

# 曲面のスケイン代数と量子クラスター代数

湯浅 亘 (大阪公立大学数学研究所)\*

## 0. はじめに

本稿は  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  に付随するスケイン代数と量子クラスター代数に関する石橋典氏 (東北大学) との共同研究 [IY21, IY22] について、スケイン代数の視点から解説したものである。まずスケイン代数  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  と量子クラスター代数  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  の関係について  $\mathfrak{sl}_2$  の場合を例に解説して、その一般化を  $\mathfrak{sl}_3$  や  $\mathfrak{sp}_4$  の場合に行う上での困難や、その困難をどのように回避するかを中心に解説した。そのため [IY21, IY22] の内容の一部しか紹介できていないが、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  を  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  の包含関係を示す方針を理解してもらうことを目標として解説した。

## 1. 背景 : $\mathfrak{sl}_2$ における Muller 氏の仕事

まず始めに、我々の研究の発端となる  $\mathfrak{sl}_2$  の場合における Muller [Mul16] の仕事を振り返ろう。

### 1.1. Muller の定理

$\mathfrak{sl}_2$  に付随する曲面のスケイン代数は Kauffman bracket スケイン代数として、低次元トポロジーにおいて広く知られている対象だと思う。その元は曲面上の結び目図式の  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -係数の線型結合であり、**Kauffman bracket スケイン関係式**

$$\text{⊗} = q \text{⊙} + q^{-1} \text{⊖}, \quad \text{⊙} = -(q^2 + q^{-2}) \text{⊘}$$

を満たす。これは曲面の内部の局所的な図を描いて関係式を表したものであり、関係式に描いていない部分の図は全て一致している。Muller は境界に指定点  $\mathbb{M}$  を持つ曲面  $\Sigma$  を考え、指定点に端点を持つタングルを元として含むような  $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$  係数の Kauffman bracket スケイン代数  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  を定義した。  $\mathbb{M}$  の 1 点  $p$  に対してタングルの端点がいくつ刺さっていても良いが、 $p$  に刺さる端点の間には (同じ高さを持つことも許す) 上下関係の情報が付加されている。この上下情報は、下にある端点ほど  $p$  から離して描くことで表す。さらに、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  においては、上下が隣り合う端点についてスケイン関係式が定義されている:

$$q^{-\frac{1}{2}} \text{⊗} = \text{⊙} = q^{\frac{1}{2}} \text{⊖}, \quad \text{⊙} = 0.$$

2 つタングルを表す図  $D_1$  と  $D_2$  の積  $D_1 D_2$  を  $D_2$  の上に  $D_1$  を重ねた図で定義し、その積を  $\mathbb{Z}_q$  上線形に拡張することで  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  における積を定める。Muller はこのようなスケイン代数  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  を定義し、その分数体  $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  の中に量子クラスター代数  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  を構成した。

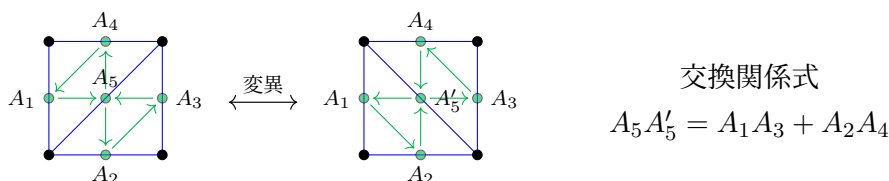
**量子クラスター代数**  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  は **クラスター変数** と呼ばれる  $\mathbb{M}$  を結ぶ単純アークに対応する生成元を持っており、境界弧に対応する可逆な **frozen 変数** とそれ以外の **unfrozen 変数** が存在する。クラスター変数全体の集合は **クラスター** と呼ばれる  $q$ -可換なクラスター変数の部分集合によって覆われている。このクラスターは頂点をそのクラスターに含まれるクラスター変数でラベル付けしたクイバーを用いて表すことができる。また、このクイバーの unfrozen 変数に対応する各頂点に対して **変異** と呼ばれる操作で別のクイバーを得ることができる。この変異に

本研究は科研費 (課題番号: JP19K14528) の助成を受けたものである。

キーワード: スケイン代数, 量子クラスター代数

\* e-mail: wyuasa@kurims.kyoto-u.ac.jp

よってクラスターは別のクラスターと移り合い、それらのクラスター変数の間にはクイバーを用いて計算される量子交換関係式<sup>1</sup>が成立する。 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}$  の場合は、理想三角形分割とクイバーが一一対応しており、フリップが変異に対応している。



また、全てのクラスターにおいてクラスター変数の Laurent 多項式として表される元のなす  $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  の  $\mathbb{Z}_q$ -部分代数を量子 upper クラスター代数とよび  $\mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  で表す。 $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  であることは量子 Laurent 現象 (Berenstein–Zelevinsky [BZ05]) により知られている。このとき、Muller は次を証明した。

