CW 複体上の境界を跨がないモーション設計とその複雑さ

田中　康平　(信州大学)*

本研究は科研費 (課題番号 : JP20K03607) および，住友財団（助成番号 : 210203）の助成を受けたものである．

1　はじめに

代数的位相幾何学を現実世界の問題に応用しようという流れは近年隆盛を誇っている．特に，自動運転やカーナビゲーションの発達により，人や物の輸送に関して，その経路を指定するアルゴリズムの開発は，効率的な人の移動および物流の根幹を支えている．プログラミングなどの技術的な話を抜きにして，経路指定アルゴリズムの原始的なアイデアは，与えられた 2 点（始点，終点）に対し，それらを繋ぐパスを与える事を意味している．つまり，位相空間 X 上での経路指定は，$(x, y) \in X \times X$ に対し，

$$\gamma_{xy} \in X^I = \{[0, 1] \to X\}$$

で，$\gamma_{xy}(0) = x$, $\gamma_{xy}(1) = y$ となるパスを対応させる．言い換えれば，free path fibration

$$p\colon\ X^I \longrightarrow X \times X, \quad p(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$$

の切断 [*1]を与える事と同値である．ただし，この切断の連続性については現状言及しない．よって，このような p の切断（経路指定アルゴリズム）が存在するかどうかについては，以下の事実が簡単に従う．

事実 1.1. p の切断が存在するための必要十分条件は，X が弧状連結である．

上記の事実は，2 点を繋ぐパスが常に存在する弧状連結性から保証されるが，パスの取り方には何も条件がないので，実際に経路を指定しようとすると無限の組 (x, y) に対して，パスをそれぞれ指定しなければならない．次の例のように，もっと包括的に指定できた方が良いだろう．

例 1.2. $X \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とすると，次は p の切断である．

$$s\colon\ X \times X \longrightarrow X^I, \quad s(x, y)(t) = (1 - t)x + ty$$

---

* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-3-1　信州大学 経法学部
e-mail: tanaka@shinshu-u.ac.jp
2010 Mathematics Subject Classification: 55M30, 06A07
キーワード : parametrized topological complexity, poset-stratified space, robot motion planning
[*1] $s\colon\ X \times X \to X^I$ で $p \circ s = \mathrm{id}_{X \times X}$ となる写像.

上記の例は，最も単純な直線で繋ぐパスの与え方であるが，特徴としては，(x,y) と (x',y') が非常に近い距離にある場合，これらに対応するパス（直線）も非常に近い形になる．すなわち，切断の連続性を考慮している．位相幾何学の始点からも，連続な切断を持つかどうかという疑問が興味深い．このとき，X^I はコンパクト開位相によって位相空間と考えよう．

事実 1.3 ([7]). p の連続な切断が存在するための必要十分条件は，X が可縮である．

上記の事実によって，可縮な空間上の連続的な経路指定アルゴリズムは担保されるが，非可縮な空間については，そもそも連続な経路指定は存在しないことがわかる．そこで，$X \times X$ の全域ではなく，いくつかの局所的な連続経路指定を用意して $X \times X$ を覆えれば，X 上での移動を制御するプログラムを構成できる．この際に，用意する局所的なアルゴリズムは，当然少ない方が良いわけだが，最低何種類のアルゴリズムを用意すればよいかというのに着目したのが，Farber による topological complexity のアイデアである [7].

1.1 Farber's topological complexity and robot motion planning

以下，X を弧状連結とする．$X \times X$ の部分空間 U に対し，U 上の（連続）**経路指定**とは，連続写像

$$s\colon U \longrightarrow X^I$$

で，$p \circ s = \mathrm{id}_U$ を満たすものである．

定義 1.4. X の *topological complexity* とは，以下の非負整数で与えられる位相不変量である *2.

$$\mathrm{TC}(X) := \min\left\{ n \geq 0 \,\middle|\, X \times X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{経路指定を持つ開集合} \right\}$$

