C^* 環に値をとる連続写像のなすバナッハ環上の保存問題

大井　志穂　(新潟大学)*

1　保存問題について

保存問題とは，大雑把に言うと,「与えられた線形空間の上で定義された写像が，ある関数や集合，関係を保存するとき，その写像の特徴づけを与えよ。」というような問題の総称である。例えば，[28] に書かれているものを少し一般化すると，次の問題は保存問題の一例である。

問題 1.1. X を線形空間とし，F を X 上のスカラー値写像とする（もしくは F はベクトル値や集合値写像としてもよい）。このとき，線形写像 $T : X \to X$ が

$$F(T(a)) = F(a), \quad a \in X$$

をみたすとき，T を特徴づけよ。

問題 1.1 の例として，保存問題の起源とも言える二つの結果を紹介する。一つ目は，1897 年の Frobenius [15] の結果で，X を n 次複素正方行列全体 $M_n(\mathbb{C})$，写像 $F : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を $F(A) = \det(A)$ とした場合である。すなわち，線形写像 $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ が

$$\det(T(A)) = \det(A), \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

をみたすとき，$\det(MN) = 1$ をみたす $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して，

$$T(A) = MAN, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

もしくは

$$T(A) = MA^tN, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

が成り立つ。二つ目は，等距離写像である。X をユークリッドノルム $\|\cdot\|$ が定まった n 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ とする。写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

をみたすとき，ある $n \times n$ 直交行列 U と，$a \in \mathbb{R}^n$ が存在して

$$T(x) = Ux + a, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ。一般に，有限次元線形空間の間の等距離写像はアフィン写像になるので，これは $F(x) = \|x\|$ とした場合に対する，問題 1.1 の例と言える。

最近では，線形性を仮定しない写像に対して，保存問題を考え，結果としてある種の線形性を導くような研究も盛んに行われている。保存問題は数学において自然な問題であり，多くの対象に対して考えうる問題であろう。一方，現在の保存問題の研究対象は，関数解析学における，ヒルベルト空間上の有界線形作用素全体，バナッハ環，バナッハ空間などノルム構造をもった線形空間やその部分構造がほとんどであることを述べておく。保存問題の理論や研究対象の詳細は Molnár による [32] を参照されたい。

本稿では，保存問題においても基本的で重要とされる問題の一つである，バナッハ空間上の全射線形等距離写像について述べる。

* 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地新潟大学理学部理学科数学プログラム
e-mail: shiho-oi@math.sc.niigata-u.ac.jp
本研究は，科研費（課題番号: JP21K13804) の助成を受けたものである。
2020 Mathematics Subject Classification: 47B49, 47B48,46E40.
Keywords: 全射等距離写像，Jordan ∗ 同型写像，バナッハ環.

2 全射等距離写像

近代的な等距離写像の研究は，1932 年の Banach[2] による。コンパクト距離空間 X に対して，$C_{\mathbb{R}}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と表す。$C_{\mathbb{R}}(X)$ の二つの関数の和，積およびスカラーと関数の積を普通の意味の関数の和，積，スカラーとの積で定義し，そのノルムを $\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(x)| \mid x \in X\}$ と定義すれば，$C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ は実バナッハ環となる。Banach はこの間の全射等距離写像について，次を示した。

定理 2.1 ([2] Chapter XI, Theorem 3 and Remark). 二つのコンパクト距離空間 X_1 と X_2 が同相であるための必要十分条件は，$C_{\mathbb{R}}(X_1)$ と $C_{\mathbb{R}}(X_2)$ の間の全射等距離写像が存在することである。さらに，全射等距離写像 $T : C_{\mathbb{R}}(X_1) \to C_{\mathbb{R}}(X_2)$ が $T(0) = 0$ をみたすならば，同相写像 $\varphi : X_2 \to X_1$ と実数値連続関数 $\alpha : X_2 \to \{-1, 1\}$ があって，

$$T(f)(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C_{\mathbb{R}}(X_1), \quad y \in X_2$$

が成り立つ。

その後，1937 年に Stone は Ω_1, Ω_2 をコンパクトハウスドルフ空間としたときの，全射等距離写像 $T : C_{\mathbb{R}}(\Omega_1) \to C_{\mathbb{R}}(\Omega_2)$ を特徴づけた [39]。また，Ω をコンパクトハウスドルフ空間とするとき，$C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ は連続}\}, \|f\|_\infty = \sup\{\,|f(x)| \mid x \in \Omega\}$ と定めると，$C(\Omega)$ は複素バナッハ環となる。一般に任意の単位的可換 C^* 環は，あるコンパクトハウスドルフ空間 Ω が存在して $C(\Omega)$ とバナッハ環として等距離同型である。Banach と Stone の結果を複素化し，得られる定理を今日では Banach-Stone の定理という。すなわち Banach-Stone の定理は，単位的可換 C^* 環の間の全射複素線形等距離写像の特徴づけを与えた定理である。

定理 2.2 (Banach-Stone の定理). 写像 $T : C(\Omega_1) \to C(\Omega_2)$ が全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ と連続関数 $\alpha : \Omega_2 \to S^1 := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$ が存在して，

$$T(f)(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C(\Omega_1), \quad y \in \Omega_2$$

が成り立つことである。

Banach-Stone の定理では，全射等距離写像 T が複素線形であることを仮定しているが，実はこれは本質的ではない。実際，最初に述べたように，有限次元ノルム空間の間の等距離写像は自動的にアフィン写像になるがこれを一般の（無限次元）実ノルム空間に拡張した Mazur-Ulam の定理が良く知られている。

定理 2.3 (Mazur-Ulam の定理). 二つのノルム空間 N_1, N_2 の間の写像 $T : N_1 \to N_2$ が全射等距離写像であるならば，$T - T(0)$ は実線形である。

よって，本稿では，全射線形等距離写像を考えることにする。また，以下とくに断らない場合は，バナッハ空間，バナッハ環といえば全て複素バナッハ空間，複素バナッハ環を意味することにする。

2.1 等距離写像と同型写像の不思議な関係性

さて，コンパクトハウスドルフ空間 Ω に対して，$C(\Omega)$ は可換バナッハ環であった。そこで，$T : C(\Omega_1) \to C(\Omega_2)$ の間の多元環としての同型写像を考えることができる。「同型写像を特徴づけよ」という問題も保存問題における自然な問題の一つであり，Gelfand と Kolmogrov による結果がある。

