“折り目写像のトポロジー”

佐久間一浩（近畿大学理工学部）

1 Introduction

本稿では,「折り目写像の存在問題」

> “任意の n 次元閉多様体 M^n が折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geq p)$ を許容するための必要十分条件を求めよ”

を中心に論じるのが目的である．これは同時に，折り目以外の特異点の消去可能性問題でもある．

ここで，**折り目写像** $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geq p)$ とは，M^n を n 次元閉多様体としたとき，その上の写像 f に，特異点として局所的対応が

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

となる折り目特異点のみが現れる写像のことをいう．なお，折り目写像は，しばしば ‘submersion with folds’ とよばれる（[11]）こともある．$p=1$ のときは，f は Morse 関数に他ならないので，任意の n 次元閉多様体 M^n は折り目写像（関数）$f: M^n \to \mathbb{R}$ を許容する.（したがって，$p=1$ の場合の折り目写像の存在問題は自明に解決している．ただし，任意の閉多様体上に Morse 関数が存在することの証明は自明ではない.）

続いて $p=2$ の場合,「写像の特異点消去可能性問題」は，この分野（大域的特異点論）ではよく知られているように 1960 年代に Thom-Levine により，完全に決着している：

定理 1.1. M^n を n 次元閉多様体とし，$n \geq 2$ とする．折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は，オイラー標数 $\chi(M^n)$ が偶数となることである．

これは「オイラー標数の偶奇」が折り目以外の特異点消去の唯一の障害であるという主張である．$p \geq 2$ のとき，折り目写像の存在に関して，歴史的に最初に与えられたものを紹介しよう．M^n に位相的に強い条件を課すと存在問題は明解な解がある：

定理 1.2. M^n を安定平行化可能な n 次元閉多様体とする．このとき，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geq p \geq 2)$ はいつでも存在する．
特に $n=p$ のとき，M^n が向き付け可能ならば，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ が存在するための必要十分条件は，M^n が安定平行化可能なことである．

これは，Y. Eliashberg によるもので（[9]），彼自身による折り目写像のホモトピー原理（[10] 参照）の帰結である．これは，1969 年の John Mather によって提起された折り目写像に関する問題：

> “球面のホモトピー群 $\pi_n(S^p)$ $(n \geq p)$ の任意のホモトピー類には，折り目写像が含まれるか？”

への肯定的解決として与えられたものである．定理 1.2 で M^n が安定平行化可能とは，M^n の接束 TM^n と自明な直線束 ε^1 の Whitney 和 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ が自明束になるときをいう．安定平行化可能という条件は，多様体の構造に強い制約を課すため，折り目写像の存在を精密に論じるには，安定平行化可能という条件をどこまで緩められるかが重要な問題となる．実際の Eliashberg の定理は，もう少し広く値域多様体をユークリッド空間に限らず，安定平行化多様体 N^p として，証明されている．もちろん，任意の球面は安定平行化可能なので，その結果から Mather の問題が肯定的に解決する．

さて一般に，ジェネリックな写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^2$ には，特異点としては折り目特異点とカスプ特異点のみが現れるので，定理 1.1 は，平面への写像の「カスプ特異点消去問題」の完全解であり，カスプ消去の障害がオイラー標数の偶奇であることを主張している．ここで，カスプ特異点とは局所的対応が

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^3 + x_1 x_p \pm x_{p+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

となるものである．この場合，カスプ特異点は離散点として現れることに注意する（詳しくは [1] 参照）．

続いて，オイラー標数の偶奇が関連する折り目写像の非存在に関する結果を紹介する：

定理 1.3. M^n をオイラー標数が奇数であるような n 次元閉多様体とする．ただし，次元 n は必然的に偶数である．もしも折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在するならば，$p = 1, 3$ あるいは 7 でなければならない．