すなわち，$\mathrm{TC}(X) = n$ ということは，少なくとも $n+1$ 種類の局所的な経路指定アルゴリズムが必要であることを示唆している．事実 1.3 は，$\mathrm{TC}(X) = 0$ と X が可縮であることが同値を意味している．可縮というホモトピー論的には自明な空間が最低値の 0 に対応するということで，「topological complexity」は空間の複雑を表す指標として考えられる．

定義 1.4 においては，$X \times X$ の開被覆によって，局所的な経路指定を考えたが，開集合である必要性に疑問を持つこともあるだろう．そもそも共通部分が無い方が，実際に $(x,y) \in X \times X$ を与えたときに，どの局所経路指定アルゴリズムを用いればよいかが一意に決まるため都合が良いという考えもある．

*2 この定義に $+1$ した値を $\mathrm{TC}(X)$ としている場合もある．

定義 1.5. X の *generalized topological complexity* とは，以下の非負整数で与えられる位相不変量である．

$$\mathrm{TC}_g(X) := \min\left\{ n \geq 0 \,\middle|\, X \times X = \coprod_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{経路指定を持つ部分集合} \right\}$$

ただし，$\coprod_{i=1}^{n+1} U_i$ は共通部分を持たない和集合である．

明らかに，$\mathrm{TC}_g(X) \leq \mathrm{TC}(X)$ が成り立つ．逆の不等式は，X が良い性質を満たす空間，例えば CW 複体などでは成り立つ．

定理 1.6 ([12])**.** *X を CW 複体とすると，$\mathrm{TC}(X) = \mathrm{TC}_g(X)$.*

代数的位相幾何学のテクニックを活用するうえでは，開被覆である方がありがたいので，ここでは $\mathrm{TC}(X)$ の性質を紹介する．

定理 1.7 ([7])**.** *TC はホモトピー不変量である．つまり，$X \simeq Y$ ならば，$\mathrm{TC}(X) = \mathrm{TC}(Y)$.*

$\mathrm{TC}(X)$ と関係の深いホモトピー不変量が LS-category である．

定義 1.8. 位相空間 X に対し，以下の不変量を定義する．

$$\mathrm{cat}(X) := \min\left\{ n \geq 0 \,\middle|\, X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{ open, } U_i \hookrightarrow X \text{ is null-homotopic} \right\}$$

定理 1.9 ([7])**.** *X がパラコンパクトハウスドルフ空間ならば，*

$$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}(X) \leq \mathrm{cat}(X \times X) \leq 2\mathrm{cat}(X).$$

$\mathrm{TC}(X)$ の下からの評価として，X のコホモロジーの環構造に由来するものを紹介する．k を体とし，$H^*(X) = H^*(X; k)$ を X のコホモロジー環とする．これはカップ積により，次数付き k-代数の構造を持つ．

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X).$$

また，$H^*(X) \otimes H^*(X)$ 自身も，以下の積によって次数付き k-代数である．

$$(x \otimes y) \cdot (z \otimes w) := (-1)^{|y|\cdot|z|} xz \otimes yw.$$

定義 1.10. カップ積 $\cup\colon H^*(X) \otimes H^*(X) \to H^*(X)$ に対し，以下の不変量を定義する．

$$\mathrm{zcl}(X) = \max\left\{ n \geq 1 \,\middle|\, \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0 \in H^*(X) \otimes H^*(X), \alpha_i \in \mathrm{Ker}(\cup) \right\}$$

定理 1.11 ([7])**.** $\mathrm{zcl}(X) \leq \mathrm{TC}(X)$.

直積空間についても，性質の良い空間に対しては以下の不等式が成り立つ．

定理 1.12 ([7])**.** X, Y を距離空間としたとき，

$$\mathrm{TC}(X \times Y) \leq \mathrm{TC}(X) + \mathrm{TC}(Y)$$

1.2 $\mathrm{TC}(X)$ の具体例

可縮な空間 X については，$\mathrm{TC}(X) = 0$ であるため，非可縮な空間の例を見ていこう．

例 1.13 ([7])**.** $\mathrm{TC}(S^1) = 1$ である．なぜなら，S^1 は可縮ではないので，$\mathrm{TC}(S^1) \geq 1$ である．また，$S^1 \times S^1$ の開集合で，次の 2 つが考えられる．

