ が primary obstruction (カスプの Thom 多項式) であり、\$p_1 + (\beta w_1)^2\$ が secondary obstruction である。前節で述べたように、例えば \$\mathbb{R}P^4\$ の偶数個の連結和 \$\#^{2k} \mathbb{R}P^4\$ に関して、どちらの障害類も消えるので、折り目写像 \$f: \#^{2k} \mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}^3\$ が存在することが従う。なお、ベクトル場問題を解くのが少し難しくなるが、折り目写像 \$f: M^n \to \mathbb{R}^n\$ (\$n = 5, 6, 7\$) の必要十分条件の決定が [17] において成されている。

安定スパンの性質 (3) と (4) から、実射影空間上の折り目写像について、次のことが直ちにしたがう：

ベクトル場問題 \$\text{span}^0(M^n) \geq p - 1\$ が仮に解けても、\$n - p\$ が奇数のときは、tame な折り目写像の (非) 存在が分かるのみで、実際存在しないときに non-tame な折り目写像の (非) 存在については分からないことが多い。個別の閉多様体に関して、具体的に折り目写像を構成しようとしても、non-tame なものを構成するのは、一般に難しい。典型的なのが本節で述べた二つの予想である。例えば、次のような問題も案外難しいかもしれない：

折り目写像 \$f: \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3\$ を具体的に構成せよ。\$\chi(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = 1\$ なので、存在するとしても \$f\$ は必ず non-tame であることに注意する。

3 \$p = 3\$ の折り目写像

本節では、\$p = 3\$ の場合、すなわち \$n \geq 3\$ としてジェネリックな写像 \$f: M^n \to \mathbb{R}^3\$ を考える。このとき、\$f\$ には次の三つの型の特異点が一般に現れる：

- (1) \$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2)\$
- (2) \$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, x_3^3 + x_1 x_2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_n^2)\$
- (3) \$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, x_3^4 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_n^2)\$

(1) は折り目特異点 (2 次元)、(2) はカスプ特異点 (1 次元)、(3) は燕の尾特異点 (離散点) とよばれる。カッコ内は部分多様体として次元を表す。特異点集合 \$S(f) = \{x \in M^n; \text{rank } df_x < 3\}\$ の位相形から、燕の尾特異点は偶数個であることがわかる。\$f\$ の折り目特異点集合を \$F(f)\$、カスプ特異点集合を \$C(f)\$、燕の尾特異点集合を \$SW(f)\$ とすると、特異点集合の stratification が位相的閉包を用いて

$$S(f) = \overline{F(f)} = F(f) \cup C(f) \cup SW(f), \quad \overline{C(f)} = C(f) \cup SW(f)$$

で与えられる．さらにこのとき，特異点の Thom 多項式（定義と計算例について [3] の第 II 部参照）が

$$[S(f)]_2^* = w_{n-2}(M^n) \in H^{n-2}(M^n; \mathbb{Z}_2), \quad [\overline{C(f)}]_2^* = w_{n-1}(M^n) \in H^{n-1}(M^n; \mathbb{Z}_2)$$

となること R. Thom によって計算されている．ここで， $[X]_2$ は X の mod 2 ホモロジー類を表し，上付きの $*$ はポアンカレ双対を， $w_i \in H^i(M^n; \mathbb{Z}_2)$ は M^n の i 次 Stiefel-Whitney 類を表す ([2])．

$n = 3$ で， M^3 が向き付け可能なときは，定理 1.2 にもあるように，Eliashberg ([8]) によっていつでも折り目写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在することが証明されている．それでは， M^3 が必ずしも向き付け可能とは限らない，一般の場合はどうか問題となるが，次が知られている ([22]):

定理 3.1. M^3 を 3 次元閉多様体とする．折り目写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は， $w_2(M^3) = 0$ となることである．

なお，3 次元という特殊性により， M^3 が向き付け可能なならば M^3 は平行化可能であることに注意する．したがって，定理 3.1 は，定理 1.2 の $(n, p) = (3, 3)$ で定義域多様体が向き付け可能な場合の結果を含んでいる．

そこで， M^3 が向き付け不可能な場合を考える．例えば $M^3 = S^1 \times \mathbb{R}P^2$ とするとき，定理 1.1 より， $g: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ には必ず消去不可能なカスプ特異点が現れる．そこで，合成写像

$$S^1 \times \mathbb{R}P^2 \xrightarrow{\text{id} \times g} S^1 \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

を f とすると， $f: S^1 \times \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ にはカスプ特異点の 1 次元 locus が現れて， $[\overline{C(f)}]_2^* = w_2(S^1 \times \mathbb{R}P^2) \neq 0$ なので，このカスプ特異点は消去できない．ただし，二番目の写像は自然な埋め込みである．このように定理 3.1 は，カスプの Thom 多項式が折り目写像が存在するための唯一の障害であることを示している．なお，この定理 3.1 は次のように一般化される ([22]):

定理 3.2. M^n を n 次元閉多様体とする．ただし， $n \geq 3$ を奇数とする．折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は， $w_{n-1}(M^n) = 0$ となることである．

$n \geq 3$ を奇数とすると，上と同様にカスプの Thom 多項式が折り目写像が存在するための唯一の障害であることを示している． n が奇数なので，定理 [?] より，これはベクトル場の問題 $\text{span}^0(M^n) \geq 2$ を解くことに得られる結果である．

では，当然起こる問題として

「 n が偶数の場合はどうなるであろうか？」

実は，この場合は奇数のときに比べてずっと難しい．その最も n が小さい場合，すなわち $n = 4$ の場合をこれから述べる．折り目写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するための必要条件は，もちろんカスプの Thom 多項式 $w_3 \in H^3(M^4; \mathbb{Z}_2)$ が消えることが含まれるが， $n = 4$ の場合にこれは十分条件にはなり得ない．折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の存在問題は， $n - p$ が偶数の場合はベクトル場問題と同じである（からホモトピー論として解き易い）が， $n - p$ が奇数の場合はベクトル場問題からは折り目写像の存在は従うが，その逆は必ずしも成立しない，という難しさがある．つまり，折り目写像の存在問題は，次元対 (n, p) の選び方によって様相が異なるのである．詳しくは，次節で論じる多様体の（安定）スパンの議論を参照されたい．

さてここで, $(n, p) = (4, 3)$ で, M^4 が向き付け可能な場合の佐伯氏による解 ([19] 参照) を述べよう:

定理 3.3. M^4 を向き付けられた 4 次元閉多様体とする. 折り目写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は,

$$\exists x \in H^2(M^4; \mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad x^2 = p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Z}) \quad (*)$$

を満たすことである.

ここで, $p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Z})$ は M^4 の第 1 次 Pontrjagin 類 ([2] 参照) を表す. ジェネリック写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が与えられたとき, カスプの Thom 多項式は $w_3 \in H^3(M^4; \mathbb{Z}_2)$ であるが, 「任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して, $w_3 = 0$ である」ことを H. Whitney が 1940 年代に証明した⁵⁾. したがって, カスプの Thom 多項式は消えているが, 定理 3.3 は, カスプの Thom 多項式以外の secondary obstruction が (4 次のコホモロジー類として) 存在することを主張している. 実際, $b_2(M^4) = 1, 2$ であるような向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して, 折り目写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在しない, e.g. $M^4 = \mathbb{C}P^2$ または $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$, ことがわかる. ただし, ここで注意して欲しいのが $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上には, 折り目写像 $f: \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在する (具体的に構成するのは容易) ので, 定理 3.3 で向きの入れ方は, 本質的である. このことから, 大事な系が得られる:

系 3.4. M^4 を任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体とする. このとき, $N^4 = M^4 \sharp S^2 \times S^2$ または $M^4 \sharp \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ に対して, 折り目写像 $f: N^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ はいつでも存在する.

これは, 上のような N^4 に対しては, 定理 3.3 の方程式 (*) を満たす 2 次コホモロジー類 x が必ず見つかるからである. なお, 佐伯氏の論文 [19] には, \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容する M^4 の交叉形式による特徴づけが証明されている.

こうして見てくると, 自然に次の問いが浮かぶであろう:

M^4 が向き付け不可能な場合はどうか?

具体的な折り目写像の構成が [18, Example 3.11] において, 与えられた. M^4 を $\mathbb{R}P^2$ 上の非自明な $\mathbb{R}P^2$ 束の全空間とすると, 折り目写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ がつくられ, その特異点集合は, $S(f) = S^2 \cup \mathbb{R}P^2$ である. ここで, ファイバー束はオイラー標数に関して, 乗法性をもつので, $\chi(M^4) = \chi(\mathbb{R}P^2) \cdot \chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ であることに注意する. そこで構成されている折り目写像は, 必然的に non-tame (定義は次節参照) となることにも注意する.

ところで, 4 次元の無向コボルディム群について, $\mathfrak{N}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ が知られているが, それぞれの生成元は, コボルディム類 $[\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2]$, $[\mathbb{R}P^4]$ である ([2]). すぐ上で述べた M^4 は $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ にコボルダントである. では, $\mathbb{R}P^4$ はどうだろうか? もう少し正確に問題を述べると, 「 $\mathbb{R}P^4$ は \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容するだろうか?」となる.

さて, [16, Theorem 1.3] において, 次のことが証明された (ただし, ここで必要な形に限定して引用):

⁵⁾この事実は, 写像 $f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ のカスプ特異点の Thom 多項式が消えていることと直接に結び付くことに注意するのは, 4 次元多様体論的に価値がある.

定理 3.5. M^n を n 次元閉多様体とし, 折り目写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ が存在するとする. このとき, ある $x \in H^2(M^n; \mathcal{Z})$ が存在して, $x^2 = p_1 \in H^4(M^n; \mathcal{Z})$ が mod 4-torsion で成り立つ.

ここで, \mathcal{Z} は局所係数を表し, M^n が向き付け可能ならば, $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$ である. コホモロジー類の等式が折り目写像存在のための必要条件だという主張である.

そこで, $\mathbb{R}P^4$ のときに, この必要条件が成り立つか否かを確認しよう. まずは, $\mathbb{R}P^4$ は向き付け不可能なので, $H^4(\mathbb{R}P^4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ であるから, $p_1 = w_4$ を得る. なぜなら, $\mathbb{R}P^4$ の全 Stiefel-Whitney 類は,

$$w(\mathbb{R}P^4) = (1 + \alpha)^5 = 1 + \alpha + \alpha^4 \quad (**)$$

なので ([2]), $p_1 = \alpha^4 = \alpha^2 \smile \alpha^2$ を得る (ただし, $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ は生成元である). したがって, $x = \alpha^2$ とすれば, 必要条件は満たされることが分かった.

いまのところ, 折り目写像 $f: \mathbb{R}P^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するための障害は見当たらない. 筆者は次のように予想している:

【予想】“ $\mathbb{R}P^4$ は \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容するだろう!”

なお, [17] で (ベクトル場問題の解の系として) 証明されているように, $\mathbb{R}P^4 \sharp \mathbb{R}P^4$ は \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容する (もっと一般に, $\mathbb{R}P^4$ の偶数個の連結和は \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容する). 現在までのところ, \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容しない向き付け不可能な 4 次元閉多様体は知られていない. なお, 何気ないことではあるが, (***) より, $w_3 = 0$ だからカスプの Thom 多項式は消えていることにも注意. したがって, 次の予想はもっともらしい:

【予想】“任意の向き付け不可能な 4 次元閉多様体 M^4 は \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容するだろう!”

ここで述べた二つの予想は (筆者の知る限り) おそらく未解決である.

4 6 次元閉多様体上の折り目写像

前節で, 向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体 M^{2m} が \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容するか否かが問題であり, $n = 2$ の場合は完全解が与えられているのを見た. そこで, 本節では $n = 3$ の場合, すなわち 6 次元の場合を考察するのを目的とする⁶⁾.

最初に 6 次元特有の結果に言及しておく. それは, “向き付けられた六次元コボルズム群は自明群である” という事実である. 言い換えれば, 任意の向き付け可能な 6 次元閉多様体 M^6 は零コボルダントである. したがって, 特にそのオイラー標数 $\chi(M^6)$ は偶数であるから, § 2 より, $\text{span}^0(M^6) \geq 1$ が成り立つことに注意する. あとは取り合えず $\text{span}^0(M^6) \geq 2$ が成り立つ条件を考察すればよい.

そこで, 簡単な予備的考察を行う. 例えば, X^5 を任意の向き付け可能な 5 次元閉多様体とする. $\text{span}^0(X^5) \geq 1$ に注意する. このとき, $M^6 = S^1 \times X^5$ とおくと,

$$\text{span}^0(M^6) = \text{span}^0(S^1) + \text{span}^0(X^5) \geq 2$$

が成り立つので, 折り目写像 $f: M^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在することになる. N^4 を任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体とするとき, $M^6 = S^2 \times N^4$ とおくと, 同様に折り目写像 $f: M^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するこ

⁶⁾ 8次元以上は将来の研究課題であるが, 案外六次元における方法論と平行の議論で解決するかもしれない.

となる。直積構造をもたない場合、例えば3次元複素射影空間 CP^3 に関して、 $\text{span}^0(CP^3) = 3$ が知られている ([14]) ので、やはり折り目写像 $f: CP^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在することになる。したがって、ここまで \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容しない向き付け可能な6次元閉多様体は存在しない。

ここで、一見すると我々の問題設定とは無関係に思える結果に言及する。定理 3.3 の直後でも触れたように、「任意の向き付け可能な4次元閉多様体 M^4 に対して、 $w_3 = 0$ である」ことを H. Whitney が 1940 年代に証明したがこの結果は 1960 年に W. S. Massey により、次の形で一般化された ([15]): 「任意の向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体 M^{2n} に対して、 $w_{2n-1} = 0$ が成り立つ」これは奇数次元では一般に成立しないことに注意する。これを我々の問題設定に焼き直すと次のようになる⁷⁾: 任意の向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体 M^{2n} が与えられたとき、任意のジェネリック写像 $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^3$ のカスプの Thom 多項式は恒等的に消えている、すなわち

$$[\overline{C(f)}]_2^* = w_{2n-1} = 0.$$

したがって、任意のジェネリック写像 $f: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^3$ のカスプ特異点 (一次元 locus) の primary obstruction は消えているので、それが消去可能か否かは直ちにはわからない。ただし、前節で見たように $2n = 4$ では、4次元多様体の交叉形式が $b_2 = 1, 2$ のとき二次障害類となるのを見た。つまり、4次元の場合は特異点の情報が例外的に深いことを意味する。

実は、 $n = 6$ では次のことが証明できる：

定理 4.1. M^6 を向き付け可能な6次元閉多様体とする。任意のジェネリック写像 $f: M^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は折り目とカスプのみを特異点にもつものとしてよいが、カスプ特異点はいつでも消去できる、すなわち折り目写像 $g: M^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ がいつでも存在する。

証明には、Ando-Elishberg のホモトピー原理を用いて成される。まだ、きちんと詰めていないが、その方法論で $2n \geq 8$ 以上の場合も証明できると思われる。

参考文献

- [1] 『特異点のころえ』佐久間一浩著 (日本評論社), 2019 年 5 月。
- [2] 『特性類講義』J. W. ミルナー & J. D. スタシェフ共著 (佐伯修/佐久間一浩共訳), シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001 年 11 月。
- [3] 『幾何学と特異点』泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩著 (共立出版), 2001 年 5 月。
- [4] 『数 “8” の神秘』佐久間一浩著 (日本評論社), 2013 年 8 月。
- [5] 『埋め込みとはめ込み』足立正久著 (岩波書店), 1984 年 12 月。
- [6] 『微分位相幾何学』田村一郎著 (岩波オンデマンドブックス), 2015 年 7 月。
- [7] Y. Ando, *Existence theorems of fold-maps*, Japan. J. Math. (N.S.) **30** (2004), 29–73.
- [8] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **4** (1970), 1119–1134.

⁷⁾Massey の定理は、私が修士の院生頃に別の研究で初めて読んだ。 n が偶数のときなぜ $w_{n-1} = 0$ が成り立つことの背景に何があるのか当時は不思議だったが、実はカスプの Thom 多項式なのだと気付いて、Thom 多項式の定義の普遍性に改めて触れた気がした。

- [9] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.
- [10] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h -principle*, Grad Studies in Math. vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002..
- [11] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.
- [12] B. Kalmar, *Fold maps on low dimensional manifolds*, preprint (2021).
- [13] J. Korbaš and P. Zwengrowski, *The vector field problem: a survey with emphasis on specific manifolds*, Expos. Math. **12** (1994), 3–30.
- [14] U. Koschorke, *Vector fields and other vector bundle isomorphisms—A singularity approach*, Lecture Notes in Math. **847** (Springer, Berlin, 1981).
- [15] W. S. Massey, *On the Stiefel Whitney classes of a manifold*, Amer. J. Math. **10**(1960), 92–102.
- [16] T. Ohmoto, O. Saeki and K. Sakuma, *Self-intersection classes for singularities and its applications to fold maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3825–3838.
- [17] R. Sadykov, O. Saeki and K. Sakuma, *Obstruction to the existense of fold maps*, J. London Math. Soc. **81** (2010), 338–354.
- [18] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–565.
- [19] O. Saeki, *Fold maps on 4-manifolds*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 627–647.
- [20] O. Saeki, *Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 1854, 2004.
- [21] O. Saeki and K. Sakuma, *Stable maps between 4-manifolds and elimination of their singularities*, J. London Math. Soc. **59**(1999), 1117–1133.
- [22] K. Sakuma, *Existence problem for fold maps*, Real and Complex Singularities, pp. 342–387, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007.
- [23] K. Sakuma, *Fold dimension set of manifolds*, JP Journal of Geometry and Topology **18** (2015), 37–64.

複素3次元空間の座標の絶対値で理解する 葉層とMilnor束のトポロジー

森 淳秀 (大阪歯大)*

1. 序に代えて：Reeb葉層のこと

球体の直積 $B^p \times B^q$ において $B^p \times \{y\}$ をプラーク¹と呼ぶ。 $B^p \times B^q$ のコピーを貼り合わせて多様体をつくる時、全てのプラークどうしが貼り合わされて p 次元多様体になるようにする制約を $(p+q)$ 次元多様体上の余次元 q の葉層構造という。

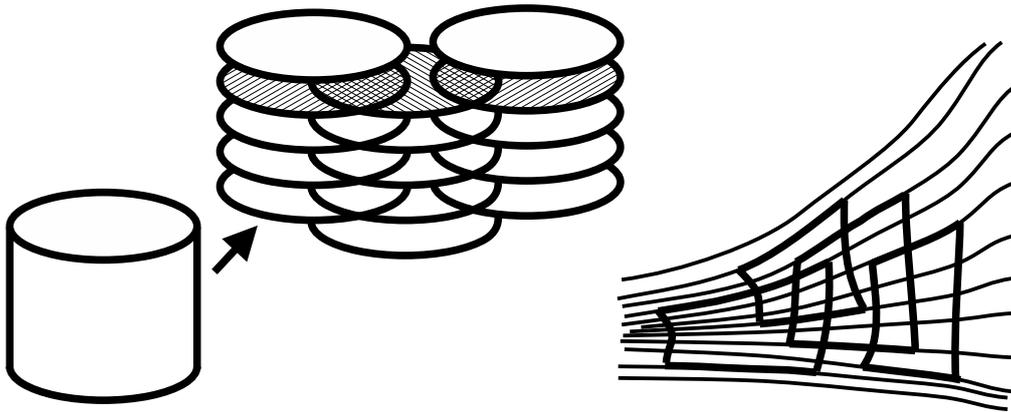


図 1: 球体の積 ($p=2, q=1$) のプラークへの分解, 貼り合わせ (斜線部), 葉層

2つのチャート $B^p \times B^q$ と $B^p \times B^q$ の共通部分において $(x, y) \in B^p \times B^q$ に対応する点は $(f(x, y), g(y)) \in B^p \times B^q$ と書かれる。プラークを貼り合わせた p 次元多様体の連結成分を葉と呼び、葉を点とする等化空間を葉空間と呼ぶ。葉空間は一般に Hausdorff 性を持たないが、上の $g(y)$ が C^r 級であれば C^r -微分構造のアトラスを持つ。葉空間が通常の C^r -多様体になる例は、葉をファイバーとするファイバー束である。ファイバー束は底空間の方向だけを局所化した、直積の拡張であったが、葉層は更にファイバー方向にも局所化した拡張である。微分トポロジーの起源を Poincaré による微分方程式の解の定性的研究とすれば、葉層は当初から研究されてきた固有の課題である。

さて Reeb 葉層とは、3次元球面 S^3 上に以下のように構成される余次元 1 の C^∞ -葉層の位相的な同値類のことである。ここで S^3 は \mathbb{C}^2 の単位超球面である：

$$S^3 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 = t, \quad |z_2|^2 = 1-t, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

関数 $t = |z_1|^2$ を用いて、 S^3 に単射ではめ込まれた次の曲面群を考える。

$$R_\theta^\pm := \left\{ t < \frac{1}{2}, \quad \arg z_2 = \theta \mp \exp\left(\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{t}\right) \right\} \subset S^3 \quad (\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

$$E_{\theta'}^\pm := \left\{ t > \frac{1}{2}, \quad \arg z_1 = \theta' \pm \exp\left(\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{1-t}\right) \right\} \subset S^3 \quad (\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

* 573-1121 大阪府枚方市楠葉花園町 8-1 email: mori-a@cc.osaka-dent.ac.jp

¹ プラークは平たい素材とくに額のこと。医学では歯垢や動脈硬化巣などのバイオフィルムのこと。

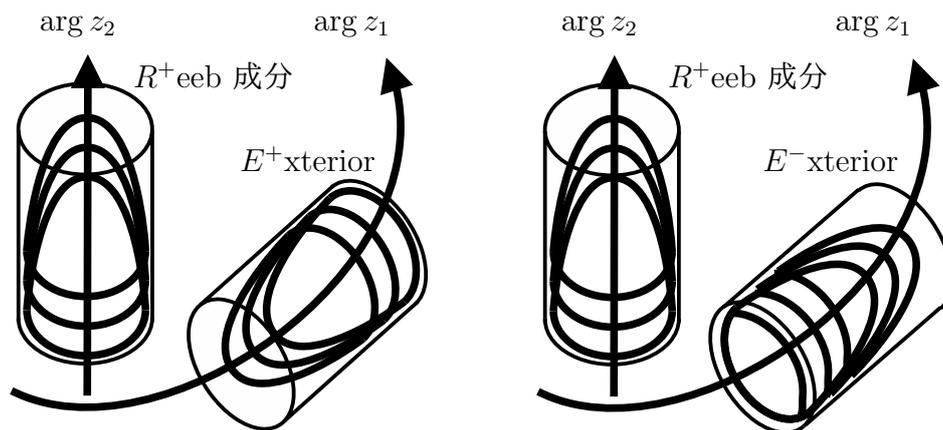


図 2: 左が正しい向きの Reeb 葉層であり, 向きを保つ同相写像では右にうつらない. 左でも右でも見やすいようにトーラス葉 $t = \frac{1}{2}$ は分けて書いたが, 同一の葉である.

$R_\theta^\pm (\forall \theta)$ の正負どちらかと $E_{\theta'}^\pm (\forall \theta')$ の正負どちらかとトーラス $T := \{t = \frac{1}{2}\} \subset S^3$ を葉とする葉層が Reeb 葉層である. 多様体と葉には向きを考慮することが多く, その場合は R と E の符号が同じか異なるかで出来上がる葉層を区別して前者を Reeb 葉層と呼ぶ. 葉空間は θ と θ' が動く 2 つの円周と, T の 1 点集合の和である. 葉 T には他の葉が巻き付き, 点 T の近傍は葉空間全体なので, 葉空間は non-Hausdorff である. 低次元トポロジーの議論により, S^3 の任意の余次元 1 葉層はトーラス葉を持つことが分かり², 葉空間は non-Hausdorff である (Novikov の閉葉定理 [24]). こうしてみると Reeb 葉層は S^3 の最も基本的な葉層である. Reeb 葉層を上 $B^2 \times B^1$ の形のチャートで被覆するとき, 貼り合わせは C^∞ 級にできるが, C^ω 級にはできない. 実際, T の近傍を $\arg z_1 = 0$ で切って $\arg z_2$ を 0 から 2π まで動かすと, R_θ 上の点は T に近づき, $E_{\theta'}$ 上の点は元の点に戻る. このように定義域の半分だけで自明な写像は C^ω 級ではない.

曲面による余次元 1 葉層は局所的には 2 変数 1 未知関数 1 階 2 連立の偏微分方程式系の解である. 幾何学的には $\mathbb{R}^5 (\ni (x, y, z, p, q))$ の接触形式 $\alpha = dz - pdx - qdy$ に対して $\alpha|_M \neq 0$, $\alpha \wedge d\alpha|_M = 0$ となる 3 次元部分多様体 M に $\ker \alpha$ が定める葉層である³. Reeb 葉層は S^3 をトーラス葉で切り分けて構成するので, 切り貼りの産物とみなされることが多かったが, 筆者 [19] は M を埋め込まれた S^3 とする大域的微分方程式を構成したので, そうとばかりも言えなくなってきた. Novikov の閉葉定理から C^ω 級の構成は不可能であり, C^∞ 級も困難と思われたが, 本稿で述べる \mathbb{C}^3 の座標の絶対値の利用により C^∞ 級の構成が自然にできて, Reeb 葉層はその解となる. これと同時に平面分布として Reeb 葉層とホモトピックな接触構造を持つ $(\mathbb{R}^5, \ker \alpha)$ の接触部分多様体の対も得られて, 正のほうはタイト, 負のほうは過旋で, それらの適当な接触イソトピー変形の共通の極限がその Reeb 葉層になっているという絵ができる⁴.

² 4 次元以上の多様体の余次元 1 の C^∞ -葉層はどの葉も稠密である C^∞ -葉層に改変できるので, これは低次元に特有の現象である (Meigniez [14]). 低次元に特有の現象はシンプレクティック/接触構造のトポロジーに受け継がれることが多く, 葉にそのような構造を入れるのは自然である (三松 [16]).

³ 未知関数を $z = f(x, y)$ として, 公式 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ を $\ker \alpha$ と表す ($p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$) とき, $(\mathbb{R}^5, \ker \alpha)$ は \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への関数の 1-ジェット空間 $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ であり, $\alpha|_M \neq 0$, $\alpha \wedge d\alpha|_M = 0$ のとき, $\ker(\alpha)$ は微分方程式系 M 上で非特異可積分となり, 解による葉層を定める (Frobenius の定理).

⁴ この収束は正負の Hopf バンドを介した収束である. 一般にオープンブックを介した接触構造の葉層への収束に限ればタイトか否かが相対 Thurston 不等式の成否に遺伝する (Bennequin の補題 [17]). 相対 Thurston 不等式は正の向きの Reeb 葉層について成り立ち, 負の向きのものでは成り立たない.

2. 面積速度と非可積分性

\mathbb{C}^3 の第 k 座標を極表示して $\rho_k \exp(i\psi_k)$ とする ($k = 1, 2, 3$). 単位 $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ から 2-単体 $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ への射影 $\text{pr} : S^5 \rightarrow \Delta$ を

$$\text{pr}(\rho_1 \exp(i\psi_1), \rho_2 \exp(i\psi_2), \rho_3 \exp(i\psi_3)) = (\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) \in \Delta$$

によって定める. P を Δ の内部の点とすると, ファイバー $\text{pr}^{-1}(P)$ は標準的な座標 (ψ_1, ψ_2, ψ_3) を持つ 3次元トーラス $T^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ である. Δ を含む平面上の有理点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ ($q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}, q_1 + q_2 + q_3 = 1$) とパラメータ $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ に対して,

$$\Sigma(P, Q, \theta) := \{(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid q_1\psi_1 + q_2\psi_2 + q_3\psi_3 = \theta\} \subset \text{pr}^{-1}(P) = T^3$$

は 2次元トーラスである. S^5 の標準接触形式を $\lambda := \rho_1^2 d\psi_1 + \rho_2^2 d\psi_2 + \rho_3^2 d\psi_3$ として, $P_t(p_1, p_2, p_3)$ を Δ の内部の動点, $\theta = \theta_t$ を動角とすると, 次が成り立つ.

