写像類群の生成系に関する研究の変遷

門田　直之　(岡山大学)*

概　　要

曲面の写像類群は, 3 次元や 4 次元トポロジーなどを研究する際にも現れる重要な群の一つであるが, 写像類群それ自身も非常に興味深い研究対象である. 本講演では, 曲面の写像類群の代数構造の研究, 特に生成系に関する研究の変遷を講演者の視点から紹介したい.

1. Introduction

曲面の**写像類群**とは, 曲面の自己同相写像のアイソトピー類のなす群である (より細かい定義は後で紹介する). 曲面の写像類群は, 3 次元多様体の Heegaard 分解における貼り合わせや, 円周上の曲面束や Lefschetz fibration のモノドロミーとして現れる. また, 種数 g の有向閉曲面 Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は, 種数 g のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$(i.e. Σ_g 上の複素構造のアイソトピー類) に固有不連続に作用する. 特に, 商空間 $\mathcal{T}_g/\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は, 代数幾何学において重要な空間である種数 g の Riemann 面のモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ になる. さらに, $\mathbb{M}_g$ の orbifold 基本群と写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は同型であり, 加えて, $\mathbb{M}_g$ と $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の有理数係数のコホモロジー群には自然な同型が存在する. このように, 写像類群は様々な数学の分野で活躍することから, 数学における重要な研究対象の 1 つである.

さて, 与えれた有限生成群 G に対し, 次のような古典的かつ基本的な 2 つの問題を考えよう.

問題 1.1. 群 G の最小の生成系を与えよ.

問題 1.2. 群 G が torsion(特に involution) で有限生成できるとき, torsion(特に involution) からなる最小の生成系を与えよ.

ここで, torsion とは有限位数の元であり, involution とは位数 2 の元のことである. 上記 2 つの問題は有限単純群 (i.e. 自明群と自分自身以外の正規部分群を持たない群) において, 広く研究されてきた (例えば [10] を参照). 本講演では, 曲面の写像類群について, これらの問題に関する研究の変遷を講演者の研究結果も含めながら紹介したい. また, 講演者が疑問に生じた部分を問題として提示したい.

全体を通し, 記号について次のような注意を述べておく. 曲面の自己同相写像を f としたとき, そのアイソトピー類 (つまり写像類群の元) は $[f]$ とかく方が好ましいと思われるが, 記号が煩雑になるため, f のアイソトピー類も同様に f とかくことにする.

2. 有向曲面の写像類群

まず始めに, 有向曲面の写像類群の定義と元の例を紹介する.

本研究は科研費 (課題番号:20K03613) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 57M07, 57N05
キーワード：写像類群, 生成系
* 〒 700-8530 岡山市北区津島中三丁目 1-1
e-mail: n-monden@okayama-u.ac.jp

定義 2.1. 種数 g の有向閉曲面 Σ_g 上の p 個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ を指定する. $\Sigma_g - \{x_1, \ldots, x_p\}$ を $\Sigma_{g,p}$ とかき (図 1 参照), 集合

$$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p}) = \{\Sigma_{g,p}\text{の向きを保つ自己同相写像全体}\}/\mathrm{isotopy}$$

を $\Sigma_{g,p}$ の**写像類群**という (実際, 写像の合成を積とすることで群となる).

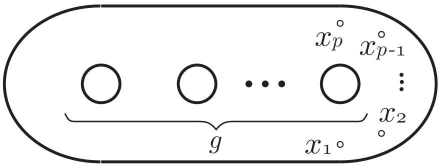

図 1:

Σ_g には標準的な向きを入れ, $\Sigma_{g,p}$ には Σ_g から向きを誘導する. 点 x_i を抜き取ったあとの穴も x_i とよぶことにする. $\Sigma_{g,p}$ の自己同相写像は穴 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ の入れ替えを許すことに注意してほしい. $p = 0$ のとき, 簡単のため $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0}) = \mathcal{M}(\Sigma_g)$ とかく.

この節では, Dehn twist と half twist とよばれる $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の代表的な元を紹介したい.

定義 2.2. $\Sigma_{g,p}$ 上の単純閉曲線 c に沿って $\Sigma_{g,p}$ を切断し, 切断面の片方を右回りに 2π ねじってから貼り付けることでえられる $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の元を, c についての right-handed **Dehn twist** といい, t_c とかく (図 2 参照). t_c は, c の正則近傍の外側では恒等写像である.

