

絡み目の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の 係数多項式

滝岡 英雄 (金沢大学)*

概 要

2 変数 v, z の多項式不変量の HOMFLYPT 多項式が一致する結び目の無限族は金信泰造氏によって発見されている。しかし、2 変数 a, z の多項式不変量の Kauffman 多項式が一致する結び目の無限族は未だ知られていない。本研究では、これら 2 変数多項式不変量の変数 z で整理したときの係数多項式に注目する。河内明夫氏の結果やそれとは異なる手法での宮澤康行氏の結果で、HOMFLYPT 多項式に関しては、任意の s に対して、任意の絡み目の 0 番から s 番までの係数多項式が一致する絡み目の無限族が構成されている。本講演では、HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式のそれぞれの場合に、そのような絡み目の無限族が存在することを S_m^N 交差交換を導入することで示す。

1 HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式

HOMFLYPT 多項式 $P(L; v, z) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ [4, 13] と Kauffman 多項式 $F(L; a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ [9] は、3 次元空間 \mathbb{R}^3 内の有向絡み目の不変量で、以下のスケイン関係式で定義されている。自明な結び目 U に対して、 $P(U; v, z) = F(U; a, z) = 1$ である。スケイン 3 組 (L_+, L_-, L_0) に対して、次が成り立つ:

$$v^{-1}P(L_+; v, z) - vP(L_-; v, z) = zP(L_0; v, z).$$

スケイン 4 組 $(D_+, D_-, D_0, D_\infty)$ に対して、次が成り立つ:

$$aF(D_+; a, z) + a^{-1}F(D_-; a, z) = z(F(D_0; a, z) + a^{-2\nu}F(D_\infty; a, z)).$$

ここで、図 1 に描かれていない部分は同一である 3 つの有向絡み目 L_+, L_-, L_0 の組をスケイン 3 組といい、4 つの有向絡み目図式 D_+, D_-, D_0, D_∞ の組をスケイン 4 組という。また、 $2\nu = w(D_0) - w(D_\infty)$ であり、 $w(D_0)$ と $w(D_\infty)$ は D_0 と D_∞ の交差符号和である。 D_∞ の向きに関しては、 $\delta = 0$ の場合と $\delta = 1$ の場合で図 1 のようになる。 r, r_0, r_∞ を D_+, D_0, D_∞ の成分数とする。このとき、 $\delta = (r - r_0 + 1)/2$ と定義する。 δ は 0 か 1 を値にとり、 $\delta = 0$ の場合は図 1 の交差が自己交差の場合に対応し、 $\delta = 1$ の場合は図 1 の交差が非自己交差の場合に対応する。この対応関係は図 2 よりわかる。

* 〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学 理工研究域 電子情報通信学系

e-mail: takioka@se.kanazawa-u.ac.jp

web: <https://researchmap.jp/takioka/>

本研究は科研費 (課題番号: JP22K13911) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 57K10, 57K14

キーワード: 結び目, 絡み目, HOMFLYPT 多項式, Kauffman 多項式, 係数多項式

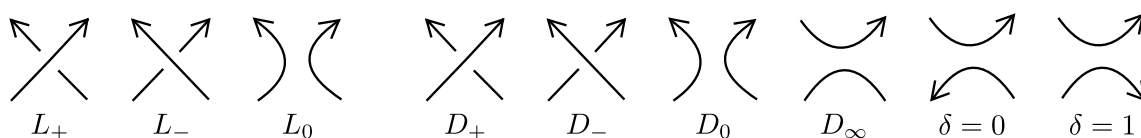


図1 スケイン 3つ組 (L_+, L_-, L_0) とスケイン 4つ組 $(D_+, D_-, D_0, D_\infty)$.

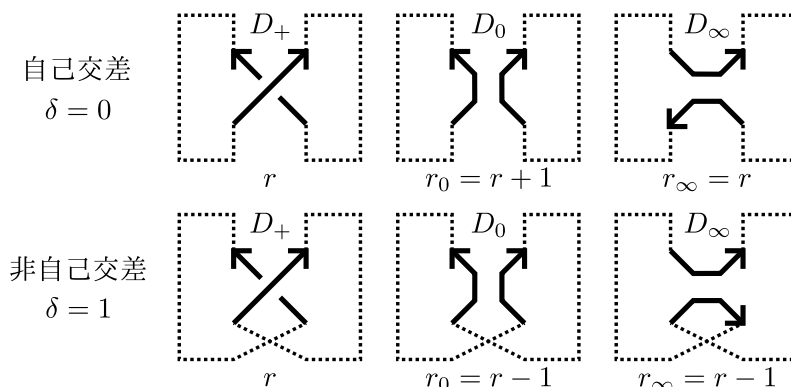


図2 $\delta = 0$ と $\delta = 1$ の状態.