補題 (M[19], 古川遼). トーラス族 $\{\Sigma(P_t, Q, \theta_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ を写像 $s : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow S^5$ とみなしたときの引き戻し $s^*\lambda$ の非可積分性 $s^*(\lambda \wedge d\lambda)/d\text{vol}$ は, 動点 P_t の定点 Q を中心とする面積速度の負の定数倍である. とくに, $s(T^2 \times \mathbb{R})$ が $(S^5, \ker \lambda)$ の正の接触部分多様体であるとき, 半直線 QP_t は Δ を含む平面上で時計回りに回転する.

証明. 面積速度は Δ の法ベクトルのスカラー倍であるから, 定点 Q の位置ベクトルとの内積 $I(t)$ が次のように非可積分性 $N(t)$ に比例することより補題が従う.

$$I(t) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ \dot{p}_1 - 0 & \dot{p}_2 - 0 & \dot{p}_3 - 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \dot{p}_1 & \dot{p}_2 & \dot{p}_3 \end{vmatrix}$$

$$N(t) = \frac{(p_1 d\psi_1 + p_2 d\psi_2 + p_3 d\psi_3) \wedge dt \wedge (\dot{p}_1 d\psi_1 + \dot{p}_2 d\psi_2 + \dot{p}_3 d\psi_3)}{dt \wedge \{d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\psi_3 / (q_1 d\psi_1 + q_2 d\psi_2 + q_3 d\psi_3)\}} = -2I(t) \quad \square$$

Reeb 葉層の構成. Δ の重心を Q として, $P_0 = (0, 1, 0)$ と $P_1 = (1, 0, 0)$ を結ぶ P_t を, 半直線 QP_t が時計回りに回転するようにとる. このとき $s(T^2 \times [0, 1]) \cong S^3$ であり, $\{\rho_3 = 0\} \subset S^5$ と同じタイトな接触構造を持つ. P_0 から P_1 へ向かう動点の Q を中心とする面積速度が常に 0 となる例として, P_t が線分 P_0Q をこの向きに進み, 続けて線分 QP_0 をこの向きに進むことが考えられる. ただし $s(T^2 \times [0, 1])$ が C^∞ 級となるために, 折れ点 Q では P_t の速度が 0 に滑らかに接し, その瞬間の θ_t の微分は 0 でない.

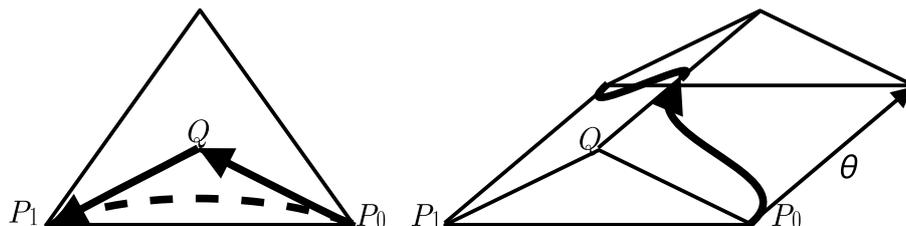


図 3: 点線は正のタイト接触構造, 実線は Reeb 葉層 (θ 方向も必要)

このとき λ の $s(T^2 \times [0, 1])$ への制限は Reeb 葉層を定める. この新しい描像ではタイトな接触構造の変形の極限として Reeb 葉層が得られることや, Reeb 葉層が C^ω 級でないことが一目瞭然となる. また $(S^5, \ker \lambda)$ から任意の 1 点を除いたものと $(\mathbb{R}^5, \ker \alpha)$ の間の接触同相写像は Geiges の教科書 [4] に書かれているので, 我々は Reeb 葉層を解を持つ 2 変数 1 階偏微分方程式系を S^3 の C^∞ -埋め込みとして構成したことになる.

Lutz 管と過旋円盤. 上の Reeb 葉層の構成では, Δ の底辺を面積速度が負のまま変形して重心 Q を通る折れ線にしたが, そのまま Q を超えて変形すると, Q を中心とする面積速度は正になる. 負のタイトな接触構造と正のタイトな接触構造は有向平面場としてホモトピックではないので, 今得られた負の接触構造は過旋である. 3次元接触構造の場合, 過旋接触構造とは Lutz 管を持つ接触構造であり, Lutz 管のメリディアン円盤として過旋円盤が得られる. 我々の描像ではこれらがはっきり見える.

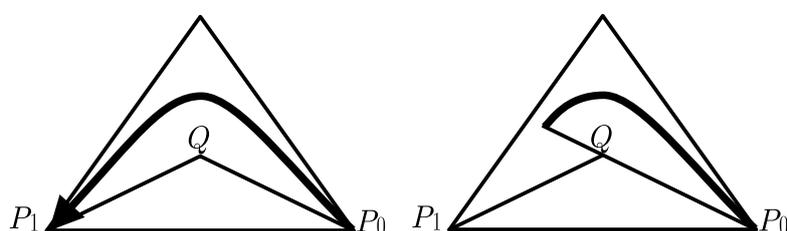


図 4: 左が負の過旋接触構造, 右が Lutz 管で, $\psi_2 = \text{一定}$ が過旋円板

レンズ空間の接触構造. 古川氏は上の負の過旋接触多様体を表す P_i から再び正の接触構造を得るために, $q_1 = q_2 = -1/m$ とすることによって Q を Δ の外部に置いた. 条件 $-\psi_1 - \psi_2 + (m+2)\psi_3 = m\theta = 0$ が定める T^2 は, P_0 と P_1 において円周につぶれる⁵. このとき $T^2 \times [0, 1]$ の像はレンズ空間 $L(m+2, m+1)$ である. 粕谷氏 ([5]) はこの接触部分多様体が複素曲面 $Z^{m+2} - XY = 0$ ($(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3$) と S^5 の交わり $\{\rho_3^{m+2} = \rho_1\rho_2, (m+2)\psi_3 = \psi_1\psi_2\} \cap S^5$ にイソトピックであることを示した.

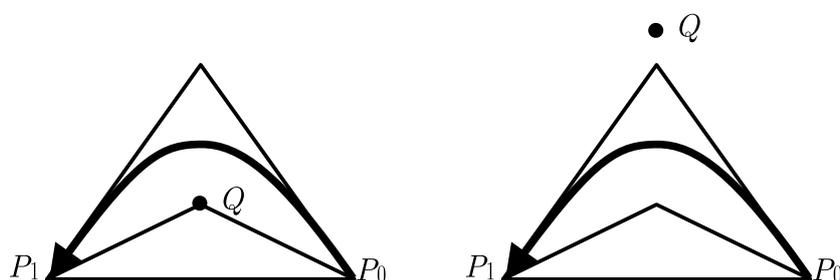


図 5: 左が負の過旋接触構造を持つ S^3 , 右が正の接触構造を持つレンズ空間

⁵ その手前で P_i が Δ の斜辺に滑らかに入るように修正すれば, q_1 と q_2 の分子を -1 としたおかげで, $\partial\Delta$ 上の条件なしの T^2 ファイブレーションに多重にならずに繋がって, P_0, P_1 上の円周につぶれる. 過旋接触多様体において負の接触構造であったものが今は正の接触構造であるのは, q_1, q_2 が負であるために T^2 の向きが反対になるからである. なお $m = 0, -1$ の場合もこの構成は有効である.

3. T_{pqr} 特異点の Milnor 束と S^5 の葉層

前節のレンズ空間は、 Δ の 1 つの頂点の原像 (S^1) で交わる 2 つの斜辺の原像 ($S^3 \cup S^3$) から異なるスムージングによって得た無限個の接触部分多様体である。もちろん $\text{pr}^{-1}(\partial\Delta)$ から Δ の 3 頂点の原像でスムージングを行えば、様々なトラス束が得られる。粕谷氏 [5] はこれを複素特異点論と結びつけて、全ての T_{pqr} -特異点のリンクが $\text{pr}^{-1}(\partial\Delta)$ のあるスムージングと接触イソトピックであることを示した。ここで複素孤立特異点のリンクとは特異点で 0 をとる非負狭義多重劣調和関数の 0 に十分近い正則値の逆像である⁶。また T_{pqr} -特異点とは $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} \leq 1$ を満たす正の整数 p, q, r に対する \mathbb{C}^3 の超曲面 $X^p + Y^q + Z^r + XYZ = 0$ の特異点 $(0, 0, 0)$ である⁷。 T_{pqr} -特異点の Milnor 束は S^5 の余次元 1 葉層のトポロジーにおいて最重要である。 S^5 には葉空間が Reeb 葉層の葉空間と同相になる葉層があり、一方の S^1 は T_{pqr} -特異点のリンク L の T^2 ファイバーに法円板 D^2 を掛けたものを葉とした葉空間、他方の S^1 は Milnor 束のファイバーを葉とした葉空間、付け加える 1 点はリンクの近傍 $L \times D^2$ の境界 $L \times S^1$ を葉としたものであり、この葉には Reeb 葉層と同じ要領で他の葉を巻きつける。 $p = q = r = 3$ の場合が Lawson [8] によって S^5 上に構成された葉層であることから、われわれはこの葉層を T_{pqr} -特異点に付随する Lawson 葉層と呼ぶ。 T_{pqr} -特異点と Lawson 葉層について次の 3 つの結果が絡み合うことから、5 次元はいよいよ低次元になったように思う。

定理 (三松 [16]). Lawson 葉層の $L \times D^2$ の近くは、 L の T^2 -ファイバーをつぶせば Reeb 葉層の一部になるので、各葉に積シンプレクティック構造が入る。それがコンパクト葉 $L \times S^1$ に定める向きに Milnor ファイバーが巻きつくとして、葉のシンプレクティック構造は Milnor 束の部分にも拡張し⁸、 S^5 に余階数 1 の正則 Poisson 構造を定める。

定理 (Massot-Niederkrüger-Wendl [11]). T_{pqr} -カusp特異点のリンクに Lutz-M 管⁹を挿入するなど「捻り」を加えた接触構造は弱シンプレクティック充填可能でなくなる。

定理 (M[20, 21]). S^5 の標準的接触構造は、概接触構造としては Eliashberg-Thurston のコンフォリエーション¹⁰を経由して三松氏の正則 Poisson 構造に収束し、同時に超平面場としては接触構造のイソトピー変形を経由して Lawson 葉層に収束する。

⁶ 超曲面特異点の場合には、特異点を中心とする十分小さい半径の超球面との交わりがリンクである。前節のレンズ空間の例では距離 2 乗関数に 1 以下の臨界点がないことから半径 1 は十分小さい。

⁷ 複素曲面の単純楕円型特異点またはカusp特異点であって \mathbb{C}^3 に埋め込めるものは T_{pqr} -特異点である。

カusp特異点のリンクは T^2 -束であり、モノドロミーは $M(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の行列の積として表される T^2 の双曲的自己同型である。 $T(p, q, r)$ 特異点のモノドロミーは単純楕円型の場合も含めて $M(r-1)M(q-1)M(p-1)$ であり、双曲性の条件は $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$ である。

⁸ Milnor 束のファイバーから得られる葉のシンプレクティック構造は完全形式ではなく、もとの Kähler 構造を境界付近で変更しても得られない。また各葉への制限がシンプレクティック形式であるような多様体上の閉 2-形式は存在しない。そのような閉形式があると Martinez-Torres[10] の結果から葉空間はある 3 次元多様体のトート葉層のものと同相となり、Reeb 葉層のものと同相にならない。

⁹ T^2 -束 L のモノドロミーは Anosov なので、 $L \times [-1, 1]$ には双接触構造を 2 つの凸境界成分に持つ完全シンプレクティック構造が入り、 $L \times \{0\}$ には Anosov 葉層が現れる ([15] を見よ)。これを一方の境界成分に沿って回転させて得られる接触多様体は Lutz 管の高次元化であり、筆者の未公開論文に含まれたことから Lutz-Mori 管と呼ばれる。捻りを加える操作については、境界成分に沿う回転ではなく単に S^1 を掛けたものを挟む場合 (こちらは Giroux 捻りの一般化に相当) も含めて議論されている。

¹⁰ 概正則版ではあるが、多変数複素解析の擬凸性そのもの ([2]) であり、ただの弱非可積分性ではない。筆者 [20] は擬凸性を僅かに緩めて一般次元の結果を得たが、5 次元では擬凸性と同値 ([21]) である。

4. 粕谷-児玉-三松-M(KKMM)の結果について

ω は1の虚立方根 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする. 射影 $\text{pr} : S^3 \rightarrow \Delta$ の定義域を \mathbb{C}^3 , ターゲットを \mathbb{R}^3 内の平面に拡張し, その平面を \mathbb{C} と同一視した $\tilde{\text{pr}} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$\tilde{\text{pr}} : (\rho_1 \exp(i\psi_1), \rho_2 \exp(i\psi_2), \rho_3 \exp(i\psi_3)) \mapsto \rho_1^2 + \omega \rho_2^2 + \omega^2 \rho_3^2$$

ここで Δ の頂点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ は, それぞれ \mathbb{C} 上の点 $1, \omega, \omega^2$ で表される. \mathbb{C}^3 の各座標の絶対値の2乗によるモーメント写像を単位 S^5 に制限したものが pr なので, 制限をしないモーメント写像を考えて, その代わりに Δ を含む平面に法ベクトル $(1, 1, 1)$ に沿って正射影したものが $\tilde{\text{pr}}$ である. 像を \mathbb{C} にしたが, $\tilde{\text{pr}}$ は複素正則ではない.

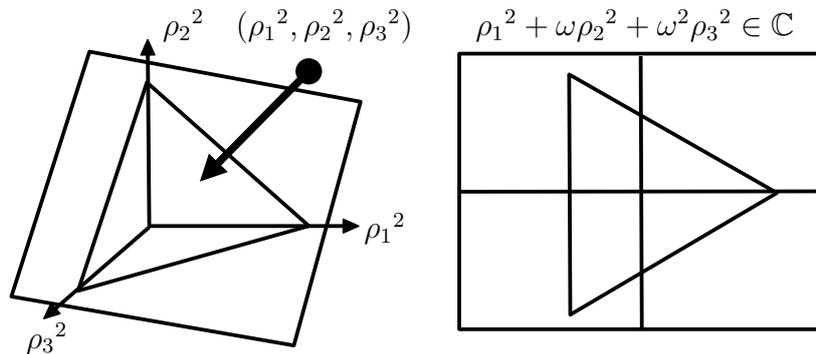


図 6: 関係式 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ は, $(1, 1, 1)$ 方向が面に垂直であることを意味する.

さて複素超曲面 $f(X, Y, Z) = 0$ が孤立特異点 $(0, 0, 0)$ を持つとき, Milnor ファイバー F_θ には2種類あり, 小さな半径 $0 < R \ll 1$ の球面 S_R^5 からリンクを除いたところで $F_\theta = \{\arg f = \theta\} \cap (S^5 \setminus L)$ としたものと, 小さな半径 $0 < R \ll 1$ の球体 B_R^6 上で $0 < \varepsilon \ll R$ に対して $F'_\theta = \{f = \varepsilon \exp(i\theta)\} \cap B_R^6$ としたものがあ. どちらも位相的には同じであるが, pr の定義域を拡張した理由は後者の F'_θ に着目するためである.

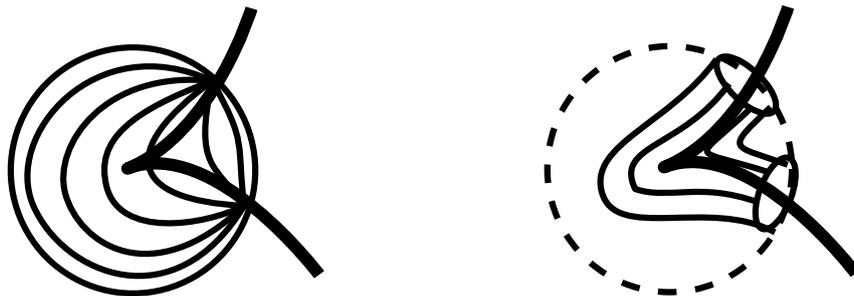


図 7: 左が特異点の近傍の境界の F_θ , 右が特異超曲面の管状近傍の境界の F'_θ

定理 (KKMM[6]). $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} \leq 1, f(X, Y, Z) = X^p + Y^q + Z^r + \varepsilon^{-1}XYZ$ のとき, $\tilde{\text{pr}}$ の F'_θ への制限の臨界点は $(\varepsilon^{\frac{1}{p}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi j)}{p}), 0, 0)$ ($j = 0, \dots, p-1$), $(0, \varepsilon^{\frac{1}{q}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi k)}{q}), 0)$ ($k = 0, \dots, q-1$), $(0, 0, \varepsilon^{\frac{1}{r}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi l)}{r}))$ ($l = 0, \dots, r-1$) の合計 $(p + q + r)$ 個ある. これらの臨界点の個数と位置と, F'_θ が凸シンプレクティック部分多様体であるという性質を変えずに, $f(X, Y, Z)$ を複素正則でない C^∞ 関数に変形して, $\tilde{\text{pr}}$ の F'_θ への制限が Lagrange トーラスファイブレーションであるようにできる. このとき, 各臨界点はモノドロミーが右 Dehn 捻りであるような Lefschetz 型特異点である.

注意. ターゲット \mathbb{C} の向きは恣意的だが, Milnor ファイバーには向きが定まるので, ターゲットの向きを定めるとファイバーの向きも定まる. 定理によるとターゲットにおいて臨界値の周りを反時計回りに一周するとファイバーの方で右 Dehn 捻りが生じる. もしターゲットの向きを反対にすると, 臨界点の周りの反時計回り一周はファイバーに逆写像を生じるが, ファイバーの向きも反対なので, この逆写像が右捻りになる.

証明. $[0, 1]$ への非増加 C^∞ -関数 $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を $\beta(0) = 1, \beta(\frac{1}{2}) = 0$ となるように取る. $\varphi_1 = \sqrt{|Y|^2 + |Z|^2}/|X|, \varphi_2 = \sqrt{|Z|^2 + |X|^2}/|Y|, \varphi_3 = \sqrt{|X|^2 + |Y|^2}/|Z|$ として,

$$h(X, Y, Z) = \beta \circ \varphi_1 \cdot X^p + \beta \circ \varphi_2 \cdot Y^q + \beta \circ \varphi_3 \cdot Z^r + \varepsilon^{-1}XYZ$$

とおき, Milnor 束を定義する関数を $(1 - \tau)f(X, Y, Z) + \tau h(X, Y, Z)$ ($0 \leq \tau \leq 1$) で変形する. $\tau = 1$ に至ると, 最初の 3 項のサポートが変わらなくなるので, ファイバーは Lagrange 部分多様体になる. 実際, $\tilde{\text{pr}}$ と $\beta \circ \varphi_1 \cdot X + \varepsilon^{-1}XYZ$ は $\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}$ が生成する S^1 -作用 $(X, Y, Z) \mapsto (X, \exp(it)Y, \exp(-it)Z)$ で不変であり, また $\tilde{\text{pr}}$ のファイバー上ではその虚部 $\frac{\sqrt{3}}{2}(r_2^2 - r_3^2)$ が一定だから, \mathbb{C}^3 のシンプレクティック形式について

$$\iota_{\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}}(2\rho_1 d\rho_1 \wedge d\psi_1 + 2\rho_2 d\rho_2 \wedge d\psi_2 + 2\rho_3 d\rho_3 \wedge d\psi_3) = -2\rho_2 d\rho_2 + 2\rho_3 d\rho_3$$

はファイバー上消える. 特異点は Eliasson [3] の結果から分かる. 他は省略する. \square

Lefschetz ファイブレーションを持つ 4 次元多様体には Gompf によるシンプレクティック構造がある. Presas は 5 次元多様体の余次元 1 葉層から 3 次元多様体の余次元 1 有向葉層に葉ごとの Lefschetz ファイブレーションがあるときにも同様の構成で余階数 1 正則 Poisson 構造が得られることを示していて, 前節で述べた三松氏による Lawson 葉層の Poisson 構造についても, この事実に基づく別の構成があると予想した. 上の定理から S^3 の Reeb 葉層に対してそのような Lefschetz ファイブレーションが構成できていて, ここから基本的には三松氏の構成と同じものが得られるはずである.

Milnor 束のトポロジー. Milnor ファイバーの 2 次ホモロジーは交叉までよく知られているが, \mathbb{C}^3 の座標の絶対値を見ると Milnor 束の構造について微分トポロジー的な理解が深まる. 絶対値を見るのでトーリック幾何と並走するが (たとえば [7]), 同じ結果に行きつくと思うのは早計である. 実際, 前節までの結果がそうであったように, 微分トポジストが知りたいのは多様体上の葉層と接分布である. さて上のように修正した Milnor ファイバー F'_θ について, 写像 $\tilde{\text{pr}}$ を F'_θ に制限して得られる Lagrange トーラスファイブレーションを π_θ と書くことにする. π_θ の特異ファイバーは

$$\begin{aligned} \pi_\theta^{-1}(\varepsilon^{\frac{2}{p}}) &= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_p} (S^2 \text{ with poles } (\varepsilon^{\frac{1}{p}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi j)}{p}), 0, 0) \text{ and } (\varepsilon^{\frac{1}{p}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi(j+1))}{p}), 0, 0)), \\ \pi_\theta^{-1}(\omega \varepsilon^{\frac{2}{q}}) &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_q} (S^2 \text{ with poles } (0, \varepsilon^{\frac{1}{q}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi k)}{q}), 0) \text{ and } (0, \varepsilon^{\frac{1}{q}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi(k+1))}{q}), 0)), \\ \pi_\theta^{-1}(\omega^2 \varepsilon^{\frac{2}{r}}) &= \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_r} (S^2 \text{ with poles } (0, 0, \varepsilon^{\frac{1}{r}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi l)}{r})) \text{ and } (0, 0, \varepsilon^{\frac{1}{r}} \exp(\frac{i(\theta+2\pi(l+1))}{r}))) \end{aligned}$$

の 3 本であり, それぞれ p 個, q 個, r 個の S^2 を北極南極で数珠つなぎにした和である. ただし S^2 の緯線はそれぞれ $\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}, \partial_{\psi_3} - \partial_{\psi_1}, \partial_{\psi_1} - \partial_{\psi_2}$ の軌道である. また Milnor

ファイバーでは θ を定数とするが, Milnor 束はその θ を動かすので, θ を一回転すると各数珠がちょうど珠を数えるように S^2 ひとつ分ずれる. 他方, ファイバーに横断的な部分を持つ Lagrange 球面もある. 3つに枝分かれした図形

$$G_\theta := \left\{ \pi_\theta = 0 \text{ or } \arg(\pi_\theta) = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right\} \subset F'_\theta$$

において $\arg(\pi_\theta) = 0$ の枝には $\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}$ が生成する S^1 作用があり, その不動点は数珠 $\pi_\theta^{-1}(\varepsilon^{2/p})$ をつなぐ p 個の Lefschetz 型特異点である. 1つの不動点を中心として軌道の和である円板を勝手にとると, $\rho_1^2 - \rho_2^2 = 0$ であることから前節の定理の証明と同じ原理によって, その円板は Lagrange 部分多様体である. 他の枝についても同様の円板を1つずつ取る. 中央の正則ファイバー $\pi_\theta^{-1}(0) = \{\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \varepsilon^{1/3}, \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \theta\} \subset \mathbb{C}^3$ の近くでは, 3つの円板の境界がちょうど1点で交わる場合を考えれば分かるように, 3つの円板は互いにホモログでない2種類の滑らかではない位相的 Lagrange 球面の一部にできて, それらのホモロジー類の差が中央の $\pi_\theta^{-1}(0) \cong T^2$ で代表される. Milnor ファイバーの2次ホモロジーと交叉はこれらの球面により幾何学的に理解される.

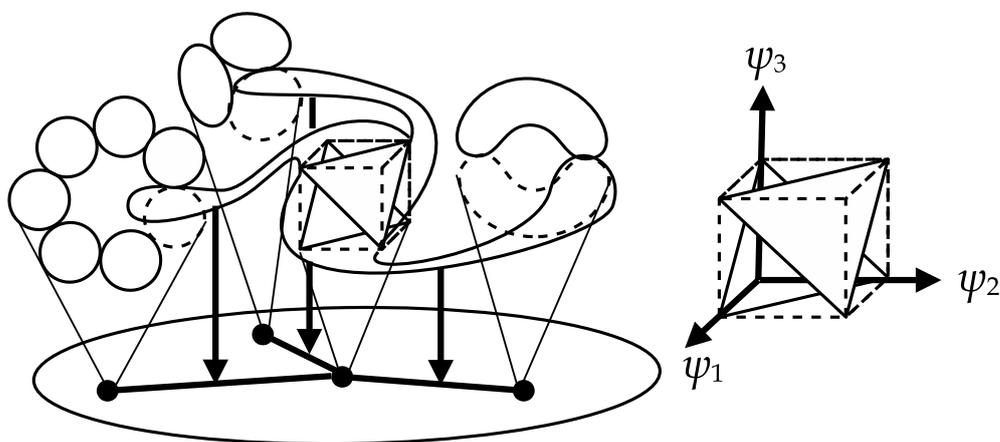


図 8: $p = 2, q = 3, r = 7$ のときの G_θ 上の 11 個の球面. 右は $\pi_\theta^{-1}(0)$ の分解.

K3 曲面のトポロジー. K3 曲面の微分トポロジー的特徴づけは Moishezon-松本の定理 ([18],[12, 13]) により明快である. 閉4次元 M^4 から S^2 へのトーラスファイブレーションで, 1個以上の Lefschetz 型特異点を除けば沈めこみであるものが存在すれば, 特異点の個数は 12 の倍数であり, その個数によって M^4 の微分位相型は決まる. その個数が 24 個のものが微分 K3 曲面である. われわれは T_{pqr} -特異点の Milnor 束に $(p + q + r)$ 個の Lefschetz 型特異点を持つトーラスファイブレーションを構成した. もし L のトーラス束のモノドロミーの逆写像がある $T_{p'q'r'}$ -特異点の境界に現れたとすれば, T_{pqr} -特異点と $T_{p'q'r'}$ -特異点の Milnor ファイバーを境界のトーラス束で貼り合わせたものを M^4 として, M^4 から S^2 へのトーラスファイブレーションの特異点の個数 $p + q + r + p' + q' + r'$ は自動的に 12 の倍数となり, それがもし 24 であれば M^4 は微分 K3 曲面である. このような組の貼り合わせは Anosov 葉層に収束する接触構造を介してシンプレクティック構造をつなぐようにできるので, いかにも微分トポロジーのやりたいことである ([15]).

定理 (KKMM[6]). そのような T_{pqr} -特異点の組は 10 組あり, 次表の「Arnol'd の奇妙な双対性」に関連して知られた 10 組であって, いずれの組も微分 K3 曲面を与える.