**Theorem 1.1** (Muller [Mul16]).  $\Sigma$  を連結で境界に指定点  $\mathbb{M}$  を持つ向き付け可能曲面とする。  $\#\mathbb{M} \geq 2$  のとき、  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  が成り立つ。

ここで、  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}]$  は境界弧に対応する積閉集合 (Ore 集合) で局所化したスケイン代数であり、frozen 変数が可逆であることからこのような局所化を考える必要がある。

## 1.2. 四角形における対応

量子 (upper) クラスター代数については何も説明しないが、上の同型を通して四角形  $Q$  (4 点の指定点を境界にもつ円盤) の場合に  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, Q} \cong \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, Q}[\partial^{-1}]$  による同一視を通してクラスター代数の構造を見てみよう。まず、クラスター変数は  $\mathbb{M}$  の 2 点を結ぶ単純アークになるので  $e_1 = \square, e_2 = \square, e_3 = \square, e_4 = \square, e_5 = \square, e'_5 = \square$  の 6 つになる。ここで、  $e_1, e_2, e_3, e_4$  は frozen 変数に対応するので可逆な元である。クラスターは理想三角形分割に対応するので、  $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  と  $\mathcal{C}' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e'_5\}$  の 2 つである。同じクラスターに入っている元が  $q$ -可換であることも指定点におけるスケイン関係式からすぐに分かる。そしてこの 2 つの理想三角形分割はフリップで移りあう。このフリップに対応する変異における量子交換関係式はスケイン関係式  $e_5 e'_5 = q e_1 e_3 + q^{-1} e_2 e_4$  となる。このように、量子交換関係式は unfrozen 変数をひとつ  $A_i$  から  $A'_i$  に取り替える関係式で  $A_i A'_i = q \bullet X + q \bullet Y$  ( $X, Y$  は共通のどちらにも含まれるクラスター変数の単項式) という形になっている。また、この関係式から  $e'_5 = q e_1 e_3 / e_5 + q^{-1} e_2 e_4 / e_5$  と  $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  の中で Laurent 多項式で書けることから  $e'_5 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  も簡単に見ることができる。しかし、一般の曲面 (または  $\mathfrak{g}$ ) においてはクラスター  $\mathcal{C}$  に含まれるクラスター変数を  $\mathcal{C}'$  に含まれるクラスター変数で展開するとき、複数回の変異を経由するので、任意のクラスター変数が Laurent 展開できるか (つまり、量子 Laurent 現象  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$ ) は明らかではない。

## 1.3. Muller の手法


ここでは Muller が論文 [Mul16] で  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  を証明する際に用いた方法を簡単に紹介して、それが  $\mathfrak{sl}_2$  における特殊な状況を用いていることを理解してもらう。そ

<sup>1</sup> 正確には  $q$  の冪を定める compatibility 行列の情報も必要である。ここで述べているのは正確な定義ではなくスケイン代数から簡単に見ることができる量子クラスター代数のいくつかの構造を述べているだけなので、正確な定義は [BZ05] などを参照していただきたい。

して、我々の  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  におけるクラスプ付きスケイン代数と量子クラスター代数の比較に用いた新しい手法の説明へと移りたい。Muller の証明は次の手順で行われる。

(Ore 整域) まず Muller は単純アークが零因子でないことを示すことで、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  が Ore 整域であることを証明<sup>2</sup>している。よって  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M}) \subset \text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  が分かる。

( $\mathcal{A}^q \subset \mathcal{S}^q$ ) 次に、クラスター変数を対応する単純アークが表すスケイン代数の元へ送ること  
で  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}]$  を示した。

( $\mathcal{S}^q \subset \mathcal{U}^q$ ) 任意のタングルが任意の理想三角形分割  $\Delta$  に付随するクラスターで Laurent 展開できることを示す。これは任意のタングルが理想三角形分割の単純アークを十分たくさん掛けることで理想三角形分割と横断的に交わらないタングルの線形和になることからわかる。実際、スケイン関係式  により、理想三角形分割とタングルとの横断的な交差を減らすことができる。これは単なるスケイン関係式であるが我々は *cutting trick* と呼び  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  の場合も同様の手法を用いる。

( $\mathcal{A}^q = \mathcal{U}^q$ ) Muller は [Mul14] で量子化されていないクラスター代数が “locally acyclic” なときに upper クラスター代数と一致するということを証明している。この定理の量子化版を証明して  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  が条件を満たすことを確認し  $\mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  との一致を示した。

以上の手順により

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q \subset \text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M}) \quad \text{かつ} \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$$

が示されたので、はさみうちにより  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{U}_{\mathfrak{sl}_2, \Sigma}^q$  がわかる。