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq -y\}, U_2 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq y\}.$$

このとき，$U_1 \to (S^1)^I$ は $(x, y) \in U_1$ に対し，x と y を繋ぐ長さが最小の弧を対応させる．また，$U_2 \to (S^1)^I$ は，$(x, y) \in U_2$ に対し，時計回りに x, y を繋ぐ弧を考える．これらは，連続な経路指定になり，$S^1 = U_1 \cup U_2$ であるため，$\mathrm{TC}(S^1) = 1$ である．

高次の球面の場合でも，上記と同様に U_1 上に最短弧を対応させる連続経路指定が構成できる．また，奇数次元球面の場合には，$(x, y) \in U_2$ に対し，S^{2k-1} 上の留点を持たないベクトル場を用いて，U_2 上の連続な経路指定を構成できるため，$\mathrm{TC}(S^{2k-1}) = 1$ である．

しかし，偶数次元球面の場合には状況が異なる．まず，定理 1.9 により，

$$\mathrm{TC}(S^n) \leq \mathrm{cat}(S^n \times S^n) = 2\mathrm{cat}(S^2) = 2$$

という上からの評価がすべての n について成り立つ．また，$a \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$ を基本類，$1 \in H^0(S^n; \mathbb{Q})$ を単位元として，

$$x = a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \mathrm{Ker}(\cup) \subset H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q})$$

を考える．

$$x^2 = ((-1)^{n^2+1} - 1) a \otimes a \in H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q})$$

であるため，n が偶数の場合には，$x^2 \neq 0$ である．よって定理 1.11 により，$\mathrm{TC}(S^{2k}) \geq 2$ である．

例 1.14 ([7])**.** 上記のことから，

$$\mathrm{TC}(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd}, \\ 2 & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

低次元のグラフや曲線，曲面については以下の計算結果が知られている．

例 1.15 ([8])**.** Γ を有限グラフとして，1 次元の CW 複体と考える．

$$\mathrm{TC}(\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi_1(\Gamma) = \{1\}, \\ 1 & \text{if } \pi_1(\Gamma) = \mathbb{Z}, \\ 2 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

例 1.16 ([7]). Σ_g を種数 g の向き付け可能な閉曲面とする.

$$\mathrm{TC}(\Sigma_g) = \begin{cases} 2 & \text{if } g \leq 1, \\ 4 & \text{if } g \geq 2. \end{cases}$$

例 1.17 ([7, 5, 6, 16]). N_g を種数 g の向き付け不可能な閉曲面とする.

$$\mathrm{TC}(N_g) = \begin{cases} 3 \quad (= \mathrm{TC}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)) & \text{if } g = 1, \\ 4 & \text{if } g \geq 2. \end{cases}$$

元々 [7] で Farber が考えた応用は，ロボットアームのモーション設計であった．複数の関節を持ち，それぞれの関節でロボットアームが円周運動，あるいはより立体的に球面上の回転運動をする場合，その動きを制御する局所的経路指定アルゴリズムは何種類必要かという問題である．すなわち，積球面の TC を求める問題であった．

例 1.18 ([7]). X を S^m の n 個のコピーの直積とする.

$$X = S^m \times S^m \times \cdots \times S^m$$

このとき，

$$\mathrm{TC}(X) = \begin{cases} n & \text{if } m \text{ is odd}, \\ 2n & \text{if } m \text{ is even}. \end{cases}$$

射影空間の場合には，実と複素で様相が異なる．複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の場合は，$2n$ 次元のシンプレクティック閉多様体であることから，その非退化な閉 2-形式を用いて TC は計算できる

例 1.19 ([11]). $\mathrm{TC}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 2n$.

実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の場合には，その TC はユークリッド空間への埋め込み次元 I_n と深い関係があることが知られている.

$$I_n = \min\{k \geq 0 \mid \mathbb{R}\mathrm{P}^n \overset{\exists}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^k\}$$

例 1.20 ([11]).

$$\mathrm{TC}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} n & \text{if } n = 1, 3, 7, \\ I_n - 1 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

2 Parametrized topological complexity

経路指定のアルゴリズムに条件を課したものも様々考えられている．例えば，x から y への経路と，y から x への経路は同一であるという対称性を持った経路指定が考えられる [9, 2]．また，x から x への経路は，その場で留まる経路を指定するのが自然だろう [14, 15]．動作領域が向きづけられているなら，その向きに沿った経路を考えたい [1, 13]．また，効率化を考えるなら，経路は最短の方が望ましいかもしれない [17].