特異点名	Gabrielov p, q, r	擬斉次のもの	Dolgachev p', q', r'	双対
E_{12} 別名 $S_{2,3,7}$	2, 3, 7	$x^2 + y^3 + z^7$	2, 3, 7	E_{12}
Z_{11} $S_{2,4,5}$	2, 4, 5	$x^2 + y^3z + z^5$	2, 3, 8	E_{13}
Q_{10} $S_{3,3,4}$	3, 3, 4	$x^3 + y^2z + z^4$	2, 3, 9	E_{14}
E_{13} $S_{2,3,8}$	2, 3, 8	$x^2 + y^3 + yz^5$	2, 4, 5	Z_{11}
Z_{12} $S_{2,4,6}$	2, 4, 6	$x^2 + y^3z + yz^4$	2, 4, 6	Z_{12}
Q_{11} $S_{3,3,5}$	3, 3, 5	$x^2y + y^3z + z^3$	2, 4, 7	Z_{13}
E_{14} $S_{2,3,9}$	2, 3, 9	$x^3 + y^2 + yz^4$	3, 3, 4	Q_{10}
Z_{13} $S_{2,4,7}$	2, 4, 7	$x^2 + xy^3 + yz^3$	3, 3, 5	Q_{11}
Q_{12} $S_{3,3,6}$	3, 3, 6	$x^2 + y^2z + yz^3$	3, 3, 6	Q_{12}
W_{12} $S_{2,5,5}$	2, 5, 5	$x^5 + y^2 + yz^2$	2, 5, 5	W_{12}
S_{11} $S_{3,4,4}$	3, 4, 4	$x^2y + y^2z + z^4$	2, 5, 6	W_{13}
W_{13} $S_{2,5,6}$	2, 5, 6	$x^2 + xy^2 + z^4$	3, 4, 4	S_{11}
S_{12} $S_{3,4,5}$	3, 4, 5	$x^3y + y^2z + xz^2$	3, 4, 5	S_{12}
U_{12} $S_{4,4,4}$	4, 4, 4	$x^4 + y^2z + yz^2$	4, 4, 4	U_{12}

表 1: Arnol'd の例外型特異点 ([1]). 双対は Gabrielov 数と Dolgachev 数の交換.

たとえば $T_{2,3,7}$ -特異点の Milnor ファイバーの境界 (リンク) の T^2 束のモノドロミーは

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, 逆写像も同じ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ なので

$T_{2,3,7}$ -特異点の Milnor ファイバーは自分のコピーと貼り合わされて微分 K3 曲面になる. 各 Milnor ファイバーのトーラスファイブレーションには, 図 8 の 11 個の球面のうち, 中央のファイバーを使った 2 つの位相球面の任意の一方とだけ交わる断面がある. 境界のモノドロミー $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は Arnol'd の猫写像というもので, 境界の T^2 -束の断面はホモトピーを除いて一意であるから, 上の断面から K3 曲面のトーラスファイブレーションの断面が得られ, K3 曲面の 2 次ホモロジーが理解できる.

5. 結びとして: K3 曲面について思うこと

\mathbb{C}^4 以上の次元になると超曲面特異点のリンクは S^1 上のファイバー束にならないので, Milnor ファイバーと葉層 (とくに各葉にシンプレクティック構造を持つ Poisson 構造) の関連はあるとしても容易でない. だから S^5 から S^3 へのトーラスファイブレーションから葉層を構成できたことは新たな希望である. S^7 の葉層を構成するために S^3 などへのファイブレーションを使おうとすると, ファイバーが T^4 のものは見えそうにないので, 次の候補に K3 曲面を考えたい. また S^5 の Lawson 葉層を $(\mathbb{R}^9, \alpha) (= J^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}))$ に実現することも課題だが, コンパクト葉が T^4 でないのだから絶対値を見ても上手くいきそうにない. ここにトーリック幾何との分岐点があるように思える. K3 曲面は微分トポロジーの主役ではなかったが, 5次元に続いて7次元を低次元にするという流れにおいて, 避けては通れない対象になったと思う. 中村郁氏 [22, 23] や Looijenga [9] の

複素幾何学の結果の類似が Anosov 葉層の微分トポロジーから得られたのだから、他の数学分野や物理学が先に発展する中であっても、微分トポロジーに固有の問題意識や理解の仕方、とくに多くの人々が1970年代に一度あきらめてしまった葉層のトポロジーについて、再び当時のように構成をがんばることには意味があるように思う。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd: *Critical points of smooth functions*, Proc. I. C. M., Vancouver 1974, 19–39.
- [2] Y. Eliashberg, W. Thurston, : *Confoliations*, A. M. S. Univ. Lect. Ser.13, 1998.
- [3] L. H. Eliasson: *Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case*, Comm. Math. Helv. 65(1990), 4–35.
- [4] H. Geiges: *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge University Press, 2008.
- [5] N. Kasuya: *The canonical contact structure on the link of a cusp singularity*, Tokyo J. Math. 37-1(2014), 1–20.
- [6] N. Kasuya, H. Kodama, Y. Mitsumatsu, A. Mori: *On the Lefschetz like critical points and Lefschetz fibration on Milnor fibers*, preprint(2021).
- [7] A. Keating: *Lagrangian tori in four-dimensional Milnor fibres*, Geom. Funct. Anal. 25(2015), 1822–1901.
- [8] H. B. Lawson: *Codimension-one foliations of spheres*, Ann. of Math. 94(1971), 494–503.
- [9] E. Looijenga: *Rational surfaces with an anti-canonical cycles*. Ann. Math.114(1981), 267–322.
- [10] D. Martínez-Torres: *Codimension-one foliations calibrated by nondegenerate closed 2-forms*, Pacific J. Math. 261(2013), 165–217.
- [11] P. Massot, K. Niederkrüger, C. Wendl: *Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds*, Invent. Math. 192(2013), 287–373.
- [12] Y. Matsumoto: *Torus fibrations over the 2 sphere with the simplest singular fibers*, J. Math. Soc. Japan 37(1985), 605–636.
- [13] Y. Matsumoto: *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology 25 (1986), 549–563.
- [14] G. Meigniez: *Regularization and minimization of Haefliger structures of codimension one*, J. Diff. Geom. 107(2017), 157–202.
- [15] Y. Mitsumatsu: *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 45(1995), 1407–1421.
- [16] Y. Mitsumatsu: *Leafwise symplectic structures on Lawson’s foliation*, J. Symplectic Geom. 16-3(2018), 817–838.
- [17] Y. Mitsumatsu, A. Mori: *On Bennequin’s isotopy lemma*, appendix to: *Convergence of contact structures to foliations*, Foliations 2005 (P. Walczak), World Sci. 2006, 365–371.
- [18] B. Moishezon: *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math. 603, Springer, 1977.
- [19] A. Mori: *The Reeb foliation arises as a family of Legendrian submanifolds at the end of a deformation of the standard S^3 in S^5* , C. R. Math. 350-1,2(2012), 67–70.
- [20] A. Mori: *A note on Mitsumatsu’s construction of a leafwise symplectic foliation*, Int. Math. Res. Notices 2019-22(2019), 6933—6948.
- [21] 森 淳秀 : 高次元のコンフォリエーションについて, RIMS 講究録, 2175(2021), 14–26.
- [22] I. Nakamura: *Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities. I*. Math. Ann. 252 (1980), 221–235.
- [23] I. Nakamura: *On the Equations $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$* , Math. Soc. Japan Advanced Studies in Pure Math. 8, 1986, 281–313.
- [24] S. P. Novikov: *The topology of foliations*, Trudy Moskov. Mat. Obšč 14(1965), 248–278.

非コンパクト多様体に対する あるトーラス同変指数について

藤田玄 (日本女子大学理学部)*

概 要

トーラス作用をもつコンパクトとは限らない多様体上である種の同変指数を構成し、それを用いた非コンパクトトーリック多様体の Riemann-Roch 数の定式化を与える。また、KK 理論における KK 積を用いたその同変指数の分解を与える。

1 序論

多様体上の微分作用素を用いて不変量を研究する様々な枠組みがある。Atiyah-Singer の指数定理を含む指数理論はその典型例であり、コンパクト (で境界のない) 多様体上の線形楕円型微分作用素の核と余核の次元の差で定義される解析的指数から位相不変量が定義される。この枠組みにおいて、コンパクト多様体上の線形楕円型微分作用素 D が Fredholm 作用素である、つまり適切な関数空間において D の核と余核が有限次元であるという事実が重要となる。多様体がコンパクトでないときはこの議論はうまく機能するとはかぎらない。そこで、多様体上に付加構造がある場合、その構造を用いて作用素の変形を行う、あるいは K 理論やその一般化である KK 理論を用いた受け皿の精密化により不変量を取り出せる場合がある。本講演では、[9] に基づき、付加構造としてトーラス作用を用いて表現環に値をもつ同変指数のある一般化の構成を述べる。構成におけるキーワードとして局所化を挙げておく。ただし、ここでの局所化はいわゆる固定点公式など群作用の固定点への局所化ではなく、Witten が見出した微分作用素の摂動による指数の局所化と同様のアイデアに基づいたものである。

本講演での同変指数の定式化は、シンプレクティック多様体 M の不変量である Riemann-Roch (RR) 数の局所化にその動機がある。RR 数は概複素構造から決まる楕円型作用素 (Dolbeault-Dirac 作用素) の解析的指数として定義され、幾何学的量子化の文脈で非常に基本的な量である。シンプレクティック多様体の中でも最大の Hamilton トーラス作用による対称性をもつものとしてシンプレクティックトーリック多様体がある。コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体には運動量写像の像として Delzant 多面体というある強い整数条件をみたす多面体が付随し、その多面体により分類されることが知られている。特に、その幾何学的量子化は多面体に含まれる格子点により記述される。具体的には、群作用も考慮して解析的指数をトーラスの表現環の要素 (仮想表現) とみなしたとき、RR 数は Delzant 多面体内の格子点の定めるトーラスの 1 次元表現の直和にな

* e-mail: fujitah@fc.jwu.ac.jp

*¹ 正確には、3 で述べるように前量子化束をもつもの。

る, という結果が Danilov の定理として知られている. この現象は, $\mathbb{R}\mathbb{R}$ 数の局所化, あるいは幾何学的量子化の偏極への非依存性などの話題として興味深い発展を遂げている.

Atiyah-Singer の指数定理を含む一連の指数理論は K -ホモロジー/コホモロジーの言語を用いて述べられる. 特に, コンパクト多様体上の楕円型微分作用素の解析的指数は K -ホモロジーと K -コホモロジーの間のあるペアリングとして記述できる. Kasparov は K -ホモロジー/コホモロジーを統一する KK 理論を創始した. KK 理論には解析的指数を実現するペアリングを一般化する KK 積というペアリングが内包されており, 様々な操作が KK 積として記述できることが知られている.

本講演では, まずあるトーラス作用の存在のもとで多様体上の楕円型微分作用素の群作用の軌道に沿った別の微分作用素による変形を与え, 表現環の形式的完備化の元として変形された作用素の解析的指数が定まることを説明する. 次に, その枠組みの適用例として非コンパクトなトーリック多様体を考え, コンパクトトーリック多様体に対して知られている幾何学的量子化の記述の非コンパクト版を述べる. 我々の構成は Braverman[4] による構成と多くの類似点をもつ. Loizides-Rodsphon-Song[14] は Braverman の同変指数がある KK 類の KK 積として記述できることを示した. 我々の設定でも同様の KK 積として記述ができることを説明する. なお, 本講演では楕円型作用素としては (他の作用素への一般化も可能ではあるが) Clifford 加群束の切断の空間に作用する Dirac 型作用素のみ扱う. また, 多様体は滑らかで連結なもののみ考える. 本研究は科研費 (課題番号:18K03288) の助成を受けたものである.

2 非コンパクト多様体に対するトーラス同変指数

Riemann 多様体上の Clifford 加群束とは, M 上の Hermite ベクトル束 W と Clifford 積と呼ばれる束写像 $c: TM \rightarrow \text{End}(W)$ の組であって Clifford 関係式 $c(\cdot)^2 = -\|\cdot\|^2 \text{id}_W$ (といくつかの条件) を満たすものである. 典型例として接束の外積束 W と外積と内部積の組み合わせから決まる c がある. Dirac 作用素とは Clifford 積 c と整合的な W の接続と c の合成から定義される W の切断の空間に作用する線形微分作用素である. Dirac 作用素との差が 0 階作用素となる微分作用素を Dirac 型作用素という. Dirac 型作用素の主表象は Clifford 積に一致し楕円型作用素となる. 実際は我々の設定では W は $\mathbb{Z}/2$ 次数付きのもの $W = W^+ \oplus W^-$ を, 作用素としてはその次数を入れ替える $D = D^+ \oplus D^-$ の形のもの考えるが記号の節約のため次数は省略する.

2.1 コンパクトな場合

T を n 次元トーラス, $R(T)$ を T の表現環とする *2. T -作用をもつコンパクト Riemann 多様体 M と Clifford 加群束 $W \rightarrow M$ および W の切断の空間に作用する T -同変 Dirac

*2 ここで与える同変指数の定義は一般のコンパクト Lie 群でも可能である. しかし, 2.2 で述べる我々の構成はトーラス作用の場合に限定される.

型作用素 D が与えられると, D が楕円型であることからその核 $\ker(D)$ および余核 $\text{coker}(D)$ は有限次元であり T の表現空間となる. 解析的同変指数 $\text{ind}(D)$ はその差で定まる $R(T)$ の元である:

$$\text{ind}(D) = \ker(D) - \text{coker}(D) \in R(T).$$

$\text{ind}(D)$ は Riemann 多様体上の微分作用素から定義されるが, 実際は M と W の位相構造のみに依存する. その意味で, $\text{ind}(D) = [M, W]$ などと表すこともある.

2.2 非コンパクトな場合

[9] において, M がコンパクトでないときに $[M, W]$ の構成を拡張する枠組みの一つを与えた. Dirac 作用素から Fredholm 作用素を得るために, 我々は群作用に基づく作用素の変形を考える. このアイデアは Witten[16] による Dirac 作用素の変形の理論の変種であり, [10] から始まる一連の研究でも用いられた. また, [7] で構成した S^1 -作用がある非コンパクト多様体上の同変指数の一般化とも見做せる. ただし, ここでの変形はそれらで用いたものと同じのものではない. また, 我々が手に入れるのは切断の空間上の Fredholm 作用素ではなく, 各既約表現 ρ に対する切断の空間の ρ -isotypic 成分上での Fredholm 作用素であり, T -Fredholm 作用素ともよばれる. つまり, 核や余核が無限次元であっても, そこに含まれる既約表現の重複度が有限であるような作用素である. 以下, 定理を述べるための設定を説明する.

\mathfrak{t} を T の Lie 環とする. $\xi \in \mathfrak{t}$ に対して M 上のベクトル場 $\underline{\xi}_M$ および W の切断の空間上の Lie 微分作用素 \mathcal{L}_ξ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_M : x \mapsto (\underline{\xi}_M)_x &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\xi} \cdot x \in T_x M \\ \mathcal{L}_\xi : s \mapsto \left[x \mapsto (\mathcal{L}_\xi s)(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\xi} s(e^{-t\xi} \cdot x) \in W_x \right] \end{aligned}$$

により定義する. W の T -不変な Hermite 接続 ∇ をとる. 各 $\xi \in \mathfrak{t}$ に対して $\nabla_{\underline{\xi}_M}$ と \mathcal{L}_ξ は 1 階の微分作用素であってそれらの 1 階の項は等しく,

$$\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\underline{\xi}_M} =: \sqrt{-1}\mu_\xi$$

で定義される μ_ξ は切断 $\mu : M \rightarrow \text{End}(W) \otimes \mathfrak{t}^*$ を定める. 以下, μ が \mathfrak{t}^* に値を持つ T -同変写像から誘導されていると仮定する. これは, 後のシンプレクティック幾何の状況では μ が運動量写像であることに対応する仮定である.

次に, \mathfrak{t} に内積を固定し, \mathfrak{t} と \mathfrak{t}^* を同一視する. すると, μ は

$$M \ni x \mapsto (\underline{\mu}_M)_x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\mu(x)} \cdot x \in T_x M$$

で定義される M 上のベクトル場 $\underline{\mu}_M$ を誘導する. 同様に, 各 $\rho \in \mathfrak{t}^*$ に対してベクトル場 $\underline{\rho}_M$ が誘導される. $\mathfrak{t}_Z := \ker(\exp : \mathfrak{t} \rightarrow T)$ とおく. このデータを用いて, 各

$\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^* = \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ に対して, W の切断の空間の L^2 -完備化の ρ -isotypic 成分 $L^2(W)^{(\rho)} := \text{Hom}(\mathbb{C}_\rho, L^2(W)) \otimes \mathbb{C}_\rho$ 上の微分作用素 D_ρ が定義できる. ただし, \mathbb{C}_ρ は ρ が定める 1 次元 T -表現である. D_ρ の構成と性質は 2.3 にて述べる. 次がコンパクトな場合の同変指数 $[M, W]$ の拡張である.

定理 2.1 ([9]). 各 $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ に対して M 上のベクトル場 $\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M$ の零点集合 $\text{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ がコンパクトと仮定する. $V := M \setminus \bigcup_\rho \text{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ とおく. このとき (付加的な技術的仮定のもとで), D_ρ は $L^2(W)^{(\rho)}$ 上の *Fredholm* 作用素となり準同型写像

$$[M, W; V] : R(T) \rightarrow \mathbb{Z}, \rho \mapsto \text{ind}(D_\rho)$$

が定義でき, M がコンパクトなときは次の意味で通常と同変指数 $[M, W]$ と一致する.

$$[M, W; V] : \rho \mapsto [M, W]^{(\rho)},$$

ただし, $[M, W]^{(\rho)}$ は $[M, W] \in R(T)$ に含まれる ρ の重複度である. さらに, $[M, W; V]$ は適切な設定のもと, データの連続変形での不変性, 切除公式, 和公式, 積公式をみす.

2.3 摂動項 D_T

2.2 の設定を考える. $c : TM \rightarrow \text{End}(W)$ を Clifford 積とする. また, \mathfrak{t} の正規直交基底 $\{\xi_i\}_i$ をとる.

定義 2.2. W の切断の空間に作用する微分作用素 D_T を

$$D_T := \sum_i c(\underline{\xi}_{i_M}) \nabla_{\underline{\xi}_M} = \sum_i c(\underline{\xi}_{i_M}) (\mathcal{L}_{\xi_i} - \sqrt{-1} \mu_{\xi_i})$$

により定める. D_T を **orbital Dirac** 型作用素とよぶ.

各 $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ に対するコンパクト集合 $\text{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ の十分小さい近傍上で恒等的に 0 であり微分が L^∞ -有界な T -同変固有関数 f_ρ をとる. このとき, W の Dirac 型作用素 D に対して

$$D_\rho := D + f_\rho D_T$$

とおく.

なお, $L^2(W)^{(\rho)}$ 上では $\mathcal{L}_\xi = \sqrt{-1} \rho(\xi)$ となることに注意すると, $L^2(W)^{(\rho)}$ 上では

$$D_T = \sum_i \sqrt{-1} c(\underline{\xi}_{i_M}) (\rho(\xi_i) - \mu_{\xi_i}) = \sqrt{-1} c(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$$

となり, 0 階の作用素となる. Clifford 積の基本関係式 $c(\cdot)^2 = -|\cdot|^2$ よりその自乗は

$$D_T^2 = |\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M|^2$$

となる. D_ρ は $L^2(W)$ 上の微分作用素としては楕円型とは限らず, 群作用の軌道に横断的な方向にのみ楕円型である横断的楕円型作用素と呼ばれるものになっているが, 各 isotypic 成分ごとに考えるわれわれの議論には影響はない.

D_T による変形 D_ρ の Fredholm 性はその自乗 $(D_\rho)^2$ が遠方で十分正 (最小固有値が 0 から離れている) となることから保証される. その評価について重要な点をごく簡単に述べる. Witten は Clifford 積と反可換な W 上の歪 Hermite 写像 h と実数 t による Dirac 型作用素の変形 $D + th$ を考え, t が十分大きいとき, その指数が h の退化部分 (h が同型でない点全体) にある意味で局所化することを見出した. D_T による変形も同様の思想に基づいている. これが定理 2.1 に $\text{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ が現れる理由である. h の Clifford 積との反可換性は自乗 $(D + th)^2 = D^2 + (Dh + hD)t + h^2t^2$ において $Dh + hD$ が 0 階の作用素であることを導く. この性質により, $(D + th)^2$ において h が退化する部分の外側で $(Dh + hD)t$ を h^2t^2 でコントロールすることができる. D_T は T -作用の軌道方向の微分のみ含む作用素であり, 軌道に横断的な方向の Clifford 積と反可換である. ここから $DD_T + D_T D$ が軌道方向の微分のみ含むことがわかり, Witten の理論と類似の議論が機能する. この事実とコンパクト集合 $\text{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ の補集合上で $(D_T)^2$ が真に正であること (+いくつかの技術的仮定) を用いて $(D_\rho)^2$ の $L^2(W)^{(\rho)}$ 上での評価を行うと, その Fredholm 性が導かれる. こうして定理 2.1 の指数の各成分

$$[M, W; V](\rho) = \text{ind}(D_\rho) \in \mathbb{Z}$$

は定義される.

[13] において Kasparov は $\sum_i c(\xi_{i_M}) \mathcal{L}_{\xi_i}$ を orbital Dirac 作用素とよび, KK 理論の枠組みでその性質を考察している. また, [4] において Braverman は可換とは限らないコンパクト Lie 群の作用に関して Clifford 積 $c(\underline{\mu}_M)$ による Dirac 作用素の変形により我々と同様の同変指数を定義した. Braverman の同変指数については Atiyah の横断的指数 [1] との一致という形での指数定理が成立する. その後その理論は [15] で非コンパクトな設定での $[Q, R]=0$ (量子化とシンプレクティック簡約の可換性) の証明などに応用された. その同変指数は $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ によらない部分集合 $\text{Zero}(\underline{\mu}_M)$ に局所化する. 一方, 我々の局所化は各 $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ ごとに指数の ρ 成分が $\text{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ に局所化するという性質をもつ. これは, Braverman の指数は定性的には固定点と $\mu^{-1}(0)$ への局所化, 我々の指数は格子点の逆像 $\mu^{-1}(\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}})$ への局所化, とそれぞれ関係していることを示唆する. 両者の振る舞いには違いはあるが, ある仮定の元では一致すること, その仮定が満たされない場合は一致しないことがわかっている.

3 トーリック多様体の Riemann-Roch 数への応用

Riemann-Roch 数とは幾何学的量子化の文脈で基本的な役割を持つシンプレクティック多様体の不変量である. 幾何学的量子化とは, 与えられたシンプレクティック多様体から不変量としてよいベクトル空間を取り出す一つのレシピである. その概要を述べる. (M, ω) をシンプレクティック多様体とする. つまり, ω は滑らかな多様体 M 上の非退化閉 2 次微分形式である. よく知られているように, シンプレクティック多様体にはシ

ンプレクティック構造と整合的な概複素構造が存在する. 特に, コンパクト Lie 群の作用がある状況では群作用で不変なものごとれる. そのような概複素構造 J をひとつ固定し, TM を J により複素ベクトル束とみなしたものを $TM_{\mathbb{C}}$ とする. また, Riemann 計量 $g_J(\cdot, \cdot) := \omega(J\cdot, \cdot)$ を考える. この時, 外積束 $W := \wedge^{\bullet} TM_{\mathbb{C}}$ は Riemann 多様体 (M, g_J) に対する Clifford 加群束となる. ただし, TM の元による Clifford 積は外積と内部積の組み合わせで定義される. M 上の Hermite 直線束 $L \rightarrow M$ とその Hermite 接続 ∇ の組 (L, ∇) であってその曲率形式が $\sqrt{-1}\omega$ に一致するものは M 上の前量子化束とよばれる. その存在は ω の定める deRham コホモロジー類が整係数に持ち上がること (前量子化可能条件) と同値である. 以下, 本稿ではこのような前量子化束の存在を仮定し, 一つ固定することにする. 前量子化束 (L, ∇) を持つシンプレクティック多様体 (M, ω) に対して $W_L := W \otimes L$ は Clifford 加群束となる. この時, ∇ と (M, g_J) の Levi-Civita 接続から W_L の切断の空間に作用する Dolbeault-Dirac 作用素 D_L が定まる.

定義 3.1. (M, ω) がコンパクトなとき, その **Riemann-Roch 数** $RR(M)$ を D_L の解析的指数

$$RR(M) := \text{ind}(D_L) = [M, W_L] \in \mathbb{Z}$$

により定義する. (M, ω) にコンパクト Lie 群 G の作用があり, その作用が (L, ∇) に持ち上がっていれば, $RR_G(M) = [M, W_L]$ は G の表現環 $R(G)$ の元を定める. これを G -同変 **Riemann-Roch 数** という.

ある状況においては D_L の余核が自明に, 更に J が可積分な場合には D_L の核が L の正則切断の空間 $H^0(M; L)$ に一致することがある. 幾何学的量子化の手続きにおいて量子化として L の正則切断の空間を採用することがある. この観点から RR 数を (M, ω) の (spin^c -) 量子化とよぶこともある. \mathbb{Z} あるいは $R(G)$ は K 理論の観点からは一点の K 群 $K(\text{pt})$ あるいは $K_G(\text{pt})$ と同型であり,

$$RR(M) \text{ (resp. } RR_G(M)) = \ker D_L - \text{coker } D_L \in K(\text{pt}) \text{ (resp. } K_G(\text{pt}))$$

と理解できる.

3.1 コンパクトトーリック多様体の場合

トーラスによる最大対称性をもつシンプレクティック多様体としてトーリック多様体がある. (M, ω) がトーリック多様体^{*3}であるとは, M に ω を保つ n 次元トーラス T の効果的作用があり, その作用の運動量写像 $\mu : M \rightarrow \text{Lie}(T)^* = \mathfrak{t}^*$, つまり T -不変写像 μ であって任意の $\xi \in \mathfrak{t}$ に対して

$$d\langle \mu(\cdot), \xi \rangle = \omega(\cdot, \xi)$$

^{*3} トーリック多様体という用語は, 代数幾何の文脈で使われることも多く, ここで扱う対象はシンプレクティックトーリック多様体ともよばれる.

が M 上の 1 次微分形式として成立するものが存在する. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathfrak{t}^* と \mathfrak{t} のペアリングである.

Hamilton トーラス作用をもつコンパクトシンプレクティック多様体の運動量写像の像が凸多面体になることがよく知られているが, トーリック多様体の場合, その像は **Delzant 多面体** という非常に強い整数性条件^{*4}を満たすものになり, 次の意味で Delzant 多面体によって完全に分類ができることが知られている ([6]):

- コンパクトトーリック多様体 (M, ω) と対応する運動量写像 $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ に対して, $P := \mu(M)$ は $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n$ 内の Delzant 多面体である.
- (M', ω') をトーリック多様体であって, 対応する運動量写像の像が (平行移動を除いて) P に一致するものとする, (M, ω) と (M', ω') は T -同変同型である.
- 任意の Delzant 多面体 Q に対して, 運動量写像の像が Q に一致するようなトーリック多様体が存在する.

実は, トーリック多様体に対応する Delzant 多面体 P は T 作用による軌道空間に, 運動量写像は商写像になっている. 正確には, μ の T -不変性から軌道空間 M/T から $\mu(M) = P$ への写像が誘導され, それが同相写像^{*5}を与える. 特に, P の一点の逆像は M 内で一つの T -軌道になる. さらに, $p \in P$ に対して軌道 $\mu^{-1}(p)$ の次元は p の属する P の面の次元に一致する. 特に, P の頂点の逆像は T -作用の固定点になる.

トーリック多様体 M 上に前量子化束が存在することの必要十分条件は $\mu(M)$ が整格子多角形, つまり全ての頂点が格子点にあることである. トーリック多様体の RR 数は次のように格子点で記述できることが古典的に知られている.

定理 3.2 ([5]). 前量子化束をもつコンパクトトーリック多様体 (M, ω) の T -同変 Riemann-Roch 数 $RR_T(M, L)$ に対して

$$RR_T(M) = \bigoplus_{\xi \in \mu(M) \cap \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*} \mathbb{C}_{\xi} \in R(T)$$

が成立する. ただし, $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ は \mathfrak{t}^* 内の格子点全体であり, \mathbb{C}_{ξ} は $\xi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ の定める T の 1 次元複素表現である.

この定理は, トーリック多様体の RR 数が対応する Delzant 多面体の格子点, あるいはその逆像の軌道へ局所化することを示唆する. この描像を正当化する研究として [3], [8], [11] などがあり, 今回の結果もその一つといえる.

^{*4} 各頂点から n 本の方向ベクトルが伸び, それらが全て整数ベクトルでとれ, かつ \mathbb{Z}^n の基底をなす.

^{*5} 実はより強く, 角付き多様体の微分同相写像になる.