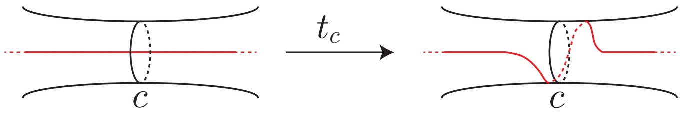

図 2: 単純閉曲線 c についての right-handed Dehn twist t_c

定義から, Dehn twist は穴 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ を入れ替えることができない. よって, $p \geq 2$ のとき, 穴を入れ替えるような $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の元を考える必要がある. そのような元の例として, half twist があげられる.

定義 2.3. $\Sigma_{g,p}$ の穴 x_i と x_j を結ぶ弧 ℓ を考え, 正則近傍 $N(\ell)$ を考える. $\sigma_\ell(\ell) = \ell$, $\sigma_\ell(x_i) = (x_j)$, $\sigma(x_j) = x_i$, $\sigma_\ell^2 = t_{\partial N(\ell)}$ となるような写像類群の元 σ_ℓ を, ℓ についての right-handed **half twist** という (図 3 参照).

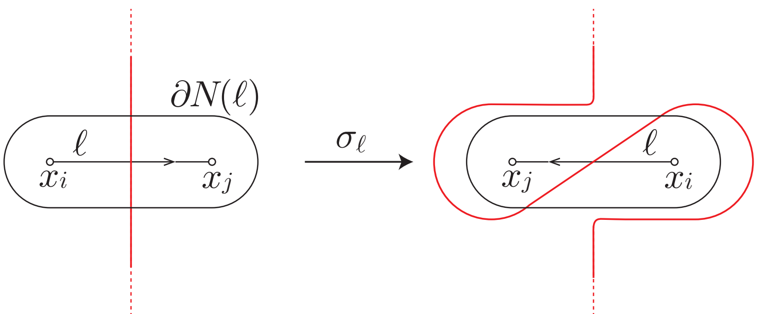

図 3: 弧 ℓ についての right-handed half twistσ_ℓ

以上の例をもとに, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系について紹介する.

3. 有向曲面の写像類群の生成系

まず, $p=0,1$ の場合の $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系について紹介する．$\mathcal{M}(\Sigma_{0,p})$ は自明群になることが知られているため, $g \geq 1$ を仮定しておく．$\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が有限生成であることが示されたのは1938年で, Dehn の結果である ([9]).

定理 3.1 ([9])**.** $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は有限個の Dehn twist で生成される (よって, 有限生成可能).

Dehn twist は代数・幾何的に便利な性質があるだけでなく, トポロジーにおいて様々な場所で現れることもあり, Dehn twist から成る $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の生成系を考えるというのはメリットが多い．とはいえ, Dehn の生成系は $2g(g-1)$ 個も元があり, いささか数が多い．Lickorish は, 1964年にこの数を次のような数まで減らした.

定理 3.2 ([27])**.** $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ は $3g-1$ 個の Dehn twist で生成される ($g \geq 1$).

定理 3.1,3.2から, 「Dehn twist のみで $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ を生成する場合, 最低何個必要だろうか?」という問題が考えられる．この問題について, Humphries は $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ に対し (1979年), Johnson は $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ に対し (1983年), それぞれ解答を与えている．つまり, 彼らは, Dehn twist のみから成る $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系を与えた ($p=0,1$).

定理 3.3 ([16, 20])**.** $p=0,1$ とする．$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は $2g+1$ 個の Dehn twist で生成される．さらに, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は $2g$ 個以下の任意の Dehn twist で生成できない ($g \geq 2$).

次に, $p \geq 2$ に対して, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系を紹介する．$\mathcal{M}(\Sigma_{0,p})$ は $p-1$ 個の half twist で生成されるという事実があるため, やはり $g \geq 1$ を仮定する．Dehn twist は穴の入れ替えができないので, $p \geq 2$ で $\mathcal{M}_{g,p}$ を生成するには half twist などの穴を入れ替える元も必要となる．実際, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は $2g+p$ 個の Dehn twist と $p-1$ 個の half twist で生成されるという事実がある．この生成系から Dehn twist や half twist の個数をどれだけ減らせるかを考えよう．half twist σ_ℓ を穴の集合 $P=\{x_1, x_, \ldots, x_p\}$ 上に制限すると, $\sigma_\ell|_P$ は P の対称群 Sym_p の互換になるため, half twist は $p-1$ 個から減らすことができない．一方, Laburuere–Paris は Dehn twist の個数を減らしている (2001年).