Kauffman 多項式に関しては, 次の定義も知られている. (今回の主結果の計算ではこの定義を用いた.) $F(L; a, z) = a^{-w(D)}\Lambda(D; a, z)$ である. ここで, D は有向絡み目 L の図式で, $w(D)$ は D の交差符号和である. $\Lambda(D; a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ は向きを忘れた絡み目図式に対して定まり, II 型と III 型の Reidemeister 移動で不変で, 以下のスケイン関係式で定義されている. 交差のない自明な結び目図式 \bigcirc に対して, $\Lambda(\bigcirc; a, z) = 1$ である. 図3のように, 向きを忘れたスケイン 4つ組 $(D_+, D_-, D_0, D_\infty)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\Lambda(D_+; a, z) + \Lambda(D_-; a, z) = z(\Lambda(D_0; a, z) + \Lambda(D_\infty; a, z)).$$

図3のように, I 型の Reidemeister 移動に対して, 次が成り立つ:

$$\Lambda(C_+; a, z) = a\Lambda(C_0; a, z), \quad \Lambda(C_-; a, z) = a^{-1}\Lambda(C_0; a, z).$$

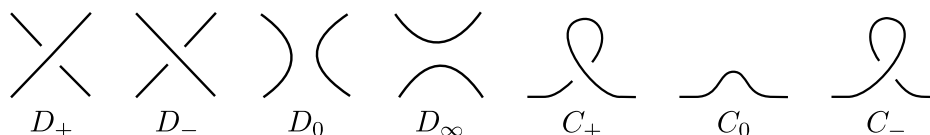


図3 向きを忘れたスケイン 4つ組と I 型の Reidemeister 移動.

ここで, HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式から得られる有名な多項式不変量を紹介する. Alexander-Conway 多項式 $\nabla(L; z)$ [1, 3] は HOMFLYPT 多項式から次のように得られる有向絡み目の不変量である: $\nabla(L; z) = P(L; 1, z)$. Jones 多項式 $V(L; t)$ [6] は HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の両方から次のように得られる有向絡み目の不変量である: $V(L; t) = P(L; t, (t^{1/2} - t^{-1/2})) = F(L; -t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4})$. Q 多項式 $Q(L; x)$ [2, 5] は Kauffman 多項式から次のように得られる無向絡み目の不変量である:

$Q(L; x) = F(L; 1, x)$. 2つの絡み目の不変量の値が異なれば, それらの絡み目は同型でないことが示せるが, 同型でない絡み目でも不変量の値が一致してしまう場合が存在する. 特に, HOMFLYPT 多項式が一致する結び目の無限族は金信泰造氏により発見されている [7]. Kirby のリスト [11] にも紹介されているが, Kauffman 多項式が一致する結び目の無限族が存在するかは未だ知られていない. 金信泰造氏の最近の結果で, HOMFLYPT 多項式と Q 多項式が一致する結び目の無限族が構成されている [8].

2 HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の係数多項式

成分数が r の絡み目 L の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式は, それぞれ次のように表すことができる:

$$P(L; v, z) = (-v^{-1}z)^{-r+1} \sum_{n \geq 0} p_n(L; v) z^{2n}, \quad F(L; a, z) = (az)^{-r+1} \sum_{n \geq 0} f_n(L; a) z^n.$$

ここで, $p_n(L; v) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$, $f_n(L; a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$ で, 特に $p_0(L; v) \neq 0$, $f_0(L; a) \neq 0$ である. 故に, 成分数が異なる絡み目に対しては, それらの HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式は異なることがわかる. $p_n(L; v)$ と $f_n(L; a)$ をそれぞれ HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の n 番係数多項式と呼ぶ. 河内明夫氏の結果 [10] やそれとは異なる手法での宮澤康行氏の結果 [12] で, HOMFLYPT 多項式に関しては, 任意の s に対して, 任意の絡み目の 0 番から s 番までの係数多項式が一致する絡み目の無限族が構成されている. 本講演では, HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式のそれぞれの場合に, そのような絡み目の無限族が存在することを示す. ここで, 絡み目の連結和 (図 4 参照) と HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の関係について述べる. 絡み目 L, L' の連結和 $L \# L'$ の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式は次のようになる.

$$P(L \# L'; v, z) = P(L; v, z)P(L'; v, z), \quad F(L \# L'; a, z) = F(L; a, z)F(L'; a, z).$$

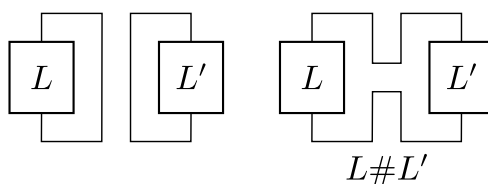


図 4 連結和.