3.2 非コンパクトトーリック多様体の場合

定理 3.2 を鑑みて、非コンパクトトーリック多様体の RR 数あるいは幾何学的量子化を考えると、無限次元的なものが現れうると想像される。例えば、トーリック多様体として \mathbb{C}^2 への標準的な $T = (S^1)^2$ 作用を考えると、その運動量写像による像は 2 次元座標平面の第一象限であり、格子点は無限個含まれる。この描像を 2.2 で述べた手法により実現したのが次の定理 *6 である。なお、この定理はコンパクトな場合の Danilov の定理の別証明にもなっている。

定理 3.3 ([9]). M をコンパクトとは限らないトーリック多様体、 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ をその運動量写像とする。 M への T -作用の固定化部分群 H に対し、 \mathfrak{h}^\perp を H の Lie 環の \mathfrak{t} における直交補空間、 $\iota_{H^\perp}^* : \mathfrak{t}^* \rightarrow (\mathfrak{h}^\perp)^*$ を包含写像の双対写像とする。また、 M_H を固定化部分群が H であるような M の点全体とする。任意の固定化部分群 H と任意の $\rho \in \mu(M) \cap \mathfrak{t}_\mathbb{Z}^*$ に対して $(\iota_{H^\perp}^* \circ \mu)^{-1}(\iota_{H^\perp}^*(\rho)) \cap M_H$ はコンパクトであると仮定する。この時、定理 2.1 での $[M, W_L; V]$ を用いて準同型写像

$$\widetilde{RR}_T(M) : R(T) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が定義でき、

$$\widetilde{RR}_T(M) = \bigoplus_{\rho \in \mu(M) \cap \mathfrak{t}_\mathbb{Z}^*} \# \pi_0(\mu^{-1}(\rho)) \mathbb{C}_\rho$$

となる。つまり各 $\rho \in \mathfrak{t}_\mathbb{Z}^*$ に対して

$$\widetilde{RR}_T(M)(\rho) = \# \pi_0(\mu^{-1}(\rho))$$

となる。 M がコンパクトなら $\widetilde{RR}_T(M) = RR_T(M)$ となる。

コンパクトトーリック多様体 (M, ω) は運動量写像 μ による像 $\mu(M)$ で分類されるが、コンパクトとは限らない場合は $\mu(M)$ だけでは分類できない。また、コンパクトな場合と違って M/T から $P = \mu(M)$ への写像は同相写像とは限らず、一般には局所的な埋め込みにしかならない。特に、 $\rho \in \mathfrak{t}^*$ に対して $\mu^{-1}(\rho)$ はいくつかの軌道の和集合になる。一方、 μ が凸開集合への固有写像になっている場合は M/T から P への写像は同相写像であること、 P で M が分類されることも知られている。以上は全て [12] において示されている。

例 3.4. $M = S^1 \times \mathbb{R}$ に標準的なシンプレクティック構造を入れると第一成分への S^1 -作用により M はトーリック多様体となり、第二成分への射影が対応する運動量写像となる。前量子化束などを適切にとると、

$$\widetilde{RR}_T(M) = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_\rho$$

*6 [9] では仮定が正確に述べられておらず修正が必要である。

となる. コンパクトトーリック多様体にはトラス作用の固定点が必ず存在する. 一方, この例のように非コンパクトな場合は固定点が存在しないこともありうる. この結果から \widetilde{RR}_T に各格子点から 1 次元分の寄与があること, 固定点公式とは異なる局所化であることがわかる.

例 3.5. M を \mathbb{C}^n の原点の十分小さい開円板であって原点以外に格子点を含まないものとし, $T = (S^1)^n$ の M への標準的作用を考える. $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ を固定し, 前量子化束 $L \rightarrow M$ として L の原点のファイバーへの T -作用が \mathbb{C}_ρ と同型なものをとる. このとき $\widetilde{RR}_T(M) = \mathbb{C}_\rho$ となる.

例 3.6. 次の例は [12] による. $T = (S^1)^2$ に対して, $p^{(k)} := (k(k-1)/2, k) \in \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^2$ ($k = 1, 2, \dots$) とおき, P_k を $\xi_1\xi_2$ 平面内で $p^{(l)}$ と $p^{(l+1)}$ ($l = 1, 2, \dots, k-1$) を通る合計 k 個の直線と ξ_1 軸, ξ_2 軸で囲まれた凸領域とする. $P_1 \supset P_2 \supset \dots$ であり, $P_\infty := \bigcap_k P_k$ とする. 各 P_k (および P_∞) に対して非コンパクトトーリック多様体 M_k (および M_∞) であってその運動量写像による像が P_k (および P_∞) となるものが (同型を除いて) ただ一つ存在する. このとき,

$$\widetilde{RR}_T(M_k) = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{Z}^2 \cap P_k} \mathbb{C}_\rho$$

となる.

M_∞ は P_∞ の頂点に対応して無限個の T -作用の固定点をもつため, 定理 2.1 あるいは定理 3.3 の仮定を満たさない. しかし, \widetilde{RR}_T の切除公式と例 3.5 の結果 (に加えてより一般の非主軌道に対する計算) を用いると,

$$\widetilde{RR}_T(M_\infty) = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{Z}^2 \cap P_\infty} \mathbb{C}_\rho$$

という等式が正当化される.

4 KK 積による分解

以下, 再びシンプレクティック幾何を離れ一般の Riemann 多様体の設定に戻る. C^* -環は $*$ -作用素とよばれる対合作用が付与された Banach 代数であり, 幾何に現れる典型例としてコンパクト空間上 X 上の複素数値連続関数のなす環 $C(X)$ がある. Kasparov により創始された KK 理論は, 2 つの C^* -環に対して Abel 群を対応させる双関手

$$KK(\cdot, \cdot) : (A, B) \mapsto KK(A, B)$$

である. $KK(A, B)$ は B -値内積が付与された Hilbert B -加群 E , A の E へのある表現, E 上のある種のコンパクト性を持つ作用素からなる組 (Kasparov (A, B) -加群) たちで生成される^{*7}. 細部は述べないがその基本的な性質として次が挙げられる^{*8}.

^{*7} ここでは [2] による “unbounded cycle” を用いた定義を採用している.

^{*8} 本節の執筆にあたって有益なコメントを下された高田土満氏 (新潟大学) に感謝する.

1. $KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.
2. 第 1 変数について反変的, 第 2 変数に関して共変的 *9.
3. コンパクト Hausdorff 空間 X に対して $KK(\mathbb{C}, C(X))$ は X の位相的 K 群 $K^0(X)$ に一致する.
4. コンパクト多様体 M に対して $KK(C(M), \mathbb{C})$ は M の (幾何的)K ホモロジー群 $K_0^{\text{geom}}(M)$ に一致する.
5. コンパクト Lie 群 G に対して $KK(C^*(G), \mathbb{C}) = \text{Hom}(R(G), \mathbb{Z})$, ただし $C^*(G)$ は G の群 C^* -環.

KK 理論は位相的 K 理論と幾何的 K ホモロジー理論を内包しており, さらに, 次に述べる KK 積により解析的指数などの様々な概念が KK 理論における操作として理解できる. KK 積は 3 つの C^* -環 A, B, C に対して定義されるペアリング

$$KK(A, B) \times KK(B, C) \rightarrow KK(A, C), (x, y) \mapsto x \otimes_B y$$

である. 例えばコンパクト多様体 M に対して

$$KK(\mathbb{C}, C(M)) \otimes KK(C(M), \mathbb{C}) = K^0(M) \otimes K_0^{\text{geom}}(M) \rightarrow KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

は $K_0^{\text{geom}}(M)$ の元である微分作用素に対して $K^0(M)$ の元であるベクトル束を係数として解析的指数を与える写像 (指数写像) に一致する.

[14] において Loizides-Rodsphon-Song らは, コンパクト Lie 群 G の等長的作用をもつコンパクトとは限らない Riemann 多様体 M 上で Braverman による Dirac 作用素の変形 $D + \sqrt{-1}c(\underline{\mu})$ が定める同変指数をある KK 群の要素の KK 積として記述した. 具体的には Kasparov による Dirac 作用素 D が定める KK 類 $[D_{M,\Gamma}] \in KK(G \times \text{Cl}_\Gamma(M), \mathbb{C})$ と $\underline{\mu}$ の定める KK 類 $[\sqrt{-1}c(\underline{\mu})] \in KK(C^*(G), G \times \text{Cl}_\Gamma(M))$ を用いて

$$[D + \sqrt{-1}c(\underline{\mu})] = [\sqrt{-1}c(\underline{\mu})] \otimes_{G \times \text{Cl}_\Gamma(M)} [D_{M,\Gamma}] \in KK(C^*(G), \mathbb{C}) = \text{Hom}(R(G), \mathbb{Z})$$

となること *10 を示した. ここでは詳細は述べないが, $\text{Cl}_\Gamma(M)$ は群作用の軌道に沿ったベクトルの生成する Clifford 代数束 $Cl(TM)$ の切断のなす C^* -環の部分 C^* -環である. また, $G \times \text{Cl}_\Gamma(M)$ は $C^*(G)$ と $\text{Cl}_\Gamma(M)$ のクロス積とよばれる C^* -環である. Loizides-Rodsphon-Song は, この分解を用いて切除公式や同境不変性など同変指数 $[D + \sqrt{-1}c(\underline{\mu})]$ の性質の KK 理論的な再証明を与えた. 平行した議論により, 我々の変形も KK 積として記述できる.

定理 4.1. *orbital Dirac* 型作用素 D_T は KK 群 $KK(C^*(T), T \times \text{Cl}_\Gamma(M))$ の元を定め, 定理 2.1 の仮定のもと, KK 積

$$KK(C^*(T), T \times \text{Cl}_\Gamma(M)) \times KK(T \times \text{Cl}_\Gamma(M), \mathbb{C}) \rightarrow KK(C^*(T), \mathbb{C}) = \text{Hom}(R^*(T), \mathbb{Z})$$

9 空間 X から C^ -環 $C(X)$ の対応は反変的なので, 空間を入力とすると共変と反変が入れ替わる.

*10 正確には, $\underline{\mu}$ が定める同変 KK 群 $KK_G(\mathbb{C}, \text{Cl}_\Gamma(M))$ の元の descent 写像による像として定まる元を用いる.

に関して

$$[D_T] \otimes_{T \times \text{Cl}_\Gamma(M)} [D_{M,\Gamma}] = [M, W; V]$$

が成立する.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah. *Elliptic Operators and Compact Groups.*, Vol. 401 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1974.
- [2] S. Baaĵ and P. Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^* -modules hilbertiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 296, No. 21, pp. 875–878, 1983.
- [3] T. Baier, C. Florentino, J. M. Mourao, and J. P. Nunes. Toric Kähler metrics seen from infinity, quantization and compact tropical amoebas. *J. Differential Geom.*, Vol. 89, No. 3, pp. 411–454, 2011.
- [4] M. Braverman. Index theorem for equivariant Dirac operators on noncompact manifolds. *K-Theory*, Vol. 27, No. 1, pp. 61–101, 2002.
- [5] V. Danilov. The geometry of toric varieties (Russian). *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 33, No. 2, pp. 85–134, 1978. English translation: *Russian Math. Surveys* 33 (1978), no. 2, 97–154.
- [6] T. Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment. *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 116, No. 3, pp. 315–339, 1988.
- [7] H. Fujita. S^1 -equivariant local index and transverse index for non-compact symplectic manifolds. *Math. Res. Lett.*, Vol. 23, No. 5, pp. 1351–1367, 2016.
- [8] H. Fujita. A Danilov-type formula for toric origami manifolds via localization of index. *Osaka J. Math.*, Vol. 55, No. 4, pp. 619–645, 2018.
- [9] H. Fujita. Deformation of dirac operators along orbits and quantization of noncompact hamiltonian torus manifolds. *Canad. J. Math.*, pp. 1–31, 2021.
- [10] H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida. Torus fibrations and localization of index I—polarization and acyclic fibrations. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–26, 2010.
- [11] K. Hattori and M. Yamashita. Spectral convergence in geometric quantization — the case of toric symplectic manifolds. arXiv:2002.12495.
- [12] Y. Karshon and E. Lerman. Non-compact symplectic toric manifolds. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, Vol. 11, pp. Paper 055, 37, 2015.
- [13] G. Kasparov. Elliptic and transversally elliptic index theory from the viewpoint of KK -theory. *J. Noncommut. Geom.*, Vol. 10, No. 4, pp. 1303–1378, 2016.
- [14] Y. Loizides, R. Rodsphon, and Y. Song. A KK -theoretic perspective on deformed Dirac operators. *Adv. Math.*, Vol. 380, , 2021.
- [15] X. Ma and W. Zhang. Geometric quantization for proper moment maps. (english, french summary). *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Vol. 347, No. 7-8, pp. 389–394, 2009.
- [16] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geometry*, Vol. 17, No. 4, pp. 661–692 (1983), 1982.

絡み目の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の 係数多項式

滝岡 英雄 (金沢大学)*

概 要

2 変数 v, z の多項式不変量の HOMFLYPT 多項式が一致する結び目の無限族は金信泰造氏によって発見されている。しかし、2 変数 a, z の多項式不変量の Kauffman 多項式が一致する結び目の無限族は未だ知られていない。本研究では、これら 2 変数多項式不変量の変数 z で整理したときの係数多項式に注目する。河内明夫氏の結果やそれとは異なる手法での宮澤康行氏の結果で、HOMFLYPT 多項式に関しては、任意の s に対して、任意の絡み目の 0 番から s 番までの係数多項式が一致する絡み目の無限族が構成されている。本講演では、HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式のそれぞれの場合に、そのような絡み目の無限族が存在することを S_m^N 交差交換を導入することで示す。

1 HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式

HOMFLYPT 多項式 $P(L; v, z) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ [4, 13] と Kauffman 多項式 $F(L; a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ [9] は、3 次元空間 \mathbb{R}^3 内の有向絡み目の不変量で、以下のスケイン関係式で定義されている。自明な結び目 U に対して、 $P(U; v, z) = F(U; a, z) = 1$ である。スケイン 3 組 (L_+, L_-, L_0) に対して、次が成り立つ:

$$v^{-1}P(L_+; v, z) - vP(L_-; v, z) = zP(L_0; v, z).$$

スケイン 4 組 $(D_+, D_-, D_0, D_\infty)$ に対して、次が成り立つ:

$$aF(D_+; a, z) + a^{-1}F(D_-; a, z) = z(F(D_0; a, z) + a^{-2\nu}F(D_\infty; a, z)).$$

ここで、図 1 に描かれていない部分は同一である 3 つの有向絡み目 L_+, L_-, L_0 の組をスケイン 3 組といい、4 つの有向絡み目図式 D_+, D_-, D_0, D_∞ の組をスケイン 4 組という。また、 $2\nu = w(D_0) - w(D_\infty)$ であり、 $w(D_0)$ と $w(D_\infty)$ は D_0 と D_∞ の交差符号和である。 D_∞ の向きに関しては、 $\delta = 0$ の場合と $\delta = 1$ の場合で図 1 のようになる。 r, r_0, r_∞ を D_+, D_0, D_∞ の成分数とする。このとき、 $\delta = (r - r_0 + 1)/2$ と定義する。 δ は 0 か 1 を値にとり、 $\delta = 0$ の場合は図 1 の交差が自己交差の場合に対応し、 $\delta = 1$ の場合は図 1 の交差が非自己交差の場合に対応する。この対応関係は図 2 よりわかる。

* 〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学 理工研究域 電子情報通信学系

e-mail: takioka@se.kanazawa-u.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/takioka/>

本研究は科研費 (課題番号: JP22K13911) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 57K10, 57K14

キーワード: 結び目, 絡み目, HOMFLYPT 多項式, Kauffman 多項式, 係数多項式

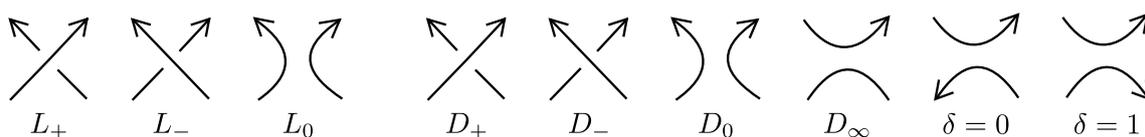


図1 スケイン 3つ組 (L_+, L_-, L_0) とスケイン 4つ組 $(D_+, D_-, D_0, D_\infty)$.

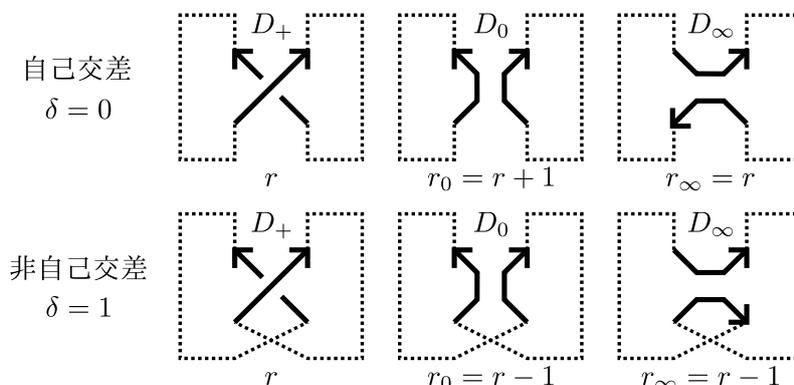


図2 $\delta = 0$ と $\delta = 1$ の状態.

Kauffman 多項式に関しては, 次の定義も知られている. (今回の主結果の計算ではこの定義を用いた.) $F(L; a, z) = a^{-w(D)}\Lambda(D; a, z)$ である. ここで, D は有向絡み目 L の図式で, $w(D)$ は D の交差符号和である. $\Lambda(D; a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ は向きを忘れた絡み目図式に対して定まり, II 型と III 型の Reidemeister 移動で不変で, 以下のスケイン関係式で定義されている. 交差のない自明な結び目図式 \bigcirc に対して, $\Lambda(\bigcirc; a, z) = 1$ である. 図3のように, 向きを忘れたスケイン 4つ組 $(D_+, D_-, D_0, D_\infty)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\Lambda(D_+; a, z) + \Lambda(D_-; a, z) = z(\Lambda(D_0; a, z) + \Lambda(D_\infty; a, z)).$$

図3のように, I 型の Reidemeister 移動に対して, 次が成り立つ:

$$\Lambda(C_+; a, z) = a\Lambda(C_0; a, z), \quad \Lambda(C_-; a, z) = a^{-1}\Lambda(C_0; a, z).$$

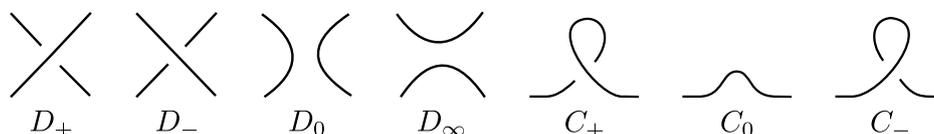


図3 向きを忘れたスケイン 4つ組と I 型の Reidemeister 移動.

ここで, HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式から得られる有名な多項式不変量を紹介する. Alexander-Conway 多項式 $\nabla(L; z)$ [1, 3] は HOMFLYPT 多項式から次のように得られる有向絡み目の不変量である: $\nabla(L; z) = P(L; 1, z)$. Jones 多項式 $V(L; t)$ [6] は HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の両方から次のように得られる有向絡み目の不変量である: $V(L; t) = P(L; t, (t^{1/2} - t^{-1/2})) = F(L; -t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4})$. Q 多項式 $Q(L; x)$ [2, 5] は Kauffman 多項式から次のように得られる無向絡み目の不変量である:

$Q(L; x) = F(L; 1, x)$. 2つの絡み目の不変量の値が異なれば, それらの絡み目は同型でないことが示せるが, 同型でない絡み目でも不変量の値が一致してしまう場合が存在する. 特に, HOMFLYPT 多項式が一致する結び目の無限族は金信泰造氏により発見されている [7]. Kirby のリスト [11] にも紹介されているが, Kauffman 多項式が一致する結び目の無限族が存在するかは未だ知られていない. 金信泰造氏の最近の結果で, HOMFLYPT 多項式と Q 多項式が一致する結び目の無限族が構成されている [8].

2 HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の係数多項式

成分数が r の絡み目 L の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式は, それぞれ次のように表すことができる:

$$P(L; v, z) = (-v^{-1}z)^{-r+1} \sum_{n \geq 0} p_n(L; v) z^{2n}, \quad F(L; a, z) = (az)^{-r+1} \sum_{n \geq 0} f_n(L; a) z^n.$$

ここで, $p_n(L; v) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$, $f_n(L; a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$ で, 特に $p_0(L; v) \neq 0$, $f_0(L; a) \neq 0$ である. 故に, 成分数が異なる絡み目に対しては, それらの HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式は異なることがわかる. $p_n(L; v)$ と $f_n(L; a)$ をそれぞれ HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の n 番係数多項式と呼ぶ. 河内明夫氏の結果 [10] やそれとは異なる手法での宮澤康行氏の結果 [12] で, HOMFLYPT 多項式に関しては, 任意の s に対して, 任意の絡み目の 0 番から s 番までの係数多項式が一致する絡み目の無限族が構成されている. 本講演では, HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式のそれぞれの場合に, そのような絡み目の無限族が存在することを示す. ここで, 絡み目の連結和 (図 4 参照) と HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の関係について述べる. 絡み目 L, L' の連結和 $L \# L'$ の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式は次のようになる.

$$P(L \# L'; v, z) = P(L; v, z)P(L'; v, z), \quad F(L \# L'; a, z) = F(L; a, z)F(L'; a, z).$$

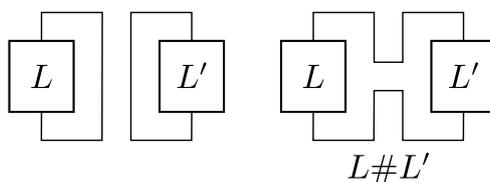


図 4 連結和.

故に, HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の 0 番から s 番までの係数多項式が自明になり $s+1$ 番係数多項式が自明でない結び目 K を発見することができれば, それを与えられた絡み目 L に連結和することにより, L の 0 番から s 番までの係数多項式が一致し $s+1$ 番係数多項式は異なる絡み目 $L \# K$ が構成できる. 本講演では, そのような結び目も構成できる S_m^N 交差交換という絡み目の局所変形を導入する.

3 S_m^N 交差交換

ここからは、絡み目やタングルはすべて図式として考える。絡み目図式、タングル図式を単に絡み目、タングルと呼ぶ。図5のように、 S_m^N を m 半ひねり ($m \in \mathbb{Z}$) をもつ1個のタングル R_m , $N-1$ 個のタングル R , N 個のタングル Q をつないだタングルとする。ここで、 N は正の整数である。

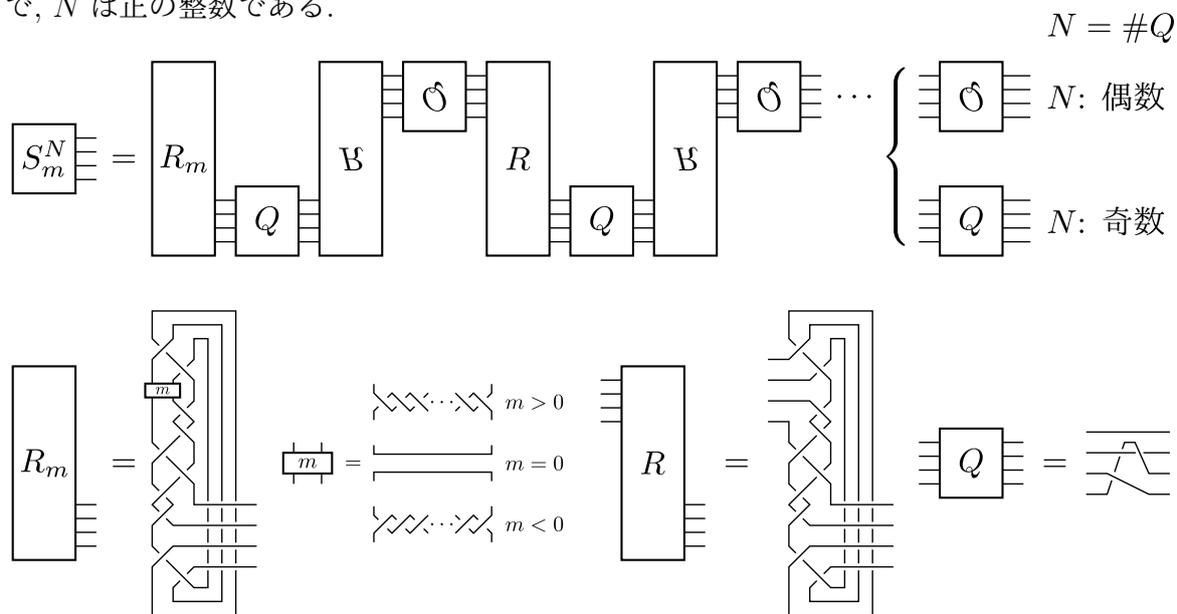


図5 タングル S_m^N .

$N = 0$ の場合に関しては、図6のように、タングル $S_1^0, S_{-1}^0, S_0^0, S_\infty^0$ を定義する。



図6 タングル $S_1^0, S_{-1}^0, S_0^0, S_\infty^0$.

図7のように、タングル Q は、その鏡像と同型である。図8のように、タングル S_1^N ($N \geq 1$) は S_1^{N-1} と同型であるので、 S_1^0 と同型である。図9のように、タングル S_m^N ($m \neq 1, N \geq 1$) は素なタングルであることが示せる。

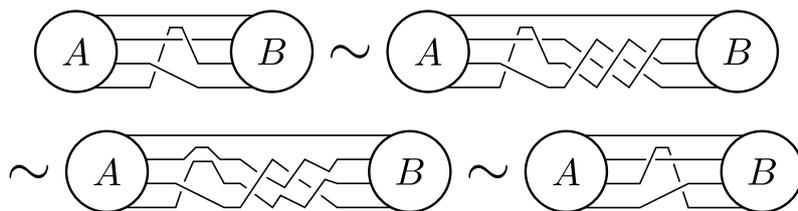


図7 タングル Q は、その鏡像と同型である。

ここで、図10のように、絡み目の1つの交差 (タングル S_1^0) をタングル S_m^N で置き換える操作あるいはその逆の操作を S_m^N 交差交換という。特に、 S_{-1}^0 交差交換は、いわゆる交差交換である。

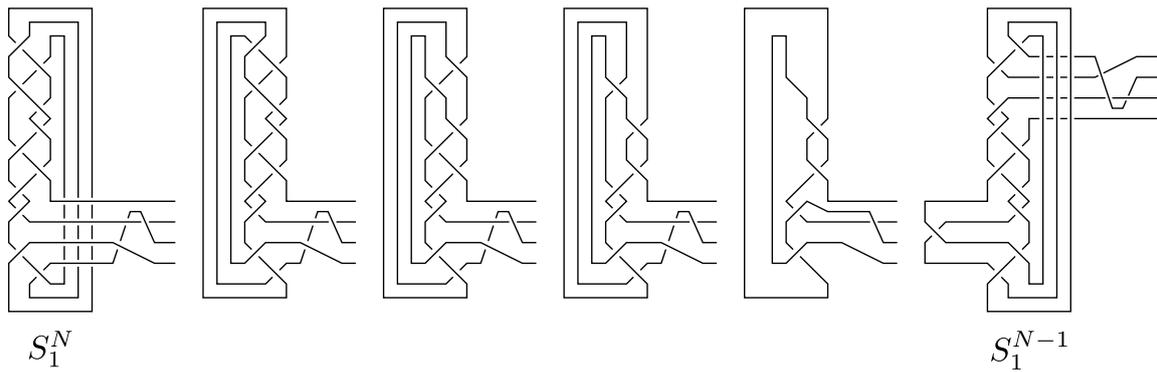


図8 タングル S_1^N ($N \geq 1$) は S_1^{N-1} と同型である.