これは，オイラー標数が奇数であることと，（J. F. Adams によって解決された）Hopf 不変量 1 の元の（非）存在問題の解が結びつくことに依る．つまり，オイラー標数が奇数であると折り目以外の特異点が Hopf 不変量 1 の元の（非）存在に‘ひっかかり’，その特異点を消去できないことを意味する．このように，折り目写像の存在を考える限り，値域の次元が $p = 3, 7$ の場合は特別な位置を占めるのである．（なお，$p = 7$ に折り目写像が存在する，折り目以外の特異点が現れないというのはとてつもなく強い制限[1)]を加えるものであることに注意する．）$p = 3, 7$ のときには，実際にオイラー標数が奇数である M^n に対して，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ を構成することができるが，$p = 3$ の場合については後で触れることにする．そこで次節でオイラー標数の偶奇が登場することの意味を「多様体上のベクトル場問題」との関連で明らかにしたい．

2　安定スパンと折り目写像

1960 年頃，Smale-Hirsch により，はめ込み写像のホモトピー原理がはめ込み写像の空間から，それぞれの接束へのファイバーの単射準同型写像の空間への対応 $f \mapsto df$ で定まる写像 d の誘導準同型 d_* が弱ホモトピー同値になる（[5]）という形で証明された．

Y. Eliashberg は，1972 年に折り目写像の 1-jet レベル（すなわち，接束 TM^n から接束 TN^p への準同型束；$J^1(M^n, N^p) = \mathrm{Hom}(TM^n, TN^p)$）におけるホモトピー原理を証明した（[9]）．定理の正確な記述には，場所をとるため詳しくは，[4] の第 8 章を参照いただきたい．ここで折り目写像

[1)] 実際，[16] では例えば $(n, p) = (8, 7)$ において，折り目写像の非存在についての多くの例に触れている．

のホモトピー原理を大雑把に述べると，折り目写像全体の空間からそれぞれの接束へのファイバーを保つ準同型写像の空間への対応 $f \mapsto df$ で定まる連続写像 d の π_0 間の誘導重同型 d_* が全射であるという形で定式化される．これは，Smale-Hirsch の強い結果とは対照的である．それは，はめ込み写像という本来特異点を持たない写像と，折り目写像という本質的に特異点を有する写像の複雑さの違いに起因するのが理由である．折り目写像のホモトピー原理の使い方は，それぞれの接束へのファイバーを保つ準同型写像の空間が空でないことを示せばいいので，簡単には M^n, N^p を安定平行化可能とすれば適当なベクトル場が存在するために，折り目写像の存在が直ちにしたがうというのが定理 1.2 の意味するところである．

ところで，折り目写像の存在のための必要条件として，1992 年に佐伯修氏が次の重要な命題（[18, Proposition 3.1]）を証明した：

命題 2.1. もしも tame な折り目写像 $f : M^n \to N^p$ が存在するならば，fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to TN^p$ が存在する．ここで，ε^1 は M^n 上の自明な直線束を表す．

さてこの命題と関連して，安藤良文氏は折り目写像の 2-jet レベル（[3] 参照），

$$J^2(M^n, N^p) = \mathrm{Hom}(TM^n, TN^p) \oplus \mathrm{Hom}(TM^n \circ TM^n, TN^p),$$

におけるホモトピー原理を証明した（[7]）．ここで，$TM^n \circ TM^n$ は接束の対称積を表す．安藤のホモトピー原理を述べるためにいくつか準備をする．

折り目写像 $f : M^n \to N^p$ の折り目特異点集合（$p-1$ 次元の M^n の正則部分多様体）$F(f)$ への制限写像（余次元 1 はめこみ）$f|_{F(f)} : F(f) \to N^p$ の微分の直線法束が自明のとき，f を ‘tame’ という[2]．これは，$\mathrm{Coker}(df|_{F(f)})$ が自明と言っても同じことである．ただし n が偶数，p が奇数のとき，オイラー標数 $\chi(M^n)$ が奇数であるような多様体が折り目写像 $f : M^n \to N^p$ を許容するならば，f は必ず non-tame であることが簡単に証明できる．安藤氏は，2-jet 束まで精密化して，この命題の逆を考察した：

