

リボン Yetter–Drinfeld 加群とタングル不変量

小鳥居 祐香 (広島大学/理化学研究所)*¹

葉廣 和夫 (京都大学)*²

概 要

本稿ではモノイダル圏においてピボタル対象とリボン対象の概念を定義する。それらは (双対性を仮定していない) モノイダル圏からピボタル圏あるいはリボン圏を構成する。この構成法を Hopf 代数上の Yetter–Drinfeld 加群がなす組み紐圏に適用することにより, Hopf 代数上のリボン Yetter–Drinfeld 加群の概念を与え, リボン圏を構成する。それによりタングル不変量を与える。本稿の内容は [4] に基づく。

1 はじめに

Reshetikhin と Turaev [8] はリボン Hopf 代数の概念を導入し, リボン Hopf 代数 H 上の有限次元加群の圏 $H\text{-mod}^{fd}$ がリボン圏になることを示した。また枠付き有向タングルの圏 \mathcal{T} はただ一つの対象によって生成される自由なりボン圏 [11, 12] であるため, 任意のリボン圏はタングル圏 \mathcal{T} から有限次元ベクトル空間の圏への関手を与える。よって関手的タングル不変量を与える。Jones 多項式のような多くの絡み目の量子不変量はこの方法で構成されることが知られている。

また Yetter と Drinfeld [13, 2] は Hopf 代数上の Yetter–Drinfeld 加群の概念を導入した。これは Hopf 代数 H 上の加群かつ余加群であり作用と余作用がある両立条件を持つものである。 H 上の Yetter–Drinfeld 加群の圏 \mathcal{YD}_H は組み紐圏の構造を持つ。また H 上の有限次元 Yetter–Drinfeld 加群によるその充満部分圏はリジッド (つまり, 左双対を持つ) 組み紐圏の構造を持つ [1]。 (これはリボン圏と近く, つまりタングル不変量を持つことに近いが異なる。) また有限次元 Hopf 代数 H に対して, H 上の Yetter–Drinfeld 加群の圏 \mathcal{YD}_H は $D(H)$ -加群の圏と同値であることがよく知られている。ここで $D(H)$ とは H の Drinfeld double であり, 基底空間として $H \otimes H^*$ を持つ準三角 Hopf 代数である。準三角 Hopf 代数 H にそのリボン元 v を加えることによってリボン Hopf 代数 $H \oplus Hv$ が得られることもよく知られている [8]。よって, 有限次元 Hopf 代数 H から初め, リボン圏 $D(H) \oplus D(H)v\text{-mod}^{fd}$ が得られ, そこから付随したタングル不変量も得られる。

*¹ 〒739-8521 広島県東広島市鏡山 1-7-1 広島大学 大学院先進理工系科学研究科

e-mail: kotorii@hiroshima-u.ac.jp

*² e-mail: habiro@math.kyoto-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:18H01119, 20K14322) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-18M15, MSC-16T05, MSC-57K16, MSC-57K10

キーワード: Hopf 代数, Yetter–Drinfeld 加群, モノイダル圏, リボン圏, タングル

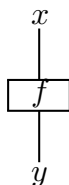


図1 射の図式的表示

本稿では, Yetter–Drinfeld 加群からリボン圏を構成する異なるアプローチを紹介する. Hopf 代数上のリボン *Yetter–Drinfeld* 加群の概念を定義する. これは, H 上の有限次元 Yetter–Drinfeld 加群 X であり, ある自己同型写像 $\gamma_X : X \rightarrow X$ ((2.6.1) を見よ.) を持つものである. 次の結果を示す. ここで, H は有限次元であることを仮定しない.

定理 1.1 (命題 3.4, 定理 4.1). H を可逆な対合射を持つ体 k 上の Hopf 代数とする. このとき, リボン *Yetter–Drinfeld* 加群の圏はリボン圏の構造を持つ. したがって, 枠付きタングルの不変量を与える.

Hopf 代数と Yetter–Drinfeld 加群の概念は, 任意の対称モノイダル圏において定義される. 本稿ではこの一般的なセッティングで議論する.