本稿で紹介するのは，パラメーター付きの経路指定である [3, 4]．連続写像 $\pi\colon X \to B$ に対し，X は B でパラメータ付けられていると考えられる．B 上のファイバー積

$$X \times_B X = \{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\}$$

を考え，

$$X_B^I = \{\gamma\colon [0,1] \to X \mid \pi \circ \gamma \text{ is constant in } B\}$$

という X^I の部分空間を考えよう．このとき，free path fibration $p\colon X^I \to X \times X$ の制限として，

$$p|_{X_B^I}\colon X_B^I \longrightarrow X \times_B X$$

が得られる．$X \times_B X$ の部分集合 U 上の**パラメーター付き経路指定**とは，$p|_{X_B^I}$ の U 上の連続な切断

$$s\colon U \longrightarrow X_B^I$$

である．パラメーター付きの経路指定は，同じパラメーターを持つ 2 点 (x, y)，すなわち $(x, y) \in \pi^{-1}(b)$ となるものに対し，x, y を $\pi^{-1}(b)$ の中のパスで繋ぐというものである．

定義 2.1. $\pi\colon X \to B$ に対し，*parametrized topological complexity* とは [*3]，

$$\mathrm{TC}(\pi) := \min\left\{ n \geq 0 \,\middle|\, X \times_B X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{パラメーター付き経路指定を持つ開集合} \right\}$$

ただし，このような値が存在しない場合には，$\mathrm{TC}(\pi) = \infty$ とする．

注意 2.2. $B = *$ の時，$\mathrm{TC}(\pi) = \mathrm{TC}(X)$ である．

Parametrized topological complexity は元々，衝突回避の経路指定を考えるため，配置空間における Fadell-Neuwirth fibration の parametrized topologica complexity を計算することから始まった [3, 4]．

本稿ではこの parametrized topological complexity を B が半順序集合（T_0-Alexandroff 空間）という特殊な場合に適用した結果を紹介する．まず，半順序集合と位相空間の関係について振り返る．

位相空間 X が Alexandroff 空間であるとは，任意の X の開集合族 $\{U_\lambda\}$ に対し，その共通部分 $\bigcap U_\lambda$ が再び開集合になることである．このとき，任意の点 x に対し，その最小の開近傍が，

$$U_x = \bigcap_{x \in U} U$$

として存在する．T_0-Alexandorff 空間 X 上の半順序として，$x \leq y$ を $x \in U_y$ として定義すれば，X は半順序集合となる．

[*3] 連続写像に対する topological complexity という概念もあるが，それとは異なる．

逆に，P を半順序集合としたとき，P の開集合を upper-sets (filters) として指定すると，P は T_0-Alexandorff 空間となる．これらの対応は，T_0-Alexandorff 空間と半順序集合の圏の同型を与えるため，これらを同一視する．

定義 2.3. X をハウスドルフ空間とし，$\pi\colon X \to P$ を半順序集合 P 上の連続写像とする．以下の条件を満たすとき，π を *stratified space* とよぶ（詳細は [19, 21] を参照）．

1. π は全射かつ開写像．
2. 任意の $p \in P$ に対し，$e_p = \pi^{-1}(p)$ は連結かつ局所閉．

例えば，単体複体や（normal）CW 複体などは，その面順序集合上の stratified space である．本稿では X を CW 複体とし，その面順序集合 $P(X)$ 上の自然な stratified space $\pi_X\colon X \to P(X)$ に対し，パラメーター付き経路指定を考える．この経路指定は，同じ領域（胞体）内に属する 2 点に対し，その領域をはみ出さずにそれらを繋ぐパスを連続的に与える事を意味している．

簡単な例から，$\mathrm{TC}(\pi_X)$ を見ていこう．まず単体複体の場合には，各単体が凸集合であることから，直線で繋ぐパスが考えられ以下が従う．

定理 2.4 ([20])**.** K を単体複体としたとき，$\mathrm{TC}(\pi_K) = 0$.