定理 3.4 ([24])**.** $\mathcal{M}_{g,p}$ は $2g+2$ 個の Dehn twist と $p-1$ 個の half twist で生成される.

定理3.4から, Dehn twist の個数はどこまで減らすことができるのだろうかという疑問が生じるが, 講演者はその答えや関連する結果を知らない.

問題 3.5. $p \geq 2$ とする．$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ を Dehn twist と half twist で生成する場合, Dehn twist の個数を $2g+2$ 個から減らすことは可能か?

4. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系

この節では, 写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の最小の生成系について紹介する．すなわち, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ に対する**問題 1.1** の解答を紹介する.

$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ の生成系の元を Dehn twist と half twist だけにこだわらなければ, より小さい生成系を与えることができる．実際, 1964年に, Lickorish は $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が4個の元で生成できることを示した ([27])．この結果から24年後の1988年に, Lu は $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の生成元を3個に減らしている ([29])．ここで, 次のような事実がある.

事実 4.1. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は任意の巡回群と同型でない ($g \geq 1$)．よって, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は1元生成不可能であり, 生成元は2個以上必要である.

この事実のもと, 1996年, Wajnrybは$p=0,1$の場合に$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$は2元で生成されることを示した([53]). つまり, $p=0,1$に対し, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$の最小の生成系を与えた. ちなみに, KorkmazはWajnrybと異なる最小の生成系を与えている([22]). 次に, $p\geq 2$に関する研究を紹介したい. まず, 2003年にKassabovにより$g\geq 8$の場合に, 4元から成る$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$の生成系が与えられた([21]). そののち, 2011年に講演者は, $g\geq 1$に対し, 3元で生成できることを示し([36]), 2021年には$g\geq 3$, $p\geq 2$でも$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$が2元生成可能であることを示した([39]). これまでの話をまとめると, 次のようになる.

定理 4.2 ([53, 39])**.** $g=1,2$かつ$p\geq 2$の場合を除き, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$は2元生成可能である.

一方, $g=1,2$かつ$p\geq 2$の場合は未解決であるので, 問題として挙げておく.

問題 4.3. $g=1,2$かつ$p\geq 2$のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$は2元生成可能であるか?

5. 有限位数の元からなる写像類群の生成系

ここでは, 写像類群$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$に対し**問題1.2**を考えよう.

無限個のtorsionからなる$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$の生成系を与えたのはMaclachlanで, 1971年のことである([31]). 1979年には, Pattersonがこの結果を拡張し, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$が(無限個の)torsionで生成されることの必要十分条件は$(g,p)\neq(2,5k+4)$であることを示した([42]). 系として, 彼らはリーマン面$\Sigma_{g,p}$のモジュライ空間が単連結であることを示している($(g,p)\neq(2,5k+4)$). 無限個のinvolutionからなる生成系が与えられた($g\geq 3$)のは1987年で, McCharthy–Papadopoulosの結果である([40]). 一方, $g=1,2$のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$はinvolutionで生成できないことが知られている($p\geq 0$).

Birmanは1971年に$\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$が$4g+4$個のtorsionで生成できることを示した([5]). $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$の有限個のinvolutionからなる生成系が見つかったのは2000年のことで, Luoにより与えられた([30]). Luoの生成系のinvolutionの個数はgとpに依存するため, gとpに依存しない個数のtorsionで$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$を生成できるかという問題が提案された. $p=0,1$の場合に答えたのがBrendle–Farbで, 2004年に彼らは3つのtorsionから成る$\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$の生成系を与えた([7]). さらに, $g\geq 3$, $p=0$と$g\geq 4$, $p=1$のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$が6つのinvolutionで生成できることを示している. $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$のtorsionから成る最小の生成系を与えたのはKorkmazで, 2005年に以下のことを示した.

定理 5.1 ([22])**.** $p=0,1$のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$は2つのtorsionで生成される.

$p\geq 2$に対しては2003年のKassabovの結果([21])と2011年の講演者の結果([37])があり, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$は4つのinvolutionで生成されることがわかっている($g\geq 7,\ p\geq 0$). この結果から次のような問題が考えられる.