2 準備

この章では, (厳格な) モノイダル圏, 組み紐圏, 対称モノイダル圏, ピボタル圏, リボン圏の概念を紹介する. 詳細は [5, 6, 9] を参照されたい.

2.1 モノイダル圏

モノイダル圏 \mathcal{M} とは, 関手 $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ を備えた圏であり, この関手は (自然同型を除いて) 結合性と対象 I に関する単位性を持ち, よく知られたコヒーレント条件を満たす. \mathcal{M} が結合性と単位性を厳格に満たすとき, \mathcal{M} を厳格なモノイダル圏という. 本稿では簡単のため, 厳格なモノイダル圏について考えるが, 厳格でないモノイダル圏に対しても同様の主張が成り立つことを示せる. 厳格なモノイダル圏の逆圏 \mathcal{M}^{op} は厳格なモノイダル構造 \otimes^{op} を持つ. ここで, \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対し $X \otimes^{\text{op}} Y = Y \otimes X$ となり, \mathcal{M} の任意の射 f, g に対し $f \otimes^{\text{op}} g = g \otimes f$ となる. 厳格なモノイダル圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格なモノイダル関手 $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは, $F(I) = I$ かつ $F \circ \otimes = \otimes \circ (F \times F)$ を満たす関手である.

厳格なモノイダル圏の射を図式的な表示を用いて表すことにする. 各対象は垂直な紐により表し, 射 $f : x \rightarrow y$ は図1のように表す. このとき, 図2のように, 合成は図式を縦に繋げることによって得られ, テンソル積は横に並べることによって得られる.

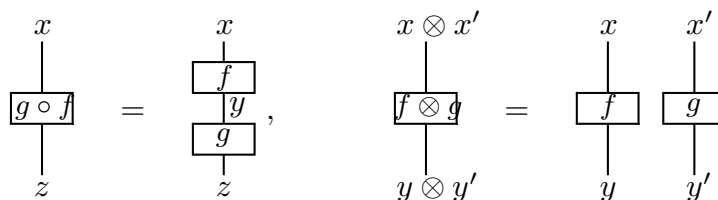


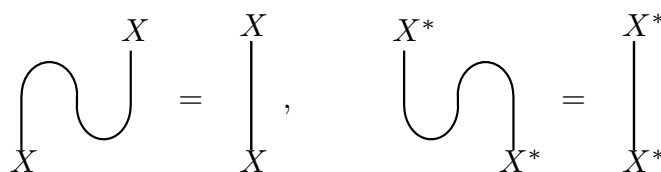
図 2 合成とテンソル積.

2.2 双対性

\mathcal{M} を厳格なモノイダル圏とする. \mathcal{M} の対象 X, X^* と \mathcal{M} の射

$$d_X = \begin{array}{c} X^* \\ \curvearrowright \\ X \end{array} : X^* \otimes X \rightarrow I, \quad b_X = \begin{array}{c} X \\ \curvearrowleft \\ X^* \end{array} : I \rightarrow X \otimes X^*$$

に対して,



が成り立つとき, 四つ組 (X, X^*, d_X, b_X) を \mathcal{M} における双対という. このとき, 対象 X^* や三つ組 (X^*, d_X, b_X) は X の左双対と呼ばれる. 厳格なモノイダル圏 \mathcal{M} の各対象が左双対を持つとき, \mathcal{M} は (左) リジッドであるという. このとき, 各対象 X の左双対を一つ選ぶことにより, 各 X をその選んだ左双対 X^* に送り, 各射 $f: X \rightarrow Y$ をその左双対射

$$f^* = \begin{array}{c} Y^* \\ \curvearrowright \\ \boxed{f} \\ \curvearrowleft \\ X^* \end{array} : Y^* \rightarrow X^* \tag{2.2.1}$$

に送る関手 $(-)^*: \mathcal{M}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ を定義できる.