我々の目標は、Theorem 1.1 を  $\mathfrak{sl}_2$  以外の単純リー代数  $\mathfrak{g}$  について拡張することである。しかし、Muller の方法をそのまま適用しようとしても特に ( $\mathcal{A}^q \subset \mathcal{S}^q$ ) や ( $\mathcal{A}^q = \mathcal{U}^q$ ) の手順で困難が生じる。これらの手順においては  $\mathfrak{sl}_2$  におけるクラスターが理想三角形分割と一対一対応しているという事実が重要となっているが、一般の  $\mathfrak{g}$  についてはそうでない。実際に本稿で扱う  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  においても、理想三角形分割に対応していないクラスターが存在しているだけでなく、理想三角形分割に付随するクラスターにおいても弧に対応するクラスター変数以外に三角形（面）に対応するクラスター変数が存在する。このような理想三角形分割の面に付随するクラスター変数がどのようなスケインの元で表されるかという問題も自明ではない。しかし、我々は sticking trick と呼んでいる手法で [Mul16] とは逆の包含関係  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  の場合に証明した。

次の節では、[IY21, IY22] で得られたクラスプ付きスケイン代数 ( $\mathfrak{sl}_2$  の場合は Muller のスケイン代数) と量子クラスター代数の包含関係を [IYprep] で取り扱ったステイト付きスケイン代数との対応も込めてまとめる。

<sup>2</sup> この命題は量子クラスター代数との比較からは少し話題がずれたスケイン代数の代数的性質の証明となる。とても大切なことではあるが、今の目的を考えるとその証明は脇道に逸れてしまうので解説はしない。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  のときも Muller とは違う手法ではあるがステイト付きスケイン代数を使う少し脇道に逸れる形で証明を行なっている。



**Theorem 2.2** (state-clasp 対応 [IYprep]).  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  とする。このとき、ウェブを境界付近で変形させることで構成される代数準同型写像  $\mathcal{S}_{\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{B}}: \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \rightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}}$  と  $\mathcal{S}_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{M}}: \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}]$  が存在し、互いに逆写像となる。ここで  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}}$  はステイト付きスケイン代数を “bad arcs” のなすイデアルで割って得られる被約ステイト付きスケイン代数<sup>4</sup>である。

さらに、 $q = 1$  において Wilson line の行列要素にステイト付きのアークを対応させることで準同型写像  $\mathcal{O}(\mathcal{A}_{G, \Sigma}^{\times}) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^1(\mathbb{B})_{\text{rd}}$  が作れる。また [IOS22] の結果  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma} = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma} = \mathcal{O}(\mathcal{A}_{G, \Sigma}^{\times})$  を併せることで次の同型が得られる。

**Theorem 2.3** ([IYprep]).  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  とする。  $\#\mathbb{M} \geq 2$  のとき、

$$\mathcal{O}(\mathcal{A}_{G, \Sigma}^{\times}) \cong \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^1(\mathbb{B})_{\text{rd}} \cong \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^1(\mathbb{M})[\partial^{-1}] = \mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma} = \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma}$$

が成り立つ。

## 2.2. $\mathcal{S}^q \subset \mathcal{A}^q$ の証明方法

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  において Theorem 2.1 の包含関係を構成するレシピは以下になる。さらに、この他の単純リー代数に対しても同様の指針で証明が進められると考えている。以後は、ステイト付きスケイン代数については取り扱わないのでクラスプ付きスケイン代数を単に  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q = \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q(\mathbb{M})$  と書く。

**手順 1.** 境界に指定点を持つ曲面  $\Sigma = (\Sigma, \mathbb{M})$  に対して、 $\mathbb{M}$  におけるスケイン関係式を定義して、クラスプ付きスケイン代数  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  を定義する。そして、Ore 整域であることを示す。

**手順 2.**  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  をクラスプ付きスケイン代数の分数体  $\text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  の中に構成する。

- (i) 三角形  $T$  において  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, T}^q$  の各クラスターに対応するウェブの集合 ( $q$ -可換なウェブの集合たちで量子交換関係を満たすもの) を探す。クラスターに対応するウェブの集合をウェブクラスターと呼ぶ。各ウェブクラスターは “decorate” された  $T$  に対応している。
- (ii)  $\Sigma$  の decorated 理想三角形分割  $\Delta$  に付随するウェブクラスターは各理想三角形に対して (i) で見つけたウェブクラスターを集めることで  $\Sigma$  の  $\Delta$  に付随するウェブクラスターが構成できる。
- (iii) decorated 理想三角形分割のフリップを実現する変異列が存在するので、対応するウェブクラスターの列を特定し、量子交換関係がスケイン関係式で実現できることを示す。 ( $\mathfrak{sl}_2$  のときは一回の変異でフリップが実現できた。)
- (iv) decorated 理想三角形分割に付随するクラスターと隣接するクラスターをウェブクラスターとして実現すると、[BZ05, Theorem 5.1] によって  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \text{Frac} \mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q$  が分かる。