定理 2.4 ([16]). コンパクトハウスドルフ空間 Ω_1, Ω_2 に対して，$T : C(\Omega_1) \to C(\Omega_2)$ が同型写像であるための必要十分条件は，ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ が存在して，

$$Tf(y) = f(\varphi(y)), \quad f \in C(\Omega_1)$$

が成り立つことである。

これらのことから，$C(\Omega)$ のバナッハ空間としての等距離同型性と多元環としての代数構造が同値であることが分かる。一見すると全く関係のない積の構造を等距離写像は自動的に保存するという結果は大変驚くべき結果である。

2.1.1 Banach-Stone の定理の一般化

Banach-Stone の定理については，拡張やその類似の結果がこれまでに多く報告されている。詳細については，Fleming and Jamison [12, 13] を参照されたい。ここではそのうちの 3 つを紹介することにする。コンパクトハウスドルフ空間 Ω に対して，$C(\Omega)$ の部分多元環 $\mathcal{U}$ が，Ω 上の関数環であるとは，(1) $\mathcal{U}$ が $C(\Omega)$ の中で閉であり，(2) $\mathcal{U} \ni 1$, ただし 1 は恒等的に 1 である定数関数，さらに，(3) $\mathcal{U}$ が Ω の点を分離する，つまり Ω の任意の異なる 2 点 y_1, y_2 に対して，ある $f \in \mathcal{U}$ が存在して $f(y_1) \neq f(y_2)$ が成り立つときをいう。関数環は非常に抽象的に定義されるが，もともとは関数論における諸定理を関数解析学の手法を用いて一般化し，統一的に扱うことを目標として研究されている可換バナッハ環である。関数環の例として基本的なものは，円板環である。複素平面上の単位円周 S^1 の上で定義された複素数値連続関数で，単位開円板の解析関数に連続的に拡張できるもの全体は S^1 上の関数環となる。これを円板環という。関数環 $\mathcal{U}$ に対して，$\mathcal{U}$ の極大イデアル空間を $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ と書くことにする。Banach-Stone の定理は，次のように関数環に拡張されることが知られている。

定理 2.5 (Nagasawa [34], de Leeuw, Rudin and Wermer [10]). 関数環 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ に対して，写像 $T : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ が全射複素線形等距離写像であるならば，任意の $y \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_2)$ に対して $|\alpha(y)| = 1$ をみたす $\alpha \in \mathcal{U}_2$ と，同相写像 $\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{U}_2) \to \mathcal{M}(\mathcal{U}_1)$ が存在して，

$$Tf(y) = \alpha(y) f(\varphi(y)), \quad f \in \mathcal{U}_2,\ y \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_2)$$

が成立する。またこの逆も成立する。

Banach-Stone の定理が単位的可換 C^* 環上の全射複素線形等距離写像の特徴づけであることを考慮すると，任意の C^* 環の間の全射複素線形等距離写像に拡張できるかという疑問が自然に生じる。これを解答したのが，Kadison [24] である。C^* 環 $\mathcal{A}$ において，任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ と定義された演算 $\circ$ を Jordan 積と呼ぶ。ここで，二つの C^* 環 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に対して，全単射な複素線形写像 $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ が条件 $\tau(a^*) = \tau(a)^*, \tau(a \circ b) = \tau(a) \circ \tau(b)$ を任意の $a, b \in \mathcal{A}_1$ で満たすとき，τ を Jordan $*$-同型写像と呼ぶ。Kadison によって与えられた Banach-Stone の定理の非可換化は，次のとおりである。

定理 2.6 (Kadison [24]). $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を単位的 C^* 環とする。写像 $T : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ が全射複素線形等距離写像であるとき，ユニタリー元 $u \in \mathcal{A}_2$ と，*Jordan* $*$-同型写像 $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ が存在して，

$$T = u\tau$$

となる。またこの逆も成立する。

つまり，Kadison の定理によって，二つの C^* 環 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の間の全射複素線形等距離写像は，Jordan 積の構造を保存することが示された。一般の単位的 C^* 環の間の等距離写像が，結局 Jordan$*$ 環としての代数構造を保存する。

最後は，他のバナッハ環に対しても Banach-Stone の定理と類似の結果が得られるかという問題である。一様ノルムではない完備なノルムを持つ連続関数からなる多元環に対して，その間の全射線形等距離写像を特徴づける問題は，Cambern によって始められた ([8])。のちに詳しく述べることだが，等距離写像を特徴づける一つの鍵は単位球の形である。一様ノルムや作用素ノルムではないノルムの場合，単位球の形が複雑になることが多い。このことが一因となって，その間の等距離写像を特徴づけることは難しい場合が多い。Cambern は，$[0,1]$ 上の複素数値連続微分可能関数全体に $\|f\| = \max_{x\in[0,1]}\{|f(x)| + |f'(x)|\}$ でノルムを定めた Banach 環 $C^1([0,1])$ と，$[0,1]$ 上の複素数値絶対連続関数全体に $\|f\| = \max_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\} + \int_0^1 |f'(x)|dx$ でノルムを定めたバナッハ環 $AC([0,1])$ に対して，その間の全射線形等距離写像の特徴づけを与えた。Cambern の結果を皮切りに，数多くの一様ノルムとは異なるノルムで定められる可換バナッハ環に対して，その間の全射線形等距離写像を決定する問題が研究されるようになった。特に，Rao と Roy[38] は, 閉区間 $[0,1]$ 上のリプシッツ関数全体に $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ をノルムとしてできるリプシッツ環 $\mathrm{Lip}([0,1])$ の間の全射線形等距離写像を決定した。

定理 2.7 ([38])**.** 写像 $T : \mathrm{Lip}([0,1]) \to \mathrm{Lip}([0,1])$ が全射複素線形等距離写像であるとき，$\alpha \in S^1$ が存在して，

$$T(f)(x) = \alpha f(x), \quad f \in \mathrm{Lip}([0,1]), \quad x \in [0,1]$$

または

$$T(f)(x) = \alpha f(1-x) \quad f \in \mathrm{Lip}([0,1]), \quad x \in [0,1]$$

が成り立つ。またこの逆も成立する。

これ以降，リプシッツ環の間の全射複素線形等距離写像の研究が始まった。リプシッツ環の定義は定義 4.4 を参照のこと。また，リプシッツ環の一般論は [41] が詳しい。[38] では,「X を任意のコンパクト距離空間としたとき，$\mathrm{Lip}(X)$ の間の全射線形等距離写像は荷重合成作用素で表せるか。」という問題が提唱されたが，完全な回答は最近まで得られていなかった。後で述べることに関係するのであるが，$(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|_L)$ の双対空間の単位球の端点が決定できず，等距離写像を決定するのが難しい（第 2.3 章参照）。[38] の問題は [18] において解決された。証明はここでは紹介しないが，Choquet 境界から必要な情報を得ることにより証明された。双対空間の単位球の端点を決定することは現在のところ未解決と思われることを注意しておく。