2.3 厳格なピボタル圏

厳格なリジッドモノイダル圏 \mathcal{M} が厳格なピボタル圏であるとは, ある指定された左双対とそれにより定まる左関手 $(-)^*: \mathcal{M}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ に対して, 次の四つの性質を満たすときである:

1. $(-)^*: \mathcal{M}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ は厳格なモノイダル関手である,
2. $d_I = b_I = \text{id}_I$,
3. \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対し, 次の等式が成り立つ:

$$d_{X \otimes Y} = d_Y(Y^* \otimes d_X \otimes Y), \quad b_{X \otimes Y} = (X \otimes b_Y \otimes X^*)b_X,$$
4. $(-)^{**} = \text{Id}_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

厳格なピボタル圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格なピボタル関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは、厳格なモノイダル関手であって、 \mathcal{M} の全ての対象 X に対して

$$F(X^*) = F(X)^*, \quad F(d_X) = d_{F(X)}, \quad F(b_X) = b_{F(X)}$$

が成り立つものである。このような関手 F は左双対関手と可換である。

2.4 組み紐圏

厳格なモノイダル圏 \mathcal{M} が厳格な組み紐圏であるとは、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して、自然同型

$$\psi_{X,Y} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ Y \quad X \end{array} : X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X$$

が定義され、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y, Z に対して

$$\psi_{X \otimes Y, Z} = (\psi_{X,Z} \otimes Y)(X \otimes \psi_{Y,Z}), \quad \psi_{X, Y \otimes Z} = (Y \otimes \psi_{X,Z})(\psi_{X,Y} \otimes Z)$$

が成り立つものである。このとき $\psi_{X,Y}$ は組み紐構造と呼ばれる。

厳格な対称モノイダル圏とは、厳格な組み紐圏 \mathcal{M} であって、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して $\psi_{Y,X} \psi_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$ が成り立つものである。このとき、組み紐構造は対称性と呼ばれ、 $\psi_{X,Y}$ の代わりに

$$P_{X,Y} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ Y \quad X \end{array} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

と表記する。

厳格な組み紐圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格な組み紐関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは、厳格なモノイダル関手であって、 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して

$$F(\psi_{X,Y}) = \psi_{F(X), F(Y)}$$

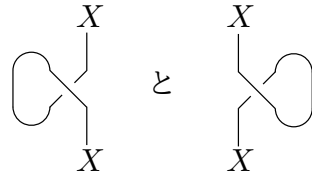
が成り立つものである。 \mathcal{M} と \mathcal{N} が対称モノイダル圏のとき、 F は厳格な対称モノイダル関手と呼ばれる。

2.5 厳格な組み紐ピボタル圏と厳格なりボン圏

組み紐ピボタル圏 \mathcal{M} に対して、任意の対象 X に対する自然同型

$$c_X^R = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{loop} \\ | \\ X \end{array} : X \rightarrow X, \quad c_X^L = \begin{array}{c} X \\ \text{loop} \\ | \\ X \end{array} : X \rightarrow X$$

が存在する。このとき c_X^R (あるいは c_X^L) を X に対する右 (あるいは左) *positive curl* と呼ぶ。ここで c_X^R と c_X^L の逆射はそれぞれ



である。厳格な組み紐ピボタル圏 \mathcal{M} の各対象 X に対して、その右 positive curl と左 positive curl が一致しているとき、 \mathcal{M} を厳格なりボン圏という。

注意 2.1. 他の文献では、リボン (あるいはトーテイル) 圏は通常、捻りを持つリジッド組み紐圏として定義される [11, 8, 5]. ここで厳格な組み紐圏が捻りを持つとは、 \mathcal{M} の各対象 X に対する自然同型 $\theta_X: X \rightarrow X$ の族が存在し、任意の対象 X, Y に対して

$$\theta_I = \text{id}_I, \quad \theta_{X \otimes Y} = \psi_{Y, X} \psi_{X, Y} (\theta_X \otimes \theta_Y), \quad \theta_{X^*} = (\theta_X)^*$$

が成り立つことである。本稿の厳格なりボン圏の定義は通常使われる定義と同値である。

厳格なりボン圏 \mathcal{M} と \mathcal{N} の間の厳格なりボン関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ とは、厳格な組み紐ピボタル関手である。つまり、厳格なピボタル関手 $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ であり、同時に厳格な組み紐関手でもある。