故に, HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の 0 番から s 番までの係数多項式が自明になり $s+1$ 番係数多項式が自明でない結び目 K を発見することができれば, それを与えられた絡み目 L に連結和することにより, L の 0 番から s 番までの係数多項式が一致し $s+1$ 番係数多項式は異なる絡み目 $L \# K$ が構成できる. 本講演では, そのような結び目も構成できる S_m^N 交差交換という絡み目の局所変形を導入する.

3 S_m^N 交差交換

ここからは、絡み目やタングルはすべて図式として考える。絡み目図式、タングル図式を単に絡み目、タングルと呼ぶ。図5のように、 S_m^N を m 半ひねり ($m \in \mathbb{Z}$) をもつ1個のタングル R_m , $N-1$ 個のタングル R , N 個のタングル Q をつないだタングルとする。ここで、 N は正の整数である。

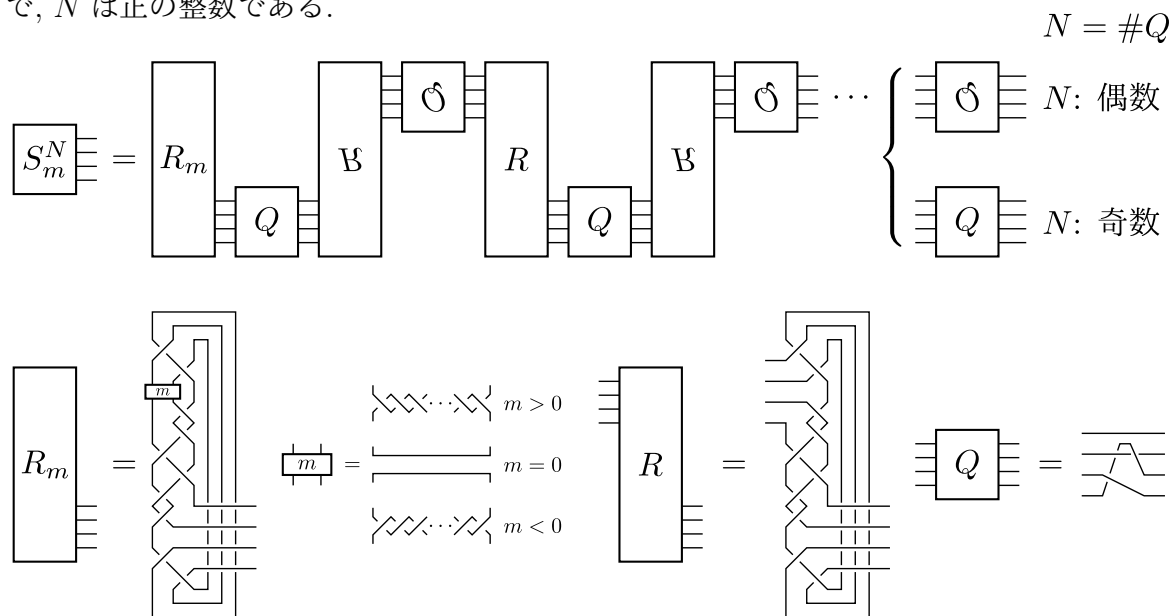


図5 タングル S_m^N .

$N = 0$ の場合に関しては、図6のように、タングル $S_1^0, S_{-1}^0, S_0^0, S_\infty^0$ を定義する。



図6 タングル $S_1^0, S_{-1}^0, S_0^0, S_\infty^0$.

図7のように、タングル Q は、その鏡像と同型である。図8のように、タングル S_1^N ($N \geq 1$) は S_1^{N-1} と同型であるので、 S_1^0 と同型である。図9のように、タングル S_m^N ($m \neq 1, N \geq 1$) は素なタングルであることが示せる。

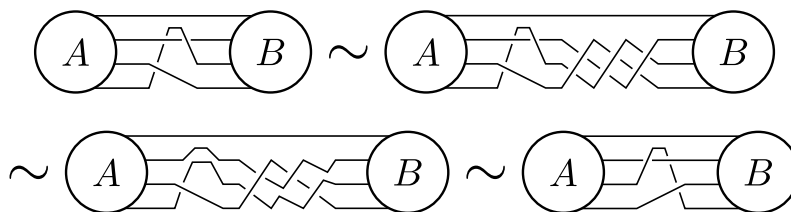


図7 タングル Q は、その鏡像と同型である。

ここで、図10のように、絡み目の1つの交差 (タングル S_1^0) をタングル S_m^N で置き換える操作あるいはその逆の操作を S_m^N 交差交換という。特に、 S_{-1}^0 交差交換は、いわゆる交差交換である。