**手順 3.** 境界弧に沿うウェブで局所化したクラスプ付きスケイン代数  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$  の単純な生成元を “stiking trick” によって構成して、これらの生成元が上で特定したウェブクラスターのどれかに含まれることを確かめる。

<sup>4</sup>  $\mathfrak{sl}_3$  の被約ステイト付きスケイン代数 [Hig20] では定義されておらず [IYprep] で定義している。







次節以降では、クラスプ付きスケイン代数について紹介して、手順 2. における decorated 理想三角形分割に付随するウェブクラスターの紹介と、手順 3. において重要となるクラスプ付きスケイン代数の生成元について  $\mathfrak{sp}_4$  の場合を例として解説する。もう一度、これまで説明したスケイン代数とクラスター代数の関係をまとめると次のようになる。

$$\mathcal{S}_{g,\Sigma}^q(\mathbb{B})_{\text{rd}} \xrightleftharpoons[\text{state-clasp 対応}]{\cong} \mathcal{S}_{g,\Sigma}^q(\mathbb{M})[\partial^{-1}] \xrightarrow{\text{sticking trick}} \mathcal{A}_{g,\Sigma}^q \xrightarrow{\text{Laurent 現象}} \mathcal{W}_{g,\Sigma}^q \xrightarrow{\hookrightarrow} \text{Frac} \mathcal{S}_{g,\Sigma}^q(\mathbb{M})$$

### 3. スケイン関係式と sticking trick

#### 3.1. スケイン関係式

まず  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  に関するスケイン関係式について紹介する。 $\mathfrak{sl}_2$  の場合は、Section 1 で紹介したように Muller [Mul16] が Kauffman bracket スケイン関係式を境界の指定点において拡張した。Kuperberg [Kup94, Kup96] によって rank 2 の単純リー代数  $\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4, \mathfrak{g}_2$ <sup>5</sup> に対応するウェブが導入され、内部におけるスケイン関係式が定義された。 $\mathfrak{sl}_3$  のウェブは各辺が向き付けられており、3 価頂点は sink  もしくは、source  となっている。境界の指定点におけるスケイン関係式は [FS20]<sup>6</sup> で定義されている。 $\mathfrak{sp}_4$  のウェブは各辺が type 1 (一重線) と type 2 (二重線) の二種類で、3 価頂点は  となっている。その境界の指定点におけるスケイン関係式は [IY22] において定義している。紙面の都合上、スケイン関係式を載せることができなかったため [IY21, IY22] を参照していただきたい。基本的にこれら境界の指定点におけるスケイン関係式は、内部のスケイン関係式と指定点におけるライデマイスター変形  を要請することで自然に導かれる。

#### 3.2. cutting trick と sticking trick

ここで、 $\mathfrak{sp}_4$  の場合を例にとってスケイン関係式から導かれる 2 つの公式を紹介する。一つは *cutting trick* と我々が呼んでいるものである。

**Lemma 3.1** (cutting trick).

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= q^2 \text{Diagram 2} + q \text{Diagram 3} + q^{-1} \text{Diagram 4} + q^{-2} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} &= q^4 \text{Diagram 7} + q^2 \text{Diagram 8} + [2] \text{Diagram 9} + q^{-2} \text{Diagram 10} + q^{-4} \text{Diagram 11} \end{aligned}$$

この公式は Section 1 の  $(\mathcal{S}^q \subset \mathcal{W}^q)$  で紹介したウェブを理想三角形分割に沿って切る公式である。今回は説明しないが、 $\mathfrak{sl}_3$  や  $\mathfrak{sp}_4$  の場合もウェブを Laurent 展開する際に用いる。さらに、全ての係数が正であることを用いて “elevation-preserving” というクラスのウェブが正係数を持つ Laurent 多項式として展開できることを証明した。これはクラスター代数における Laurent 正値性予想という予想に関係する結果である。

もう一つは *sticking trick* と呼んでいるウェブを境界に貼り付けて細かく分割していくための公式である。

<sup>5</sup>  $\mathfrak{g}_2$  のスケイン関係式には誤りがあるが Yonezawa-Sakamoto [?] で修正されている。

<sup>6</sup> [FS20] においてウェブの端点は境界弧に刺さっているが、これは描き方が似ているだけでステイト付きスケイン代数とは異なる。我々のウェブの記法における elevation が低い端点から順にずらして境界弧に並べて描いたものが [FS20] のウェブである。