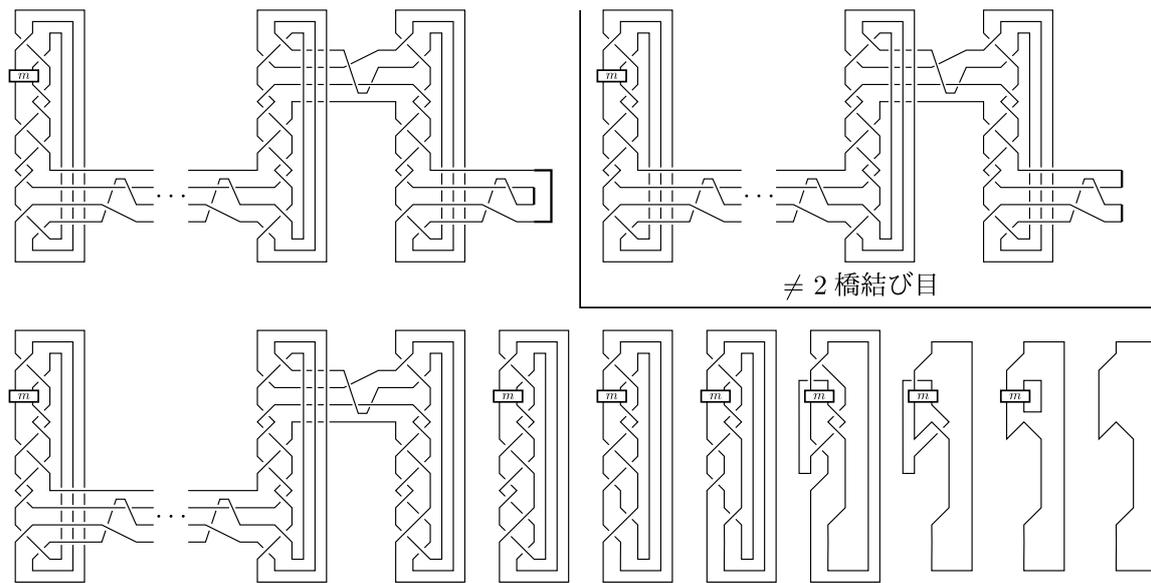


図9 タングル S_m^N ($m \neq 1, N \geq 1$) は素なタングルである.

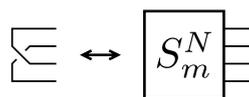


図10 S_m^N 交差交換.

4 絡み目 $L_m^N(T)$ と主結果

図11のように、任意の絡み目 L は1つの交差とタングル T をつないだ形で描ける. これを $L_1^0(T)$ で表す. この交差を構成する2本の弧のつながり具合で、図11のように、タングル T を0型, ∞ 型, X 型, $-X$ 型に分ける. この交差における1回の S_m^N 交差交換で得られる絡み目を $L_m^N(T)$ で表す. 表1のように、整数 m の偶奇性とタングル T の型の組で、(I) から (VIII) の場合を考える. 例えば、絡み目 $L_1^0(T)$, $L_0^0(T)$, $L_\infty^0(T)$, $L_m^N(T)$ の成分数は、表1のようになる. 次の定理 4.1, 4.4 が、本講演の主結果である.

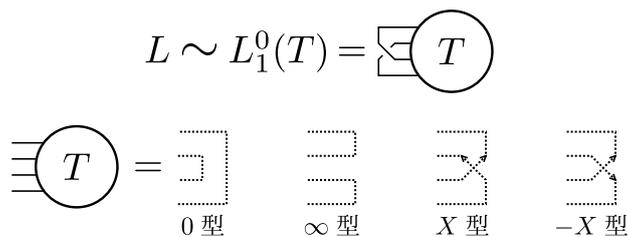


図 11 タングル T .

(m, T)	$\#L_1^0(T)$	$\#L_0^0(T)$	$\#L_\infty^0(T)$	$\#L_m^N(T)$
(I) (奇数, 0 型)	r	r	$r + 1$	r
(II) (奇数, ∞ 型)	r	$r + 1$	r	r
(III) (奇数, X 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r
(IV) (奇数, $-X$ 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r
(V) (偶数, 0 型)	r	r	$r + 1$	r
(VI) (偶数, ∞ 型)	r	$r + 1$	r	r
(VII) (偶数, X 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r
(VIII) (偶数, $-X$ 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r

表 1 (I)–(VIII).

定理 4.1. (HOMFLYPT 多項式の場合) L を絡み目, N を正の整数とする. このとき, 絡み目の無限族 $\{L_m^N(T)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ が存在し, $p_i(L_m^N(T); v) = p_i(L; v)$ ($0 \leq i \leq s$) が成り立つ.

$$\text{ここで, } s = \begin{cases} \text{(I)} & 2N - 1, \\ \text{(II)} & 2N - 2, \\ \text{(III)} & 2N - 1, \\ \text{(IV)} & 2N - 1, \\ \text{(V)} & 2N - 2, \\ \text{(VI)} & 2N - 3 \ (N \neq 1), \\ \text{(VII)} & 2N - 2, \\ \text{(VIII)} & 2N - 2 \end{cases} \quad \text{である. 特に, } L_1^N(T) \text{ は } L \text{ と同型である.}$$

さらに, 例外を除いて, $p_{s+1}(L_m^N(T); v) \neq p_{s+1}(L_{m'}^N(T); v)$ ($m \neq m'$) が成り立つ. 例外は, $p_0(L_1^0(T); v) = p_0(L_{-1}^0(T); v) \dots (*)$ をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ の場合である.

備考 4.2. 条件 $P(L_1^0(T); v, z) = P(L_{-1}^0(T); v, z) \dots (**)$ をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ を考える. この絡み目 $L_1^0(T)$ は条件 (*) をみたし, さらに, $P(L_m^N(T); v, z) = P(L; v, z)$ が成り立つ. 図 12 のような無効交差で S_m^N 交差交換をする場合, 絡み目 $L_1^0(T)$ は T が 0 型の絡み目で条件 (**) をみたす. しかし, この場合は, 絡み目 $L_m^N(T)$ は L と同型になる.

問題 4.3. 無効交差でない交差で S_m^N 交差交換をする場合, 条件 (**) をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ は存在するか? (条件 (*) の場合は容易に存在することがわかる.)

定理 4.4. (Kauffman 多項式の場合) L を絡み目, N を正の整数とする. このとき, 絡み目の無限族 $\{L_m^N(T)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ が存在し, $f_i(L_m^N(T); a) = f_i(L; a)$ ($0 \leq i \leq s$) が成り立つ.

ここで, $s = \begin{cases} \text{(I)} & N, \\ \text{(II)} & N - 1, \\ \text{(III)} & N + 1, \\ \text{(IV)} & N + 1, \\ \text{(V)} & N - 1, \\ \text{(VI)} & N - 2 \ (N \neq 1), \\ \text{(VII)} & N, \\ \text{(VIII)} & N \end{cases}$ である. 特に, $L_1^N(T)$ は L と同型である.

さらに, 例外を除いて, $f_{s+1}(L_m^N(T); a) \neq f_{s+1}(L_{m'}^N(T); a)$ ($m \neq m'$) が成り立つ. 例外は, $f_0(L_\infty^0(T); a) = (1 + a^2)a^{-2\nu} f_0(L_0^0(T); a) \cdots (\dagger)$ をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ の場合である.

備考 4.5. 条件 $\begin{cases} F(L_0^0(T); a, z) = a^{2\nu} F(L_1^0(T); a, z), \\ F(L_\infty^0(T); a, z) = ((a^{-1} + a)z^{-1} - 1) F(L_1^0(T); a, z) \end{cases} \cdots (\ddagger)$

をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ を考える. この絡み目 $L_1^0(T)$ は条件 (\dagger) をみたし, さらに, $F(L_1^0(T); a, z) = F(L_{-1}^0(T); a, z)$ 及び $F(L_m^N(T); a, z) = F(L; a, z)$ が成り立つ. 図 12 のような無効交差で S_m^N 交差交換をする場合, 絡み目 $L_1^0(T)$ は T が 0 型の絡み目で条件 (\ddagger) をみたす. しかし, この場合は, 絡み目 $L_m^N(T)$ は L と同型になる.

問題 4.6. 無効交差でない交差で S_m^N 交差交換をする場合, 条件 (\ddagger) をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ は存在するか? (条件 (\dagger) の場合は容易に存在することがわかる.)

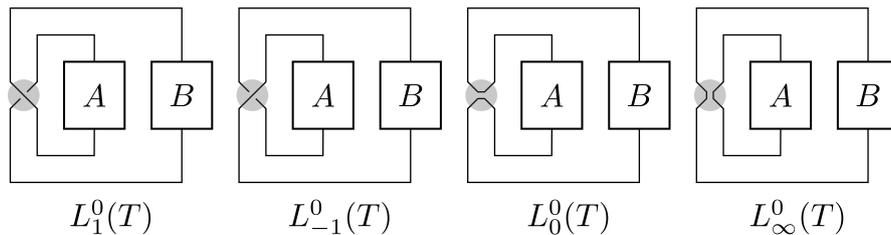


図 12 無効交差をもつ T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$.

5 結び目 $K_{m,\ell}^N$

タングル T として, 図 13 の ℓ 半ひねり ($\ell \in \mathbb{Z}$) をもつタングル T_ℓ を考える. $L_1^0(T_\ell)$ は自明な結び目である. このとき, 図 14 のように, 結び目 $L_m^N(T_\ell)$ と同型な結び目を $K_{m,\ell}^N$ で表す. タングル S_m^N の性質より, $K_{1,\ell}^N$ と $K_{m,-1}^N$ は自明な結び目である. タングル Q の性質より, 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の鏡像は $-K_{-\ell,-m}^N$ と同型である. それ故, $K_{m,-m}^N$ は $(-)$ 両手型結び目である. 次の定理 5.1, 5.2 で, 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式を示す. ここで, 各場合 $(m, \ell) = (\text{奇数}, \text{奇数}), (\text{奇数}, \text{偶数}), (\text{偶数}, \text{奇数}), (\text{偶数}, \text{偶数})$ は, それぞれ表 1 の (I), (II), (V), (VI) に対応している.

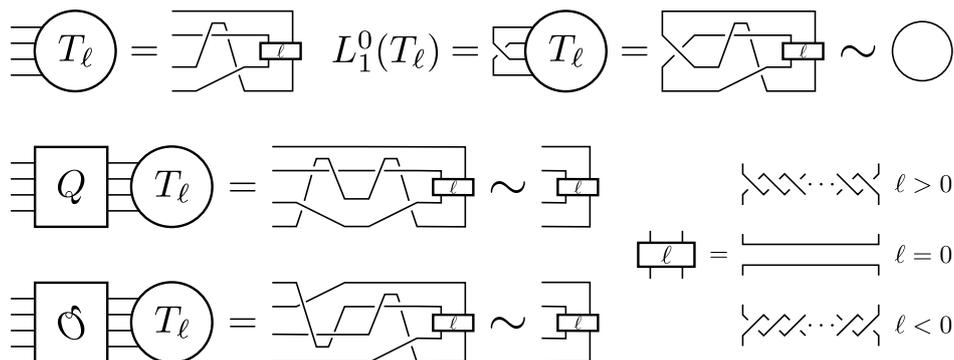


図 13 タングル T_ℓ .

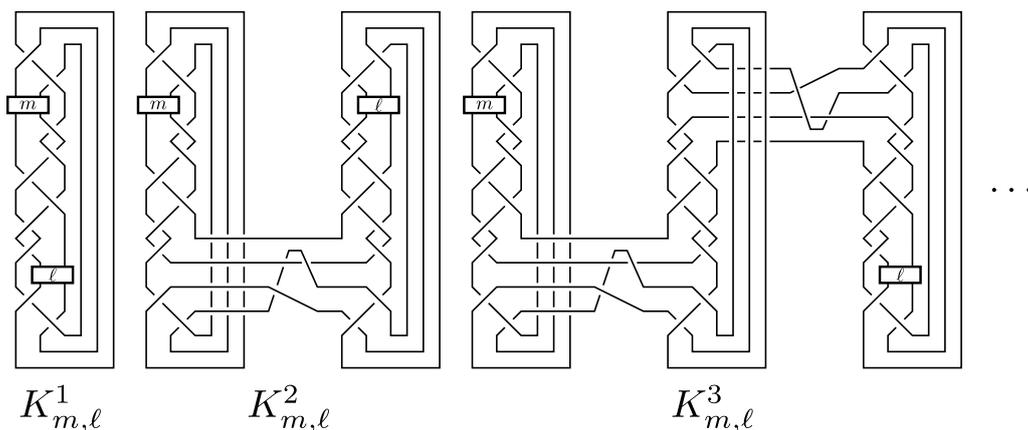


図 14 結び目 $K_{m,\ell}^N$.

定理 5.1. $\zeta = z^4(2 + z^2)^2$ とする. 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の HOMFLYPT 多項式 $P(K_{m,\ell}^N; v, z)$ は、次のようになる:

$$P(K_{m,\ell}^N; v, z) = \begin{cases} 1 - \zeta^N(1 - v^{-m+1})(1 - v^{-\ell-1})\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{奇数}), \\ 1 - z^2\zeta^{N-1}(v^{-2} + 1)(1 - v^{-m+1})(v^{-\ell}(v^{-1} - v)^2 + (1 + v^2 - 2v^{-\ell})z^2)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{偶数}), \\ 1 - z^2\zeta^{N-1}(1 + v^2)(1 - v^{-\ell-1})(v^{-m}(v^{-1} - v)^2 + (v^{-2} + 1 - 2v^{-m})z^2)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = (\text{偶数}, \text{奇数}), \\ 1 - \left(2z^2 + z^4 + v^{-m}((v^{-1} - v)^2 - (3 - v^2)z^2 - z^4)\right) \left(2z^2 + z^4 + v^{-\ell}((v^{-1} - v)^2 + (v^{-2} - 3)z^2 - z^4)\right)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = [(\text{偶数}, \text{偶数}) N = 1], \\ 1 - z^4\zeta^{N-2}(v^{-1} + v)^2(v^{-m}(v^{-1} - v)^2 + (v^{-2} + 1 - 2v^{-m})z^2) \left(v^{-\ell}(v^{-1} - v)^2 + (1 + v^2 - 2v^{-\ell})z^2\right)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = [(\text{偶数}, \text{偶数}) N \geq 2]. \end{cases}$$

定理 5.2. 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の Kauffman 多項式 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ は, 次のようになる:

$$F(K_{m,\ell}^N; a, z) = \begin{cases} 1 - (-1)^{\frac{m+\ell-2}{2}} \frac{m-1}{2} \frac{\ell+1}{2} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^{N+1}, *] & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{奇数}), \\ 1 - (-1)^{\frac{m+\ell-1}{2}} \frac{m-1}{2} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^N, *] & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{偶数}), \\ 1 - (-1)^{\frac{m+\ell-1}{2}} \frac{\ell+1}{2} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^N, *] & (m, \ell) = (\text{偶数}, \text{奇数}), \\ 1 - (-1)^{\frac{m+\ell}{2}} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^{N-1}, *] & (m, \ell) = (\text{偶数}, \text{偶数}). \end{cases}$$

ここで, 変数 x の Laurent 多項式 $\sum_{i=m}^M a_i x^i$ を最小次数と最大次数の項を使って, それぞれ $[a_m x^m, *]$ や $[*, a_M x^M]$ のように表す. 表 3, 4 の σ_n は $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_{n-1} + \sigma_{n+1} = z\sigma_n$ で定義された変数 z の多項式である.

	$m \geq 2$	$m = 1$
$\ell \geq 1 (N = 1)$	$[*, 3(1+a^2)a^{m+\ell-2}z^{m+\ell+8}]$	1
$\ell \geq 1 (N \geq 2)$	$[*, 3 \times 2^{N-1}(1+a^2)a^{m+\ell-2}z^{10N+m+\ell-2}]$	1
$\ell = 0 (N = 1)$	$[*, (1+a^2)a^{m-2}z^{m+8}]$	1
$\ell = 0 (N \geq 2)$	$[*, 2^{N-1}(1+a^2)a^{m-2}z^{10N+m-2}]$	1
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	$[*, 2^N(1+a^2)a^{m+\ell-1}z^{10N+m-\ell-3}]$	1

	$m = 0$	$m \leq -1$
$\ell \geq 1 (N = 1)$	$[*, (1+a^2)a^{\ell-1}z^{\ell+9}]$	$[*, 4(1+a^2)a^{m+\ell-1}z^{-m+\ell+9}]$
$\ell \geq 1 (N \geq 2)$	$[*, 3 \times 2^{N-2}(1+a^2)a^{\ell-1}z^{10N+\ell-1}]$	$[*, 9 \times 2^{N-2}(1+a^2)a^{m+\ell-1}z^{10N-m+\ell-1}]$
$\ell = 0 (N = 1)$	$[*, (a^{-1}+a)^2z^8]$	$[*, (1+a^2)a^{m-1}z^{-m+9}]$
$\ell = 0 (N \geq 2)$	$[*, 2^{N-2}(a^{-1}+a)z^{10N-1}]$	$[*, 3 \times 2^{N-2}(1+a^2)a^{m-1}z^{10N-m-1}]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	$[*, 2^{N-1}(1+a^2)a^{\ell}z^{10N-\ell-2}]$	$[*, 3 \times 2^{N-1}(1+a^2)a^{m+\ell}z^{10N-m-\ell-2}]$

表 2 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 z に関する最大次数の項.

	$m \geq 3$	$m = 2$
$\ell \geq 1$	$[(-1)^N(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+3}a^{-4N+1}, *]$	$[(-1)^{N+1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{-4N+1}, *]$
$\ell = 0$	$[(-1)^{N+1}(2-z^2)(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{-4N+1}, *]$	$[(-1)^N(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{-4N+1}, *]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	$[(-1)^{N+1}\sigma_{\ell+1}(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{-4N+\ell+1}, *]$	$[(-1)^N\sigma_{\ell+1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N-1}a^{-4N+\ell+1}, *]$

	$m = 1$	$m \leq 0$
$\ell \geq 1$	1	$[(-1)^{N+1}\sigma_{m-1}(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{-4N+m-1}, *]$
$\ell = 0$	1	$[(-1)^N\sigma_{m-1}(1-z^2)^{N+1}z^{2N-1}a^{-4N+m-1}, *]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	1	$[(-1)^N\sigma_{m-1}\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{-4N+m+\ell-1}, *]$

表 3 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 a に関する最小次数の項.

	$m \geq 2$	$m = 1$
$\ell \geq 0$	$[*, (-1)^N\sigma_{m-1}\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{4N+m+\ell+1}]$	1
$\ell = -1$	1	1
$\ell = -2$	$[*, (-1)^{N+1}\sigma_{m-1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N-1}a^{4N+m-1}]$	1
$\ell \leq -3$	$[*, (-1)^N\sigma_{m-1}(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{4N+m-1}]$	1

	$m = 0$	$m \leq -1$
$\ell \geq 0$	$[*, (-1)^{N+1}\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^{N+1}z^{2N-1}a^{4N+\ell+1}]$	$[*, (-1)^N\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{4N+\ell+1}]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell = -2$	$[*, (-1)^N(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{4N-1}]$	$[*, (-1)^{N+1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{4N-1}]$
$\ell \leq -3$	$[*, (-1)^{N+1}(2-z^2)(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{4N-1}]$	$[*, (-1)^N(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+3}a^{4N-1}]$

表 4 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 a に関する最大次数の項.

備考 5.3. $(m, \ell) \neq (m', \ell')$, $m, m' \neq 1$, $\ell, \ell' \neq -1$ とする. 定理 5.1 より, $P(K_{m,\ell}^N; v, z) = P(K_{m',\ell'}^N; v, z)$ であるための必要十分条件は $(N', m', \ell') = (N, \ell + 2, m - 2)$, $(m, \ell) =$ (奇数, 奇数), (奇数, 偶数), [(偶数, 偶数) $N \geq 2$] となる. 定理 5.2 と $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 a に関する 2 番目に大きい次数と 2 番目に小さい次数の項より, 結び目 $K_{m,\ell}^N$ ($m \neq 1, \ell \neq -1$) は, すべて異なることがわかる.

参考文献

- [1] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306.
- [2] R. D. Brandt, W. B. R. Lickorish and K. C. Millett, A polynomial invariant for unoriented knots and links, Invent. Math. **84** (1986), no. 3, 563–573.
- [3] J. H. Conway, An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, from: “Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)”, Pergamon, Oxford (1970), 329–358.
- [4] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246.
- [5] C. F. Ho, On polynomial invariants for knots and links, Thesis (Ph.D.)-California Institute of Technology. 1986. 95 pp.
- [6] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111.
- [7] T. Kanenobu, Infinitely many knots with the same polynomial invariant, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 1, 158–162.
- [8] T. Kanenobu, Infinitely many knots with the same polynomial invariant, II, in preparation.
- [9] L. H. Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), no. 2, 417–471.
- [10] A. Kawauchi, Almost identical link imitations and the skein polynomial, Knots 90 (Osaka, 1990), 465–476, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [11] R. Kirby, Problems in Low-Dimensional Topology, 1995.
- [12] Y. Miyazawa, A fake HOMFLY polynomial of a knot, Osaka J. Math. **50** (2013), no. 4, 1073–1096.
- [13] J. H. Przytycki and P. Traczyk, Invariants of links of Conway type, Kobe J. Math. **4** (1988), no. 2, 115–139.

リボン Yetter–Drinfeld 加群とタングル不変量

小鳥居 祐香 (広島大学/理化学研究所)*¹

葉廣 和夫 (京都大学)*²

概 要

本稿ではモノイダル圏においてピボタル対象とリボン対象の概念を定義する。それらは (双対性を仮定していない) モノイダル圏からピボタル圏あるいはリボン圏を構成する。この構成法を Hopf 代数上の Yetter–Drinfeld 加群がなす組み紐圏に適用することにより, Hopf 代数上のリボン Yetter–Drinfeld 加群の概念を与え, リボン圏を構成する。それによりタングル不変量を与える。本稿の内容は [4] に基づく。

1 はじめに

Reshetikhin と Turaev [8] はリボン Hopf 代数の概念を導入し, リボン Hopf 代数 H 上の有限次元加群の圏 $H\text{-mod}^{fd}$ がリボン圏になることを示した。また枠付き有向タングルの圏 \mathcal{T} はただ一つの対象によって生成される自由なりボン圏 [11, 12] であるため, 任意のリボン圏はタングル圏 \mathcal{T} から有限次元ベクトル空間の圏への関手を与える。よって関手的タングル不変量を与える。Jones 多項式のような多くの絡み目の量子不変量はこの方法で構成されることが知られている。

また Yetter と Drinfeld [13, 2] は Hopf 代数上の Yetter–Drinfeld 加群の概念を導入した。これは Hopf 代数 H 上の加群かつ余加群であり作用と余作用がある両立条件を持つものである。 H 上の Yetter–Drinfeld 加群の圏 \mathcal{YD}_H は組み紐圏の構造を持つ。また H 上の有限次元 Yetter–Drinfeld 加群によるその充満部分圏はリジッド (つまり, 左双対を持つ) 組み紐圏の構造を持つ [1]。 (これはリボン圏と近く, つまりタングル不変量を持つことに近いが異なる。) また有限次元 Hopf 代数 H に対して, H 上の Yetter–Drinfeld 加群の圏 \mathcal{YD}_H は $D(H)$ -加群の圏と同値であることがよく知られている。ここで $D(H)$ とは H の Drinfeld double であり, 基底空間として $H \otimes H^*$ を持つ準三角 Hopf 代数である。準三角 Hopf 代数 H にそのリボン元 v を加えることによってリボン Hopf 代数 $H \oplus Hv$ が得られることもよく知られている [8]。よって, 有限次元 Hopf 代数 H から初め, リボン圏 $D(H) \oplus D(H)v\text{-mod}^{fd}$ が得られ, そこから付随したタングル不変量も得られる。

*¹ 〒739-8521 広島県東広島市鏡山 1-7-1 広島大学 大学院先進理工系科学研究科

e-mail: kotorii@hiroshima-u.ac.jp

*² e-mail: habiro@math.kyoto-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:18H01119, 20K14322) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-18M15, MSC-16T05, MSC-57K16, MSC-57K10

キーワード: Hopf 代数, Yetter–Drinfeld 加群, モノイダル圏, リボン圏, タングル

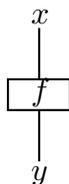


図1 射の図式的表示

本稿では, Yetter–Drinfeld 加群からリボン圏を構成する異なるアプローチを紹介する. Hopf 代数上のリボン *Yetter–Drinfeld* 加群の概念を定義する. これは, H 上の有限次元 Yetter–Drinfeld 加群 X であり, ある自己同型写像 $\gamma_X : X \rightarrow X$ ((2.6.1) を見よ.) を持つものである. 次の結果を示す. ここで, H は有限次元であることを仮定しない.

定理 1.1 (命題 3.4, 定理 4.1). H を可逆な対合射を持つ体 k 上の Hopf 代数とする. このとき, リボン *Yetter–Drinfeld* 加群の圏はリボン圏の構造を持つ. したがって, 枠付きタングルの不変量を与える.

Hopf 代数と Yetter–Drinfeld 加群の概念は, 任意の対称モノイダル圏において定義される. 本稿ではこの一般的なセッティングで議論する.

2 準備

この章では, (厳格な) モノイダル圏, 組み紐圏, 対称モノイダル圏, ピボタル圏, リボン圏の概念を紹介する. 詳細は [5, 6, 9] を参照されたい.

2.1 モノイダル圏

モノイダル圏 \mathcal{M} とは, 関手 $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ を備えた圏であり, この関手は (自然同型を除いて) 結合性と対象 I に関する単位性を持ち, よく知られたコヒーレント条件を満たす. \mathcal{M} が結合性と単位性を厳格に満たすとき, \mathcal{M} を厳格なモノイダル圏という. 本稿では簡単のため, 厳格なモノイダル圏について考えるが, 厳格でないモノイダル圏に対しても同様の主張が成り立つことを示せる. 厳格なモノイダル圏の逆圏 \mathcal{M}^{op} は厳格なモノイダル構造 \otimes^{op} を持つ. ここで, \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対し $X \otimes^{\text{op}} Y = Y \otimes X$ となり, \mathcal{M} の任意の射 f, g に対し $f \otimes^{\text{op}} g = g \otimes f$ となる. 厳格なモノイダル圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格なモノイダル関手 $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは, $F(I) = I$ かつ $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$ を満たす関手である.

厳格なモノイダル圏の射を図式的な表示を用いて表すことにする. 各対象は垂直な紐により表し, 射 $f : x \rightarrow y$ は図1のように表す. このとき, 図2のように, 合成は図式を縦に繋げることによって得られ, テンソル積は横に並べることによって得られる.

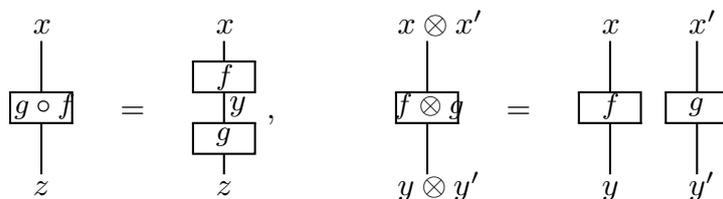


図2 合成とテンソル積.

2.2 双対性

\mathcal{M} を厳格なモノイダル圏とする. \mathcal{M} の対象 X, X^* と \mathcal{M} の射

$$d_X = \text{cup}_{X^* X} : X^* \otimes X \rightarrow I, \quad b_X = \text{cap}_{X X^*} : I \rightarrow X \otimes X^*$$

に対して,

が成り立つとき, 四つ組 (X, X^*, d_X, b_X) を \mathcal{M} における双対という. このとき, 対象 X^* や三つ組 (X^*, d_X, b_X) は X の左双対と呼ばれる. 厳格なモノイダル圏 \mathcal{M} の各対象が左双対を持つとき, \mathcal{M} は (左) リジッドであるという. このとき, 各対象 X の左双対を一つ選ぶことにより, 各 X をその選んだ左双対 X^* に送り, 各射 $f: X \rightarrow Y$ をその左双対射

$$f^* = \text{cap}_{Y^* X^*} \circ f : Y^* \rightarrow X^* \quad (2.2.1)$$

に送る関手 $(-)^*: \mathcal{M}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ を定義できる.