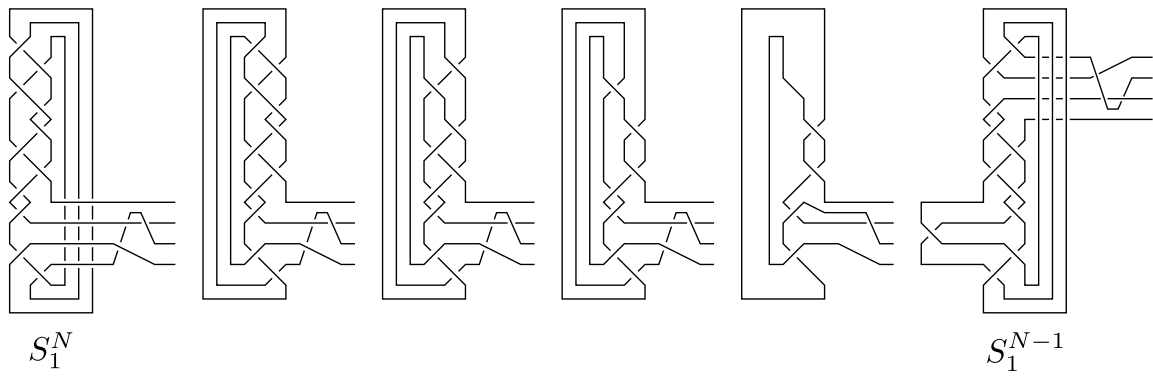


図8 タングル S_1^N ($N \geq 1$) は S_1^{N-1} と同型である.

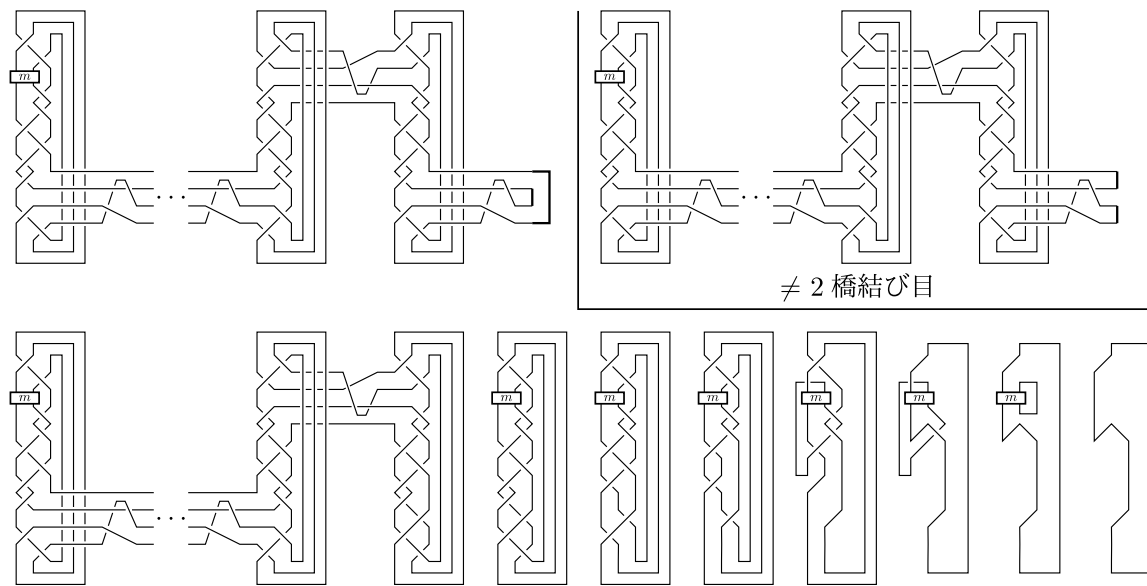


図9 タングル S_m^N ($m \neq 1, N \geq 1$) は素なタングルである.

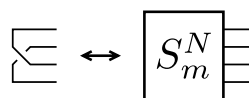


図10 S_m^N 交差交換.

4 絡み目 $L_m^N(T)$ と主結果

図11のように、任意の絡み目 L は1つの交差とタングル T をつないだ形で描ける. これを $L_1^0(T)$ で表す. この交差を構成する2本の弧のつながり具合で、図11のように、タングル T を0型, ∞ 型, X 型, $-X$ 型に分ける. この交差における1回の S_m^N 交差交換で得られる絡み目を $L_m^N(T)$ で表す. 表1のように、整数 m の偶奇性とタングル T の型の組で、(I) から (VIII) の場合を考える. 例えば、絡み目 $L_1^0(T)$, $L_0^0(T)$, $L_\infty^0(T)$, $L_m^N(T)$ の成分数は、表1のようになる. 次の定理 4.1, 4.4 が、本講演の主結果である.

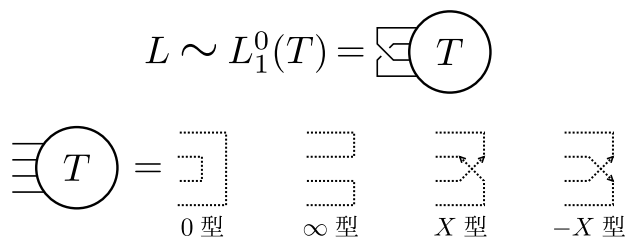


図 11 タングル T .