2.6 厳格な対称ピボタル圏

厳格な対称ピボタル圏 \mathcal{M} に対して、各対象 X は自然同型

$$\gamma_X (= c_X^R) = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ X \end{array} \quad , \quad \gamma_X^{-1} (= c_X^L) = \begin{array}{c} X \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ X \end{array} \quad (2.6.1)$$

を持つ。 γ_X (resp. γ_X^{-1}) を X の右 (resp. 左) curl と呼ぶ。 γ_X はモノイダル自然同型、つまり、 $\gamma_I = \text{id}_I$ かつ \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して

$$\gamma_{X \otimes Y} = \gamma_X \otimes \gamma_Y$$

という性質をもつ。また

$$\gamma_{X^*} = (\gamma_X^{-1})^*$$

も成り立つ。

3 ピボタル対象とリボン対象

この章では、モノイダル圏においてピボタル対象の概念を導入する。モノイダル圏 \mathcal{C} におけるピボタル対象は、 \mathcal{C} がリジッドでなくとも、ピボタル圏を構成する。このとき、組み紐圏におけるリボン対象を、ピボタル対象であって付随する右 positive curl と左 positive curl が一致するものと定義する。組み紐圏におけるリボン対象はリボン圏を構成する。

3.1 ピボタル対象

\mathcal{M} を厳格なモノイダル圏とする. \mathcal{M} の対象 X, X^* と射

$$d_X = \begin{array}{c} X^* \quad X \\ \frown \\ \end{array}, \quad b_X = \begin{array}{c} \quad \\ \frown \\ X \quad X^* \end{array}, \quad d_{X^*} = \begin{array}{c} X \quad X^* \\ \frown \\ \end{array}, \quad b_{X^*} = \begin{array}{c} \quad \\ \frown \\ X^* \quad X \end{array}$$

に対して, (X, X^*, d_X, b_X) と $(X^*, X, d_{X^*}, b_{X^*})$ がそれぞれ \mathcal{M} における双対となるとき, 六つ組 $(X, X^*, d_X, b_X, d_{X^*}, b_{X^*})$ を \mathcal{M} におけるピボタル対象という. X^p と Y^p を \mathcal{M} におけるピボタル対象とし, $f: X \rightarrow Y$ を \mathcal{M} の射とする. f の左双対 $f^*: Y^* \rightarrow X^*$ を (2.2.1) で定義する. このとき, 双対 $(X^*, X, d_{X^*}, b_{X^*})$ と $(Y^*, Y, d_{Y^*}, b_{Y^*})$ を用いることにより,

$$f^{**} = (f^*)^* = \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

が得られる. このときピボタル対象 X^p と Y^p の間の射 $f: X^p \rightarrow Y^p$ を, $f = f^{**}$ を満たす \mathcal{M} の射 $f: X \rightarrow Y$ と定義する. \mathcal{M} のピボタル対象とそれらの間の射は圏を構成することが確かめられる. これを \mathcal{M}^p と表記する. このとき次の命題が得られる.

命題 3.1. 圏 \mathcal{M}^p は以下のように厳格なピボタル圏の構造を持つ. \mathcal{M}^p の単位対象は $I^p := (I, I, \text{id}_I, \text{id}_I, \text{id}_I, \text{id}_I)$ である. \mathcal{M}^p における X^p と Y^p のテンソル積は

$$X^p \otimes Y^p = (X \otimes Y, Y^* \otimes X^*, d_{X \otimes Y}, b_{X \otimes Y}, d_{Y^* \otimes X^*}, b_{Y^* \otimes X^*})$$

と定義される. ここで

$$d_{X \otimes Y} = \begin{array}{c} Y^* X^* \quad X Y \\ \frown \\ \end{array}, \quad b_{X \otimes Y} = \begin{array}{c} \quad \\ \frown \\ X Y \quad Y^* X^* \end{array}, \quad d_{Y^* \otimes X^*} = \begin{array}{c} X Y \quad Y^* X^* \\ \frown \\ \end{array}, \quad b_{Y^* \otimes X^*} = \begin{array}{c} \quad \\ \frown \\ Y^* X^* \quad X Y \end{array}$$