定理 2.8 ([18])**.** 任意のコンパクト距離空間 X_i $(i = 1,2)$ に対して，写像 $T : \mathrm{Lip}(X_1) \to \mathrm{Lip}(X_2)$ が全射複素線形等距離写像であるとき，$\alpha \in S^1$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \to X_1$ が存在して，

$$T(f)(x) = \alpha f(\varphi(x)), \quad f \in \mathrm{Lip}(X_1), \quad x \in X_2$$

が成立する。また，この逆も成立する。

もちろん任意のバナッハ環に対して Banach-Stone 型の定理が得られるはずはなく，単位的半単純可換バナッハ環の範疇でも Banach-Stone 型の定理が成り立たないバナッハ環が存在する。例えば，局所コンパクト群 G 上のフーリエ環 $A(G)$ は，半単純可換バナッハ環であるが，その間の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素で表せるとは限らない。つまり，全射複素線形等距離写像であっても自動的に積や Jordan 積の構造を保存するとは限らないバナッハ環が存在する。

2.2 Banach-Stone の定理の証明

Banach が [2] で付けた証明は，やや複雑な証明であるが，その後多くの研究者によって別証が与えられ，今では Banach-Stone の定理の証明はいくつも知られている。そのうちの二つを紹介し，等距離写像を決定するための手法について簡単に述べる。

2.3 extreme point argument と技術的困難

定義 2.9. X をノルム空間とし，X の共役空間を X^* と書く。このとき，$\mathrm{Ext}\,X^*$ を $\{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \leq 1\}$ の端点全体の集合とする。

事実 2.10. コンパクトハウスドルフ空間 Ω に対して，

$$\mathrm{Ext}\,C(\Omega)^* = \{\alpha\delta_x \mid \alpha \in S^1,\ x \in \Omega\}.$$

ただし，任意の $f \in C(\Omega)$ に対して，$\delta_x(f) = f(x)$ と定める。

この事実 2.10 を用いて，Banach-Stone の定理を示す。

Banach-Stone の定理の略証１. $T : C(\Omega_1) \to C(\Omega_2)$ を全射複素線形等距離写像とする。このとき共役作用素 $T^* : C(\Omega_2)^* \to C(\Omega_1)^*$ に対して，

$$T^*(\mathrm{Ext}\,C(\Omega_2)^*) = \mathrm{Ext}\,C(\Omega_1)^* \tag{1}$$

であることが簡単にわかる。事実 2.10 により，任意の $y \in \Omega_2$ に対して, $\alpha(y) \in S^1$ と $\varphi(y) \in \Omega_1$ が存在し，

$$T^*(\delta_y) = \alpha(y)\delta_{\varphi(y)}$$

が成り立つ。このとき任意の $f \in C(\Omega_1)$ に対して，$Tf(y) = T^*(\delta_y)(f) = \alpha(y)\delta_{\varphi(y)}(f) = \alpha(y)f(\varphi(y))$ を得る。$f = 1$ を考えれば，$\alpha \in C(\Omega_2)$ であることが分かり，ウリゾーンの補題より，φ が Ω_2 から Ω_1 への同相写像であることもすぐにわかる。 □

実際,（1）はより一般に成立する。すなわち任意のノルム空間 N_1,N_2 の間の全射複素線形等距離写像 T が与えられたとき,

$$T^*(\mathrm{Ext}\,N_2^*) = \mathrm{Ext}\,N_1^*$$

が成り立つ。つまり，$C(\Omega)$ に対する事実 2.10 のように, **$\mathrm{Ext}\,N^*$ が具体的に決定できれば**, Banach-Stone の定理の略称１と同様の議論により $T : N_1 \to N_2$ を決定できる。その際, 次がかなり有用である。

定理 2.11 (Brosowski and Deutsch の定理 [7]). E をノルム空間として，X を $C(\Omega, E)$ の部分空間とする。このとき

$$\mathrm{Ext}(C(\Omega, E)^*) = \{x^* \circ \delta_t \mid x^* \in \mathrm{Ext}\,E^*, t \in \Omega\}$$

$$\mathrm{Ext}(X^*) \subset \{x^* \circ \delta_t \mid x^* \in \mathrm{Ext}(E^*), t \in \Omega\}$$

が成り立つ。ただし，δ_t は 任意の $F \in C(\Omega, E)$ に対して $\delta_t(F) = F(t)$ で定められる写像である。

双対空間の単位球の端点を決定し，上のように等距離写像を特徴づけるこの手法を extreme point argument といい，現在の等距離写像の研究においては最も主流の手法の一つである。

一方で，この extreme point argument には技術的困難がある。C^* 環のノルムでないノルムで定まっているバナッハ空間に対しては，その双対空間の単位球の端点を決定することは容易ではないことが多い。例えば，$\mathrm{Lip}(X)$ の場合は，あるコンパクトハウスドルフ空間 K 上の連続関数空間 $C(K)$ に等長に埋め込むことができるため，定理 2.11 より，双対空間の単位球の端点が決定できそうに思えるかもしれないが，これは簡単ではない。実は K はいくつかの集合の直積であり，集合としてかなり大きくなってしまうからである。よって，extreme point argument は理論上は，非常に有益で任意のバナッハ空間やノルム空間に対して，その上の全射等距離写像を決定するためのアルゴリズムが与えられているともいえるが，双対空間の単位球の端点が決定できなければ，まったく使えない。

2.4 T 集合

そこで，双対空間の単位球の端点に頼らない何か良い方法はないだろうか？次に T 集合を用いた証明を紹介する。ノルム空間上の T 集合は，Myers[33] によって導入された。

定義 2.12. N をノルム空間とする。N の部分集合 C が

$$x_1, \cdots, x_n \in C \Longrightarrow \|x_1 + \cdots + x_n\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$$