定理 2.2. $n \geq p \geq 2$ とする．もしも fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to TN^p$ が存在するならば，折り目写像 $f : M^n \to N^p$ が存在する．特に，$n-p$ が偶数ならば，その逆も成り立つ．

定理の後半部分についてだが，$w_1(\mathrm{Coker}(df|_{F(f)})) = (n-p)\alpha$ が計算できる．したがって，$n-p$ が偶数ならば $\mathrm{Coker}(df|_{F(f)})$ が自明になるので，命題 2.1 から逆も成り立つのである．我々は，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ の存在を論じるのが目的であるが，その際に定理 2.2 は重要な役割を果たす．定理 2.2 を応用するために,「多様体の安定スパン」の概念に触れる必要がある．

M^n を n 次元閉多様体とするとき，$\mathrm{span}(M^n)$ を M^n 上の一次独立なベクトル場の最大個数を表し，M^n の**スパン** (span) という．同じく，$\mathrm{span}^0(M^n)$ により，ベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の一次独立な切断の最大個数から 1 引いた数と定義し，M^n の**安定スパン** (stable span) という．M^n が安定平行化可能であることと，$\mathrm{span}^0(M^n) = n$ は同値である．定義から，直ちに $\dim M^n = n \geq$

[2] 用語の定義は，佐伯氏による．

$\mathrm{span}^0(M^n) \geq \mathrm{span}(M^n)$ を得る．また，古典的に知られているスパンおよび安定スパンに関わる微分トポロジーの結果を述べておく：

(1) $\mathrm{span}(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) = 0$

(2) $\mathrm{span}^0(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) \in 2\mathbb{Z}$

(3) $\mathrm{span}(S^n) = \mathrm{span}(\mathbb{R}P^n) = 2^c + 8d - 1 \quad (n+1 = (2a+1)2^{c+4d},\ 0 \leq c \leq 3)$.

(4) $\mathrm{span}^0(S^n) = n, \quad \mathrm{span}(\mathbb{R}P^n) = \mathrm{span}^0(\mathbb{R}P^n)$

(1) はよく知られた Poincaré-Hopf の定理（[6] の第 8 章参照）そのものである．(2) はそれの安定版の結果（[13] 参照）である．(3) は，1961 年の有名な J. F. Adams の解であるが，拙著 [4] にこれに関連する話題（多元体の存在次元，外積の存在次元，球面の平行化可能性問題，Hopf 不変量 1 の元の（非）の存在，オイラー標数が奇数の多様体から $\mathbb{R}^p$ への折り目写像が存在する次元 p の制約，等）とその証明の概説があるので，参照されたい．また，安定スパンに関して，次が成り立つことが容易に確かめられる：

$$\exists \text{ fiberwise epimorphism } TM^n \oplus \varepsilon^1 \to \varepsilon^p \iff \mathrm{span}^0(M^n) \geq p - 1.$$

したがって，定理 2.2 は安定スパンの言葉で次のように言い換えられる：

定理 2.3. $n \geq p \geq 2$ とする．もしも $\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ ならば，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在する．特に，$n-p$ が偶数ならば，その逆も成り立つ．

折り目写像の問題はベクトル場の問題としてかなりの部分解くことができる．例えば，$f : M^n \to \mathbb{R}^2$ をジェネリック写像とすると，その特異点集合 $S(f)$ は一次元部分多様体なので，$\mathrm{Coker}(df|_{S(f)})$ は自明束である．したがって，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^2$ の存在のための必要十分条件は，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq 1$ が成り立つことである．これは上の (2) にあるように，$\chi(M^n) \in 2\mathbb{Z}$ であり，冒頭で述べた定理 1.1 と合致する[3)]．