(m, T)	$\#L_1^0(T)$	$\#L_0^0(T)$	$\#L_\infty^0(T)$	$\#L_m^N(T)$
(I) (奇数, 0 型)	r	r	$r + 1$	r
(II) (奇数, ∞ 型)	r	$r + 1$	r	r
(III) (奇数, X 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r
(IV) (奇数, $-X$ 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r
(V) (偶数, 0 型)	r	r	$r + 1$	r
(VI) (偶数, ∞ 型)	r	$r + 1$	r	r
(VII) (偶数, X 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r
(VIII) (偶数, $-X$ 型)	r	$r - 1$	$r - 1$	r

表 1 (I)–(VIII).

定理 4.1. (HOMFLYPT 多項式の場合) L を絡み目, N を正の整数とする. このとき, 絡み目の無限族 $\{L_m^N(T)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ が存在し, $p_i(L_m^N(T); v) = p_i(L; v)$ ($0 \leq i \leq s$) が成り立つ.

$$\text{ここで, } s = \begin{cases} \text{(I)} & 2N - 1, \\ \text{(II)} & 2N - 2, \\ \text{(III)} & 2N - 1, \\ \text{(IV)} & 2N - 1, \\ \text{(V)} & 2N - 2, \\ \text{(VI)} & 2N - 3 \ (N \neq 1), \\ \text{(VII)} & 2N - 2, \\ \text{(VIII)} & 2N - 2 \end{cases} \quad \text{である. 特に, } L_1^N(T) \text{ は } L \text{ と同型である.}$$

さらに, 例外を除いて, $p_{s+1}(L_m^N(T); v) \neq p_{s+1}(L_{m'}^N(T); v)$ ($m \neq m'$) が成り立つ. 例外は, $p_0(L_1^0(T); v) = p_0(L_{-1}^0(T); v) \dots (*)$ をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ の場合である.

備考 4.2. 条件 $P(L_1^0(T); v, z) = P(L_{-1}^0(T); v, z) \dots (**)$ をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ を考える. この絡み目 $L_1^0(T)$ は条件 (*) をみたし, さらに, $P(L_m^N(T); v, z) = P(L; v, z)$ が成り立つ. 図 12 のような無効交差で S_m^N 交差交換をする場合, 絡み目 $L_1^0(T)$ は T が 0 型の絡み目で条件 (**) をみたす. しかし, この場合は, 絡み目 $L_m^N(T)$ は L と同型になる.

問題 4.3. 無効交差でない交差で S_m^N 交差交換をする場合, 条件 (**) をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ は存在するか? (条件 (*) の場合は容易に存在することがわかる.)

定理 4.4. (Kauffman 多項式の場合) L を絡み目, N を正の整数とする. このとき, 絡み目の無限族 $\{L_m^N(T)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ が存在し, $f_i(L_m^N(T); a) = f_i(L; a)$ ($0 \leq i \leq s$) が成り立つ.

ここで, $s = \begin{cases} \text{(I)} & N, \\ \text{(II)} & N - 1, \\ \text{(III)} & N + 1, \\ \text{(IV)} & N + 1, \\ \text{(V)} & N - 1, \\ \text{(VI)} & N - 2 \ (N \neq 1), \\ \text{(VII)} & N, \\ \text{(VIII)} & N \end{cases}$ である. 特に, $L_1^N(T)$ は L と同型である.

さらに, 例外を除いて, $f_{s+1}(L_m^N(T); a) \neq f_{s+1}(L_{m'}^N(T); a)$ ($m \neq m'$) が成り立つ. 例外は, $f_0(L_\infty^0(T); a) = (1 + a^2)a^{-2\nu} f_0(L_0^0(T); a) \cdots (\dagger)$ をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ の場合である.

備考 4.5. 条件 $\begin{cases} F(L_0^0(T); a, z) = a^{2\nu} F(L_1^0(T); a, z), \\ F(L_\infty^0(T); a, z) = ((a^{-1} + a)z^{-1} - 1) F(L_1^0(T); a, z) \end{cases} \cdots (\ddagger)$

をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ を考える. この絡み目 $L_1^0(T)$ は条件 (\dagger) をみたし, さらに, $F(L_1^0(T); a, z) = F(L_{-1}^0(T); a, z)$ 及び $F(L_m^N(T); a, z) = F(L; a, z)$ が成り立つ. 図 12 のような無効交差で S_m^N 交差交換をする場合, 絡み目 $L_1^0(T)$ は T が 0 型の絡み目で条件 (\ddagger) をみたす. しかし, この場合は, 絡み目 $L_m^N(T)$ は L と同型になる.