をみたし，この性質について極大であるとき，C を N の T 集合という。

例 2.13. $\mathbb{R}^2$ 上の各単位球に対して，次が T 集合の例である。

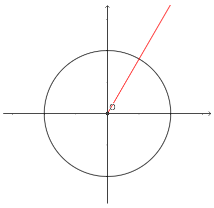

図 1: 円

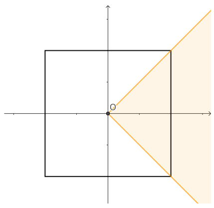

図 2: 正方形

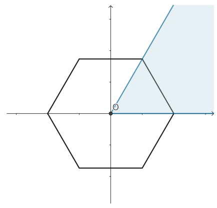

図 3: 正 6 角形

事実 2.14. $C \subset C(\Omega)$ が T 集合のとき，ある $\alpha \in S^1$, $x \in \Omega$ が存在して，

$$C = \{f \in C(\Omega) \mid \exists r \geq 0 s.t. f(x) = r\alpha,\ |f(x)| = \|f\|_\infty\} := \Delta_{x,\alpha}$$

Banach-Stone の定理の略証 2. 全射複素線形等距離写像 $T : C(\Omega_1) \to C(\Omega_2)$ に対して，T は，$C(\Omega_1)$ の T 集合を $C(\Omega_2)$ の T 集合に写し，その対応は 1 対 1 対応である。よって，任意の $x \in \Omega_1$ に対して，$T(\Delta_{x,1}) = \Delta_{\psi(x),\alpha(x)}$ を満たす $\alpha(x) \in S^1$ と $\psi(x) \in \Omega_2$ が存在する。ここで任意の $f \in \Delta_{x,1}$ を選ぶと，ある $r \geq 0$ が存在して，$f(x) = r$ かつ $\|f\|_\infty = r$ となる。T は等距離写像であり，さらに $Tf \in \Delta_{\psi(x),\alpha(x)}$ であるので，$Tf(\psi(x)) = r\alpha(x)$ かつ $\|Tf\|_\infty = r$ がなりたつ。すなわち，$Tf(\psi(x)) = \alpha(x)r = \alpha(x)f(x)$ を得る。ウリゾーンの補題を用いると，$f(x) = 0$ をみたす $f \in C(\Omega_1)$ に対して，$Tf(\psi(x)) = 0$ であることがわかるので，任意の $f \in C(\Omega_1)$ に対して，$T(f - f(x)1)(\psi(x)) = 0$ を得る。以上より，$Tf(\psi(x)) = f(x)T1(\psi(x)) = \alpha(x)f(x)$ となる。あとは，ψ が同相写像であること，α が連続写像であることを証明すればよい。 □

3 ベクトル値連続関数のなすバナッハ空間上の全射線形等距離写像

3.1 Banach-Stone property

ベクトル値連続関数のなすバナッハ空間 $C(\Omega, E)$ の間の全射線形等距離写像の研究は，Jerison[22] が始めた。補題 3.1 はすぐにわかる。

補題 3.1. E_1, E_2 をバナッハ空間，Ω_1, Ω_2 をコンパクトハウスドルフ空間とする。さらに，ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ と，任意の $y \in \Omega_2$ に対して，$y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような全射線形等距離写像 $V_y : E_1 \to E_2$ が存在したとする。このとき，$T : C(\Omega_1, E_1) \to C(\Omega_2, E_2)$ を，

$$TF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in C(\Omega_1, E_1) \tag{2}$$

と定義すると，$T : C(\Omega_1, E_1) \to C(\Omega_2, E_2)$ は全射線形等距離写像となる。

この逆が成り立つのか？ということが問題である。すなわち，全射複素線形等距離写像 $T : C(\Omega_1, E_1) \to C(\Omega_2, E_2)$ が与えられたとき，必ず (2) をみたすような同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ と, 全射線形等距離写像 $V_y : E_1 \to E_2$ の族が存在するだろうか。

定義 3.2 ([9]). E をバナッハ空間とする。E が *Banach-Stone property* をみたすとは，任意のコンパクトハウスドルフ空間 Ω_1, Ω_2 に対して，全射線形等距離写像 $T : C(\Omega_1, E) \to C(\Omega_2, E)$ が与えられたとすると，ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ と，任意の $y \in \Omega_2$ に対して，$y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような全射複素線形等距離写像 $V_y : E \to E$ が存在し，*(2)* をみたすときをいう。

ベクトル値連続関数を考える動機は何だろうか？Banach-Stone の定理は，バナッハ空間 $\mathbb{C}$ が Banach-Stone property をみたすことを主張していると解釈することができるため，[22] を読むと，Jerison 自身のモチベーションは Banach-Stone の定理の一般化を得ることであったようである。一方でベクトル値の連続関数の間の全射等距離写像を調べると，基本的なところに様々な現象が起こる。そこでいくつかの古典的な結果を紹介したい。

3.2 Banach-Stone property を満たす例

定義 3.3. バナッハ空間 E が狭義凸であるとは，$x, y \neq 0$ である $x, y \in E$ に対して，$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ が成り立つならば，ある $\lambda > 0$ が存在して，$x = \lambda y$ が成り立つときをいう。二つの T 集合 C_1,C_2 が不一致であるとは，$C_1 \cap C_2 = \{0\}$ もしくは，ある T 集合 C_3 が存在して，$C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \{0\}$ が成り立つときをいう。狭義凸空間ならば, 任意の二つの T 集合が不一致であることは明らかである。図 *1* より，単位球が円となる *2* 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ は，狭義凸である。また，単位球が正方形となる $\mathbb{R}^2$ 空間は，不一致でない二つの T 集合が存在するが (図 *2*)，単位球が正 *6* 角形となる $\mathbb{R}^2$ 空間は，狭義凸空間ではないが任意の二つの T 集合が不一致である (図 *3*)。

定理 3.4 ([22]). 任意の二つの T 集合が不一致であるような実バナッハ空間（特に狭義凸空間）は *Banach-Stone property* を満たす。

定理 3.4 は Behrends によって，定理 3.11 と一般化された。説明するために，幾つかの定義と事実を簡単に紹介する。

定義 3.5. E を $\{0\}$ でない *(*実もしくは複素*)* バナッハ空間とする。有界線形作用素 $T : E \to E$ が *multiplier* であるとは，任意の $p \in \operatorname{Ext} E^*$ に対して，$p \circ T = a_T(p)p$ が成り立つ写像 $a_T : \operatorname{Ext} E^* \to \mathbb{C}$ が存在するときをいう。さらに，$\operatorname{Mult}(E) := \{T : E \to E \mid T$ は *multiplier*$\}$ とする。

任意の $S, T \in \operatorname{Mult}(E)$ に対して，$\operatorname{Ext} E^*$ 上で，$(S \circ T - T \circ S)^* = 0$ が成り立つ。Krein-Milman の定理より，$\operatorname{Mult}(E)$ は E 上の有界線形作用素のなす多元環の**可換な**部分多元環である。