**Lemma 3.2** (sticking trick).

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= q \text{Diagram 2} - q^2 \text{Diagram 3} + q^3 \text{Diagram 4} - q^4 \text{Diagram 5}, \\
 \text{Diagram 6} &= q^2 \text{Diagram 7} - q^4 \text{Diagram 8} + q^4 [2] \text{Diagram 9} - q^4 \text{Diagram 10} + q^7 \text{Diagram 11}.
 \end{aligned}$$

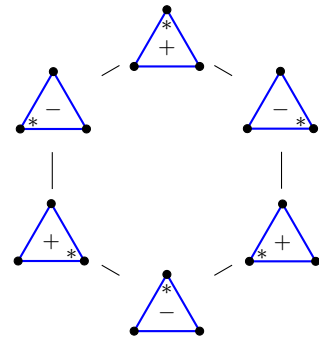
この公式は  $\mathcal{S}_{g,\Sigma}$  の生成元の議論に用いる重要な公式である。

### 4. ウェブクラスターの例 : $\mathfrak{sp}_4$ の場合

この節では  $\mathfrak{sp}_4$  の場合を例にとって、decorated 理想三角形に付随するウェブクラスターや、フリップを実現するウェブクラスターの列を紹介する。

#### 4.1. 三角形の例

$\mathfrak{sp}_4$  の場合、理想三角形の decoration は角の指定と符号  $\{\pm\}$  の選び方から 6 種類ある。それぞれの decorated 理想三角形分割にクラスターが対応しており、各クラスターには、各辺に 2 個ずつの frozen 変数と面に 2 個の unfrozen 変数、合計 8 個のクラスター変数が含まれている。変異は unfrozen 変数に対応して行われ、変異で移り合うクラスター同士を線で結ぶと右図のような長さ 6 のサイクルを持つグラフになる。よって

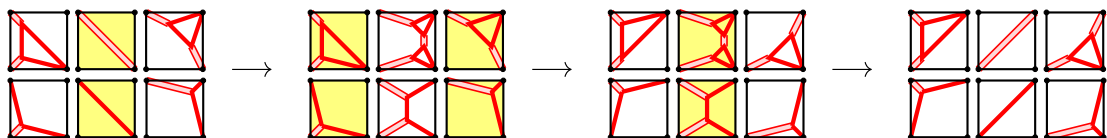


三角形  $T$  の場合は  $\mathfrak{sl}_2$  の場合と同様に全てのクラスター変数に対応するウェブを特定することで  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q[\partial^{-1}]$  が分かる。実際に、これら 6 種類の decorated 理想三角形分割に対応するウェブクラスターは  $\triangle_{+,*} = \{ \text{web 1}, \text{web 2} \} \cup \partial$  と  $\triangle_{-,*} = \{ \text{web 3}, \text{web 4} \} \cup \partial$  で与えられる。ここで  $\partial$  は境界弧に沿う type 1 と type 2 のウェブの集合である。実際に線で繋がっているウェブクラスター同士はあるウェブ  $e$  を  $e'$  に取り替えることで移り合うことが簡単に確認できる。そして、これらのウェブの積  $ee'$  が満たすスケイン関係式とクイバーから計算される量子交換関係式の一致も確認できる。

一方で、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q$  の基底をなすウェブは具体的に図で描くことができる。このウェブたちを上記のウェブクラスターに含まれるウェブの積として書くことで  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q[\partial^{-1}] \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,T}$  を示せる。以上より、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,T}^q[\partial^{-1}] = \mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,T}$  を得る。

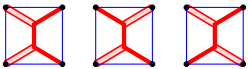
#### 4.2. 四角形の例

四角形の場合、各クラスターは frozen 変数を 12 個（各辺に 2 個ずつ）と unfrozen 変数を 6 個持つ。三角形の場合と異なり、decorated 理想三角形分割に付随するクラスター以外にもクラスターが存在して、さらにクラスター変数全体は無限個となる。よって、全てのクラスター変数にウェブを対応させることは難しいが decorated 理想三角形分割に付随するクラスターを何回か変異して得られるクラスターについては対応するウェブを見つけることも可能である。例えば、Section 2.2 の手順 2. で必要となる decorated 理想三角形分割  $\square_{+,*}$  と  $\square_{-,*}$  を繋ぐ変異列に対応するウェブクラスター（境界弧のウェブは省略）には次のようなものがある。



始めの矢印は 2 回、二番目の矢印は 4 回、最後の矢印は 2 回の変異を省略して書いている。各ウェブクラスターは黄色に塗ったウェブでそれぞれ変異することで右のウェブクラスターへと移る。また、これらのウェブクラスターに含まれるウェブが  $q$ -可換であることもスケイン関係式を用いて簡単に確かめることができる。この他にも、[IY22] では無限個のウェブクラスターからなる変異列を構成している。