さてそこで，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ の解き方を簡単に述べるが，これはホモトピー論の範疇の問題として解くことができる．まずは，BO を分類空間（[1]）とするとき，連続写像 $\tau : M^n \to BO(n+1)$ をベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の分類写像とするならば，連続写像 $M^n \to BO(n-p+1)$ への持ち上げを見出せばよい．ここで，射影 $\pi : BO(n-p+1) \to BO(n+1)$ のファイバーは Stiefel 多様体 $V_p(\mathbb{R}^{n+1})$（$\mathbb{R}^{n+1}$ における正規直交 p 枠全体の空間）であることに注意する．ファイバーのホモトピー群 $\pi_i(V_p(\mathbb{R}^{n+1}))$ は，よく知られているのであとは Postnikov tower による議論に障害理論を適用して，持ち上げが存在するための障害類が計算されるというのが strategy となる（[22] 参照）．一般に，p の値が大きくなると $\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ をホモトピー論的に計算するのは，primary obstruction に加えて，secondary obstruction なども存在するので難しくなる．なお，ベクトル場の問題 $\mathrm{span}^0(M^n) \geq 2$ は $n \geq 3$ の奇数の場合は primary obstruction のみ[4)]で決まるので比較的易

[3)] この事実は，本来 H. Levine により，intrinsic derivative による込み入った計算により示されるが，安藤のホモトピー原理によりベクトル場の問題の帰結として直ちにわかる．

[4)] 実は，これがカスプの Thom 多項式と一致する．

しくて，これを求めることにより，定理 3.1 および定理 3.2 が得られる．$n=4$ かつ M^4 が向き付け可能な場合は，$\mathrm{span}^0(M^n) \geq 2$ である必要十分条件は，ある特性的ホモロジー類 $x \in H_2(M^4;\mathbb{Z})$ が存在して，$x \cdot x = \langle p_1, [M^4] \rangle$ を満たさなければならないので，定理 3.3 が得られるのである．

ちなみに，$\mathrm{span}^0(M^4) \geq 3$ となるための必要十分条件が計算することができて (詳細は [17] 参照),

定理 2.4. M^4 を 4 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^4$ が存在するための必要十分条件は，$w_2 = 0$ かつ $p_1 + (\beta w_1)^2 = 0$ を満たすことである．ここで，β は完全系列 $0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{2} \mathcal{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ に対応する Bockstein 作用素である．

定理 2.4 において，w_2 が primary obstruction（カスプの Thom 多項式）であり，$p_1 + (\beta w_1)^2$ が secondary obstruction である．前節で述べたように，例えば $\mathbb{R}P^4$ の偶数個の連結和 $\sharp^{2k}\mathbb{R}P^4$ に関して，どちらの障害類も消えるので，折り目写像 $f : \sharp^{2k}\mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在することが従う．なお，ベクトル場問題を解くのが少し難しくなるが，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 5, 6, 7)$ の必要十分条件の決定が [17] において成されている．

安定スパンの性質 (3) と (4) から，実射影空間上の折り目写像について，次のことが直ちにしたがう：

ベクトル場問題 $\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ が仮に解けても，$n-p$ が奇数のときは，tame な折り目写像の（非）存在が分かるのみで，実際存在しないときに non-tame な折り目写像の（非）存在については分からないことが多い．個別の閉多様体に関して，具体的に折り目写像を構成しようとしても，non-tame なものを構成するのは，一般に難しい．典型的なのが本節で述べた二つの予想である．例えば，次のような問題も案外難しいかもしれない：

折り目写像 $f : \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ を具体的に構成せよ．$\chi(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = 1$ なので，存在するとしても f は必ず non-tame であることに注意する．

3　$p = 3$ の折り目写像

本節では，$p = 3$ の場合，すなわち $n \geq 3$ としてジェネリックな写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^3$ を考える．このとき，f には次の三つの型の特異点が一般に現れる：

(1) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$

(2) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, x_3^3 + x_1 x_2 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$

(3) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, x_3^4 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$

(1) は折り目特異点（2 次元），(2) はカスプ特異点（1 次元），(3) は燕の尾特異点（離散点）とよばれる．カッコ内は部分多様体として次元を表す．特異点集合 $S(f) = \{x \in M^n; \mathrm{rank}\, df_x < 3\}$ の位相形から，燕の尾特異点は偶数個であることがわかる．f の折り目特異点集合を $F(f)$，カスプ特異点集合を $C(f)$，燕の尾特異点集合を $\mathrm{SW}(f)$ とすると，特異点集合の stratification が位相的閉包を用いて

$$S(f) = \overline{F(f)} = F(f) \cup C(f) \cup \mathrm{SW}(f), \quad \overline{C(f)} = C(f) \cup \mathrm{SW}(f)$$