定義 3.6. E を *(*実もしくは複素*)* バナッハ空間とする。有界線形作用素 $T : E \to E$ が *M-bounded* とは，ある $\lambda > 0$ が存在して，$Tx \in \{\mu x \mid \mu \in \mathbb{K}, |\mu| \le \lambda\}$ であるときをいう。ただし $\mathbb{K}$ は E のスカラー体である。

ここで，任意の $x \in E, \lambda > 0$ に対して，$R_\lambda(x) := \bigcap\{D \mid D$ は閉球 *s.t.* $\{\mu x \mid \mu \in \mathbb{K}, |\mu| \le \lambda\} \subset D\}$ と定める。すると有界線形作用素 $T : E \to E$ が M-bounded のとき，ある定数 $\lambda > 0$ があって，$Tx \in R_\lambda(x)$ が任意の $x \in E$ に対して成り立つ。

例 3.7. $\mathbb{R}^2$ 上の各単位球に対して，点 x_0 における $R_1(x_0)$ は図 *4, 5* のとおりである *([3])*。

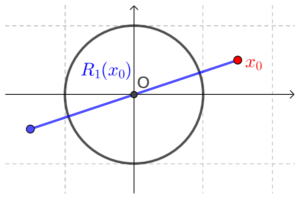

図 4: 単位球が円のとき

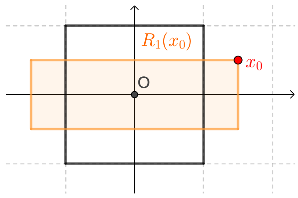

図 5: 単位球が正方形のとき

図 4 より，次が分かる。

例 3.8. $\|\cdot\|_2$ をユークリッドノルムとする。$T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ が *M-bounded* のとき，ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して，$T = kI$ となる。

さらに次の事実が知られている。

事実 3.9 ([3])**.** E を *(*実もしくは複素*)* バナッハ空間とする。有界線形作用素 $T : E \to E$ に対して T が *multiplier* であることと *M-bounded* であることは同値である。

定義 3.10. *(*実もしくは複素*)* バナッハ空間 E に対して，$T \in \mathrm{Mult}(E)$ に対して，$S \in \mathrm{Mult}(E)$ が T の共役であるとは，$a_S = \overline{a_T}$ のときをいう。また，E の *centralizer* とは，$Z(E) = \{T \in \mathrm{Mult}(E) \mid \exists S \in \mathrm{Mult}(E)\ s.t. T$ は S の共役 $\}$ のことをいう。E が実バナッハ空間の場合は $Z(E) = \mathrm{Mult}(E)$ となる。E が *trivial centralizer* を持つとは，$Z(E) = \mathbb{K}\,\mathrm{Id}_E$ であるときをいう。

例 3.8 と事実 3.9 より，$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ は trivial centralizer を持つことがわかる。

定理 3.11 ([3])**.** 二つの *(*実もしくは複素*)* バナッハ空間 E_1,E_2 が *trivial centralizer* を持つとする。任意のコンパクトハウスドルフ空間 Ω_1, Ω_2 に対して，全射線形等距離写像 $T : C(\Omega_1, E_1) \to C(\Omega_2, E_2)$ が存在するならば，同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ と任意の $y \in \Omega_2$ に対して，$y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような全射線形等距離写像 $V_y : E_1 \to E_2$ が存在して，

$$TF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in C(\Omega_1, E_1), y \in \Omega_2$$

と書ける。特に，$C(\Omega_1, E_1)$ と $C(\Omega_2, E_2)$ が等距離同型ならば，Ω_1 と Ω_2 は同相であり，かつ E_1 と E_2 は等距離同型である。

系 3.12. *trivial centralizer* をもつバナッハ空間は *Banach-Stone property* を満たす。

3.3 Banach-Stone property を満たさない例

満たさない例もいくつも知られるが，ここでは有名なものを紹介する。

定理 3.13 ([40])**.** 任意の $n \geq 2$ をみたす自然数 n に対して，ℓ_n^∞ は *Banach-Stone property* を満たさない。

Ω_1, Ω_2, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ をコンパクトハウスドルフ空間とする。このとき $C(\Omega, C(\mathcal{M}))$ は $C(\Omega \times \mathcal{M})$ に等距離同型であることと Banach-Stone の定理より, $C(\Omega_1, C(\mathcal{M}_1))$ と $C(\Omega_2, C(\mathcal{M}_2))$ が等距離同型であるための必要十分条件は，$\Omega_1 \times \mathcal{M}_1$ と $\Omega_2 \times \mathcal{M}_2$ が同相であることである。よって次が分かる。

定理 3.14 ([14], [3])**.** $C([0, 1])$ は *Banach-Stone property* を満たさない。

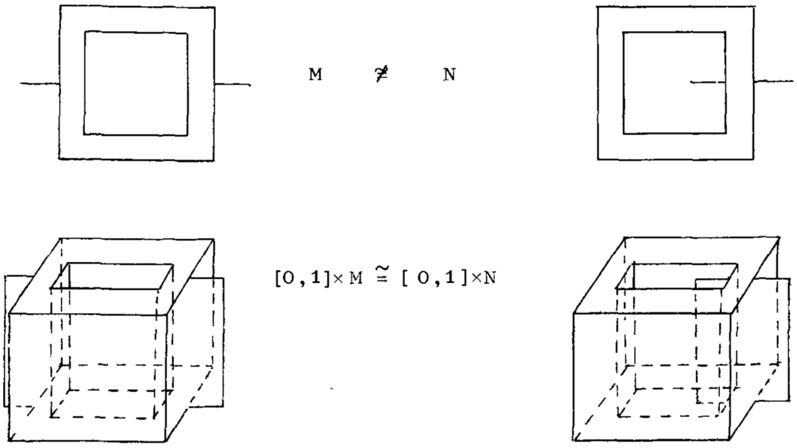

図 6: [3] p143

Proof. M,N を図 6 のように与えられた二つの $\mathbb{R}^2$ のコンパクト集合とする。M,N は同相ではない。一方で, $M \times [0,1]$ と $N \times [0,1]$ は同相な位相空間であるので，$C(M, C([0,1]))$ と $C(N, C([0,1]))$ は等距離同型である。

よって，$C([0,1])$ は Banach-Stone property を満たさない。 □

以上より，バナッハ空間 E が，Banach-Stone property をみたすには，かなり強い条件が必要そうである。さらに，その証明についても，バナッハ空間 E の単位球の形や $\mathrm{Mult}(E)$ のような隠れた可換環に着目して，等距離写像の形を決定している。第 2.1 章でも述べた通り，いくつかのバナッハ環上の等距離写像は積の構造を結果として保存するが，そもそも定理の主張や証明の鍵が，可換な部分環に着目することであることを強調しておく。