2.3 厳格なピボタル圏

厳格なリジッドモノイダル圏 \mathcal{M} が厳格なピボタル圏であるとは, ある指定された左双対とそれにより定まる左関手 $(-)^*: \mathcal{M}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ に対して, 次の四つの性質を満たすときである:

1. $(-)^*: \mathcal{M}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ は厳格なモノイダル関手である,
2. $d_I = b_I = \text{id}_I$,
3. \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対し, 次の等式が成り立つ:

$$d_{X \otimes Y} = d_Y(Y^* \otimes d_X \otimes Y), \quad b_{X \otimes Y} = (X \otimes b_Y \otimes X^*)b_X,$$
4. $(-)^{**} = \text{Id}_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

厳格なピボタル圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格なピボタル関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは、厳格なモノイダル関手であって、 \mathcal{M} の全ての対象 X に対して

$$F(X^*) = F(X)^*, \quad F(d_X) = d_{F(X)}, \quad F(b_X) = b_{F(X)}$$

が成り立つものである。このような関手 F は左双対関手と可換である。

2.4 組み紐圏

厳格なモノイダル圏 \mathcal{M} が厳格な組み紐圏であるとは、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して、自然同型

$$\psi_{X,Y} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ Y \quad X \end{array} : X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X$$

が定義され、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y, Z に対して

$$\psi_{X \otimes Y, Z} = (\psi_{X,Z} \otimes Y)(X \otimes \psi_{Y,Z}), \quad \psi_{X, Y \otimes Z} = (Y \otimes \psi_{X,Z})(\psi_{X,Y} \otimes Z)$$

が成り立つものである。このとき $\psi_{X,Y}$ は組み紐構造と呼ばれる。

厳格な対称モノイダル圏とは、厳格な組み紐圏 \mathcal{M} であって、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して $\psi_{Y,X} \psi_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$ が成り立つものである。このとき、組み紐構造は対称性と呼ばれ、 $\psi_{X,Y}$ の代わりに

$$P_{X,Y} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ Y \quad X \end{array} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

と表記する。

厳格な組み紐圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格な組み紐関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは、厳格なモノイダル関手であって、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して

$$F(\psi_{X,Y}) = \psi_{F(X), F(Y)}$$

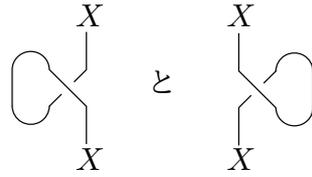
が成り立つものである。 \mathcal{M} と \mathcal{N} が対称モノイダル圏のとき、 F は厳格な対称モノイダル関手と呼ばれる。

2.5 厳格な組み紐ピボタル圏と厳格なりボン圏

組み紐ピボタル圏 \mathcal{M} に対して、任意の対象 X に対する自然同型

$$c_X^R = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{loop} \\ | \\ X \end{array} : X \rightarrow X, \quad c_X^L = \begin{array}{c} X \\ \text{loop} \\ | \\ X \end{array} : X \rightarrow X$$

が存在する。このとき c_X^R (あるいは c_X^L) を X に対する右 (あるいは左) *positive curl* と呼ぶ。ここで c_X^R と c_X^L の逆射はそれぞれ



である。厳格な組み紐ピボタル圏 \mathcal{M} の各対象 X に対して、その右 positive curl と左 positive curl が一致しているとき、 \mathcal{M} を厳格なりボン圏という。

注意 2.1. 他の文献では、リボン (あるいはトーテイル) 圏は通常、捻りを持つリジッド組み紐圏として定義される [11, 8, 5]. ここで厳格な組み紐圏が捻りを持つとは、 \mathcal{M} の各対象 X に対する自然同型 $\theta_X: X \rightarrow X$ の族が存在し、任意の対象 X, Y に対して

$$\theta_I = \text{id}_I, \quad \theta_{X \otimes Y} = \psi_{Y, X} \psi_{X, Y} (\theta_X \otimes \theta_Y), \quad \theta_{X^*} = (\theta_X)^*$$

が成り立つことである。本稿の厳格なりボン圏の定義は通常使われる定義と同値である。

厳格なりボン圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格なりボン関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは、厳格な組み紐ピボタル関手である。つまり、厳格なピボタル関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ であり、同時に厳格な組み紐関手でもある。

2.6 厳格な対称ピボタル圏

厳格な対称ピボタル圏 \mathcal{M} に対して、各対象 X は自然同型

$$\gamma_X (= c_X^R) = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ X \end{array} \quad , \quad \gamma_X^{-1} (= c_X^L) = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ X \end{array} \quad (2.6.1)$$

を持つ。 γ_X (resp. γ_X^{-1}) を X の右 (resp. 左) curl と呼ぶ。 γ_X はモノイダル自然同型、つまり、 $\gamma_I = \text{id}_I$ かつ \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して

$$\gamma_{X \otimes Y} = \gamma_X \otimes \gamma_Y$$

という性質をもつ。また

$$\gamma_{X^*} = (\gamma_X^{-1})^*$$

も成り立つ。

3 ピボタル対象とリボン対象

この章では、モノイダル圏においてピボタル対象の概念を導入する。モノイダル圏 \mathcal{C} におけるピボタル対象は、 \mathcal{C} がリジッドでなくとも、ピボタル圏を構成する。このとき、組み紐圏におけるリボン対象を、ピボタル対象であって付随する右 positive curl と左 positive curl が一致するものと定義する。組み紐圏におけるリボン対象はリボン圏を構成する。

3.1 ピボタル対象

\mathcal{M} を厳格なモノイダル圏とする. \mathcal{M} の対象 X, X^* と射

$$d_X = \begin{array}{c} X^* \quad X \\ \frown \quad \smile \end{array}, \quad b_X = \begin{array}{c} \smile \quad \frown \\ X \quad X^* \end{array}, \quad d_{X^*} = \begin{array}{c} X \quad X^* \\ \frown \quad \smile \end{array}, \quad b_{X^*} = \begin{array}{c} \smile \quad \frown \\ X^* \quad X \end{array}$$

に対して, (X, X^*, d_X, b_X) と $(X^*, X, d_{X^*}, b_{X^*})$ がそれぞれ \mathcal{M} における双対となるとき, 六つ組 $(X, X^*, d_X, b_X, d_{X^*}, b_{X^*})$ を \mathcal{M} におけるピボタル対象という. X^p と Y^p を \mathcal{M} におけるピボタル対象とし, $f: X \rightarrow Y$ を \mathcal{M} の射とする. f の左双対 $f^*: Y^* \rightarrow X^*$ を (2.2.1) で定義する. このとき, 双対 $(X^*, X, d_{X^*}, b_{X^*})$ と $(Y^*, Y, d_{Y^*}, b_{Y^*})$ を用いることにより,

$$f^{**} = (f^*)^* = \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \\ Y \end{array}$$

が得られる. このときピボタル対象 X^p と Y^p の間の射 $f: X^p \rightarrow Y^p$ を, $f = f^{**}$ を満たす \mathcal{M} の射 $f: X \rightarrow Y$ と定義する. \mathcal{M} のピボタル対象とそれらの間の射は圏を構成することが確かめられる. これを \mathcal{M}^p と表記する. このとき次の命題が得られる.

命題 3.1. 圏 \mathcal{M}^p は以下のように厳格なピボタル圏の構造を持つ. \mathcal{M}^p の単位対象は $I^p := (I, I, \text{id}_I, \text{id}_I, \text{id}_I, \text{id}_I)$ である. \mathcal{M}^p における X^p と Y^p のテンソル積は

$$X^p \otimes Y^p = (X \otimes Y, Y^* \otimes X^*, d_{X \otimes Y}, b_{X \otimes Y}, d_{Y^* \otimes X^*}, b_{Y^* \otimes X^*})$$

と定義される. ここで

$$d_{X \otimes Y} = \begin{array}{c} Y^* X^* \quad X Y \\ \frown \quad \smile \end{array}, \quad b_{X \otimes Y} = \begin{array}{c} \smile \quad \frown \\ X \quad Y \quad Y^* X^* \end{array}, \quad d_{Y^* \otimes X^*} = \begin{array}{c} X Y \quad Y^* X^* \\ \frown \quad \smile \end{array}, \quad b_{Y^* \otimes X^*} = \begin{array}{c} \smile \quad \frown \\ Y^* X^* \quad X Y \end{array}$$

とする. \mathcal{M}^p における射のテンソル積は \mathcal{M} における射のテンソル積である. また \mathcal{M}^p における X^p の左双対 $(X^p)^*$ は

$$(X^p)^* = (X^*, X, d_{X^*}, b_{X^*}, d_X, b_X)$$

と定義される. さらに \mathcal{M}^p における対象 X^p の *evaluation* 射と *coevaluation* 射は

$$d_{X^p} = d_X, \quad b_{X^p} = b_X, \quad d_{(X^p)^*} = d_{X^*}, \quad b_{(X^p)^*} = b_{X^*}$$

と定義される. つまり \mathcal{M}^p における任意の射 $f: X^p \rightarrow Y^p$ の双対 $f^*: (Y^p)^* \rightarrow (X^p)^*$ は \mathcal{M} における射 $f: X \rightarrow Y$ の双対 $f^*: Y^* \rightarrow X^*$ となる.

\mathcal{M}^p を \mathcal{M} のピボタル化と呼ぶ. また, \mathcal{M}^p の各対象 X^p を \mathcal{M} の対象 X に送り, 各射をそれ自身に送る自明な “忘却関手 $U: \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{M}$ が存在する.

注意 3.2. 本稿のピボタル対象は Shimizu [10] によるリジッドモノイダル圏の “pivotal object” の概念と類似している. \mathcal{M} がリジッドならば, 本稿のピボタル対象は “pivotal object” の厳格な場合であり, これらがなす圏は [10] における \mathcal{M} の “pivotal cover” となる.

3.2 組み紐圏におけるリボン対象

組み紐圏において, 次の命題が示せる.

命題 3.3. \mathcal{M} を厳格な組み紐圏とする. このとき, \mathcal{M}^p は厳格な組み紐ピボタル圏であり, 忘却関手 $U: \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{M}$ は厳格な組み紐ピボタル関手となる.

\mathcal{M} におけるピボタル対象 X^p がリボン条件 $c_X^L = c_X^R$ をみたすとき, \mathcal{M} におけるリボン対象と呼ぶ. また \mathcal{M}^r を \mathcal{M}^p におけるリボン対象全体からなる充満部分圏とする. そのとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.4. \mathcal{M} を厳格な組み紐圏とする. このとき, \mathcal{M}^r は \mathcal{M}^p の厳格な組み紐ピボタル部分圏であり, 厳格なりボン圏である.

4 Hopf 代数と Yetter–Drinfeld 加群

この章では, 対称モノイダル圏におけるホップ代数と Yetter–Drinfeld 加群の概念をおさらいする. さらに, リボン Yetter–Drinfeld 加群を Yetter–Drinfeld 加群の圏におけるリボン対象として定義する. 最後に, リボン Yetter–Drinfeld 加群の例として, 群代数を紹介する.

4.1 対称モノイダル圏における Hopf 代数

\mathcal{V} を厳格な対称モノイダル圏とする. \mathcal{V} における Hopf 代数とは, \mathcal{V} における次を満たす六つ組 $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ である:

H は \mathcal{V} の対象, $\mu, \eta, \Delta, \epsilon, S$ は \mathcal{V} の射

$$\mu = \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagdown \quad / \\ H \end{array} : H \otimes H \rightarrow H, \quad \eta = \begin{array}{c} | \\ H \end{array} : I \rightarrow H,$$

$$\Delta = \begin{array}{c} H \\ / \quad \backslash \\ H \quad H \end{array} : H \rightarrow H \otimes H, \quad \epsilon = \begin{array}{c} H \\ | \\ I \end{array} : H \rightarrow I, \quad S = \begin{array}{c} H \\ | \\ \boxed{S} \\ | \\ H \end{array} : H \rightarrow H$$

であって次の関係式

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \quad HH \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} HH \quad H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad H \end{array}, & \begin{array}{c} \eta \quad H \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ | \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ | \\ H \end{array} \eta, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \quad HH \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \diagdown \quad \diagup \\ HH \quad H \end{array}, & \begin{array}{c} H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \epsilon \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ | \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \diagdown \quad \diagup \\ H \quad \epsilon \end{array}, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \eta \\ | \\ \epsilon \end{array} & = & (\text{empty}), & \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \epsilon \end{array} & = & \begin{array}{c} H \quad H \\ | \quad | \\ \epsilon \quad \epsilon \end{array}, & \begin{array}{c} \eta \\ \diagdown \quad \diagup \\ H \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} \eta \\ | \\ H \end{array} \begin{array}{c} \eta \\ | \\ H \end{array}, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad H \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad H \quad H \end{array}, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \\ \diagdown \quad \diagup \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ | \\ \epsilon \end{array} & \begin{array}{c} \eta \\ | \\ H \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

が成り立つものである。以下では常に対合射 S は可逆であると仮定する。

4.2 Yetter–Drinfeld 加群

H を厳格な対称モノイダル圏 \mathcal{V} における Hopf 代数とする。 \mathcal{V} における H 上の (左-左) Yetter–Drinfeld 加群とは、 \mathcal{V} の対象 X と \mathcal{V} の射

$$\alpha = \begin{array}{c} H \quad X \\ \diagdown \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array} : H \otimes X \rightarrow X, \quad \beta = \begin{array}{c} \quad \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \quad X \end{array} : X \rightarrow H \otimes X$$

に対して、次の条件を満たす三つ組 (X, α, β) である：

1. (X, α) は左 H -加群，つまり次を満たす：

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} HHX \\ \diagdown \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array} & = & \begin{array}{c} HHX \\ \diagup \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array}, & \begin{array}{c} X \\ \diagdown \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array} & = & \begin{array}{c} X \\ | \\ X \end{array}.
 \end{array}$$

2. (X, β) は左 H -余加群，つまり次を満たす：

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} X \\ \diagup \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array} & = & \begin{array}{c} X \\ \diagdown \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array}, & \begin{array}{c} X \\ \diagdown \quad | \\ \quad \quad | \\ \quad \quad X \end{array} & = & \begin{array}{c} X \\ | \\ X \end{array}.
 \end{array}$$

3.

また Yetter–Drinfeld 加群の準同型写像

$$f: (X, \alpha, \beta) \rightarrow (X', \alpha', \beta')$$

とは, \mathcal{V} の射 $f: X \rightarrow X'$ であって, 左 H -加群準同型写像 $f: (X, \alpha) \rightarrow (X', \alpha')$ であり左 H -余加群準同型写像 $f: (X, \beta) \rightarrow (X', \beta')$ である, つまり次の関係式

を満たすものである. $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ を \mathcal{V} における H 上の Yetter–Drinfeld 加群と Yetter–Drinfeld 加群の準同型写像が構成する圏とする. 圏 $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ は次のように厳格な組み紐圏の構造を持つ ([13, 2]). $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ のモノイダルな単位元は (I, ϵ, η) となる. (X, α, β) と (X', α', β') のテンソル積は

$$(X, \alpha, \beta) \otimes (X', \alpha', \beta') = (X \otimes X', \alpha'', \beta'')$$

と定義される. ここで,

とする. 組み紐構造

$$\psi_{(X, \alpha, \beta), (X', \alpha', \beta')} : (X, \alpha, \beta) \otimes (X', \alpha', \beta') \rightarrow (X', \alpha', \beta') \otimes (X, \alpha, \beta)$$

とその逆射

$$\psi_{(X, \alpha, \beta), (X', \alpha', \beta')}^{-1} : (X', \alpha', \beta') \otimes (X, \alpha, \beta) \rightarrow (X, \alpha, \beta) \otimes (X', \alpha', \beta')$$

は

と定義される.

4.3 リボン Yetter–Drinfeld 加群

リボン *Yetter–Drinfeld* 加群を, \mathcal{V} における H 上の Yetter–Drinfeld 加群が構成する厳格な組み紐圏 $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ におけるリボン対象と定義する. リボン *Yetter–Drinfeld* 加群の圏とは, $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ におけるリボン対象が構成する圏である. このとき命題 3.4 から直ちに次の定理が従う.

定理 4.1. リボン *Yetter–Drinfeld* 加群の圏は厳格なりボン圏である.

4.4 リボン Yetter–Drinfeld 加群の例

k を体とし G を有限群とする. k 上の G の群 Hopf 代数を $k[G]$ と表す. $k[G]$ の余積 Δ , 余単位射 ϵ , 対合射 S を, G の各元 g に対して

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \epsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}$$

と定めることができる. このとき $k[G]$ に対して, $k[G]$ 上の Yetter–Drinfeld 加群の構造 $(k[G], \alpha, \beta)$ を次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \alpha = \text{ad} : k[G] \otimes k[G] &\rightarrow k[G], & \text{ad}(g \otimes h) &= {}^g h = ghg^{-1}, \\ \beta = \Delta : k[G] &\rightarrow k[G] \otimes k[G], & \Delta(g) &= g \otimes g. \end{aligned}$$

こうして, $k[G]$ の $k[G]$ への作用は左随伴作用, $k[G]$ の $k[G]$ への余作用は余積となる. このとき $(k[G], \text{ad}, \Delta)$ は $k[G]$ 上の Yetter–Drinfeld 加群となることが確かめられる. $k[S]$ 上の Yetter–Drinfeld 加群 $k[S]$ とその双対 $k[S]^* = \text{Hom}_k(k[S], k)$ は

$$\begin{aligned} d_{k[S]} : k[S]^* \otimes k[S] &\rightarrow k, & d_{k[S]}(f \otimes x) &= f(x), \\ b_{k[S]} : k &\rightarrow k[S] \otimes k[S]^*, & b_{k[S]}(1) &= \sum_{g \in S} g \otimes g^*, \\ d_{k[S]^*} : k[S] \otimes k[S]^* &\rightarrow k, & d_{k[S]^*}(x \otimes f) &= f(x), \\ b_{k[S]^*} : k &\rightarrow k[S]^* \otimes k[S], & b_{k[S]^*}(1) &= \sum_{g \in S} g^* \otimes g \end{aligned}$$

によってリボン Yetter–Drinfeld 加群の構造を持つ. ここで $g^* \in k[S]^*$ は任意の S の元 h に対して $g^*(h) = \delta_{g,h}$ と定義される. これらの準同型写像がリボン Yetter–Drinfeld 加群の構造を与えることが確かめられる.

リボン Yetter–Drinfeld 加群 $k[S]$ から構成される絡み目不変量は, 絡み目 L に, L の各成分のメリディアンを S の元に対応させる準同型写像 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \rightarrow G$ の個数を対応させる不変量となる. この不変量は Freyd と Yetter によっても考えられている [3].

参考文献

- [1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *Braided Hopf algebras over non-abelian groups*, Bol. Acad. Ciencias (Córdoba) 63 (1999), 45–78.
- [2] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, J. Soviet Math. 41 (1988) no. 2, 898–915.

- [3] P. J. Freyd and D.N. Yetter, *Braided compact closed categories with application with low dimensional topology*, Adv. Math. 77 (1989), 156–182.
- [4] K. Habiro and Y. Kotorii, *Ribbon Yetter-Drinfeld modules and tangle invariants*, arXiv:math/2204.02551.
- [5] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics 115, Springer-Verlag, New York, (1995).
- [6] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [7] S. Majid, *Doubles of quasitriangular Hopf algebras*, Comm. Algebra, 19 (1991), 3061–3073.
- [8] N. Y. Reshetikhin. and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. 103 (1991) 547–597.
- [9] P. Selinger, *A survey of graphical languages for monoidal categories*, New structures for physics, 289–355, Lecture Notes in Phys., 813, Springer, Heidelberg, 2011.
- [10] K. Shimizu, *The pivotal cover and Frobenius-Schur indicators*, J. Algebra 428, 357–402 (2015).
- [11] M. C. Shum, *Tortile tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra 93 (1994), 57–110.
- [12] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of de Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [13] D. N. Yetter, *Quantum groups and representations of monoidal categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 108 (1990), 261–290.

CW 複体上の境界を跨がないモーション設計とその複雑さ

田中 康平 (信州大学)*

本研究は科研費 (課題番号: JP20K03607) および, 住友財団 (助成番号: 210203) の助成を受けたものである.

1 はじめに

代数的位相幾何学を現実世界の問題に応用しようという流れは近年隆盛を誇っている. 特に, 自動運転やカーナビゲーションの発達により, 人や物の輸送に関して, その経路を指定するアルゴリズムの開発は, 効率的な人の移動および物流の根幹を支えている. プログラミングなどの技術的な話を抜きにして, 経路指定アルゴリズムの原始的なアイデアは, 与えられた 2 点 (始点, 終点) に対し, それらを繋ぐパスを与える事を意味している. つまり, 位相空間 X 上での経路指定は, $(x, y) \in X \times X$ に対し,

$$\gamma_{xy} \in X^I = \{[0, 1] \rightarrow X\}$$

で, $\gamma_{xy}(0) = x, \gamma_{xy}(1) = y$ となるパスを対応させる. 言い換えれば, free path fibration

$$p: X^I \longrightarrow X \times X, \quad p(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$$

の切断 ^{*1}を与える事と同値である. ただし, この切断の連続性については現状言及しない. よって, このような p の切断 (経路指定アルゴリズム) が存在するかどうかについては, 以下の事実が簡単に従う.

事実 1.1. p の切断が存在するための必要十分条件は, X が弧状連結である.

上記の事実は, 2 点を繋ぐパスが常に存在する弧状連結性から保証されるが, パスの取り方には何も条件がないので, 実際に経路を指定しようとする無限の組 (x, y) に対し, パスをそれぞれ指定しなければならない. 次の例のように, もっと包括的に指定できた方が良くだろう.

例 1.2. $X \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とすると, 次は p の切断である.

$$s: X \times X \longrightarrow X^I, \quad s(x, y)(t) = (1-t)x + ty$$

* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-3-1 信州大学 経法学部

e-mail: tanaka@shinshu-u.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification: 55M30, 06A07

キーワード: parametrized topological complexity, poset-stratified space, robot motion planning

^{*1} $s: X \times X \rightarrow X^I$ で $p \circ s = \text{id}_{X \times X}$ となる写像.

上記の例は、最も単純な直線で繋ぐパスの与え方であるが、特徴としては、 (x, y) と (x', y') が非常に近い距離にある場合、これらに対応するパス（直線）も非常に近い形になる。すなわち、切断の連続性を考慮している。位相幾何学の始点からも、連続な切断を持つかどうかという疑問が興味深い。このとき、 X^I はコンパクト開位相によって位相空間と考えよう。

事実 1.3 ([7]). p の連続な切断が存在するための必要十分条件は、 X が可縮である。

上記の事実によって、可縮な空間上の連続的な経路指定アルゴリズムは担保されるが、非可縮な空間については、そもそも連続な経路指定は存在しないことがわかる。そこで、 $X \times X$ の全域ではなく、いくつかの局所的な連続経路指定を用意して $X \times X$ を覆えれば、 X 上での移動を制御するプログラムを構成できる。この際に、用意する局所的なアルゴリズムは、当然少ない方が良いわけだが、最低何種類のアルゴリズムを用意すればよいかというのに着目したのが、Farber による topological complexity のアイデアである [7].

1.1 Farber's topological complexity and robot motion planning

以下、 X を弧状連結とする。 $X \times X$ の部分空間 U に対し、 U 上の（連続）経路指定とは、連続写像

$$s: U \longrightarrow X^I$$

で、 $p \circ s = \text{id}_U$ を満たすものである。

定義 1.4. X の *topological complexity* とは、以下の非負整数で与えられる位相不変量である *2.

$$\text{TC}(X) := \min \left\{ n \geq 0 \mid X \times X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{経路指定を持つ開集合} \right\}$$

すなわち、 $\text{TC}(X) = n$ ということは、少なくとも $n + 1$ 種類の局所的な経路指定アルゴリズムが必要であることを示唆している。事実 1.3 は、 $\text{TC}(X) = 0$ と X が可縮であることが同値を意味している。可縮というホモトピー論的には自明な空間が最低値の 0 に対応するというので、「topological complexity」は空間の複雑を表す指標として考えられる。

定義 1.4 においては、 $X \times X$ の開被覆によって、局所的な経路指定を考えたが、開集合である必要性に疑問を持つこともあるだろう。そもそも共通部分が無い方が、実際に $(x, y) \in X \times X$ を与えたときに、どの局所経路指定アルゴリズムを用いればよいかが一意に決まるため都合が良いという考えもある。

*2 この定義に +1 した値を $\text{TC}(X)$ としている場合もある。

定義 1.5. X の *generalized topological complexity* とは、以下の非負整数で与えられる位相不変量である。

$$\mathrm{TC}_g(X) := \min \left\{ n \geq 0 \left| X \times X = \prod_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{経路指定を持つ部分集合} \right. \right\}$$

ただし、 $\prod_{i=1}^{n+1} U_i$ は共通部分を持たない和集合である。

明らかに、 $\mathrm{TC}_g(X) \leq \mathrm{TC}(X)$ が成り立つ。逆の不等式は、 X が良い性質を満たす空間、例えば CW 複体などでは成り立つ。

定理 1.6 ([12]). X を CW 複体とすると、 $\mathrm{TC}(X) = \mathrm{TC}_g(X)$ 。

代数的位相幾何学のテクニックを活用するうえでは、開被覆である方がありがたいので、ここでは $\mathrm{TC}(X)$ の性質を紹介する。

定理 1.7 ([7]). TC はホモトピー不変量である。つまり、 $X \simeq Y$ ならば、 $\mathrm{TC}(X) = \mathrm{TC}(Y)$ 。

$\mathrm{TC}(X)$ と関係の深いホモトピー不変量が LS-category である。

定義 1.8. 位相空間 X に対し、以下の不変量を定義する。

$$\mathrm{cat}(X) := \min \left\{ n \geq 0 \left| X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{open}, U_i \hookrightarrow X \text{ is null-homotopic} \right. \right\}$$

定理 1.9 ([7]). X がパラコンパクトハウスドルフ空間ならば、

$$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}(X) \leq \mathrm{cat}(X \times X) \leq 2\mathrm{cat}(X).$$

$\mathrm{TC}(X)$ の下からの評価として、 X のコホモロジーの環構造に由来するものを紹介する。 k を体とし、 $H^*(X) = H^*(X; k)$ を X のコホモロジー環とする。これはカップ積により、次数付き k -代数の構造を持つ。

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X).$$

また、 $H^*(X) \otimes H^*(X)$ 自身も、以下の積によって次数付き k -代数である。

$$(x \otimes y) \cdot (z \otimes w) := (-1)^{|y||z|} xz \otimes yw.$$

定義 1.10. カップ積 $\cup: H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X)$ に対し、以下の不変量を定義する。

$$\mathrm{zcl}(X) = \max \left\{ n \geq 1 \left| \prod_{i=1}^n \alpha_i \neq 0 \in H^*(X) \otimes H^*(X), \alpha_i \in \mathrm{Ker}(\cup) \right. \right\}$$

定理 1.11 ([7]). $\mathrm{zcl}(X) \leq \mathrm{TC}(X)$ 。

直積空間についても、性質の良い空間に対しては以下の不等式が成り立つ。

定理 1.12 ([7]). X, Y を距離空間としたとき、

$$\text{TC}(X \times Y) \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(Y)$$

1.2 $\text{TC}(X)$ の具体例

可縮な空間 X については、 $\text{TC}(X) = 0$ であるため、非可縮な空間の例を見ていこう。

例 1.13 ([7]). $\text{TC}(S^1) = 1$ である。なぜなら、 S^1 は可縮ではないので、 $\text{TC}(S^1) \geq 1$ である。また、 $S^1 \times S^1$ の開集合で、次の 2 つが考えられる。

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq -y\}, U_2 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq y\}.$$

このとき、 $U_1 \rightarrow (S^1)^I$ は $(x, y) \in U_1$ に対し、 x と y を繋ぐ長さが最小の弧を対応させる。また、 $U_2 \rightarrow (S^1)^I$ は、 $(x, y) \in U_2$ に対し、時計回りに x, y を繋ぐ弧を考える。これらは、連続な経路指定になり、 $S^1 = U_1 \cup U_2$ であるため、 $\text{TC}(S^1) = 1$ である。

高次の球面の場合でも、上記と同様に U_1 上に最短弧を対応させる連続経路指定が構成できる。また、奇数次元球面の場合には、 $(x, y) \in U_2$ に対し、 S^{2k-1} 上の留点を持たないベクトル場を用いて、 U_2 上の連続な経路指定を構成できるため、 $\text{TC}(S^{2k-1}) = 1$ である。

しかし、偶数次元球面の場合には状況が異なる。まず、定理 1.9 により、

$$\text{TC}(S^n) \leq \text{cat}(S^n \times S^n) = 2\text{cat}(S^2) = 2$$

という上からの評価がすべての n について成り立つ。また、 $a \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$ を基本類、 $1 \in H^0(S^n; \mathbb{Q})$ を単位元として、

$$x = a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \text{Ker}(\cup) \subset H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q})$$

を考える。

$$x^2 = ((-1)^{n^2+1} - 1)a \otimes a \in H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q})$$

であるため、 n が偶数の場合には、 $x^2 \neq 0$ である。よって定理 1.11 により、 $\text{TC}(S^{2k}) \geq 2$ である。

例 1.14 ([7]). 上記のことから、

$$\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

低次元のグラフや曲線、曲面については以下の計算結果が知られている。

例 1.15 ([8]). Γ を有限グラフとして、1次元の CW 複体と考える。

$$\text{TC}(\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi_1(\Gamma) = \{1\}, \\ 1 & \text{if } \pi_1(\Gamma) = \mathbb{Z}, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 1.16 ([7]). Σ_g を種数 g の向き付け可能な閉曲面とする.

$$\mathrm{TC}(\Sigma_g) = \begin{cases} 2 & \text{if } g \leq 1, \\ 4 & \text{if } g \geq 2. \end{cases}$$

例 1.17 ([7, 5, 6, 16]). N_g を種数 g の向き付け不可能な閉曲面とする.

$$\mathrm{TC}(N_g) = \begin{cases} 3 & (= \mathrm{TC}(\mathbb{RP}^2)) \text{ if } g = 1, \\ 4 & \text{if } g \geq 2. \end{cases}$$

元々 [7] で Farber が考えた応用は, ロボットアームのモーション設計であった. 複数の関節を持ち, それぞれの関節でロボットアームが円周運動, あるいはより立体的に球面上の回転運動をする場合, その動きを制御する局所的経路指定アルゴリズムは何種類必要かという問題である. すなわち, 積球面の TC を求める問題であった.