次に，X を regular CW 複体とする．このとき，$X \times_{P(X)} X$ は，対角集合にあたる X に押し潰すことができることから，以下が従う．

定理 2.5 ([20])**.** X を *regular CW* 複体としたとき，$\mathrm{TC}(\pi_X) = 0$.

対して，non-regular CW 複体については，上記のようにパラメーター付き経路指定を考えるのは難しい．最も単純な例として，0-胞体 v と 1-胞体 e のみからなる円周 S^1 の胞体分割を考えよう．もし，$\mathrm{TC}(\pi_{S^1}) < \infty$ とすると，$(v, v) \in U \subset S^1 \times_{P(S^1)} S^1$ となる開集合 U と，パラメーター付き経路指定 $s\colon U \to (S^1)^I_{P(S^1)}$ が存在する．$s(v, v)$ は定義から v 上のコンスタントパスにならざるを得ない．ところが，v に十分近く，v を挟んだ $(x, y) \in U$ に対しては，v を通過できないため，反対側の弧を通って x, y を繋ぐ以外道がない．このような対応は s の連続性に反するため，$\mathrm{TC}(\pi_{S^1}) = \infty$ となる．

上記で見たように，我々の身近な non-regular CW 複体は，有限個の開集合上のパラメーター付き経路指定によって全体を網羅できないものが多い．例えば，高次の球面 S^n の最小胞体分割 $S^n = e^{(0)} \cup e^{(n)}$ や

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = e^{(0)} \cup e^{(1)} \cup \cdots \cup e^{(n)}$$

などである．この問題の根本的な原因は，$\mathrm{TC}(\pi)$ の定義において，開被覆を考えたためである．開被覆を一般の被覆，あるいはセパレーションとすれば，定義 1.5 と同様に以下の不変量が考えられる．

定義 2.6. $\pi\colon X \to B$ に対し，以下の不変量を定義する．

$$\mathrm{TC}_g(\pi) := \min\left\{ n \geq 0 \,\middle|\, X \times_B X = \coprod_{i=1}^{n+1} U_i, U_i : \text{パラメーター付き経路指定を持つ部分集合} \right\}$$

ただし，このような値が存在しない場合には，$\mathrm{TC}_g(\pi) = \infty$ とする．

定義から $\mathrm{TC}_g(\pi) \leq \mathrm{TC}(\pi)$ が従う．X を有限（次元）の CW 複体としたとき，上記で見た $\mathrm{TC}(\pi_X)$ とは異なり，$\mathrm{TC}_g(\pi_X)$ は有限値を取る．

命題 2.7 ([20])**.** *X を有限の CW 複体とし，$P(X)^\sharp$ を胞体の個数とする．このとき，*

$$\mathrm{TC}_g(\pi_X) \leq \min\{P(X)^\sharp - 1, \dim(X)\}.$$

$\mathrm{TC}_g(X)$ の下からの評価としては，CW 複体が位相圏の分類空間として構成できる場合に，LS-category がサポートする．

命題 2.8 ([20])**.** *X が cylindrically normal CW 複体で $F(X)$ を face category とする（詳しくは [10, 18, 19] を参照）．自然な関手 $F(X) \to P(X)$ が切断を持ち，$P(X)$ が（弱）可縮のとき，$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}_g(\pi_X)$.*