問題 5.2. $(g,p)\neq(2,5k+4),\ p\geq 2$とする. n個のtorsionで$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$が生成できるとき, nの最小値は2, 3, 4のどれか?

写像類群$\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$をtorsionで生成するという研究は他にもたくさんあるが, ページ数の都合上, 文献を挙げるに留めさせていただく([38, 11, 25, 56, 55]).

さて, 2つのinvolutionで生成される群はvirtually abelianであるため, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$をinvolutionで生成するには3つ以上必要となる. 2020年にKorkmazは, $g\geq 8$かつ$p=0$に対し, 次のような最善の結果を与えている(後にYildizにより$g\geq 6$に改善された).

定理 5.3 ([23, 54])**.** $g\geq 6$のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$は3つのinvolutionで生成される.

$p \geq 1$ のとき, 上述の Kassabov と講演者の結果 ([21, 37]) より鋭い結果はえられていないため, 以下を問題として挙げたい.

問題 5.4. $g \geq 3,\ p \geq 0$ のとき, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,p})$ は3つの involution で生成可能だろうか?

6. 向き付け不可能閉曲面の写像類群の生成系

ここでは, 向き付け不可能閉曲面の写像類群の生成系について紹介する.

定義 6.1. 球面から g 個の開円板を取り除き, 各境界の対蹠点を同一視することでえられる曲面を N_g とかき, **種数 g の向き付け不可能閉曲面**とよぶ (図 4 参照). また, 境界の対蹠点を同一視した部分を **crosscap** という. さらに,

$$\mathcal{M}(N_g) = \{N_g \text{の自己同相写像全体}\}/\text{isotopy}$$

を N_g の**写像類群**という.

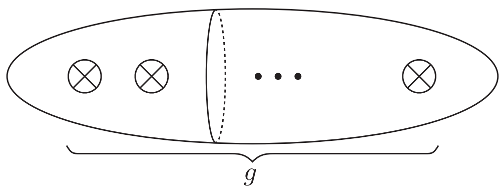

図 4: 種数 g の向き付け不可能閉曲面 ($\otimes$ は crosscap を表す)

$\mathcal{M}(N_g)$ の代表的な元として, Dehn twist と crosscap slide がある. Dehn twist はすでに紹介したので, crosscap slide について紹介する.

定義 6.2. μ, α をそれぞれ N_g 上の単純閉曲線とし, μ の正則近傍がメビウスの帯, α の正則近傍がアニュラスとなり, μ と α は1点で横断的に交わるものとする (このとき, $\mu \cup \alpha$ の正則近傍は境界を1つもつクラインの壺であるので, 2つの crosscap をもつ). また, α には向きを入れておく. 図 5 のように, μ の正則近傍を α の向きに沿って移動させ, もとの位置にもどすことでえられる $\mathcal{M}(N_g)$ の元を α に沿った μ の **crosscap slide** (あるいは Y-homeomorphism) といい, $Y_{\mu,\alpha}$ とかく.

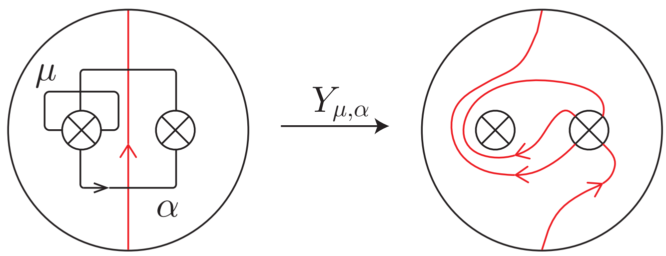

図 5: 単純閉曲線 α に沿った単純閉曲線 μ についての crosscap slide $Y_{\mu,\alpha}$

Lickorish は, 1963 年に $\mathcal{M}(N_g)$ が Dehn twist と crosscap slide で (無限) 生成されることを示し ([26]), さらに Dehn twist だけでは生成されないことを示している ([28]). 1969 年には Chillingworth により $\mathcal{M}(N_g)$ の有限生成系が与えられた ([8]). 2013 年になって Szepietowski は [8] の生成系を減らし, 以下のような結果を与えた.