例 1.18 ([7]). X を S^m の n 個のコピーの直積とする.

$$X = S^m \times S^m \times \cdots \times S^m$$

このとき,

$$\mathrm{TC}(X) = \begin{cases} n & \text{if } m \text{ is odd,} \\ 2n & \text{if } m \text{ is even.} \end{cases}$$

射影空間の場合には, 実と複素で様相が異なる. 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の場合は, $2n$ 次元のシンプレクティック閉多様体であることから, その非退化な閉 2-形式を用いて TC は計算できる

例 1.19 ([11]). $\mathrm{TC}(\mathbb{C}P^n) = 2n$.

実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の場合には, その TC はユークリッド空間への埋め込み次元 I_n と深い関係があることが知られている.

$$I_n = \min\{k \geq 0 \mid \mathbb{R}P^n \overset{\exists}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^k\}$$

例 1.20 ([11]).

$$\mathrm{TC}(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} n & \text{if } n = 1, 3, 7, \\ I_n - 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2 Parametrized topological complexity

経路指定のアルゴリズムに条件を課したのもも様々考えられている. 例えば, x から y への経路と, y から x への経路は同一であるという対称性を持った経路指定が考えられる [9, 2]. また, x から x への経路は, その場で留まる経路を指定するのが自然だろう [14, 15]. 動作領域が向きづけられているなら, その向きに沿った経路を考えたい [1, 13]. また, 効率化を考えるなら, 経路は最短の方が望ましいかもしれない [17].

本稿で紹介するのは、パラメーター付きの経路指定である [3, 4]. 連続写像 $\pi: X \rightarrow B$ に対し, X は B でパラメーター付けられていると考えられる. B 上のファイバー積

$$X \times_B X = \{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\}$$

を考え,

$$X_B^I = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \mid \pi \circ \gamma \text{ is constant in } B\}$$

という X^I の部分空間を考えよう. このとき, free path fibration $p: X^I \rightarrow X \times X$ の制限として,

$$p|_{X_B^I}: X_B^I \rightarrow X \times_B X$$

が得られる. $X \times_B X$ の部分集合 U 上のパラメーター付き経路指定とは, $p|_{X_B^I}$ の U 上の連続な切断

$$s: U \rightarrow X_B^I$$

である. パラメーター付きの経路指定は, 同じパラメーターを持つ 2 点 (x, y) , すなわち $(x, y) \in \pi^{-1}(b)$ となるものに対し, x, y を $\pi^{-1}(b)$ の中のパスで繋ぐというものである.

定義 2.1. $\pi: X \rightarrow B$ に対し, *parametrized topological complexity* とは ^{*3},

$$\text{TC}(\pi) := \min \left\{ n \geq 0 \mid X \times_B X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, U_i: \text{パラメーター付き経路指定を持つ開集合} \right\}$$

ただし, このような値が存在しない場合には, $\text{TC}(\pi) = \infty$ とする.

注意 2.2. $B = *$ の時, $\text{TC}(\pi) = \text{TC}(X)$ である.

Parametrized topological complexity は元々, 衝突回避の経路指定を考えるため, 配置空間における Fadell-Neuwirth fibration の parametrized topological complexity を計算することから始まった [3, 4].

本稿ではこの parametrized topological complexity を B が半順序集合 (T_0 -Alexandroff 空間) という特殊な場合に適用した結果を紹介する. まず, 半順序集合と位相空間の関係について振り返る.

位相空間 X が Alexandroff 空間であるとは, 任意の X の開集合族 $\{U_\lambda\}$ に対し, その共通部分 $\bigcap U_\lambda$ が再び開集合になることである. このとき, 任意の点 x に対し, その最小の開近傍が,

$$U_x = \bigcap_{x \in U} U$$

として存在する. T_0 -Alexandroff 空間 X 上の半順序として, $x \leq y$ を $x \in U_y$ として定義すれば, X は半順序集合となる.

^{*3}連続写像に対する topological complexity という概念もあるが, それとは異なる.

逆に、 P を半順序集合としたとき、 P の開集合を upper-sets (filters) として指定すると、 P は T_0 -Alexandorff 空間となる。これらの対応は、 T_0 -Alexandorff 空間と半順序集合の圏の同型を与えるため、これらを同一視する。

定義 2.3. X をハウスドルフ空間とし、 $\pi: X \rightarrow P$ を半順序集合 P 上の連続写像とする。以下の条件を満たすとき、 π を *stratified space* とよぶ (詳細は [19, 21] を参照)。

1. π は全射かつ開写像。
2. 任意の $p \in P$ に対し、 $e_p = \pi^{-1}(p)$ は連結かつ局所閉。

例えば、単体複体や (normal) CW 複体などは、その面順序集合上の stratified space である。本稿では X を CW 複体とし、その面順序集合 $P(X)$ 上の自然な stratified space $\pi_X: X \rightarrow P(X)$ に対し、パラメーター付き経路指定を考える。この経路指定は、同じ領域 (胞体) 内に属する 2 点に対し、その領域をはみ出さずにそれらを繋ぐパスを連続的に与える事を意味している。

簡単な例から、 $\text{TC}(\pi_X)$ を見ていこう。まず単体複体の場合には、各単体が凸集合であることから、直線で繋ぐパスが考えられ以下が従う。

定理 2.4 ([20]). K を単体複体としたとき、 $\text{TC}(\pi_K) = 0$ 。

次に、 X を regular CW 複体とする。このとき、 $X \times_{P(X)} X$ は、対角集合にあたる X に押し潰すことができることから、以下が従う。

定理 2.5 ([20]). X を regular CW 複体としたとき、 $\text{TC}(\pi_X) = 0$ 。

対して、non-regular CW 複体については、上記のようにパラメーター付き経路指定を考えるのは難しい。最も単純な例として、0-胞体 v と 1-胞体 e のみからなる円周 S^1 の胞体分割を考えよう。もし、 $\text{TC}(\pi_{S^1}) < \infty$ とすると、 $(v, v) \in U \subset S^1 \times_{P(S^1)} S^1$ となる開集合 U と、パラメーター付き経路指定 $s: U \rightarrow (S^1)_{P(S^1)}^I$ が存在する。 $s(v, v)$ は定義から v 上のコンスタントパスにならざるを得ない。ところが、 v に十分近く、 v を挟んだ $(x, y) \in U$ に対しては、 v を通過できないため、反対側の弧を通過して x, y を繋ぐ以外道がない。このような対応は s の連続性に反するため、 $\text{TC}(\pi_{S^1}) = \infty$ となる。

上記で見たように、我々の身近な non-regular CW 複体は、有限個の開集合上のパラメーター付き経路指定によって全体を網羅できないものが多い。例えば、高次の球面 S^n の最小胞体分割 $S^n = e^{(0)} \cup e^{(n)}$ や

$$\mathbb{R}P^n = e^{(0)} \cup e^{(1)} \cup \dots \cup e^{(n)}$$

などである。この問題の根本的な原因は、 $\text{TC}(\pi)$ の定義において、開被覆を考えたためである。開被覆を一般の被覆、あるいはセパレーションとすれば、定義 1.5 と同様に以下の不変量が考えられる。

定義 2.6. $\pi: X \rightarrow B$ に対し, 以下の不変量を定義する.

$$\mathrm{TC}_g(\pi) := \min \left\{ n \geq 0 \left| X \times_B X = \prod_{i=1}^{n+1} U_i, U_i: \text{パラメーター付き経路指定を持つ部分集合} \right. \right\}$$

ただし, このような値が存在しない場合には, $\mathrm{TC}_g(\pi) = \infty$ とする.

定義から $\mathrm{TC}_g(\pi) \leq \mathrm{TC}(\pi)$ が従う. X を有限 (次元) の CW 複体としたとき, 上記で見た $\mathrm{TC}(\pi_X)$ とは異なり, $\mathrm{TC}_g(\pi_X)$ は有限値を取る.

命題 2.7 ([20]). X を有限の CW 複体とし, $P(X)^\sharp$ を胞体の個数とする. このとき,

$$\mathrm{TC}_g(\pi_X) \leq \min\{P(X)^\sharp - 1, \dim(X)\}.$$

$\mathrm{TC}_g(X)$ の下からの評価としては, CW 複体が位相圏の分類空間として構成できる場合に, LS-category がサポートする.

命題 2.8 ([20]). X が *cylindrically normal* CW 複体で $F(X)$ を *face category* とする (詳しくは [10, 18, 19] を参照). 自然な関手 $F(X) \rightarrow P(X)$ が切断を持ち, $P(X)$ が (弱) 可縮のとき, $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}_g(\pi_X)$.

よって上記の評価式から, 身近な CW 複体に対して, $\mathrm{TC}_g(\pi_X)$ が求まる.

例 2.9 ([20]). 以下の CW 複体に対して, TC_g が求まる.

1. $S^n = e^{(0)} \cup e^{(n)}$ に対し, $\mathrm{TC}_g(S^n \rightarrow P(S^n)) = 1$.
2. $B_k = \vee_k S^1 = e^{(0)} \cup e_1^{(1)} \cup e_2^{(1)} \cup \dots \cup e_k^{(1)}$ に対し, $\mathrm{TC}_g(B_k \rightarrow P(B_k)) = 1$.
3. $T^n = \prod_{i=0}^n S^1 = \prod_{i=0}^n (e^{(0)} \cup e^{(1)})$ に対し, $\mathrm{TC}_g(T^n \rightarrow P(T^n)) = n$.
4. $\mathbb{R}P^n = e^{(0)} \cup e^{(1)} \cup e^{(2)} \cup \dots \cup e^{(n)}$ に対し, $\mathrm{TC}_g(\mathbb{R}P^n \rightarrow P(\mathbb{R}P^n)) = n$.
5. $\mathbb{C}P^n = e^{(0)} \cup e^{(2)} \cup e^{(4)} \cup \dots \cup e^{(2n)}$ に対し, $\mathrm{TC}_g(\mathbb{C}P^n \rightarrow P(\mathbb{C}P^n)) = n$.

参考文献

- [1] Borat, A.; Grant, M. Directed topological complexity of spheres. J. Appl. Comput. Topol. 4 (2020), no. 1, 3–9.
- [2] Basabe, I.; Gonzalez, J.; Rudyak, Y. B.; Tamaki, D. Higher topological complexity and its symmetrization. Algebr. Geom. Topol. 14 (2014), no. 4, 2103–2124.
- [3] Cohen, D. C.; Farber, M.; Weinberger, S. Topology of parametrised motion planning algorithms. SIAM J. Appl. Algebra Geometry, 5(2) (2021), 229–249.
- [4] Cohen, D. C.; Farber, M.; Weinberger, S. Parametrized topological complexity of collision-free motion planning in the plane. arXiv:2010.09809v1.
- [5] Cohen, D. C.; Vandembroucq, L. Topological complexity of the Klein bottle. J. Appl. Comput. Topol. 1 (2017), no. 2, 199–213.
- [6] Dranishnikov, A. On topological complexity of non-orientable surfaces. Topology Appl. 232 (2017), 61–69.

- [7] Farber, M. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.* 29 (2003), no. 2, 211–221.
- [8] Farber, M. Instabilities of robot motion. *Topology Appl.* 140 (2004), no. 2-3, 245-266.
- [9] Farber, M.; Grant, M. Symmetric motion planning. *Topology and robotics*, 85–104, *Contemp. Math.*, 438, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [10] Furuse, M.; Mukouyama, T.; Tamaki, D. Totally normal cellular stratified spaces and applications to the configuration space of graphs. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 45 (2015), no. 1, 169-214.
- [11] Farber, M.; Tabachnikov, S.; Yuzvinsky, S. Topological robotics: motion planning in projective spaces. *Int. Math. Res. Not.* 2003, no. 34, 1853-1870.
- [12] García-Calciñes, J. M. A note on covers defining relative and sectional categories. *Topology Appl.* 265 (2019), 106810
- [13] Goubault, E.; Farber, M.; Sagnier, A. Directed topological complexity. *J. Appl. Comput. Topol.* 4 (2020), no. 1, 11-27.
- [14] Iwase, N.; Sakai, M. Topological complexity is a fibrewise L-S category. *Topology Appl.* 157 (2010), no. 1, 10–21.
- [15] Iwase, N.; Sakai, M. Erratum to “Topological complexity is a fibrewise L-S category” [*Topology Appl.* 157 (1) (2010) 10–21]. *Topology Appl.* 159 (2012), no. 10-11, 2810–2813.
- [16] Iwase, N.; Sakai, M.; Tsutaya, M. A short proof for $tc(K)=4$. *Topology Appl.* 264 (2019), 167-174.
- [17] Recio-Mitter, D. Geodesic complexity of motion planning. *J. Appl. Comput. Topol.* 5 (2021), no. 1, 141-178.
- [18] Tamaki, D. Cellular stratified spaces. *Combinatorial and toric homotopy*, 305-435, *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, 35, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.
- [19] Tamaki, D.; Tanaka, H. L. Stellar stratifications on classifying spaces. *Algebraic topology and related topics*, 287-313, *Trends Math.*, Birkhäuser/Springer, Singapore, 2019.
- [20] Tanaka, K.; Parametrized topological complexity of poset-stratified spaces. *J. Appl. Comput. Topol.* 6 (2022), no. 2, 221-246.
- [21] Yokura, S. Decomposition spaces and poset-stratified spaces. *Tbilisi Math. J.* 13 (2020), no. 2, 101-127.

無限次元 C^∞ -多様体の滑らかなホモトピー

木原 浩 (会津大学)*

1 導入

無限次元解析は、多くの同値でない定式化が登場してきたが 1980-90 年代に Frölicher と Kriegl に始まる convenient calculus が整備され、最終理論の最有力候補とみなされている [KM]。しかし、そのような基礎付けが確立された一方で、我々は無限次元 C^∞ -多様体間の滑らかな写像、無限次元 C^∞ -多様体上のファイバー束の切断、主束、ゲージ変換等がどのくらい豊富にあるのかについて知る手段をほとんどもたない。もちろん実際には、連続な写像、切断、主束、ゲージ変換に関する膨大な知識を活用する為に、滑らかな対象と連続な対象を比較する理論 (平滑化理論) を構築するのが有効だと思われる (写像のソース、束のベースが有限次元のときは、Steenrod の近似定理を精密化する形で平滑化定理 [KM02, MW, Wo07, Wo09] が知られているが、ソース、ベースが無限次元のときに適用できる手段は全く知られていない。) ここでは、滑らかなホモトピー論を構築し、(通常の) 連続なホモトピー論と比較することで、写像、切断、主束、ゲージ変換に対する平滑化定理が得られることを説明する。

まず次節で、抽象的なホモトピー論 (モデル圏論) の考え方を説明し、 C^∞ -多様体の圏 C^∞ よりも広い圏が必要となることを見る。そのような 'smooth space' の convenient category として我々は微分空間 (diffeological space) の圏 \mathcal{D} を用いる。その基本概念を説明したあと [K19] に従い \mathcal{D} 上にモデル構造を導入し (4 節)、[K20] に従い滑らかなホモトピー論を展開し (5-8 節)、それを (無限次元) C^∞ -多様体に適用する (9 節)。

2 抽象的ホモトピー論

この節では単体的ホモトピー論を出発点として、モデル圏論について説明する ([May, GJ, Hir, MP] 参照)。

2.1 単体的ホモトピー論

定義 2.1. (1) 圏 Δ を

$$\begin{aligned} \text{ob } \Delta &= \{[0], [1], [2], \dots\}, \\ \Delta([m], [n]) &= \{[m] \xrightarrow{\phi} [n] \mid \phi \text{ は順序を保つ}\} \end{aligned}$$

で定める。ここで $[n]$ は順序集合 $\{0, \dots, n\}$ を表す。

(2) 単体的集合 K とは、関手 $K : \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$ のことである。よって、単体的写像の圏は関手圏 $\text{Set}^{\Delta^{op}}$ である。この圏は以降 \mathcal{S} とかけられる。

定義により、単体的集合 K は可算コノ集合 K_0, K_1, K_2, \dots と (適切な関係をみたま)

* 〒965-8580 福島県会津若松市一箕町大字鶴賀上居 9 0 会津大学コンピュータ理工学部
e-mail: kihara@u-aizu.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-58B05, MSC-58A40

キーワード：無限次元 C^∞ -多様体, 微分空間

作用素 $K_n \xrightarrow{d_i} K_{n-1}, K_n \xrightarrow{s_i} K_{n+1}$ たちからなると思うことができる。

例 2.2. 位相空間 X に対し、単体的集合 SX を

$$S_n X = \{ \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \mid \sigma \text{ は連続} \}$$

と明らかな d_i, s_i で定めることができる。この構成は位相空間の圏 \mathcal{T} から \mathcal{S} への関手 $S: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{S}$ を定める (特異関手)。

今 $K \in \mathcal{S}$ に対し、その実現 $|K| \in \mathcal{T}$ を

$$|K| = \coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n / \sim$$

で定める (ここで \sim は、 d_i, s_i たちの生成する同値関係)。この構成は実現関手 $||: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$ を定め、 $||: \mathcal{D} \rightleftharpoons \mathcal{T}: S$ は随伴対となる。

注意 2.3. 我々はこの後の応用の為 convenient category of topological spaces として弧生成空間の圏 \mathcal{C}^0 をとる。(位相空間 X が弧生成 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ の位相が連続曲線に関する終位相)。このとき実現関手と特異関手の随伴対は $||: \mathcal{S} \rightleftharpoons \mathcal{C}^0: S$ に制限する。

主に 1950 年代の Kan の仕事により、単体的集合に対しホモトピー論が展開され、そのホモトピー論が関手 $||, S$ を通して本質的に位相空間のホモトピー論と同一であることが示された。では、

- ある圏 \mathcal{K} でホモトピー論が展開できるとはどういうことか?
- 2つの圏 \mathcal{K}, \mathcal{L} のホモトピー論が一致するとはどういうことか?

ということが同題になる。これに対する一つの答えを与えるのが Quillen によるモデル圏の理論である。

2.2 モデル圏

モデル圏の基礎的な概念について述べる。

定義 2.4. 圏 \mathcal{M} は、3つの射のクラス W, F, C (それぞれ弱同値、ファイブレーション、コファイブレーションのクラスとよばれる) が指定されていて5つの公理 (M1-5) みたすときモデル圏とよばれる; M1 のみ \mathcal{M} の完備性、余完備性を要求する純圏論的要請であり、M2-5 はクラス W, F, C に関する要請である。

$A \in \mathcal{M}$ は始対象からの射 $\phi \rightarrow A$ がコファイブレーションのとき、コファイブラントとよばれる。双対的に $X \in \mathcal{M}$ は終対象への射 $X \rightarrow *$ がファイブレーションのとき、ファイブラントとよばれる。任意の対象は弱同値の範囲内でコファイブラントな対象 (ファイブラントな対象、ファイブラント-コファイブラントな対象) におきかえられる。

例 2.5. (1) $\text{Ch}_{\geq 0}(R)$ を左 R -加群の非負次数の鎖複体の圏とする。このとき、 $\text{Ch}_{\geq 0}(R)$

は

$$\begin{aligned} W &= \{M \xrightarrow{f} N \text{ s.t. } H_*(f) \text{ が同型} \} \\ C &= \{M \xrightarrow[\text{mono}]{f} N \text{ s.t. } \text{Coker } f \text{ の各成分が射影的} \} \\ F &= \{M \xrightarrow{f} N \text{ s.t. } f_k \text{ は } \textit{epi} \text{ (} k > 0 \text{)} \} \end{aligned}$$

の下モデル圏となる。そのとき、任意の鎖複体はファイブランチ、“ M がコファイブランチ \Leftrightarrow 各 M_k が射影的”であり、コファイブランチ対象へのおきかえ $P \rightarrow M$ は射影分解に他ならない。このモデル構造は射影的モデル構造とよばれる ([DS])。

(2) $Ch^{\geq 0}(R)$ 上に入射的モデル構造が定義される。

(3) 弧生成空間の圏 C^0 は

$$\begin{aligned} W &= \left\{ X \xrightarrow{f} Y \text{ s.t. } SX \xrightarrow{Sf} SY \text{ は } \mathcal{S} \text{ における弱同値} \right\} \\ F &= \{\Lambda_{k\text{top}}^p \hookrightarrow \Delta_{\text{top}}^p \mid p > 0, 0 \leq k \leq p\}^{\square} \\ C &= \square(F \cap W) \end{aligned}$$

の下、(コファイブランチ生成とよばれるよい)モデル圏となり、任意の対象はファイブランチである。また、CW-複体はコファイブランチであり、

$f: X \rightarrow Y$ が C^0 におけるファイブレーション $\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y$ が Serre ファイブレーション
 $f: X \rightarrow Y$ が C^0 における弱同値 $\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y$ が弱ホモトピー同値。

(射のクラス K に対し、 $\square K, K^{\square}$ は、それぞれ左、右持ち上げ性質で定義される射のクラスを表す。)

(4) 単体的集合の圏 \mathcal{S} は

$$\begin{aligned} C &= \{K \xrightarrow{f} L \text{ s.t. } f_k \text{ は単射 (} k \geq 0 \text{)} \} \\ F &= \{\Lambda_k[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid n > 0, 0 \leq k \leq n\}^{\square} \end{aligned}$$

なるモデル圏構造をもつ。このとき、任意の単体的集合はコファイブランチであり、“ K がファイブランチ $\Leftrightarrow K$ が Kan 複体”である。 K, L ともファイブランチのときは $f: K \rightarrow L$ が弱同値 $\Leftrightarrow f$ が弱ホモトピー同値 (つまり、あらゆるホモトピー群の同型を誘導する); 本講演で出てくる特異複体 SX やその類似 $S^D X$ はすべてファイブランチである。

モデル圏 \mathcal{M} の Quillen ホモトピー圏は $\text{Ho}\mathcal{M} = W^{-1}\mathcal{M}$ で定義される。 A がコファイブランチ、 X がファイブランチなら、 $\mathcal{M}(A, X)$ に適切なホモトピー関係が定義され、それを \simeq_{cl} とかくと、

$$\mathcal{M}(A, X) / \simeq_{cl} \xrightarrow{\cong} \text{Ho}\mathcal{M}(A, X).$$

よって A, X ともファイブランチ・コファイブランチなら、弱同値 $f: A \rightarrow X$ はこのホモトピー関係 \simeq_{cl} に関しホモトピー同値である。

最後に2つのモデル圏 \mathcal{M}, \mathcal{N} のホモトピー論の(ある種の)同値を定式化する Quillen 同値の概念を説明する。

随伴対 $\Phi : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : \Psi$ が Quillen 随伴
 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Φ がコファイブレーションを保ち、 Ψ がファイブレーションを保つ。

Quillen 随伴は、更に、適切な意味で弱同値を respect するとき Quillen 同値といわれる。そのとき、導来関手を通して Quillen ホモトピー圏の間の同値

$$\mathbb{L}\Phi : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \text{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}\Psi$$

が得られる。

3 微分空間

我々は、モデル圏の理論を用いて、滑らかなホモトピー論を構築したいのだが C^∞ -多様体の圏は (convenient, classical にかかわらず) 完備でも余完備でもないので、適切な ‘smooth space’ の convenient category を選び、そこで働く必要がある。

我々は ‘smooth space’ の convenient category として微分空間の圏を用いる。基礎的な概念と性質を紹介しよう ([CW14a, Section 2], [IZ] 参照)。集合 X の parametrization とは写像 $p : U \rightarrow X$ のことである (ただし、 U はあるユークリッド空間 \mathbb{R}^n の開集合)。

定義 3.1. (1) $X = (X, D_X)$ が微分空間

- $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
- X 集合
 - D_X は X の parametrization の集まりで以下をみたす:
 - (i) (Covering) 任意の constant parametrization $U \xrightarrow{p} X \in D_X$.
 - (ii) (Locality) parametrization $U \xrightarrow{p} X$ に対し、 U の開被覆 $\{U_i\}$ で各 $p|_{U_i} \in D_X$ なるものがあれば $p \in D_X$.
 - (iii) (Smooth compatibility) $U \xrightarrow{p} X \in D_X$ と、任意のユークリッド領域の間の滑らかな写像 $V \xrightarrow{F} U$ の合成 $p \circ F \in D_X$.

このとき D_X は X の diffeology とよばれ、その元は plot とよばれる。

(2) $X = (X, D_X), Y = (Y, D_Y)$ を微分空間とする。そのとき、写像 $f : X \rightarrow Y$ が滑らか $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f\#D_X \subset D_Y$.