とする. \mathcal{M}^p における射のテンソル積は \mathcal{M} における射のテンソル積である. また \mathcal{M}^p における X^p の左双対 $(X^p)^*$ は

$$(X^p)^* = (X^*, X, d_{X^*}, b_{X^*}, d_X, b_X)$$

と定義される. さらに \mathcal{M}^p における対象 X^p の *evaluation* 射と *coevaluation* 射は

$$d_{X^p} = d_X, \quad b_{X^p} = b_X, \quad d_{(X^p)^*} = d_{X^*}, \quad b_{(X^p)^*} = b_{X^*}$$

と定義される. つまり \mathcal{M}^p における任意の射 $f: X^p \rightarrow Y^p$ の双対 $f^*: (Y^p)^* \rightarrow (X^p)^*$ は \mathcal{M} における射 $f: X \rightarrow Y$ の双対 $f^*: Y^* \rightarrow X^*$ となる.

\mathcal{M}^p を \mathcal{M} のピボタル化と呼ぶ. また, \mathcal{M}^p の各対象 X^p を \mathcal{M} の対象 X に送り, 各射をそれ自身に送る自明な “忘却関手 $U: \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{M}$ が存在する.

注意 3.2. 本稿のピボタル対象は Shimizu [10] によるリジッドモノイダル圏の “pivotal object” の概念と類似している. \mathcal{M} がリジッドならば, 本稿のピボタル対象は “pivotal object” の厳格な場合であり, これらがなす圏は [10] における \mathcal{M} の “pivotal cover” となる.

3.2 組み紐圏におけるリボン対象

組み紐圏において, 次の命題が示せる.

命題 3.3. \mathcal{M} を厳格な組み紐圏とする. このとき, \mathcal{M}^p は厳格な組み紐ピボタル圏であり, 忘却関手 $U: \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{M}$ は厳格な組み紐ピボタル関手となる.

\mathcal{M} におけるピボタル対象 X^p がリボン条件 $c_X^L = c_X^R$ をみたすとき, \mathcal{M} におけるリボン対象と呼ぶ. また \mathcal{M}^r を \mathcal{M}^p におけるリボン対象全体からなる充満部分圏とする. そのとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.4. \mathcal{M} を厳格な組み紐圏とする. このとき, \mathcal{M}^r は \mathcal{M}^p の厳格な組み紐ピボタル部分圏であり, 厳格なりボン圏である.

4 Hopf 代数と Yetter–Drinfeld 加群

この章では, 対称モノイダル圏におけるホップ代数と Yetter–Drinfeld 加群の概念をおさらいする. さらに, リボン Yetter–Drinfeld 加群を Yetter–Drinfeld 加群の圏におけるリボン対象として定義する. 最後に, リボン Yetter–Drinfeld 加群の例として, 群代数を紹介する.

4.1 対称モノイダル圏における Hopf 代数

\mathcal{V} を厳格な対称モノイダル圏とする. \mathcal{V} における Hopf 代数とは, \mathcal{V} における次を満たす六つ組 $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ である:

H は \mathcal{V} の対象, $\mu, \eta, \Delta, \epsilon, S$ は \mathcal{V} の射

$$\mu = \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagdown \quad / \\ H \end{array} : H \otimes H \rightarrow H, \quad \eta = \begin{array}{c} | \\ H \end{array} : I \rightarrow H,$$

$$\Delta = \begin{array}{c} H \\ / \quad \backslash \\ H \quad H \end{array} : H \rightarrow H \otimes H, \quad \epsilon = \begin{array}{c} H \\ | \\ I \end{array} : H \rightarrow I, \quad S = \begin{array}{c} H \\ | \\ \boxed{S} \\ | \\ H \end{array} : H \rightarrow H$$