定理 6.3 ([52])**.** $\mathcal{M}(N_g)$ は g 個の Dehn twist と 1 つの crosscap slide で生成される.

さらに, 廣瀬氏により, 2018 年に次のような Humphries の結果の類似が与えられた.

定理 6.4 ([13])**.** $g \geq 4$ とする. $\mathcal{M}(N_g)$ が n 個の Dehn twist と k 個の crosscap slide で生成されるならば, $n \geq g$ かつ $k \geq 1$ である.

$\mathcal{M}(N_g)$ に対する**問題 1.1** と**問題 1.2** に関する話題について紹介する. Szepietowski の 2006 年の結果より, $\mathcal{M}(N_g)$ は $g \geq 3$ について 3 元で生成できることが判明した ([52]). 特に, 1972 年の Birman-Chillingworth の結果 ([6]) から, $\mathcal{M}(N_3)$ が 3 つの involution で生成されることがわかる. これに対し, Szepietowski は 2004 年に $g \geq 4$ で $\mathcal{M}(N_g)$ が involution で生成できることを示し ([49]), 2006 年には 4 つの involution で生成できることを示した ([50]). また, $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ と同様の理由により, $\mathcal{M}(N_g)$ を生成するには 2 元以上必要となり, involution で生成するには 3 つ以上必要となることがわかる. $\mathcal{M}(N_g)$ に対する**問題 1.1** と**問題 1.2** の解答を与えたのは Altunöz-Pamuk-Yildiz である (2022 年)

定理 6.5 ([2])**.** $g \geq 19$ に対し, $\mathcal{M}(N_g)$ は *2* 元生成可能である. また, $g \geq 26$ に対し, $\mathcal{M}(N_g)$ は *3* つの *involution* で生成される.

7. Torelli 群と level L 写像類群の生成系

定義 7.1. F_g を種数 g の閉曲面 (つまり, $F_g = \Sigma_g$ または $F_g = N_g$) とし, $\mathbb{Z}_L = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ とおく ($L \geq 2$). ただし, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$ と定義しておく. 次の $\mathcal{M}(F_g)$ の部分群

$$\Gamma_L(F_g) := \{f \in \mathcal{M}(F_g) \mid f_* = \mathrm{id} : H_1(F_g; \mathbb{Z}_L) \to H_1(F_g; \mathbb{Z}_L)\}$$

を F_g の **level** L **写像類群**という ($L \geq 2$). $\Gamma_0(F_g)$ を $\mathcal{I}(F_g)$ とかき, F_g の **Torelli 群**という.

次の理由で, Torelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ や level L 写像類群 $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は活発に研究されている.

- 種数 g のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ を $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ で割った空間は Torelli 空間とよばれ, 代数幾何においても重要な研究対象の 1 つである. また, 3 次元球面 S^3 から Σ_g を境界にもつハンドル体 H_g を抜きとり, そのときえられる貼り合わせ写像と $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ の元の合成で再び H_g を貼りなおすと, ホモロジー 3 球面がえられる. 実は, 任意のホモロジー 3 球面はこのような方法でえられる.

- $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は, level L 構造をもつ種数 g のリーマン面のモジュライ空間の orbifold 基本群として現れる. さらに, $L \geq 3$ のとき, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ と level L 構造をもつ種数 g のリーマン面のモジュライ空間の整係数ホモロジー群は一致する.

まずは Torelli 群 $\mathcal{I}(F_g)$ の生成系についての話題を紹介しよう. $\mathcal{I}(F_g)$ の代表的な元として, 分離的単純閉曲線 c についての Dehn twist t_c(以後, **BSCC-map** とよぶ) と **BP-map** $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$ がある. ただし, c_1, c_2 は非分離的単純閉曲線で $F_g - \{c_1, c_2\}$ が連結成分が 2 つになるものである.

$F_g = \Sigma_g$ のとき, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ は torsion-free であるため, 残念だが**問題 1.2** を考えることができない. そこで, **問題 1.1** に話を絞ろう. 1971 年の Birman の結果 ([4]) に基づき, Powell は $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ が BSCC-map と BP-map で無限生成されることを 1978 年に示した ([44]). この 1 年後の 1979 年, Johnson は $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ を生成するには BSCC-map が不要であることを示し ([18]), さらに, 1983 年に次のような結果を与えた.