以下、微分空間の圏を \mathcal{D} と表す。有限次元 C^∞ -多様体の圏が \mathcal{D} に充満忠実に埋め込まれることは明らかである。更に、 \mathcal{D} は次の性質をもつ。

命題 3.2. (1) \mathcal{D} は下部集合関手 $\mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ に関し、始及び終構造をもつ。特に、 \mathcal{D} は完備かつ余完備。

(2) \mathcal{D} はカルテシアン閉圏である。

微分空間 A の下部位相を D_A に関する終位相として定め、下部位相空間を \tilde{A} とかくことにする。ユークリッド領域 U の位相は弧生成なので、我々は、下部位相空間関手

$$\tilde{\cdot} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^0$$

を得る。 \mathcal{C}^0 のカルテシアン閉性を用いると、 \sim が有限積を保つことがわかる。更に弧生成空間 X に対し、微分空間 RX を $RX = (X, D_{RX}), D_{RX} = \{X \text{ への } \mathcal{C}^0\text{-parametrizations}\}$ で定めると、関手 $R: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{D}$ を得るが、

$$\sim: \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^0: R \text{ は随伴対}$$

であることが容易にわかる。

4 \mathcal{M} 上のモデル構造と \mathcal{S} 圏構造

この節以降 \mathcal{M} は圏 \mathcal{D} または \mathcal{C}^0 を表すとする。

4.1 \mathcal{M} 上のモデル構造

\mathcal{C}^0 上のモデル構造を例 2.5(3) から思い出し、それにならって \mathcal{D} 上にモデル構造を構成したい。

\mathcal{D} 上のモデル構造の構成には 標準単体 Δ^p ($p \geq 0$) 上にモデル公理をみたすような弱同値、ファイブレーション、コファイブレーションを定義できる diffeology が必要となる。Hector [Hec] は微分空間のホモトピー論を展開する為に Δ^p に \mathbb{R}^{p+1} の sub-diffeology を与えた Δ_{sub}^p を用いた。しかし k -th horn $\Lambda_k^p = \{(x_0, \dots, x_p) | x_i = 0 \text{ for some } i \neq k\}$ は Δ_{sub}^p の滑らかな変位レトラクトでないので \mathcal{C}^0 に対するモデル公理をチェックする為の議論が適用しない。そこで、我々は少なくとも $p \geq 2$ に対し、 Δ^p 上の新しい diffeology を構成しなければならない。論文 [K19] の半分はそのような Δ^p 上の diffeology の構成に費やされている。

我々は、この新しい diffeology を与えられた標準 p -単体 Δ^p ($p \geq 0$) を用いて、 \mathcal{C}^0 の場合と同様に次のように定める:

$$W = \left\{ X \xrightarrow{f} Y \text{ s.t. } S^{\mathcal{D}}X \xrightarrow{S^{\mathcal{D}}f} S^{\mathcal{D}}Y \text{ は } \mathcal{S} \text{ における弱同値} \right\}$$

$$F = \{\Lambda_k^p \hookrightarrow \Delta^p \mid p > 0, 0 \leq k \leq p\}^{\square}$$

$$C = \square(F \cap W)$$

このとき \mathcal{C}^0 の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 4.1. \mathcal{D} はコファイブラント生成なモデル圏で、任意の対象はファイブラントである。

また、次の結果が成り立つ。

定理 4.2. (X, x) を基点付き微分空間とすると、自然は全単射

$$\Theta_X: \pi_p^{\mathcal{D}}(X, x) \longrightarrow \pi_p(S^{\mathcal{D}}X, x) \quad p \geq 0,$$

があり、 $p > 0$ では群同型である。

系 4.3. $f: X \rightarrow Y$ が \mathcal{D} における弱同値 $\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y$ が滑らかなホモトピー群の上に同型を誘導する。

我々の Δ^p ($p > 0$) を用いて滑らかな実現関手と滑らかな特異関手の随伴対 $| |_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{D} : S^{\mathcal{D}}$ を構成すると、3つの随伴対

$$\begin{array}{ccc} & & \Downarrow \\ & & || \\ \mathcal{S} & \begin{array}{c} \xrightarrow{| |_{\mathcal{D}}} \\ \xleftarrow{S^{\mathcal{D}}} \end{array} & \mathcal{D} \begin{array}{c} \xleftarrow{\sim} \\ \xrightarrow{R} \end{array} & \mathcal{C}^0 \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathcal{S} & \end{array}$$

を得る。 $\widetilde{\Delta}^p = \Delta_{\text{top}}^p$ なので、随伴対 $(| |_{\mathcal{D}}, S^{\mathcal{D}})$ と (\sim, R) の合成はちょうど $(| |, S)$ となる。

定理 4.4.

$$| |_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{D} : S^{\mathcal{D}} \quad \text{と} \quad \sim : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^0 : R$$

は Quillen 同値である。

4.2 \mathcal{M} 上の \mathcal{S} -圏構造

$\mathcal{M} (= \mathcal{D}, \mathcal{C}^0)$ はカルテシアン閉なので、 \mathcal{M} 自身 $\mathcal{M}(X, Y)$ を hom-対象とする \mathcal{M} -圏となる。そこで、 \mathcal{M} は特異関手 $S^{\mathcal{M}}$ を通して \mathcal{S} -圏ともなる (つまり、 \mathcal{M} は関数複体 $S^{\mathcal{M}}\mathcal{M}(X, Y)$ をもつ \mathcal{S} -圏となる)。ここで、以下の記号を用いた

$$| |_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{M} : S^{\mathcal{M}} = \begin{cases} | |_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{D} : S^{\mathcal{D}} & \text{for } \mathcal{M} = \mathcal{D} \\ | | : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{M} : S & \text{for } \mathcal{M} = \mathcal{C}^0 \end{cases}$$

我々は次の問題を考える。

問題 どのような条件の下で

$$\sim : S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X) \longrightarrow SC^0(\widetilde{A}, \widetilde{X})$$

は \mathcal{S} における弱同値となるか？

注意 4.5. (1) \sim の π_0 -部分は明らかな写像

$$[A, X]_{\mathcal{D}} := \mathcal{D}(A, X) / \simeq_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\widetilde{A}, \widetilde{X}) / \simeq_{\mathcal{C}^0} = [\widetilde{A}, \widetilde{X}]_{\mathcal{C}^0}$$

であることに注意。そこで、上の問題は写像に対する平滑化問題の高次ホモトピー版である。

(2) \sim は必ずしも弱同値ではない (Iglesias-Zemmour [IZ], Christensen-Wu [CW14b]).

(3) 同様に我々は切断、主束、ゲージ変換に対する平滑化問題 (の高次ホモトピー版) も考える。

5 連続写像の平滑化

5.1 \mathcal{M} の関数複体とホモトピー関数複体

$\mathcal{D}, \mathcal{C}^0$ とも単体的圏構造をもち、関数複体 $S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X)$ と $SC^0(A, X)$ が定義される。一方、 $\mathcal{D}, \mathcal{C}^0$ ともモデル構造をもちホモトピー関数複体 $\text{map}_{\mathcal{D}}(A, X)$ と $\text{map}_{\mathcal{C}^0}(A, X)$ が定

義される。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{D} & \mathcal{C}^0 \\
 \text{simplicial} & S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X) \longleftrightarrow SC^0(A, X) & \\
 & \uparrow \quad \downarrow & \uparrow \quad \downarrow \\
 \text{model} & \text{map}_{\mathcal{D}}(A, X) \longleftrightarrow \text{map}_{\mathcal{C}^0}(A, X) &
 \end{array}$$

我々は主に関数複体 $S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X)$ と $SC^0(A, X)$ の関係に興味があるが、モデル圏の理論はホモトピー関数複体 $\text{map}_{\mathcal{D}}(A, X)$ と $\text{map}_{\mathcal{C}^0}(A, X)$ の関係を調べる手段を提供する。そこで、 \mathcal{C}^0 及び \mathcal{D} における関数複体とホモトピー関数複体の関係を知ることが必要になる。次が成り立つ。

- \mathcal{C}^0 は単体的モデル圏なので、一般論により次がいえる:

$$SC^0(A, X) = \text{map}_{\mathcal{C}^0}(A, X) \text{ for a cofibrant } A.$$

- \mathcal{D} は単体的モデル圏ではないが、次の結果を証明できる:

$$S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X) \simeq \text{map}_{\mathcal{D}}(A, X) \text{ for a cofibrant } A.$$

注意 5.1. \mathcal{C}^0 は単体的モデル圏だが \mathcal{D} はそうでないという重大な相違は、 $\mathcal{S} \xrightarrow{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{C}^0$ は有限積を保つが $\mathcal{S} \xrightarrow{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{D}$ はそうではないという事実に起因する。

5.2 クラス $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ と $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$

ここで2つの重要な微分空間のクラスを導入する。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{\mathcal{D}} &= \{A \in \mathcal{D} \mid A \simeq_{\mathcal{D}} \text{コファイブラント対象}\}, \\
 \mathcal{V}_{\mathcal{D}} &= \{A \in \mathcal{D} \mid A \xrightarrow{id} R\tilde{A} \text{ は弱同値}\}.
 \end{aligned}$$

このとき、次が成り立つ。

命題 5.2. (1) $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \Rightarrow \tilde{A}$ は CW-複体のホモトピー型をもつ。

(2) $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \Rightarrow A \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$.

(3) 次は同値

(i) $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$.

(ii) $S^{\mathcal{D}}A \hookrightarrow S\tilde{A}$ は \mathcal{S} における弱同値.

(iii) $\pi_*^{\mathcal{D}}(A, a) \xrightarrow[\cong]{} \pi_*(\tilde{A}, a)$ for any $a \in A$.

5.3 写像に対する平滑化定理

これらの準備の下、次が示される。

定理 5.3. $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}, X \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}} \Rightarrow S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X) \hookrightarrow SC^0(\tilde{A}, \tilde{X})$ は \mathcal{S} における弱同値。

6 位相的主束の平滑化

この節では、連続写像に対する平滑化定理を用いて、位相的主束の平滑化定理を示す。

6.1 \mathcal{M} における主束

基本概念を導入しよう。

定義 6.1. $X \in \mathcal{M}$ とする

- (1) X の被覆 $\{U_i\}$ が \mathcal{M} -numerable
 $\Leftrightarrow_{\text{def}} \mathcal{M}$ の関数からなる 1 の分割 $\{\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ で $\{U_i\}$ に従属するものが存在する。
- (2) X が \mathcal{M} -paracompact $\Leftrightarrow_{\text{def}} X$ の任意の開被覆が \mathcal{M} -numerable。

定義 6.2. $B \in \mathcal{M}, G$ を \mathcal{M} における群とする。

- (1) • $\mathcal{M}G = (\mathcal{M}$ における右 G -対象).
 • $E \xrightarrow{\pi} B \in \mathcal{M}G/B$ が 主 G -束
 $\Leftrightarrow_{\text{def}} \exists \{U_i\} B$ の開被覆 s.t.

$$E|_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times G \text{ in } \mathcal{M}G/U_i.$$

- $\text{PMG}/B = (\text{主 } G\text{-束 over } B \text{ in } \mathcal{M}) \subset_{\text{full}} \mathcal{M}G/B.$
- (2) • $E \xrightarrow{\pi} B \in \text{PMG}/B$ が \mathcal{M} -numerable
 $\Leftrightarrow_{\text{def}} E \xrightarrow{\pi} B$ が \mathcal{M} -numerable な自明化開被覆をもつ。
 このとき、 PMG/B の \mathcal{M} -numerable な主 G -束よりなる充満部分圏 $(\text{PMG}/B)_{\text{num}}$ が定義される。

\mathcal{D} における群は 微分群 (diffeological group) とよばれる。我々は \mathcal{C}^0 における群を弧生成群とよぶ。 $\sim : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^0$ は有限積を保つので、“ G が微分群 $\Rightarrow \tilde{G}$ は弧生成群” が成り立つ。更に次が成立する。

補題 6.3. B を微分空間、 G を微分群とする。そのとき関手 $\sim : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^0$ は関手

$$\text{PDG}/X \rightarrow \text{PC}^0\tilde{G}/\tilde{B}$$

を誘導し、それは

$$(\text{PDG}/X)_{\text{num}} \rightarrow (\text{PC}^0\tilde{G}/\tilde{B})_{\text{num}}$$

に制限する。

6.2 主束の平滑化定理

本質的に小さな圏 \mathcal{A} に対し、 $K\mathcal{A} = \text{ob } \mathcal{A}/\cong$ と定める。このとき、よく知られた位相的主束の分類定理 (の弧生成版) と、滑らかな主束の分類定理 [CW21] を用いて、次を得る。

定理 6.4. X を微分空間、 G を微分群とする。 $X \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}, G \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ なら $\sim : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^0$ は

$$K(\text{PDG}/X)_{\text{num}} \xrightarrow{\cong} K(\text{PC}^0\tilde{G}/\tilde{X})_{\text{num}}$$

を誘導する。

7 切断の平滑化

写像の平滑化定理を示す為の議論を精密化することで次が示される。

定理 7.1. $p: E \rightarrow X$ を D -numerable F -束 in \mathcal{D} とする。 $X \in \mathcal{W}_D, F \in \mathcal{V}_D$ なら自然な包含写像

$$S^D\Gamma(X, E) \hookrightarrow S\Gamma(\tilde{X}, \tilde{E})$$

は \mathcal{S} における弱同値である。

8 $(PDG/X)_{\text{num}}$ と $(PC^0\tilde{G}/\tilde{X})_{\text{num}}$ の Dwyer-Kan 同値

この節ではゲージ変換の平滑化を説明し、主束とゲージ変換に対する平滑化を $(PDG/X)_{\text{num}}$ と $(PC^0\tilde{G}/\tilde{X})_{\text{num}}$ の間の Dwyer-Kan 同値という形で統一する。Dwyer-Kan 同値は単体的圏の間の弱い同値として導入された概念なので、 PMG/X を enrich することから始めよう。

8.1 \mathcal{M} に埋め込まれた圏の豊穡化

$X \in \mathcal{M}$ と \mathcal{M} における群 G に対し、次の忠実関手からなる可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & MG \\
 & & & \nearrow & \\
 PMG/X \hookrightarrow & MG/X & & & M \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & M/X & &
 \end{array}$$

\mathcal{M} はカルラシアン閉なので、 \mathcal{M} 自身 \mathcal{M} -圏であり、 hom -集合 $\mathcal{M}(A, B)$ は標準的な diffeology/arc-generated topology をもつ。他の圏の hom -集合は \mathcal{M} の hom -集合への自然な包含をもつのでそれにより、sub-diffeology/arc-generated sub-topology を入れる。そのとき、上のすべての圏は \mathcal{M} -圏であり、すべての関手は \mathcal{M} -関手となる。

\mathcal{M} -圏は特異関手 $S^{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$ により、 \mathcal{S} -圏になるので、上の図式は \mathcal{S} -圏の可換図式とも見なされる。

8.2 豊穡亜群 PMG/X

定義 8.1. \mathcal{V} をカルテシアン閉圏とし、 \mathcal{A} を \mathcal{V} -圏とする。

\mathcal{A} が \mathcal{V} -亜群 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $A, A' \in \mathcal{A}$ に対し、 \mathcal{V} の射

$$\cdot^{-1}: \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{A}(A', A)$$

があって適切な \mathcal{V} における図式を可換にする ([K20, Definition 7.2])。

\mathcal{A} を \mathcal{V} -亜群とすると、 $A \in \mathcal{A}$ の自己同型群 $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$ を

$$\text{Aut}_{\mathcal{A}}(A) = \mathcal{A}(A, A)$$

で定めると明らかに \mathcal{V} における群ともなる。

定理 8.2. M -圏 PMG/X は M -垂群であり、特異関手 $S^M : M \rightarrow S$ により、 S -垂群ともなる。

$\pi : P \rightarrow X$ を主 G -束 in \mathcal{M} とすると、そのゲージ群 $\text{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ が

$$\text{Gau}_{\mathcal{M}}(P) = \text{Aut}_{PMG/X}(P)$$

で定義される。定義より $\text{Gau}_{\mathcal{M}}(P) = PMG/X(P, P) = MG/X(P, P)$ である。 PMG/X を S -垂群とみると、 P の自己同型群は $S^M \text{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ に他ならない。

8.3 ゲージ変換の平滑化定理

ここでは、ゲージ群 $\text{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ を切断の空間と同一視し、切断に関する平滑化定理を適用し、ゲージ変換に関する平滑化定理を得る。

M における主 G -束 $\pi : P \rightarrow X$ に対し、(主束でない) G -束 $P[G, \text{conj}] \rightarrow X$ を

$$\begin{aligned} P[G, \text{conj}] &= P \times_G (G, \text{conj}) \\ &= P \times G / (ug, h) \sim (u, ghg^{-1}) \end{aligned}$$

で定める。

補題 8.3. $\pi : P \rightarrow X$ を主 G -束 in \mathcal{M} とする

- (1) $P[G, \text{conj}] \rightarrow X$ は M/X における群である。よって $\Gamma(X, P[G, \text{conj}])$ は M における群である。
- (2) $\text{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ は M における群として $\Gamma(X, P[G, \text{conj}])$ と同型。

切断に対する平滑化定理を適用して、次を得る。

命題 8.4. $\pi : P \rightarrow X$ を \mathcal{D} -numerable 主 G -束 in \mathcal{D} とする。 $X \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}, G \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ のとき、自然な包含

$$S^{\mathcal{D}} \text{Gau}_{\mathcal{D}}(P) \hookrightarrow S \text{Gau}_{\mathcal{C}^0}(\tilde{P})$$

は S における弱同値である。

8.4 Dwyer-Kan 同値

Dwyer-Kan 同値の概念を用いると、主束とゲージ変換に対する平滑化定理は次の形にまとめられる。

定理 8.5. X を微分空間、 G を微分群とする。 $X \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}, G \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ なら、関手

$$\tilde{\cdot} : (\text{PDG}/X)_{\text{num}} \rightarrow (\text{PC}^0 \tilde{G}/\tilde{X})_{\text{num}}$$

は S -垂群の間の Dwyer-Kan 同値である。

9 C^∞ -多様体への応用

この節では (convenient calculus [KM] における) C^∞ -多様体の概念を紹介し、 C^∞ -多様体の圏 C^∞ が圏 \mathcal{D} に充満忠実に埋め込めることを見る。それから次のことを説明する:

- [KM] で調べられているほとんどの重要な C^∞ -多様体は \mathcal{W}_D に入る。
- すべての C^∞ -多様体は \mathcal{V}_D に入る。

そこで、既に説明した平滑化定理が C^∞ -多様体に適用する。

9.1 Convenient calculus

ここでは、convenient calculus を簡単に復習する。

Local calculus E を局所凸線型位相空間とする。写像 $c: \mathbb{R} \rightarrow E$ はすべての高階の微分が存在し連続であるとき、滑らか (smooth) とよばれる - これは何の問題もない概念である。 E への滑らかな曲線の集合に関する終位相は c^∞ -位相とよばれる。それは一般的にはもとの局所凸位相より細かいが、 E が距離化可能なら、もとの局所的凸位相に一致する ([KM, Theorem 4.11(1)])。

局所凸線形型位相空間の c^∞ -開集合の間の写像 $f: U \rightarrow V$ は、滑らかな曲線を保つとき、滑らか (smooth, C^∞) とよばれる。有限次元では、これは通常滑らかな写像の概念を与える ([KM, Corollary 3.14])。滑らかな写像は明らかに c^∞ -位相に関し連続である; しかしもとの局所凸位相に関しては連続とは限らない ([KM, Corollary 2.11])。

C^∞ -多様体の概念 convenient calculus では、 C^∞ -多様体は convenient ベクトル空間の c^∞ -開集合を微分同相ではり合わせるにより定義される (convenient ベクトル空間は弱い完備性をみたく局所凸線形位相空間である [KM, Theorem 2.14])。

C^∞ -多様体 M, N の間の滑らかな写像はチャートを用いて明らかなやり方で定義される。そのとき、“ $f: M \rightarrow N$ が滑らか $\Leftrightarrow f$ が滑らかな曲線を保つ”である。以下、 C^∞ -多様体の圏を C^∞ で表す。

C^∞ -多様体 M の下部位相空間 \widetilde{M} は集合 M に滑らかな曲線全体に関する終位相を入れたものとして定義される。

9.2 C^∞ の \mathcal{D} への埋め込み

圏 C^∞ は圏 \mathcal{D} の充満部分圏とみなされることを見る。実際、充満忠実な埋め込み

$$I: C^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}$$

は C^∞ -多様体 M に、微分空間 $IM = (M, D_{IM})$ を対応させることで定義される。ここで

$$D_{IM} = \{M \text{ の } C^\infty\text{-parametrizations}\}$$

([K20, Section 2.2])。微分空間 IM は誤解の恐れがなければ単に M とかかれる。

注意 9.1. (1) 関手 $I: C^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}$ は有限積を保ち下部位相空間をとる操作と可換。

- (2) Losik [L] は Fréchet 多様体が \mathcal{D} に充満忠実に埋め込めることを示した。しかし、convenient calculus で働くなら、上述のようにすべての C^∞ -多様体が充満忠実に \mathcal{D} に埋め込まれる (しかもその証明はほとんど自明)。

9.3 C^∞ -多様体の滑らかなホモトピー

我々は次の結果をもつ。

定理 9.2. 局所可縮な微分空間は \mathcal{V}_D に入る。

よって

系 9.3. すべての C^∞ -多様体は \mathcal{W}_D に入る。

次の結果は tom Dieck の定理 [TD] の微分版であり、 C^∞ -多様体が \mathcal{W}_D に入る為の十分条件を与える際の鍵となる。

定理 9.4. X を微分空間とし、 $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の D -numerable な被覆とする。そのとき、

$$\phi \neq \bigvee_{\text{有限}} \sigma \subset A \text{ に対し } U_\sigma (:= \bigcap_{\alpha \in \sigma} U_\alpha) \in \mathcal{W}_D \Rightarrow X \in \mathcal{W}_D.$$

C^∞ -多様体が \mathcal{W}_D に入る為の十分条件を記述する為に次の概念を必要とする。

定義 9.5. (1) C^∞ -多様体 M が遺传的 C^∞ -paracompact $\Leftrightarrow M$ の任意の開集合が C^∞ -paracompact.

(2) C^∞ -多様性 M が準古典的

$\Leftrightarrow M$ が次をみたすようなアトラス $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を許す: 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、 $u_\alpha(U_\alpha)$ 及び $u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ はモデルベクトル空間 E_α において、局所凸位相に関し開集合。

注意 9.6. (準古典性について)

- (1) $u_\alpha(U_\alpha)$ と $u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ はモデルベクトル空間 E_α の c^∞ -開集合だが、もとの局所凸位相に関し開であるとは限らない。
- (2) ほとんどの重要な C^∞ -多様性は次の 2 つの事実により、準古典性条件をみたす:
 - E が Fréchet 空間または Silva 空間なら、 E の c^∞ -位相は、もとの局所凸位相に一致する。
 - 古典的な無限次元解析で定義された C^∞ -多様体は (モデルベクトル空間が convenient なら) 準古典的な C^∞ -多様体を定める。

系 9.7. すべての遺传的 C^∞ -paracompact 準古典的 C^∞ -多様性は \mathcal{W}_D に入る。

約 50 年前、Palais、Heisey、Milnor は無限次元位相多様体が CW-複体のホモトピー型をもつ為の十分条件を調べた [P, Hei, Mil]。上の系と次の例は彼らの結果を可微分な文脈で精密化したものと考えられる。

例 9.8. (1) M を paracompact C^∞ -多様体で、モデルベクトル空間が、次のいずれかであるとする:

- (i) Hilbert 空間 (特に、有限次元ベクトル空間).
- (ii) 核型 Fréchet 空間.
- (iii) 核型 Silva 空間.

そのとき、 M は遺传的 C^∞ -paracompact かつ準古典的、よって \mathcal{W}_D に入る。

(2) M, N を有限次元 C^∞ -多様体とする。そのとき、次の C^∞ -多様体は遺传的 C^∞ -paracompact かつ準古典的、よって \mathcal{W}_D に入る:

- $\mathcal{C}^\infty(M, N)$

- $\text{Diff}(M), \text{Emb}(M, N)$
- $B(M, N) = \text{Emb}(M, N)/\text{Diff}(M)$.

9.4 C^∞ -多様性に対する平滑化

以上の結果を用いて、以下の C^∞ -多様体に対する平滑化定理を得る。圏 $C^\infty, C^\infty/M, \text{PC}^\infty G/M$ 等は $\mathcal{D}, \mathcal{D}/M, \text{PDG}/M$ への (よって \mathcal{D} への) 埋め込みにより \mathcal{D} -圏とみなす。

定理 9.9. M, N を C^∞ -多様体とする。 M が遺伝的 C^∞ -paracompact かつ準古典的なら、自然な包含

$$S^{\mathcal{D}}C^\infty(M, N) \hookrightarrow SC^0(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

は \mathcal{S} における弱同値である。

定理 9.10. $p : E \rightarrow M$ を C^∞ -多様体の滑らかなファイバー束とする。 M が遺伝的 C^∞ -paracompact かつ準古典的なら、自然な包含

$$S^{\mathcal{D}}\Gamma(M, E) \hookrightarrow S\Gamma(\widetilde{M}, \widetilde{E})$$

は \mathcal{S} における弱同値である。

定理 9.11. M を C^∞ -多様体、 G を Lie 群とする。 M が遺伝的 C^∞ -paracompact かつ準古典的なら、関手

$$\widetilde{\cdot} : \text{PC}^\infty G/M \rightarrow \text{PC}^0 \widetilde{G}/\widetilde{M}$$

は単体的垂群の間の Dwyer-Kan 同値である。

参考文献

- [CW14a] J. D. Christensen, G. Sinnamon, and E. Wu, *The D-topology for diffeological spaces*, Pacific Journal of Mathematics **272** (2014), no. 1, 87-110.
- [CW14b] J. D. Christensen and E. Wu, *The homotopy theory of diffeological spaces*, New York J. Math **20** (2014) 1269-1303.
- [CW21] J. D. Christensen and E. Wu, *Smooth classifying spaces*, Israel Journal of Mathematics 241.2 (2021): 911-954.
- [DS] W. G. Dwyer and J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology (1995) 73-126.
- [GJ] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy theory*, Birkhäuser, Verlag, Basel (1999).
- [Hec] G. Hector, *Géométrie et topologie des espaces difféologiques*, Analysis and geometry in foliated manifolds (Santiago de Compostela, 1994) (1995) 55-80.
- [Hei] R. E. Heisey, *Manifolds modelled on R^∞ or bounded weak-* topologies*, Transactions of the American Mathematical Society 206 (1975): 295-312.
- [Hir] P. S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, No. 99, American Mathematical Soc, (2009).
- [IZ] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Vol. 185, American Mathematical Soc, (2013).
- [K19] H. Kihara, *Model category of diffeological spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures, 14.1 (2019): 51-90.

- [K20] H. Kihara, *Smooth Homotopy of Infinite-Dimensional C^∞ -Manifolds*, to appear in *Memoirs of the American Mathematical Society*, available at arXiv:2002.03618 (2020).
- [KM] A. Kriegl and P. W. Michor, *The convenient setting of global analysis*, Vol. 53, American Mathematical Society (1997).
- [KM02] A. Kriegl and P. W. Michor, *Smooth and continuous homotopies into convenient manifolds agree*, unpublished preprint, 2002.
- [L] M. V. Losik, *Fréchet manifolds as diffeological spaces*, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika* 5 (1992): 36-42.
- [May] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, University of Chicago Press, 1993
- [MP] J. P. May and K. Ponto, *More concise algebraic topology: localization, completion, and model categories*, University of Chicago Press, (2011).
- [Mil] J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, *Transactions of the American Mathematical Society* (1959) 272-280
- [MW] C. Müller and C. Wockel, *Equivalences of smooth and continuous principal bundles with infinite-dimensional structure group*, *Advances in Geometry* 9.4 (2009) 605-626.
- [P] R. S. Palais, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, *Topology* 5.1 (1966): 1-16.
- [TD] T. T. Dieck, *Partitions of unity in homotopy theory*, *Composito Math* 23 (1971): 159-167.
- [Wo07] C. Wockel, *Lie group structures on symmetry groups of principal bundles*, *Journal of Functional Analysis* 251.1 (2007): 254-288.
- [Wo09] C. Wockel, *A generalization of Steenrod's approximation theorem*, *Arch. Math.(Brno)* 45.2 (2009) 95-104.