問題 4.6. 無効交差でない交差で S_m^N 交差交換をする場合, 条件 (\ddagger) をみたす T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$ は存在するか? (条件 (\dagger) の場合は容易に存在することがわかる.)

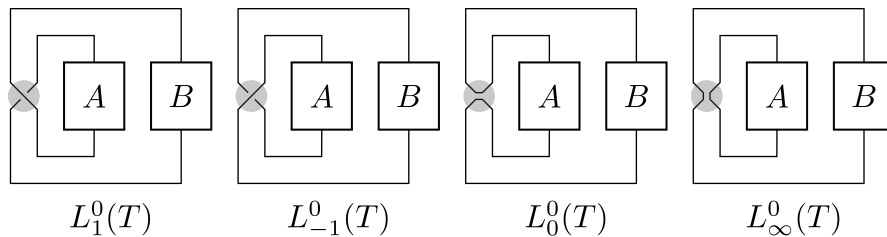


図 12 無効交差をもつ T が 0 型の絡み目 $L_1^0(T)$.

5 結び目 $K_{m,\ell}^N$

タングル T として, 図 13 の ℓ 半ひねり ($\ell \in \mathbb{Z}$) をもつタングル T_ℓ を考える. $L_1^0(T_\ell)$ は自明な結び目である. このとき, 図 14 のように, 結び目 $L_m^N(T_\ell)$ と同型な結び目を $K_{m,\ell}^N$ で表す. タングル S_m^N の性質より, $K_{1,\ell}^N$ と $K_{m,-1}^N$ は自明な結び目である. タングル Q の性質より, 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の鏡像は $-K_{-\ell,-m}^N$ と同型である. それ故, $K_{m,-m}^N$ は $(-)$ 両手型結び目である. 次の定理 5.1, 5.2 で, 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式を示す. ここで, 各場合 $(m, \ell) = (\text{奇数}, \text{奇数}), (\text{奇数}, \text{偶数}), (\text{偶数}, \text{奇数}), (\text{偶数}, \text{偶数})$ は, それぞれ表 1 の (I), (II), (V), (VI) に対応している.

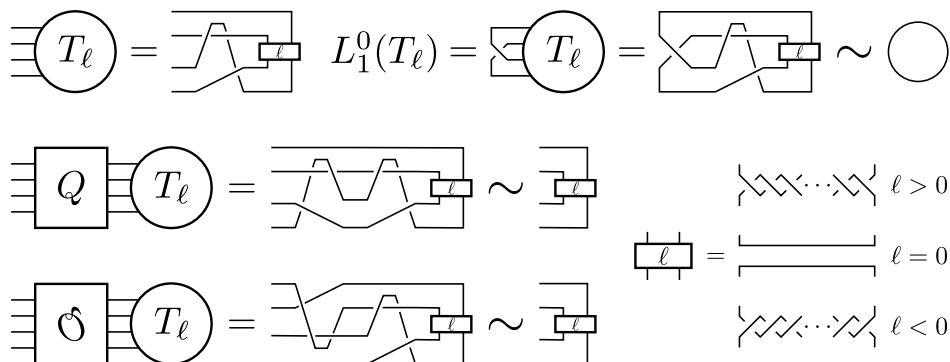


図 13 タングル T_ℓ .

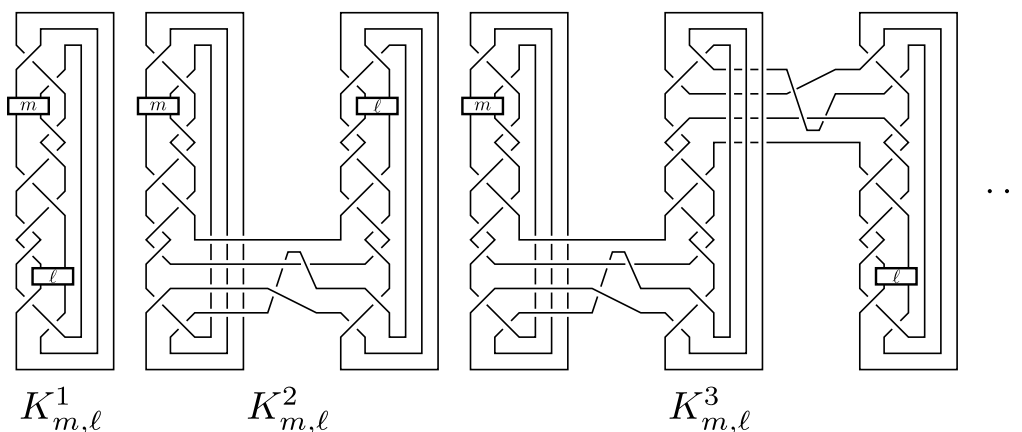


図 14 結び目 $K_{m,\ell}^N$.