であって次の関係式

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \quad HH \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} HH \quad H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad H \end{array}, & \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ H \end{array} \eta, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \quad HH \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \diagdown \quad \diagup \\ HH \quad H \end{array}, & \begin{array}{c} \epsilon \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ H \end{array} \epsilon, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ \epsilon \end{array} & = & (\text{empty}), & \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \epsilon \end{array} & = & \begin{array}{c} H \quad H \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \epsilon \quad \epsilon \end{array}, & \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ H \end{array} \begin{array}{c} \eta \\ \downarrow \\ H \end{array}, \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \quad H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad H \end{array}, & \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ \square \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ \square \\ \downarrow \\ H \end{array} & = & \begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ \epsilon \\ \downarrow \\ \eta \\ \downarrow \\ H \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

が成り立つものである。以下では常に対合射 S は可逆であると仮定する。

4.2 Yetter–Drinfeld 加群

H を厳格な対称モノイダル圏 \mathcal{V} における Hopf 代数とする。 \mathcal{V} における H 上の (左-左) Yetter–Drinfeld 加群とは、 \mathcal{V} の対象 X と \mathcal{V} の射

$$\alpha = \begin{array}{c} H \quad X \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \downarrow \end{array} : H \otimes X \rightarrow X, \quad \beta = \begin{array}{c} \downarrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ H \quad X \end{array} : X \rightarrow H \otimes X$$

に対して、次の条件を満たす三つ組 (X, α, β) である：

1. (X, α) は左 H -加群，つまり次を満たす：

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} HHX \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \alpha \\ \quad \quad X \end{array} & = & \begin{array}{c} HHX \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \alpha \\ \quad \quad X \end{array}, & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X \end{array} & = & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X \end{array}.
 \end{array}$$

2. (X, β) は左 H -余加群，つまり次を満たす：

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \beta \\ \downarrow \\ HHX \end{array} & = & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \beta \\ \downarrow \\ HHX \end{array}, & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X \end{array} & = & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X \end{array}.
 \end{array}$$

3.

また Yetter–Drinfeld 加群の準同型写像

$$f: (X, \alpha, \beta) \rightarrow (X', \alpha', \beta')$$

とは, \mathcal{V} の射 $f: X \rightarrow X'$ であって, 左 H -加群準同型写像 $f: (X, \alpha) \rightarrow (X', \alpha')$ であり左 H -余加群準同型写像 $f: (X, \beta) \rightarrow (X', \beta')$ である, つまり次の関係式

を満たすものである. $\mathcal{YD}_H^\mathcal{V}$ を \mathcal{V} における H 上の Yetter–Drinfeld 加群と Yetter–Drinfeld 加群の準同型写像が構成する圏とする. 圏 $\mathcal{YD}_H^\mathcal{V}$ は次のように厳格な組み紐圏の構造を持つ ([13, 2]). $\mathcal{YD}_H^\mathcal{V}$ のモノイダルな単位元は (I, ϵ, η) となる. (X, α, β) と (X', α', β') のテンソル積は

$$(X, \alpha, \beta) \otimes (X', \alpha', \beta') = (X \otimes X', \alpha'', \beta'')$$

と定義される. ここで,

とする. 組み紐構造

$$\psi_{(X, \alpha, \beta), (X', \alpha', \beta')} : (X, \alpha, \beta) \otimes (X', \alpha', \beta') \rightarrow (X', \alpha', \beta') \otimes (X, \alpha, \beta)$$

とその逆射

$$\psi_{(X, \alpha, \beta), (X', \alpha', \beta')}^{-1} : (X', \alpha', \beta') \otimes (X, \alpha, \beta) \rightarrow (X, \alpha, \beta) \otimes (X', \alpha', \beta')$$

は

と定義される.

4.3 リボン Yetter–Drinfeld 加群

リボン *Yetter–Drinfeld* 加群を, \mathcal{V} における H 上の Yetter–Drinfeld 加群が構成する厳格な組み紐圏 $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ におけるリボン対象と定義する. リボン *Yetter–Drinfeld* 加群の圏とは, $\mathcal{YD}_H^{\mathcal{V}}$ におけるリボン対象が構成する圏である. このとき命題 3.4 から直ちに次の定理が従う.