定理 7.2 ([20])**.** *$g \geq 3$ について, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ は BP-map で有限生成される.*

正確には, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ は $9 \cdot 2^{2g-3} - 4g^2 + 2g - 6$ 個の BP-map で生成される ($g \geq 3$). 一方, $\mathcal{I}(\Sigma_2)$ は有限生成でなく ([34]), 無限階数の自由群である ([35]). Johnson は $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ のアーベル化を決定しており ([19]), この結果から $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ を生成するには最低 $\frac{1}{3}(4g^3 - g)$ 個の元が必要であることがわかる. 特に, $g = 3$ のとき, Johson の与えた生成系は最小である. $g \geq 4$ に対し, $\binom{57g}{3}$ 個 (つまり $O(g^3)$ の個数) の元からなる生成系が Putman により与えられた ([46]) が, 最小の生成系は知られていない.

問題 7.3. *$g \geq 4$ に対し, $\mathcal{I}(\Sigma_g)$ の最小の生成系を見つけよ.*

$F_g = N_g$ の場合については, 次の廣瀬氏と小林氏の 2017 年の結果がある.

定理 7.4 ([20])**.** *$g \geq 4$ について, $\mathcal{I}(N_g)$ は BSCC-map と BP-map で無限生成される.*

しかし, $\mathcal{I}(N_g)$ に対して**問題 1.1** と**問題 1.2** はほとんど未解決のようである.

問題 7.5. *$\mathcal{I}(N_g)$ は有限生成可能であるか? また, torsion で (有限) 生成可能か?*

最後に, level L 写像類群 $\Gamma_L(F_g)$ に関する話題を紹介する. $\Gamma_L(F_g)$ は, $\mathcal{M}(F_g)$ の指数有限部分群であることが知られており, その理由から有限生成である. しかし, $F_g = N_g$ かつ $L = 2$ の場合を除き, 具体的な有限生成系は知られていないようである.

問題 7.6. *$(F_g, L) \neq (N_g, 2)$ のとき, $\Gamma_L(F_g)$ の具体的な有限生成系を与えよ.*

$F_g = \Sigma_g$ の場合, L が 4 で割り切れないとき, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ のアーベル化が決定されているため ([43, 48, 45, 47]), $\Gamma_L(\Sigma_g)$ を生成するために必要な元の個数の下からの評価がわかっている. ちなみに, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ の無限生成系として, 以下のものが知られている.

定理 7.7. *$\Gamma_L(\Sigma_g)$ は非分離的単純閉曲線についての Dehn twist の L 乗と BSCC-map により無限生成される ([32]). 特に, $L = 2$ のときと, $g = 2$ かつ $L = 3$ のとき, BSCC-map は必要ない ([17]).*

$\Gamma_L(\Sigma_g)$ に対する**問題 1.1** の話題はまだまだ未解決な部分が多い. 一方, 残念なことに, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ に対し**問題 1.2** を考えることはできない. なぜなら, $L \geq 3$ のとき, $\Gamma_L(\Sigma_g)$ は torsion-free だからである. $\Gamma_2(\Sigma_g)$ は torsion-free ではないが, torsion は hyperelliptic involution と共役な元のみである. 佐藤氏の結果 ([48]) から, $\Gamma_2(\Sigma_g)$ は involution で生成できないため, やはり**問題 1.2** を考えることができない.

$F_g = N_g$ の場合, $L = 2$ のときのみ様々な結果が存在する. 2012 年に Szepietowski は Dehn twist の 2 乗と crosscap slide が $\Gamma_2(N_g)$ の元であることと, $\Gamma_2(N_g)$ は crosscap slide で無限生成されることを示した ([51]). 2013 年には $\Gamma_2(N_g)$ の有限生成系を具体的に与えている ([52]). $\Gamma_2(N_g)$ の最小の生成系は佐藤氏と廣瀬氏により与えられた ([15]).

定理 7.8 ([15])**.** *$g \geq 4$ とする. $\Gamma_2(N_g)$ は $\binom{g}{3} + \binom{g}{2}$ 個の元で生成できる. さらに, これより少ない個数の元では $\Gamma_2(N_g)$ を生成できない.*

彼らは, Szepietowski の生成系から元を減らし, $\Gamma_2(N_g)$ のアーベル化を求めることで最小性を示している. $\Gamma_2(\Sigma_g)$ は involution で生成できないことはすでに述べたが, $\Gamma_2(N_g)$ は involution で生成できることが示されている ([51]). 講演者は, 最近, Altunöz-Pamuk-Yildiz との共同研究により, $\Gamma_2(N_g)$ に対し, 次のような**問題 1.2** の解答を与えた. これは, 佐藤氏と廣瀬氏の与えた $\Gamma_2(N_g)$ の最小の生成系 ([15]) から, 上手く involution を作り出すことで示された.