定理 5.1. $\zeta = z^4(2 + z^2)^2$ とする. 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の HOMFLYPT 多項式 $P(K_{m,\ell}^N; v, z)$ は, 次のようになる:

$$P(K_{m,\ell}^N; v, z) = \begin{cases} 1 - \zeta^N(1 - v^{-m+1})(1 - v^{-\ell-1})\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{奇数}), \\ 1 - z^2\zeta^{N-1}(v^{-2} + 1)(1 - v^{-m+1})(v^{-\ell}(v^{-1} - v)^2 + (1 + v^2 - 2v^{-\ell})z^2)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{偶数}), \\ 1 - z^2\zeta^{N-1}(1 + v^2)(1 - v^{-\ell-1})(v^{-m}(v^{-1} - v)^2 + (v^{-2} + 1 - 2v^{-m})z^2)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = (\text{偶数}, \text{奇数}), \\ 1 - \left(2z^2 + z^4 + v^{-m}((v^{-1} - v)^2 - (3 - v^2)z^2 - z^4)\right) \left(2z^2 + z^4 + v^{-\ell}((v^{-1} - v)^2 + (v^{-2} - 3)z^2 - z^4)\right)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = [(\text{偶数}, \text{偶数}) N = 1], \\ 1 - z^4\zeta^{N-2}(v^{-1} + v)^2(v^{-m}(v^{-1} - v)^2 + (v^{-2} + 1 - 2v^{-m})z^2) \left(v^{-\ell}(v^{-1} - v)^2 + (1 + v^2 - 2v^{-\ell})z^2\right)\left(1 - \left(\frac{z}{v^{-1} - v}\right)^2\right) & (m, \ell) = [(\text{偶数}, \text{偶数}) N \geq 2]. \end{cases}$$

定理 5.2. 結び目 $K_{m,\ell}^N$ の Kauffman 多項式 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ は, 次のようになる:

$$F(K_{m,\ell}^N; a, z) = \begin{cases} 1 - (-1)^{\frac{m+\ell-2}{2}} \frac{m-1}{2} \frac{\ell+1}{2} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^{N+1}, *] & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{奇数}), \\ 1 - (-1)^{\frac{m+\ell-1}{2}} \frac{m-1}{2} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^N, *] & (m, \ell) = (\text{奇数}, \text{偶数}), \\ 1 - (-1)^{\frac{m+\ell-1}{2}} \frac{\ell+1}{2} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^N, *] & (m, \ell) = (\text{偶数}, \text{奇数}), \\ 1 - (-1)^{\frac{m+\ell}{2}} [(1+a^2)^{3N+1} a^{-3N+m+\ell-1} z^{N-1}, *] & (m, \ell) = (\text{偶数}, \text{偶数}). \end{cases}$$

ここで, 変数 x の Laurent 多項式 $\sum_{i=m}^M a_i x^i$ を最小次数と最大次数の項を使って, それぞれ $[a_m x^m, *]$ や $[*, a_M x^M]$ のように表す. 表 3, 4 の σ_n は $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_{n-1} + \sigma_{n+1} = z\sigma_n$ で定義された変数 z の多項式である.

	$m \geq 2$	$m = 1$
$\ell \geq 1 (N = 1)$	$[*, 3(1+a^2)a^{m+\ell-2}z^{m+\ell+8}]$	1
$\ell \geq 1 (N \geq 2)$	$[*, 3 \times 2^{N-1}(1+a^2)a^{m+\ell-2}z^{10N+m+\ell-2}]$	1
$\ell = 0 (N = 1)$	$[*, (1+a^2)a^{m-2}z^{m+8}]$	1
$\ell = 0 (N \geq 2)$	$[*, 2^{N-1}(1+a^2)a^{m-2}z^{10N+m-2}]$	1
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	$[*, 2^N(1+a^2)a^{m+\ell-1}z^{10N+m-\ell-3}]$	1

	$m = 0$	$m \leq -1$
$\ell \geq 1 (N = 1)$	$[*, (1+a^2)a^{\ell-1}z^{\ell+9}]$	$[*, 4(1+a^2)a^{m+\ell-1}z^{-m+\ell+9}]$
$\ell \geq 1 (N \geq 2)$	$[*, 3 \times 2^{N-2}(1+a^2)a^{\ell-1}z^{10N+\ell-1}]$	$[*, 9 \times 2^{N-2}(1+a^2)a^{m+\ell-1}z^{10N-m+\ell-1}]$
$\ell = 0 (N = 1)$	$[*, (a^{-1}+a)^2z^8]$	$[*, (1+a^2)a^{m-1}z^{-m+9}]$
$\ell = 0 (N \geq 2)$	$[*, 2^{N-2}(a^{-1}+a)z^{10N-1}]$	$[*, 3 \times 2^{N-2}(1+a^2)a^{m-1}z^{10N-m-1}]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	$[*, 2^{N-1}(1+a^2)a^{\ell}z^{10N-\ell-2}]$	$[*, 3 \times 2^{N-1}(1+a^2)a^{m+\ell}z^{10N-m-\ell-2}]$

表 2 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 z に関する最大次数の項.