3.4 バナッハ束

ここでバナッハ束を定義し，ベクトル値連続関数を考えるもう一つのモチベーションを紹介する。

定義 3.15 ([11]). ハウスドルフ空間 Ω に対して，あるハウスドルフ空間 B と，連続で全射な開写像 $\pi : B \to \Omega$ の組 (B, π) を Ω 上の束という。このとき，任意の $x \in \Omega$ に対して，$B_x := \pi^{-1}(x)$ を x のファイバーという。連続な *cross-section* の集合を $\Gamma_\Omega = \{f : \Omega \to B \mid \pi \circ f = \mathrm{Id}_\Omega, f$ は連続$\}$ とおく。Ω 上のバナッハ束とは，(B, π) が Ω 上の束であり，各ファイバー B_x がバナッハ空間となり，次を満たすときをいう。

1. $s \in B$ に対して，$s \mapsto \|s\|$ が連続

2. $\pi(s) = \pi(t)$ である $s, t \in B$ に対して，$(s, t) \mapsto s + t$ が連続

3. $s \in B, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$s \mapsto \lambda s$ は連続

4. 任意の $x \in \Omega, \{s_i\} \subset B$ *s.t.* $\|s_i\| \to 0, \pi(s_i) \to x \in \Omega$ のとき，$s_i \to 0_x$ が成り立つ。ただし 0_x は B_x の零元である。

例 3.16. 任意のバナッハ空間を E とする。このとき $B = \Omega \times E, \pi : B \to \Omega$ を $\pi(x, a) = x$ とする。すると，(B, π) は Ω 上のバナッハ束となり，Γ_Ω は $C(\Omega, E)$ と同一視できる。

定義 3.17 ([11]). バナッハ束 $(B_{\Omega_1}, \pi_{\Omega_1}), (B_{\Omega_2}, \pi_{\Omega_2})$ が *isometrical bundle isomorphic* であるとは二つの同相写像 $\Phi : B_{\Omega_1} \to B_{\Omega_2}$ と $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ が存在し，次を満たすときをいう。

1. $\pi_{\Omega_2} \circ \Phi = \psi \circ \pi_{\Omega_1}$

2. $\Phi|_{B_x} : B_x \to B_{\psi(x)}$ は全射線形写像

3. 任意の $b \in B_x$ に対して，$\|\Phi(b)\| = \|b\|$

このとき，$(\Phi, \psi) : (B_{\Omega_1}, \pi_{\Omega_1}) \to (B_{\Omega_2}, \pi_{\Omega_2})$ は, $\varphi = \psi^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$, $h_y = \Phi|_{B_{\varphi(y)}} : B_{\varphi(y)} \to B_y$ とおき，

$$Tf(y) = \Phi(f(\varphi(y))) = h_y(f(\varphi(y))), \quad f \in \Gamma_{\Omega_1},\ y \in \Omega_2$$

とおくと，全射線形等距離写像 $T : \Gamma_{\Omega_1} \to \Gamma_{\Omega_2}$ が構成できる。とくに，例 3.16 で定めた自明束の間の isometrical bundle isomorphism は $C(\Omega, E)$ の間の全射線形等距離写像を誘導する。この逆が成り立つのか？（つまり，自明束に対して，Γ_Ω 間の全射線形等距離写像は，自明束の間の isometrical bundle isomorphism を導くか？）というのが，$C(\Omega, E)$ の間の全射線形等距離写像の問題である。

4 主結果

$C(\Omega, E)$ やその部分空間の間の全射線形等距離写像や Banach-Stone property の研究は，Jerison や Myers 以来，現在も盛んに行われている。例えば [1, 4, 5, 6, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 31, 35] などがある。一方，Banach-Stone property をみたすバナッハ空間 E がほかにあるとしたら，それは何らかの意味で積の構造をもち，それが等距離写像と関連をもっていると予想するのは自然であろう。よって，バナッハ環 E に対して，E に値をとる連続関数空間の間の全射複素線形等距離写像を決定してみたい。このような理由から，筆者は E が単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ である場合に興味がある。

4.1 $C(\Omega, \mathcal{A})$ 上の全射複素線形等距離写像

$\mathcal{A}$ が単位的 C^* 環の場合，$C(\Omega, \mathcal{A})$ もまた単位的 C^* 環であることはすぐにわかる。よって定理 2.6 により，$C(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ から $C(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ の間の単位的全射複素線形等距離写像は Jordan $*$ 同型写像になる。さらに実は，次の定理が成り立つ。

定理 4.1 ([37])**.** *Jordan* $*$ 同型写像 $J : C(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to C(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ に対して，$\mathcal{A}_2$ の任意の *pure state* ρ に対してある連続写像 $\varphi_\rho : \Omega_2 \to \Omega_1$ が存在し，また任意の $y \in \Omega_2$ に対して *Jordan* $*$ 準同型写像 $V_y : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ が存在して

$$\pi_\rho(JF(y)) = \pi_\rho(V_y(F(\varphi_\rho(y)))), \quad F \in C(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$$

が成り立つ。ただし，$\mathcal{A}_2$ の任意の *pure state* ρ に対して, $\pi_\rho : \mathcal{A}_2 \to B(H_\rho)$ は $\mathcal{A}_2$ 上の *GNS* 表現 *(*既約表現*)* である。

実は，上の定理では，φ_ρ と V_y が全射であるとは限らない。例えば $C(\{a\}, C(\{b, c\}))$ と $C(\{a, b\}, C(\{c\}))$ の間に $*$ 同型写像が存在するが，$\{a\}$ と $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ と $\{c\}$ が同相でないことから分かるであろう。ただし，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ が因子環つまり，任意の $y \in \mathcal{A}_i$ に対して $xy = yx$ が成り立つならば $x = \mathbb{C}1$ が成り立つとき，次がわかる。

定理 4.2 ([17, 37])**.** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ が単位的因子 C^* 環とする。このとき写像 $J : C(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to C(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ が *Jordan* $*$ 同型写像であるための必要十分条件は，ある同相写像 $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ と任意の $y \in \Omega_2$ に対して $y \mapsto V_y$ が強位相で連続であるような *Jordan* $*$ 同型写像 $V_y : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ が存在して

$$JF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in C(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$$