定理 7.9 ([1])**.** *$g \geq 4$ とする. $\Gamma_2(N_g)$ は $\binom{g}{3}+\binom{g}{2}$ 個の involution で生成できる. さらに, これより少ない個数の involution では $\Gamma_2(N_g)$ を生成できない.*

一般に有限表示群 G の指数有限部分群 H は有限表示可能である. 写像類群 $\mathcal{M}(F_g)$ は有限表示可能であるので (例えば, [33, 41] など), $\mathcal{M}(F_g)$ の指数有限部分群である level L 写像類群 $\Gamma_L(F_g)$ も有限表示可能である. 一方, Torelli 群 $\mathcal{I}(F_g)$ は指数有限でない. そこで, この予稿集の最後に, 次の未解決問題を挙げておく.

問題 7.10. *$g \geq 3$ に対し, $\mathcal{I}(F_g)$ は有限表示可能であるか?*

謝辞

第 69 回トポロジーシンポジウムにお招き下さった石川昌治氏 (慶應義塾大学), 蒲谷祐一氏 (北見工業大学), 鎌田聖一氏 (大阪大学), 寺垣内政一氏 (広島大学), 森藤孝之氏 (慶應義塾大学) に心から感謝いたします.

参考文献

[1] T. Altunöz, N. Monden, M. Pamuk and O. Yildiz, *Generating the Level 2 Subgroup by Involutions*, arXiv:2202.06224.

[2] T. Altunöz, M. Pamuk and O. Yildiz, *Generating the Mapping Class Group of a Nonorientable Surface by Two Elements or by Three Involutions*, Bull. Braz. Math. Soc. New Series (2022).

[3] J. Birman, *Mapping class groups and their relationship to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238.

[4] J. Birman, *Abelian quotients of the mapping class group of a 2 manifold*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 147-150; Erratum **77** (1971), 479.

[5] J. Birman, *The algebraic structure of surface mapping class groups*, in: W. Harvey (Ed.), Discrete Groups and Automorphic Functions, 1977, pp. 163–198.

[6] J. Birman and D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface.* Proc. Camb. Philos. Soc. **71**, (1972), 437–448.

[7] T. E. Brendle and B. Farb, *Every mapping class group is generated by 3 torsion elements and by 6 involutions*, J. Algebra **278** (2004), 187–198.

[8] D. R. J. Chillingworth, *A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 409–430.

[9] M. Dehn, *Papers on group theory and topology*, Springer-Verlag, New York, 1987 (Die Gruppe der Abbildungsklassen, Acta Math, Vol. **69** (1938), 135–206.

[10] L. DiMartino and M. C. Tamburini, 2-*generation of finite simple groups and some related topics*, in: A. Barlotti, et al. (Eds.), Generators and Relations in Groups and Geometries, 1991, pp. 195–233.

[11] X. Du, *Generating the mapping class groups by torsions*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 7, 1750037, 8 pp.

[12] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton Math. Ser., (Princeton University Press, 2012), 623–658.

[13] S. Hirose, *Generators for the mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 154–159.

[14] S. Hirose and R. Kobayashi, *A normal generating set for the Torelli group of a non-orientable closed surface*, Fund. Math. **238** (2017), no. 1, 29–51.

[15] S. Hirose and M. Sato, *A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **157** (2014), no. 2, 345–355.

[16] S. P. Humphries, *Generators for the mapping class group*, Topology of low-dimensional manifolds. Proc. Second Sussex Conf. Chelwood Gate 1977 Lecture Notes in Math. **722** (Springer, 1979), 44–47.

[17] S. P. Humphries, *Normal closures of powers of Dehn twists in mapping class groups*, Glasgow Math. J. **34** (1992) 313–317.

[18] D. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 119–125.

[19] D. Johnson, *Quadratic forms and the Birman-Craggs homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 235–254.