で与えられる．さらにこのとき，特異点の Thom 多項式（定義と計算例について [3] の第 II 部参照）が

$$[S(f)]_2^* = w_{n-2}(M^n) \in H^{n-2}(M^n;\mathbb{Z}_2), \quad [\overline{C(f)}]_2^* = w_{n-1}(M^n) \in H^{n-1}(M^n;\mathbb{Z}_2)$$

となることが R. Thom によって計算されている．ここで，$[X]_2$ は X の mod 2 ホモロジー類を表し，上付きの $*$ はポアンカレ双対を，$w_i \in H^i(M^n;\mathbb{Z}_2)$ は M^n の i 次 Sitefel-Whitney 類を表す（[2]）．

$n=3$ で，M^3 が向き付け可能なときは，定理 1.2 にもあるように，Eliashberg（[8]）によっていつでも折り目写像 $f: M^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在することが証明されている．それでは，M^3 が必ずしも向き付け可能とは限らない，一般の場合はどうかが問題となるが，次が知られている（[22]）：

定理 3.1. M^3 を 3 次元閉多様体とする．折り目写像 $f: M^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，$w_2(M^3)=0$ となることである．

なお，3 次元という特殊性により，M^3 が向き付け可能ならば M^3 は平行化可能であることに注意する．したがって，定理 3.1 は，定理 1.2 の $(n,p)=(3,3)$ で定義域多様体が向き付け可能な場合の結果を含んでいる．

そこで，M^3 が向き付け不可能な場合を考える．例えば $M^3 = S^1 \times \mathbb{R}P^2$ とするとき，定理 1.1 より，$g: \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^2$ には必ず消去不可能なカスプ特異点が現れる．そこで，合成写像

$$S^1 \times \mathbb{R}P^2 \xrightarrow{\mathrm{id}\times g} S^1 \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

を f とすると，$f : S^1 \times \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ にはカスプ特異点の 1 次元 locus が現れて，$[\overline{C(f)}]_2^* = w_2(S^1 \times \mathbb{R}P^2) \neq 0$ なので，このカスプ特異点は消去できない．ただし，二番目の写像は自然な埋め込みである．このように定理 3.1 は，カスプの Thom 多項式が折り目写像が存在するための唯一の障害であることを示している．なお，この定理 3.1 は次のように一般化される（[22]）：

定理 3.2. M^n を n 次元閉多様体とする．ただし，$n \geq 3$ を奇数とする．折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，$w_{n-1}(M^n)=0$ となることである．

$n \geq 3$ を奇数とすると，上と同様にカスプの Thom 多項式が折り目写像が存在するための唯一の障害であることを示している．n が奇数なので，定理 [?] より，これはベクトル場の問題 $\mathrm{span}^0(M^n) \geq 2$ を解くことに得られる結果である．

では，当然起こる問題として

「n が偶数の場合はどうなるであろうか？」

実は，この場合は奇数のときに比べてずっと難しい．その最も n が小さい場合，すなわち $n=4$ の場合をこれから述べる．折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要条件は，もちろんカスプの Thom 多項式 $w_3 \in H^3(M^4;\mathbb{Z}_2)$ が消えることが含まれるが，$n=4$ の場合にこれは十分条件にはなり得ない．折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ の存在問題は，$n-p$ が偶数の場合はベクトル場問題と同じである（からホモトピー論として解き易い）が，$n-p$ が奇数の場合はベクトル場問題からは折り目写像の存在は従うが，その逆は必ずしも成立しない，という難しさがある．つまり，折り目写像の存在問題は，次元対 (n,p) の選び方によって様相が異なるのである．詳しくは，次節で論じる多様体の（安定）スパンの議論を参照されたい．