## 5. クラスプ付きスケイン代数の生成元

Section 4 で四角形の場合に見たように、decorated 理想三角形分割に付随するウェブクラスターから出発して変異列を辿ることで現れるウェブは  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$  に含まれることがわかる。例えば、 $\mathfrak{sp}_4$  の場合は  $\Sigma$  の任意の decorated 理想三角形に付随するウェブ以外に、 $\Sigma$  の理想四角形内に含まれるウェブ  などが  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}^q$  に含まれることが確認できる。もし、このようなウェブたちがクラスプ付きスケイン代数を生成することが分かれば  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$  の任意の元が  $\mathcal{A}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$  に含まれていることがわかり  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q[\partial^{-1}] \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$  が証明できる。この節では、このような理想三角形や理想四角形に付随する“基本的”なウェブによる生成系を得る方法を解説する。この節でも  $\mathfrak{sp}_4$  の場合を例にとって説明する。

### 5.1. 基底ウェブ

まず、 $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},\Sigma}^q$  の基底について紹介する。Kuperberg [Kup96] は rank 2 の単純リー代数  $\mathfrak{g}$  に付随する円盤上の（境界上に異なる端点を持つウェブからなる）スケイン加群に対してウェブの囲む elliptic face を定義して、このような elliptic face を持たないウェブが基底となることを証明した。このような elliptic face を持たないウェブを**基底ウェブ**と呼ぶ。さらに、Sikora–Westbury [SW07] はスケイン加群のように図の線形和でその元と関係式が表される加群に対して基底を得る手法を発見した。これはスケイン加群における diamond lemma のようなもので、“複雑”なウェブを“単純”なウェブの線形和で置き換える reduction rules と呼ばれる規則たち（スケイン関係式の“左辺”を“右辺”に置き換える規則）が terminal と locally confluence という条件を満たすと、どのような reduction rule の経路を辿ってウェブを簡単にしても一意的に“既約”なウェブの線形和として表されるという定理である。その既約なウェブがスケイン加群の基底（基底ウェブ）を与える。 $\mathfrak{sp}_4$  の場合は基底ウェブを得るために 4 個頂点

$$\text{crossroad} := \text{cup} - \frac{1}{[2]} \text{cap} = \text{H} - \frac{1}{[2]} \text{cup}.$$

を用いたウェブの表示が必要になる。これは Kuperberg [Kup96] によって導入されたものである。我々はこの 4 個頂点を *crossroad* と呼び、右辺に現れるような内部にある type 2 の辺を *rung* と呼ぶことにする。そして、crossroad を許す rung を持たないウェブを crossroad ウェブと呼ぶ。任意のウェブはスケイン関係式で交差を持たないウェブに置き換えることができる。そして、任意の rung は crossroad に置き換えて消去することができる。このような reduction rules を定義して、それらが“terminal”で“locally confluence”であることを確認して  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$  の基底ウェブを得た。<sup>7</sup>  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$  の基底ウェブは elliptic face と交差を持たない crossroad ウェブとして定義される。elliptic face については詳しく述べないが、例えば 3 個以下の crossroad を頂点としてもつウェブで囲まれる  $\Sigma$  の内部にある面は elliptic face である。

<sup>7</sup>  $\mathfrak{sp}_4$  のスケイン関係式や crossroad の定義を見てわかるように  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$  の自然な係数は  $\mathbb{Z}_q[1/[2]]$  である。ここで得られる基底ウェブも  $\mathbb{Z}_q[1/[2]]$ -係数の加群として考えたときに得られる基底である。我々は [IY22] でこの基底ウェブの  $\mathbb{Z}_q$ -span が部分代数 ( $\mathbb{Z}_q$ -形式と呼ぶ) となることを示し、この  $\mathbb{Z}_q$ -形式と元から自然に  $\mathbb{Z}_q$  上で定義されている  $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_4,\Sigma}$  との比較を行った。



## 5.2. 下降ウェブによる生成系

次に、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$  の生成元について紹介する。曲面  $\Sigma$  上に描かれた交差を持つループもしくは  $\mathbb{M}$  の 2 点を結ぶのアーキで表されるウェブを考える。ループの場合はある基点から、アーキの場合は端点から出発して任意の交点においてまず始めに上を通るような図で表されるウェブを下降ループや下降アーキと呼ぶ。そして type 1 の下降ループや下降アーキ  $\gamma$  に対して、 $\mathbb{M}$  の点と  $\gamma$  上の点を結ぶ交点を持たない type 2 のアーキ（脚と呼ぶ）をいくつか付けて得られるウェブを脚付き下降ループや脚付き下降アーキと呼ぶことにする。このとき次の定理が成り立つ。

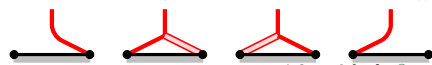
**Theorem 5.1.**  $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$  は下降ループ、下降アーキ、脚付き下降ループ、脚付き下降アーキたちによって生成される。ここで下降ループや下降アーキは type 1、type 2 ともに考える。