[20] D. Johnson, *The structure of Torelli group I: A finite set of generators for I*, Ann. of Math. **118** (1983), 423–442.

[21] M. Kassabov, *Generating Mapping Class Groups by Involutions*, arXiv:math.GT/0311455 v1 25 Nov 2003.

[22] M. Korkmaz, *Generating the surface mapping class group by two elements*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 3299–3310.

[23] M. Korkmaz, *Mapping class group is generated by three involutions*, Math. Res. Lett. **27** (2020) Number 4, 1095–1108.

[24] C. Labruere and L. Paris, *Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups*, Algebr. Geom. Topol., **1** (2001), 73–114.

[25] J. Lanier, *Generating mapping class groups with elements of fixed finite order*, Journal of Algebra, **511** (2018), 455–470.

[26] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Camb. Phils. Soc. **59** (1963), 307–317.

[27] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Camb. Phils. Soc. **60** (1964), 769–778.

[28] W. B. R. Lickorish, *On the homeomorphisms of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Phils. Soc. **61** (1965), 61–64.

[29] N. Lu, *On the mapping class groups of the closed orientable surfaces*, Topology Proc. **13** (1988), 293–324.

[30] F. Luo, *Torsion Elements in the Mapping Class Group of a Surface*, arXiv:math.GT/0004048 v1 8 Apr 2000.

[31] C. Maclachlan, *Modulus space is simply-connected*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 85–86.

[32] J. D. McCarthy, *On the first cohomology group of cofinite subgroups in surface mapping class groups*, Topology **40** (2001), no. 2, 401–418.

[33] J. McCool, *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group*, J. Algebra **35** (1975), 205–213.

[34] D. McCullough and A. Miller, *The genus 2 Torelli group is not finitely generated*, Topology Appl. **22** (1986), no. 1, 43–49.

[35] G. Mess, *The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces*, Topology **31** (1992), no. 4, 775–790.

[36] N. Monden, *The mapping class group of a punctured surface is generated by three elements*, Hiroshima Math. J. **41** (2011), no. 1, 1–9.

[37] N. Monden, *Generating the mapping class group of a punctured surface by involutions*, Tokyo J. Math. **34** (2011), no. 2, 303–312.

[38] N. Monden, *Generating the mapping class group by torsion elements of small order*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **154** (2013), no. 1, 41–62.

[39] N. Monden, *On minimal generating sets for the mapping class group of a punctured*

surface, arXiv:2103.01525

[40] J. Mccarthy and A. Papadopoulos, *Involutions in surface mapping class groups*, Enseign. Math. **33** (1987), 275–290.

[41] L. Paris, and B. Szepietowski, *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, Bull. Soc. Math. France **143** (2015), no. 3, 503–566.

[42] D. B. Patterson, *The fundamental group of the modulus space*, Michigan Math. J. **26** (1979), no. 2, 213–223.

[43] B. Perron, *Filtration de Johnson et groupe de Torelli modulo p, p premier*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 11-12, 667–670.

[44] J. Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 347–350.

[45] A. Putman, *The abelianization of the level L mapping class group*, arXiv:0803.0539.

[46] A. Putman, *Small generating sets for the Torelli group*, Geom. Topol. **16** (2012), no. 1, 111–125.

[47] A. Putman, *The Picard group of the moduli space of curves with level structures*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 4, 623–674.

[48] M. Sato, *The abelianization of the level d mapping class group*, J. Topol. **3** (2010), no. 4, 847–882.

[49] B. Szepietowski, *Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces.* Collect. Math. **55**, (2004), no. 3, 253–260.

[50] B. Szepietowski, *The mapping class group of a nonorientable surface is generated by three elements and by four involutions*, Geom. Dedicata **117**, (2006), no. 1, 1–9.

[51] B. Szepietowski, *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata **160** (2012), 169–183.

[52] B. Szepietowski, *A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **36** (2013), 1–14.

[53] B. Wajnryb, *Mapping class group of a surface is generated by two elements*, Topology. **35** (1996), 377–383.

[54] O. Yildiz, *Generating the mapping class group by three involutions*, arXiv:2002.09151.

[55] O. Yildiz, *Generating mapping class group by two torsion elements*, arXiv:2003.05789.

[56] K. Yoshihara, *Generating mapping class groups of surfaces by torsion elements*, PhD thesis, Kyushu University, 2018.