さてここで，$(n,p)=(4,3)$ で，M^4 が向き付け可能な場合の佐伯氏による解（[19] 参照）を述べよう：

定理 3.3. M^4 を向き付けられた 4 次元閉多様体とする．折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，

$$\exists x \in H^2(M^4;\mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad x^2 = p_1 \in H^4(M^4;\mathbb{Z}) \tag{$*$}$$

を満たすことである．

ここで，$p_1 \in H^4(M^4;\mathbb{Z})$ は M^4 の第 1 次 Pontrjagin 類（[2] 参照）を表す．ジェネリック写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が与えられたとき，カスプの Thom 多項式は $w_3 \in H^3(M^4;\mathbb{Z}_2)$ であるが,「任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して，$w_3 = 0$ である」ことを H. Whiteny が 1940 年代に証明した[5]．したがって，カスプの Thom 多項式は消えているが，定理 3.3 は，カスプの Thom 多項式以外の secondary obstruction が（4 次のコホモロジー類として）存在することを主張している．実際，$b_2(M^4)=1,2$ であるような向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して，折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在しない，e.g. $M^4 = \mathbb{C}P^2$ または $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$，ことがわかる．ただし，ここで注意して欲しいのが $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上には，折り目写像 $f: \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{R}^3$ が存在する（具体的に構成するのは容易）ので，定理 3.3 で向きの入れ方は，本質的である．このことから，大事な系が得られる：

系 3.4. M^4 を任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体とする．このとき，$N^4 = M^4 \sharp S^2 \times S^2$ または $M^4 \sharp \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ に対して，折り目写像 $f: N^4 \to \mathbb{R}^3$ はいつでも存在する．

これは，上のような N^4 に対しては，定理 3.3 の方程式 $(*)$ を満たす 2 次コホモロジー類 x が必ず見つかるからである．なお，佐伯氏の論文 [19] には，$\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する M^4 の交叉形式による特徴づけが証明されている．

こうして見てくると，自然に次の問いが浮かぶであろう：

　M^4 が向き付け不可能な場合はどうか？

具体的な折り目写像の構成が [18, Example 3.11] において，与えられた．M^4 を $\mathbb{R}P^2$ 上の非自明な $\mathbb{R}P^2$ 束の全空間とするとき，折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ がつくられ，その特異点集合は，$S(f) = S^2 \cup \mathbb{R}P^2$ である．ここで，ファイバー束はオイラー標数に関して，乗法性をもつので，$\chi(M^4) = \chi(\mathbb{R}P^2)\cdot\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ であることに注意する．そこで構成されている折り目写像は，必然的に non-tame （定義は次節参照）となることにも注意する．

ところで，4 次元の無向コボルディム群について，$\mathfrak{N}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ が知られているが，それぞれの生成元は，コボルディム類 $[\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2]$, $[\mathbb{R}P^4]$ である（[2]）．すぐ上で述べた M^4 は $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ にコボルダントである．では，$\mathbb{R}P^4$ はどうだろうか？もう少し正確に問題を述べると,「$\mathbb{R}P^4$ は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するだろうか？」となる．

さて，[16, Theorem 1.3] において，次のことが証明された（ただし，ここで必要な形に限定して引用）：

[5] この事実は，写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ のカスプ特異点の Thom 多項式が消えていることと直接に結び付くことに注意するのは，4 次元多様体論的に価値がある．

定理 3.5. M^n を n 次元閉多様体とし，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ が存在するとする．このとき，ある $x \in H^2(M^n; \mathcal{Z})$ が存在して，$x^2 = p_1 \in H^4(M^n; \mathcal{Z})$de が mod 4-torsion で成り立つ．

ここで，$\mathcal{Z}$ は局所係数を表し，M^n が向き付け可能ならば，$\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$ である．コホモロジー類の等式が折り目写像存在のための必要条件だという主張である．