	$m \geq 3$	$m = 2$
$\ell \geq 1$	$[(-1)^N(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+3}a^{-4N+1}, *]$	$[(-1)^{N+1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{-4N+1}, *]$
$\ell = 0$	$[(-1)^{N+1}(2-z^2)(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{-4N+1}, *]$	$[(-1)^N(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{-4N+1}, *]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	$[(-1)^{N+1}\sigma_{\ell+1}(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{-4N+\ell+1}, *]$	$[(-1)^N\sigma_{\ell+1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N-1}a^{-4N+\ell+1}, *]$

	$m = 1$	$m \leq 0$
$\ell \geq 1$	1	$[(-1)^{N+1}\sigma_{m-1}(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{-4N+m-1}, *]$
$\ell = 0$	1	$[(-1)^N\sigma_{m-1}(1-z^2)^{N+1}z^{2N-1}a^{-4N+m-1}, *]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell \leq -2$	1	$[(-1)^N\sigma_{m-1}\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{-4N+m+\ell-1}, *]$

表 3 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 a に関する最小次数の項.

	$m \geq 2$	$m = 1$
$\ell \geq 0$	$[*, (-1)^N\sigma_{m-1}\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{4N+m+\ell+1}]$	1
$\ell = -1$	1	1
$\ell = -2$	$[*, (-1)^{N+1}\sigma_{m-1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N-1}a^{4N+m-1}]$	1
$\ell \leq -3$	$[*, (-1)^N\sigma_{m-1}(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{4N+m-1}]$	1

	$m = 0$	$m \leq -1$
$\ell \geq 0$	$[*, (-1)^{N+1}\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^{N+1}z^{2N-1}a^{4N+\ell+1}]$	$[*, (-1)^N\sigma_{\ell+1}(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{4N+\ell+1}]$
$\ell = -1$	1	1
$\ell = -2$	$[*, (-1)^N(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^N z^{2N-1}a^{4N-1}]$	$[*, (-1)^{N+1}(1-3z^2+z^4)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+1}a^{4N-1}]$
$\ell \leq -3$	$[*, (-1)^{N+1}(2-z^2)(1-z^2)^N z^{2N+1}a^{4N-1}]$	$[*, (-1)^N(2-z^2)(1-z^2)^{N-1}z^{2N+3}a^{4N-1}]$

表 4 $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 a に関する最大次数の項.

備考 5.3. $(m, \ell) \neq (m', \ell')$, $m, m' \neq 1$, $\ell, \ell' \neq -1$ とする. 定理 5.1 より, $P(K_{m,\ell}^N; v, z) = P(K_{m',\ell'}^N; v, z)$ であるための必要十分条件は $(N', m', \ell') = (N, \ell + 2, m - 2)$, $(m, \ell) =$ (奇数, 奇数), (奇数, 偶数), [(偶数, 偶数) $N \geq 2$] となる. 定理 5.2 と $F(K_{m,\ell}^N; a, z)$ の変数 a に関する 2 番目に大きい次数と 2 番目に小さい次数の項より, 結び目 $K_{m,\ell}^N$ ($m \neq 1, \ell \neq -1$) は, すべて異なることがわかる.

参考文献

- [1] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306.
- [2] R. D. Brandt, W. B. R. Lickorish and K. C. Millett, A polynomial invariant for unoriented knots and links, Invent. Math. **84** (1986), no. 3, 563–573.
- [3] J. H. Conway, An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, from: “Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)”, Pergamon, Oxford (1970), 329–358.
- [4] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246.
- [5] C. F. Ho, On polynomial invariants for knots and links, Thesis (Ph.D.)-California Institute of Technology. 1986. 95 pp.
- [6] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111.
- [7] T. Kanenobu, Infinitely many knots with the same polynomial invariant, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 1, 158–162.
- [8] T. Kanenobu, Infinitely many knots with the same polynomial invariant, II, in preparation.
- [9] L. H. Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), no. 2, 417–471.
- [10] A. Kawauchi, Almost identical link imitations and the skein polynomial, Knots 90 (Osaka, 1990), 465–476, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [11] R. Kirby, Problems in Low-Dimensional Topology, 1995.
- [12] Y. Miyazawa, A fake HOMFLY polynomial of a knot, Osaka J. Math. **50** (2013), no. 4, 1073–1096.
- [13] J. H. Przytycki and P. Traczyk, Invariants of links of Conway type, Kobe J. Math. **4** (1988), no. 2, 115–139.