が成り立つことである。

以上より，次がわかる。定理 3.14（$C([0, 1])$ は単位的可換 C^* 環である) と比較してほしい。

定理 4.3. 単位的因子 C^* 環は *Banach-Stone property* をみたす。

4.2 $\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ 上の全射複素線形等距離写像

リプシッツ環の場合はどうか。まず初めに，リプシッツ環の定義を述べておく。

定義 4.4. コンパクト距離空間 (X, d) とバナッハ環 $(E, \|\cdot\|_E)$ とする。写像 $F : X \to E$ に対して，$L(F) := \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x)-F(y)\|_E}{d(x,y)}$ と定める。このとき，$\mathrm{Lip}(X, E) := \{F : X \to E \mid L(F) < \infty\}$ とする。$\mathrm{Lip}(X, E)$ は通常の関数の演算で多元環となり，$\|F\|_L = \sup_{x \in X} \|F(x)\|_E + L(F)$ でノルムを定めると，バナッハ環となる。

E が単位的 C^* 環 $\mathcal{A}$ のとき，対合 $*$ を $F^*(x) = [F(x)]^*$ で定義することで，$\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ は単位的バナッハ $*$ 環となる。$\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ におけるノルム $\|\cdot\|_L$ は C^* 条件を満たさないノルムであるため，第 2.3 章で述べたように，双対空間の単位球の端点がかなり複雑である。定理 2.11 を使って $\mathrm{Ext}(\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A}))^*$ を決定することは避け，第 2.4 章や, 第 3 章で紹介したような古典的な道具や対象に立ち返ってヒントを得た。次が $\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ 上の等距離写像に関する結果である。

定理 4.5 ([36]). X_1, X_2 をコンパクト距離空間とし，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を単位的因子 C^* 環とする。写像 $T : \mathrm{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \to \mathrm{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ が単位的全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は，単位的全射線形等距離写像 $V : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \to X_1$ が存在して，

$$TF(y) = V(F(\varphi(y))), \quad F \in \mathrm{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1), y \in X_2$$

が成り立つことである。

4.2.1 定理 4.5 の証明

証明の鍵は，エルミート作用素と T 集合である。エルミート作用素は，Lumer[29] によって提唱された作用素である。

定義 4.6. E をバナッハ空間とする。写像 $[\cdot, \cdot] : E \times E \to \mathbb{C}$ が任意の $x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次を満たすとき，$[\cdot, \cdot]$ を E 上の *semi-inner product* と呼ぶ。

1. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$
2. $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$
3. $x \neq 0$ ならば $[x, x] > 0$
4. $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$

このとき，有界線形作用素 $T : E \to E$ がエルミート作用素であるとは，E の *semi-inner product* $[\cdot, \cdot]_E$ に対して

$$[Tx, x]_E \in \mathbb{R}, \quad x \in E$$

を満たすときである。

まず，Hahn-Banach の定理より，任意のバナッハ空間に対して semi-inner product が存在することがわかる。さらにエルミート作用素の定義は，semi-inner product の選び方に依存しないことが知られている [29]。

注意 4.7. $T \in \mathrm{Mult}(E)$ が，任意の $p \in Ext^*(E)$ に対して，$a_T(p) \in \mathbb{R}$ が成り立つとき，T はエルミート作用素である。

定理 4.8 ([36]). X をコンパクト距離空間，E をバナッハ空間としたとき，$T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(X, E)$ がエルミート作用素であるための必要十分条件は，あるエルミート作用素 $\phi : E \to E$ が存在して，

$$TF(x) = \phi(F(x)), \quad F \in \mathrm{Lip}(X, E)$$

が成り立つことである。

また，semi-inner product と等距離写像の関係について，次が知られている。

定理 4.9 ([27]). *ノルム空間* N_1, N_2 *の上の全射複素線形等距離写像* $U : N_1 \to N_2$ *に対して，* N_i *上の semi-inner product* $[\cdot, \cdot]_i$ *が存在して，任意の* $x, y \in N_1$ *に対して，* $[Ux, Uy]_2 = [x, y]_1$ *が成り立つ。*

$U : N_1 \to N_2$ を全射複素線形等距離写像とする。するとこの定理より，T が N_1 上のエルミート作用素のとき，UTU^{-1} は N_2 上のエルミート作用素になる。このようにして，N_1 上のエルミート作用素と N_2 上のエルミート作用素の 1 対 1 対応をつけることで，全射複素線形等距離写像 U に関する情報を取り出すことができる。Lumer[30] によって，エルミート作用素を用いて等距離写像を決定する研究が始められた。

ここで，定理4.5の証明のポイントを述べる。定理4.8を用いると，任意の $f \in \mathrm{Lip}(X_1)$, $x \in X_2$ に対して，$U(f \otimes 1)(x)$ は単位的 C^* 環 $\mathcal{A}_2$ の center に属することがわかる。今，$\mathcal{A}_2$ は因子環であったので，ある $g \in \mathrm{Lip}(X_2)$ が存在して，$T(f \otimes 1) = g \otimes 1$ となる。感覚的な言葉で説明すると，$U(f \otimes 1)(x)$ が $\mathcal{A}_2$ の**可換**な元となり，$\mathcal{A}_i$ が因子環であることから $\mathrm{Lip}(X_i)$ と $\mathcal{A}_i$ を「分離」することができる。よって X_1 と X_2 の間の全射等距離写像 $\varphi : X_2 \to X_1$ が構成できる。実は定理 4.5 の証明も，可換な部分環に着目することが鍵となっていることを強調したい。

このようにして $\mathrm{Lip}(X)$ と $\mathcal{A}$ を「分離」することができたのだが，再度 $\mathrm{Lip}(X)$ と $\mathcal{A}$ を結合させ，$\mathrm{Lip}(X, \mathcal{A})$ に復元するときに，T 集合がうまく働く。ただし，ノルム空間上の T 集合では，言葉が不十分であったため，半ノルム空間上に対しても考えられるように T 集合の定義を拡張し,（定義はノルム空間の場合と同様である）$\mathrm{Lip}(X, E)$ の T 集合を次のように特徴づけた。

定理 4.10 ([36]). E をバナッハ空間とする。S が $\mathrm{Lip}(X, E)$ の T 集合であるための必要十分条件は，ある E 上の T 集合 $\mathbb{U}$ と，$\mathrm{Lip}(X, E)$ 上の半ノルム $L(\cdot)$ に関する T 集合 $\mathbb{T}$ が存在して，

$$S = \{F \in \mathrm{Lip}(X, E) \mid F(x) \in \mathbb{U},\ \|F(x)\|_E = \|F\|_\infty,\ F \in \mathbb{T}\}$$