証明方針は、任意のウェブ  $G$  に対して内部における交差の数と crossroad の個数の和で複雑度  $|G|$  を定義して、複雑度に関する帰納法で証明する。基底ウェブ  $G$  の始点を端点（端点が無ければ内部の適当な点）に取る。そして、その始点からウェブに沿って進んでいき crossroad にぶつかるたびにスケイン関係式  $\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} \times \\ \cup \end{pmatrix} - v^{-1} \begin{pmatrix} \cup \\ \times \end{pmatrix}$  によって自分の進む道が overarc となるように crossroad を交差に置き換える。もし脚の生えた 3 価頂点にぶつかったら、脚は無視してもう一方の type 1 の辺へと進む。このように  $G$  を変形していくことで  $G$  から（脚付き）下降ループやアーキを剥がすことができ、剥がした後に残ったウェブや上のスケイン関係式で出てくる余分な項は複雑度が小さくなる。このようにして帰納法で証明することができる。

## 5.3. Sticking trick

最後に、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$  の生成元について紹介する。 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$  は境界弧で局所化されているので、境界弧に沿うウェブを分母に持つような Laurent 多項式も扱うことができる。よって、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$  で見た下降ウェブより単純なウェブで生成元を記述することができるが期待される。具体的にこの単純な生成元が本節の始めに挙げた理想四角形に付随するウェブになることの証明を紹介する。

まず、Theorem 3.2 (sticking trick) を思い出そう。この公式はウェブ上の 1 点と境界弧を一つ選ぶことによって、ウェブをその点で分断し、分断された端点をその境界弧に“貼り付けた”ウェブで記述できることを主張している。分断してできた端点の境界弧への貼り付け方は



のいずれかである。このような形をした境界弧の近傍におけるウェブをステイト付き端点<sup>8</sup>と呼ぶことにする。

**Theorem 5.2** ([IY22]).  $\#\mathbb{M} \geq 2$  のとき、 $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}]$  はステイト付き端点を持つ単純アーキ<sup>9</sup>で生成される。

ステイト付き端点を持つ単純アーキは、本節の始めに述べた理想四角形内に含まれるクラスター変数に対応するウェブであるから、この定理から  $\mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q[\partial^{-1}] \subset \mathcal{S}_{\text{sp}_4, \Sigma}^q$  がわかる。

以下では、sticking trick をどのようにして使ってこの定理を得るか解説する。Theorem 5.1 で下降ウェブによる生成系が得られているので、下降ウェブに対して sticking trick を適用して


<sup>8</sup> これらの境界弧に貼り付けられたウェブは satate-clasp 対応によって、左から順に 1, 2, 3, 4 のステイトを持つステイト付きスケイン代数のウェブに対応している。

<sup>9</sup>  $q = 1$  の場合 Theorem 2.3 の同型を通して  $\mathcal{O}(A_{G, \Sigma})$  が単純 Wilson line の行列要素で生成されるという [IOS22] の定理に対応している。

みよう。まず下降ループは sticking trick で始点を適当な境界弧に貼り付けることで脚付き下降アークになる。よって、以下では脚付き下降アークのみを考えよう。まず脚付き下降アークの基点からスタートしてアークを下っていく。そして、脚にぶつかる手前で sticking trick を適用すると次のようになる。







$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = v \text{Diagram 2} - v^2 \text{Diagram 3} + v^3 \text{Diagram 4} - v^4 \text{Diagram 5} \\
 & = v^3 \text{Diagram 6} - v^3 \text{Diagram 7}
 \end{aligned}$$

そして、また進んでいき脚にぶつかる度に sticking trick でウェブを境界弧に貼り付けていく。貼り付けたウェブの交差の上下関係と下降の向きが一致していることから、このような操作で得られる展開はステイト付き端点を持つ下降アークの (Laurent) 多項式であることがわかる。よって、ステイト付き端点を持つ下降アークが自己交差を持たないステイト付き端点を持つ下降アークで展開できることを証明すれば良い。自己交差の個数に関する帰納法と sticking trick を用いて証明する。まず下降アークの始点からスタートして下っていくと、どこかでアークの

下を潜る交差に到達する。そこまでのアークの近傍を描くと、例えば  のようになっている。ここで、交差の下を潜るアークに対して sticking trick を使うと、同じ境界弧にステイト付き端点を二つ持つアークと、自己交差の減ったステイト付き端点も持つ下降アークの積を項に持つ多項式となる。同じ境界弧にステイト付き端点を持つアークはステイト付き端点の部分で交差を持つかもしれないが、( $\#M \geq 2$  という条件より) 別の境界弧が存在するのでアークの中点をその境界弧に sticking trick でさらに貼り付けることで自己交差を持たないステイト付き端点を持つアークに展開できる。