よって上記の評価式から，身近な CW 複体に対して，$\mathrm{TC}_g(\pi_X)$ が求まる．

例 2.9 ([20])**.** 以下の CW 複体に対して，TC_g が求まる．

1. $S^n = e^{(0)} \cup e^{(n)}$ に対し，$\mathrm{TC}_g(S^n \to P(S^n)) = 1$.
2. $B_k = \vee_k S^1 = e^{(0)} \cup e_1^{(1)} \cup e_2^{(1)} \cup \cdots \cup e_k^{(1)}$ に対し， $\mathrm{TC}_g(B_k \to P(B_k)) = 1$.
3. $T^n = \prod_{i=0}^n S^1 = \prod_{i=0}^n (e^{(0)} \cup e^{(1)})$ に対し，$\mathrm{TC}_g(T^n \to P(T^n)) = n$.
4. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = e^{(0)} \cup e^{(1)} \cup e^{(2)} \cup \cdots \cup e^{(n)}$ に対し，$\mathrm{TC}_g(\mathbb{R}\mathrm{P}^n \to P(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)) = n$.
5. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = e^{(0)} \cup e^{(2)} \cup e^{(4)} \cup \cdots \cup e^{(2n)}$ に対し，$\mathrm{TC}_g(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \to P(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)) = n$.

参考文献

[1] Borat, A.; Grant, M. Directed topological complexity of spheres. J. Appl. Comput. Topol. 4 (2020), no. 1, 3–9.

[2] Basabe, I.; Gonzlez, J.; Rudyak, Y. B.; Tamaki, D. Higher topological complexity and its symmetrization. Algebr. Geom. Topol. 14 (2014), no. 4, 2103-2124.

[3] Cohen, D. C.; Farber, M.; Weinberger, S. Topology of parametrised motion planning algorithms. SIAM J. Appl. Algebra Geometry, 5(2) (2021), 229-249.

[4] Cohen, D. C.; Farber, M.; Weinberger, S. Parametrized topological complexity of collision-free motion planning in the plane. arXiv:2010.09809v1.

[5] Cohen, D. C.; Vandembroucq, L. Topological complexity of the Klein bottle. J. Appl. Comput. Topol. 1 (2017), no. 2, 199-213.

[6] Dranishnikov, A. On topological complexity of non-orientable surfaces. Topology Appl. 232 (2017), 61-69.

[7] Farber, M. Topological complexity of motion planning. Discrete Comput. Geom. 29 (2003), no. 2, 211–221.

[8] Farber, M. Instabilities of robot motion. Topology Appl. 140 (2004), no. 2-3, 245-266.

[9] Farber, M.; Grant, M. Symmetric motion planning. Topology and robotics, 85–104, Contemp. Math., 438, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[10] Furuse, M.; Mukouyama, T.; Tamaki, D. Totally normal cellular stratified spaces and applications to the configuration space of graphs. Topol. Methods Nonlinear Anal. 45 (2015), no. 1, 169-214.

[11] Farber, M.; Tabachnikov, S.; Yuzvinsky, S. Topological robotics: motion planning in projective spaces. Int. Math. Res. Not. 2003, no. 34, 1853-1870.

[12] García-Calcines, J. M. A note on covers defining relative and sectional categories. Topology Appl. 265 (2019), 106810

[13] Goubault, E.; Farber, M.; Sagnier, A. Directed topological complexity. J. Appl. Comput. Topol. 4 (2020), no. 1, 11-27.

[14] Iwase, N.; Sakai, M. Topological complexity is a fibrewise L-S category. Topology Appl. 157 (2010), no. 1, 10–21.

[15] Iwase, N.; Sakai, M. Erratum to "Topological complexity is a fibrewise L-S category" [Topology Appl. 157 (1) (2010) 10–21]. Topology Appl. 159 (2012), no. 10-11, 2810–2813.

[16] Iwase, N.; Sakai, M.; Tsutaya, M. A short proof for tc(K)=4. Topology Appl. 264 (2019), 167-174.

[17] Recio-Mitter, D. Geodesic complexity of motion planning. J. Appl. Comput. Topol. 5 (2021), no. 1, 141-178.

[18] Tamaki, D. Cellular stratified spaces. Combinatorial and toric homotopy, 305-435, Letc. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 35, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.

[19] Tamaki, D.; Tanaka, H. L. Stellar stratifications on classifying spaces. Algebraic topology and related topics, 287-313, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Singapore, 2019.

[20] Tanaka, K.; Parametrized topological complexity of poset-stratified spaces. J. Appl. Comput. Topol. 6 (2022), no. 2, 221-246.

[21] Yokura, S. Decomposition spaces and poset-stratified spaces. Tbilisi Math. J. 13 (2020), no. 2, 101-127.