そこで，$\mathbb{R}P^4$ のときに，この必要条件が成り立つか否かを確かめよう．まずは，$\mathbb{R}P^4$ は向き付け不可能なので，$H^4(\mathbb{R}P^4; \mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ であるから，$p_1 = w_4$ を得る．なぜまら，$\mathbb{R}P^4$ の全 Stiefel-Whitney 類は,

$$w(\mathbb{R}P^4) = (1+\alpha)^5 = 1 + \alpha + \alpha^4 \qquad (**)$$

なので（[2]），$p_1 = \alpha^4 = \alpha^2 \smile \alpha^2$ を得る（ただし，$\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ は生成元である）．したがって，$x = \alpha^2$ ととれば，必要条件は満たされることが分かった．

いまのところ，折り目写像 $f: \mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための障害は見当たらない．筆者は次のように予想している：

【予想】"$\mathbb{R}P^4$ は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するだろう！"

なお，[17] で（ベクトル場問題の解の系として）証明されているように，$\mathbb{R}P^4 \sharp \mathbb{R}P^4$ は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する.（もっと一般に，$\mathbb{R}P^4$ の偶数個の連結和は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する）．現在までのところ，$\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容しない向き付け不可能な 4 次元閉多様体は知られていない．なお，何気ないことではあるが，$(**)$ より，$w_3 = 0$ だからカスプの Thom 多項式は消えていることにも注意．したがって，次の予想はもっともらしい：

【予想】"任意の向き付け不可能な 4 次元閉多様体 M^4 は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するだろう！"

ここで述べた二つの予想は,（筆者の知る限り）おそらく未解決である．

4　6 次元閉多様体上の折り目写像

前節で，向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体 M^{2m} が $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するか否かが問題であり，$n = 2$ の場合は完全解が与えられているのを見た．そこで，本節では $n = 3$ の場合，すなわち 6 次元の場合を考察するのを目的とする[6)]．

最初に 6 次元特有の結果に言及しておく．それは，"向き付けられた六次元コボルズム群は自明群である" という事実である．言い換えれば，任意の向き付け可能な 6 次元閉多様体 M^6 は零コボルダントである．したがって，特にそのオイラー標数 $\chi(M^6)$ は偶数であるから，§ 2 より，$\mathrm{span}^0(M^6) \geq 1$ が成り立つことに注意する．あとは取り合えず $\mathrm{span}^0(M^6) \geq 2$ が成り立つ条件を考察すればよい．

そこで，簡単な予備的考察を行う．例えば，X^5 を任意の向き付け可能な 5 次元閉多様体とする．$\mathrm{span}^0(X^5) \geq 1$ に注意する．このとき，$M^6 = S^1 \times X^5$ とおくと,

$$\mathrm{span}^0(M^6) = \mathrm{span}^0(S^1) + \mathrm{span}^0(X^5) \geq 2$$

が成り立つので，折り目写像 $f: M^6 \to \mathbb{R}^3$ が存在することになる．N^4 を任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体とするとき．$M^6 = S^2 \times N^4$ とおくと，同様に折り目写像 $f: M^6 \to \mathbb{R}^3$ が存在するこ

[6)] 八次元以上は将来の研究課題であるが，案外六次元における方法論と平行の議論で解決するかもしれない．

とになる．直積構造をもたない場合，例えば 3 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ に関して，$\mathrm{span}^0(\mathbb{C}P^3) = 3$ が知られている（[14]）ので，やはり折り目写像 $f : \mathbb{C}P^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在することになる．したがって，ここまでに $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容しない向き付け可能な 6 次元閉多様体は存在しない．