このように、何度も sticking trick を用いることでステイト付き端点を持つ単純アークによって  $\mathcal{S}_{\mathfrak{sp}_4, \Sigma}^q$  が生成されることが証明できる。ちなみに、 $q = 1$  の時は交差の上下を気にしないでいいので下降ウェブによる生成系を通さなくてもよい。基底ウェブの全ての辺を sticking trick で境界弧に貼り付けることで証明ができる。

### 5.4. $\mathfrak{sl}_3$ の場合

$\mathfrak{sl}_3$  の場合も  $\mathfrak{sp}_4$  で説明したのと全く同様の手順で証明することができる。つまり、基底ウェブから下降ウェブによる生成元を得て、その生成元を sticking trick で境界弧に貼り付けることによって理想四角形の中のステイト付き端点       を持つ単純アークで生成することが証明できる。

## 6. Fomin–Pylyavskyy [FP16] の予想

これまで説明したようにクラスプ付きスケイン代数と量子クラスター代数の包含関係  $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}, \Sigma}^q \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{g}, \Sigma}$  を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  で証明することができた。一方で、 $\mathfrak{sl}_2$  の場合はすでに全てのクラスター変数が  $M$  を結ぶ単純アークに対応していることが知られている。同様に、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$  の場合にもどのようなウェブがクラスター変数に対応しているのかという自然な問題が思いつく。この問題は  $q = 1$  の場合に  $\mathfrak{sl}_3$  で Fomin–Pylyavskyy [FP16] によって多くの具体例の計算とともに tree の形をしたウェブがクラスター変数に対応しているという予想を立てている。そして、我々も  $\mathfrak{sp}_4$  の場合に tree-type というウェブを定義して、同様の予想を立てているが今のところ成立するかどうか全くわからない。しかし、これまで計算で得ているクラスター変数に対応するウェブは全て tree-type となっている。

## 参考文献

- [BZ05] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. Math. **195** (2005), no. 2, 405–455. 2, 5
- [BW11] F. Bonahon and H. Wong, *Quantum traces for representations of surface groups in  $SL_2(\mathbb{C})$* , Geom. Topol. **15** (2011), no. 3, 1569–1615. 4
- [FG06] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **103** (2006), 1–211. 4
- [FP16] S. Fomin and P. Pylyavskyy, *Tensor diagrams and cluster algebras*, Adv. Math. **300** (2016), 717–787. 10
- [FS20] C. Frohman and A. S. Sikora,  *$SU(3)$ -skein algebras and webs on surfaces*, Math. Z. **300** (2022), 33–56. 6
- [GS19] A. B. Goncharov and L. Shen, *Quantum geometry of moduli spaces of local systems and representation theory*, arXiv:1904.10491. 4
- [Hig20] V. Higgins, *Triangular decomposition of  $SL_3$  skein algebras*, arXiv:2008.09419. 4, 5
- [IOS22] T. Ishibashi, H. Oya and L. Shen,  *$\mathcal{A} = \mathcal{U}$  for cluster algebras from moduli spaces of  $G$ -local systems*, arxiv:2202.03168. 4, 5, 9
- [IY21] T. Ishibashi and W. Yuasa, *Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for  $\mathfrak{sl}_3$* , arXiv:2101.00643. 1, 3, 4, 6
- [IY22] T. Ishibashi and W. Yuasa, *Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for  $\mathfrak{sp}_4$* , arXiv:2207.01540. 1, 3, 4, 6, 8, 9
- [IYprep] T. Ishibashi and W. Yuasa, *State-clasp correspondence for skein algebras*, in preparation. 3, 4, 5
- [Kup94] G. Kuperberg, *The quantum  $G_2$  link invariant*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 1, 61–85. 6
- [Kup96] G. Kuperberg, *Spiders for rank 2 Lie groups*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), no. 1, 109–151. 4, 6, 8
- [Le19] I. Le, *Cluster structure on higher Teichmüller spaces for classical groups*, Forum Math. Sigma **7** (2019), e13, 165 pp. 4
- [Lê18] T. T. Q. Lê, *Triangular decomposition of skein algebras*, Quantum Topol. **9** (2018), no. 3, 591–632. 4
- [LS22] T. T. Q. Lê and A. S. Sikora, *Stated  $SL(n)$ -skein modules and algebras*, arXiv:2201.00045. 4
- [Mul14] G. Muller,  *$\mathcal{A} = \mathcal{U}$  for locally acyclic cluster algebras*, SIGMA Symm. Integrab. Geom. Methods Appl. **10** 094 (2014). 3
- [Mul16] G. Muller, *Skein and cluster algebras of marked surfaces*, Quantum Topol. **7** (2016), no. 3, 435–503. 1, 2, 3, 6
- [SW07] A. S. Sikora and B. W. Westbury, *Confluence theory for graphs*, Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 439–478. 8