定理 4.1. リボン *Yetter–Drinfeld* 加群の圏は厳格なりボン圏である.

4.4 リボン Yetter–Drinfeld 加群の例

k を体とし G を有限群とする. k 上の G の群 Hopf 代数を $k[G]$ と表す. $k[G]$ の余積 Δ , 余単位射 ϵ , 対合射 S を, G の各元 g に対して

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \epsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}$$

と定めることができる. このとき $k[G]$ に対して, $k[G]$ 上の Yetter–Drinfeld 加群の構造 $(k[G], \alpha, \beta)$ を次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \alpha = \text{ad} : k[G] \otimes k[G] &\rightarrow k[G], & \text{ad}(g \otimes h) &= {}^g h = ghg^{-1}, \\ \beta = \Delta : k[G] &\rightarrow k[G] \otimes k[G], & \Delta(g) &= g \otimes g. \end{aligned}$$

こうして, $k[G]$ の $k[G]$ への作用は左随伴作用, $k[G]$ の $k[G]$ への余作用は余積となる. このとき $(k[G], \text{ad}, \Delta)$ は $k[G]$ 上の Yetter–Drinfeld 加群となることが確かめられる. $k[S]$ 上の Yetter–Drinfeld 加群 $k[S]$ とその双対 $k[S]^* = \text{Hom}_k(k[S], k)$ は

$$\begin{aligned} d_{k[S]} : k[S]^* \otimes k[S] &\rightarrow k, & d_{k[S]}(f \otimes x) &= f(x), \\ b_{k[S]} : k &\rightarrow k[S] \otimes k[S]^*, & b_{k[S]}(1) &= \sum_{g \in S} g \otimes g^*, \\ d_{k[S]^*} : k[S] \otimes k[S]^* &\rightarrow k, & d_{k[S]^*}(x \otimes f) &= f(x), \\ b_{k[S]^*} : k &\rightarrow k[S]^* \otimes k[S], & b_{k[S]^*}(1) &= \sum_{g \in S} g^* \otimes g \end{aligned}$$

によってリボン Yetter–Drinfeld 加群の構造を持つ. ここで $g^* \in k[S]^*$ は任意の S の元 h に対して $g^*(h) = \delta_{g,h}$ と定義される. これらの準同型写像がリボン Yetter–Drinfeld 加群の構造を与えることが確かめられる.

リボン Yetter–Drinfeld 加群 $k[S]$ から構成される絡み目不変量は, 絡み目 L に, L の各成分のメリディアンを S の元に対応させる準同型写像 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \rightarrow G$ の個数を対応させる不変量となる. この不変量は Freyd と Yetter によっても考えられている [3].

参考文献

- [1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *Braided Hopf algebras over non-abelian groups*, Bol. Acad. Ciencias (Córdoba) 63 (1999), 45–78.
- [2] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, J. Soviet Math. 41 (1988) no. 2, 898–915.

- [3] P. J. Freyd and D.N. Yetter, *Braided compact closed categories with application with low dimensional topology*, Adv. Math. 77 (1989), 156–182.
- [4] K. Habiro and Y. Kotorii, *Ribbon Yetter-Drinfeld modules and tangle invariants*, arXiv:math/2204.02551.
- [5] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics 115, Springer-Verlag, New York, (1995).
- [6] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [7] S. Majid, *Doubles of quasitriangular Hopf algebras*, Comm. Algebra, 19 (1991), 3061–3073.
- [8] N. Y. Reshetikhin. and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. 103 (1991) 547–597.
- [9] P. Selinger, *A survey of graphical languages for monoidal categories*, New structures for physics, 289–355, Lecture Notes in Phys., 813, Springer, Heidelberg, 2011.
- [10] K. Shimizu, *The pivotal cover and Frobenius-Schur indicators*, J. Algebra 428, 357–402 (2015).
- [11] M. C. Shum, *Tortile tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra 93 (1994), 57–110.
- [12] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of de Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [13] D. N. Yetter, *Quantum groups and representations of monoidal categories*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 108 (1990), 261–290.