ここで，一見すると我々の問題設定とは無関係に思える結果に言及する．定理 3.3 の直後でも触れたように，「任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して，$w_3 = 0$ である」ことを H. Whiteny が 1940 年代に証明したがこの結果は 1960 年に W. S. Massey により，次の形で一般化された ([15])：「任意の向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体 M^{2n} に対して，$w_{2n-1} = 0$ が成り立つ.」これは奇数次元では一般に成立しないことに注意する．これを我々の問題設定に焼き直すと次のようになる[7)]：任意の向き付け可能な $2n$ 次元閉多様体 M^{2n} が与えられたとき，任意のジェネリック写像 $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^3$ のカスプの Thom 多項式は恒等的に消えている，すなわち

$$[\overline{C(f)}]_2^* = w_{2n-1} = 0.$$

したがって，任意のジェネリック写像 $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^3$ のカスプ特異点（一次元 locus）の primary obstruction は消えているので，それが消去可能か否かは直ちにはわからない．ただし，前節で見たように $2n = 4$ では，4 次元多様体の交叉形式が $b_2 = 1, 2$ のとき二次障害類となるのを見た．つまり，4 次元の場合は特異点の情報が例外的に深いことを意味する．

実は，$n = 6$ では次のことが証明できる：

定理 4.1. M^6 を向き付け可能な 6 次元閉多様体とする．任意のジェネリック写像 $f : M^6 \to \mathbb{R}^3$ は折り目とカスプのみを特異点にもつものとしてよいが，カスプ特異点はいつでも消去できる，すなわち折り目写像 $g : M^6 \to \mathbb{R}^3$ がいつでも存在する．

証明には，Ando-Elishberg のホモトピー原理を用いて成される．まだ，きちんと詰めていないが，その方法論で $2n \geq 8$ 以上の場合も証明できると思われる．

参考文献

[1] 『特異点のこころえ』佐久間一浩著（日本評論社），2019 年 5 月.

[2] 『特性類講義』J. W. ミルナー＆ J. D. スタシェフ共著（佐伯修/佐久間一浩共訳），シュプリンガー・フェアラーク東京，2001 年 11 月.

[3] 『幾何学と特異点』泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩著（共立出版），2001 年 5 月.

[4] 『数 “8” の神秘』佐久間一浩著（日本評論社），2013 年 8 月.

[5] 『埋め込みとはめ込み』足立正久著 (岩波書店)，1984 年 12 月.

[6] 『微分位相幾何学』田村一郎著 (岩波オンデマンドブックス)，2015 年 7 月.

[7] Y. Ando, *Existence theorems of fold-maps*, Japan. J. Math. (N.S.) **30** (2004), 29–73.

[8] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **4** (1970), 1119–1134.

[7)] Massey の定理は，私が修士の院生頃に別の研究で初めて読んだ．n が偶数のときなぜ $w_{n-1} = 0$ が成り立つことの背景に何があるのか当時は不思議だったが，実はカスプの Thom 多項式なのだと気付いて，Thom 多項式の定義の普遍性に改めて触れた気がした．

[9] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[10] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Grad Studies in Math. vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002..

[11] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

[12] B. Kalmar, *Fold maps on low dimensional manifolds*, preprint (2021).

[13] J. Korbaš and P. Zwengrowski, *The vector field problem: a survey with emphasis on specific manifolds*, Expos. Math. **12** (1994), 3–30.

[14] U. Koschorke, *Vector fields and other vector bundle isomorphisms–A singularity approach*, Lecure Notes in Math. **847** (Springer, Berlin, 1981).

[15] W. S. Massey, *On the Stiefel Whitney classes of a manifold*, Amer. J. Math. **10**(1960), 92–102.

[16] T. Ohmoto, O. Saeki and K. Sakuma, *Self-intersection classes for singularities and its applications to fold maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3825–3838.

[17] R. Sadykov, O. Saeki and K. Sakuma, *Obstruction to the existense of fold maps*, J. London Math. Soc. **81** (2010), 338–354.

[18] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–565.

[19] O. Saeki, *Fold maps on* 4*-manifolds*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 627–647.

[20] O. Saeki, *Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 1854, 2004.

[21] O. Saeki and K. Sakuma, *Stable maps between* 4*-manifolds and elimination of their singularities*, J. London Math. Soc. **59**(1999), 1117–1133.

[22] K. Sakuma, *Existence problem for fold maps*, Real and Complex Singularities, pp. 342–387, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007.

[23] K. Sakuma, *Fold dimension set of manifolds*, JP Journal of Geometry and Topology **18** (2015), 37–64.