が成り立つ。

定理 4.10 を用いて,「分離」された $\mathrm{Lip}(X)$ と $\mathcal{A}$ を結合させ，定理 4.5 を示すことができる。さらに次も独立に示せた。

定理 4.11 ([37]). X_1, X_2 *をコンパクト距離空間とし，* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *を単位的原始* C^* *環とする。写像* $J : \mathrm{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \to \mathrm{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ *が Jordan* $*$ *同型写像であるための必要十分条件は，任意の* $y \in X_2$ *に対して* $y \mapsto V_y$ *が強位相でリプシッツ連続となる Jordan* $*$ *同型写像* $V_y : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *とリプシッツ同型写像* $\varphi : X_2 \to X_1$ *が存在して，*

$$JF(y) = V_y(F(\varphi(y))), \quad F \in \mathrm{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1)$$

を満たすことである。

定理 4.5 と定理 4.11 と定理 2.6 より，単位的原始 C^* 環 $\mathcal{A}_i$ に対して，任意の単位的全射複素線形等距離写像 $T : \mathrm{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \to \mathrm{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ は，Jordan $*$ 同型写像であるがその逆は不成立であることが分かった。バナッハ空間としての等距離同型性は，Jordan 積での $*$ 多元環としての代数構造の同型性よりも強い条件であることが分かった。

References

[1] H. Al-Halees and R. J. Fleming, *Extreme point methods and Banach-Stone theorem,* J. Aust. Math. Soc., **75** (2003), 125–143.

[2] S. Banach, *Theory of linear operations,* Translated from the French by F. Jellet. With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga, North Holland Mathematica Library, **38**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam,1987. x+237 pp.

[3] E. Behrends, *M-Structure and the Banach–Stone Theorem,* Lecture Notes in Mathematics, 736 (Springer, Berlin, 1979).

[4] F. Botelho, R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Extreme points and isometries on vector-valued Lipschitz spaces,* J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 821–832.

[5] F. Botelho and J. E. Jamison, *Surjective isometries on spaces of vector valued continuous and Lipschitz functions,* Positivity, **17** (2013), 395–497.

[6] F. Botelho, J. E. Jamison and V. Zheng, *Isometries of spaces of vector valued Lipschitz functions,* Positivity, **17** (2013), 47–65.

[7] B. Brosowski and F. Deutsch, *On some geometric properties of suns,* J. Approx. Theory, **10** (1974), 245–267.

[8] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras,* Studia Math. , **25** (1964/65), 217–225.

[9] M. Cambern, *On mapping of spaces of functions with values in a Banach space,* Duke Math. J., **48** (1975), 91–98.

[10] K. de Leeuw, K. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces,* Proc. Amer. Math, Soc. **11** (1960), 694–698.

[11] J.M.G. Fell and R.S. Doran, *Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles,* in: Basic Representation Theory of Groups and Algebras, Vol. 1, in: Pure Appl. Math., vol. 126, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[12] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces,* Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. x+197 pp. ISBN: 1-58488-040-6.

[13] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces. Vol. 2. Vector-valued function spaces,* Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 138. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. x+234 pp. ISBN: 978-1-58488-386-9; 1-58488-386-3.

[14] R. H. Fox, *On a problem of S. Ulam concerning Cartesian products,* Fund. Math., **34** (1947), 278–287.

[15] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen,* Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), pp. 994–1015.

[16] I. Gelfand, and A. Kolmogoroff, On rings of continuous functions on topological spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (C. R. Acad. Sci. USSR),* 22 (1939) 11–15.

[17] O. Hatori, K. Kawamura and S. Oi, *Hermitian operators and isometries on injective tensor products of uniform algebras and C^*-algebras,* J. Math. Anal. Appl. **472** (2019), no. 1, 827–841.

[18] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps,* Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 151–183.

[19] M. Hosseini, *Isometries on spaces of absolutely continuous vector-valued functions,* J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), no. 1, 386–397.

[20] M.-H. Hsu and N.-C. Wong, *Isometric embeddings of Banach bundles,* Taiwanese J. Math. **15** (5) (2011) 1969–1978.

[21] J.-S. Jeang and N.-C. Wong, *On the Banach–Stone problem,* Studia Math., **155** (2003), 95–105.

[22] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space,* Ann Math., **52** (1950), 309–327.

[23] A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Linear isometries between spaces of vector-valued Lipschitz functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 1381–1388.

[24] R. V. Kadison, *Local derivations,* J. Algebra, **130** (1990), 494–509.

[25] K. Kawamura, *Linear surjective isometries between vector-valued function spaces,* J. Aust. Math. Soc. **100** (2016), no. 3, 349–373.

[26] K. Kawamura, *A Banach-Stone type theorem and topological dimension,* Topology Proc. **55** (2020), 1–12.

[27] D. Koehler and P. Rosenthal, *On isometries of normed linear spaces,* Studia Math, **36** (1970), 213–216.

[28] C.-K. Li and N.-K. Tsing, *Linear preserver problems: a brief introduction and some special techniques,* Linear Algebra Appl., 162 (164) (1992) 217–235.

[29] G. Lumer, *Semi-inner product of bounded maps into Banach space,* Trans.Amer.Math.Soc., **100** (1961), 26–43.

[30] G. Lumer, *On the isometries of reflexive Orlicz spaces,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **13** (1963), 99–109.

[31] M. Mojahedi and S.Fereshteh., *Isometries between completely regular vector-valued function spaces,* Period. Math. Hungar., **84** (2022), no. 2, 361–370.

[32] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces,* Lecture Notes in Mathematics, 1895. Springer-Verlag, Berlin, 2007. xiv+232 pp.

[33] M. Myers, *Banach spaces of continuous functions,* Ann. of Math., **49** (1948), 132–140.

[34] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions,* Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188.

[35] S. Oi, *Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued Lipschitz maps,* Linear Multilinear Algebra **68** (2020), no. 6, 1096–1112.

[36] S. Oi, *Isometries and hermitian operators on spaces of vector-valued Lipschitz maps,* preprint, arXiv:2106.11546.

[37] S. Oi, *Jordan $*$-homomorphisms on the spaces of continuous maps taking values in C^*-algebras,* Studia Math, to appear.

[38] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces,* Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.

[39] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology,* Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 375–481.

[40] K. Sundaresan, *Spaces of continuous functions into a Banach space,* Studia Math., **48** (1973), 15–22.

[41] H. Weaver, *Lipschitz Algebras,* World Scientific, Singapore (1999).