# 無限次元 $C^\infty$-多様体の滑らかなホモトピー

木原　浩　(会津大学)*

## 1 導入

無限次元解析は、多くの同値でない定式化が登場してきたが 1980-90 年代に Frölicher と Kriegl に始まる convenient calculus が整備され、最終理論の最有力候補とみなされている [KM]。しかし、そのような基礎付けが確立された一方で、我々は無限次元 $C^\infty$-多様体の間の滑らかな写像、無限次元 $C^\infty$-多様体の上のファイバー束の切断、主束、ゲージ変換等がどのくらい豊富にあるのかについて知る手段をほとんどもたない。もちろん実際には、連続な写像、切断、主束、ゲージ変換に関する膨大な知識を活用する為に、滑らかな対象と連続な対象を比較する理論 (平滑化理論) を構築するのが有効だと思われる (写像のソース、束のベースが有限次元のときは、Steenrod の近似定理を精密化する形での平滑化定理 [KM02, MW, Wo07, Wo09] が知られているが、ソース、ベースが無限次元のときに適用できる手段は全く知られていない。) ここでは、滑らかなホモトピー論を構築し、(通常の) 連続なホモトピー論と比較することで、写像、切断、主束、ゲージ変換に対する平滑化定理が得られることを説明する。

まず次節で、抽象的なホモトピー論 (モデル圏論) の考え方を説明し、$C^\infty$-多様体の圏 $C^\infty$ よりも広い圏が必要となることを見る。そのような ‘smooth space’ の convenient category として我々は微分空間 (diffeological space) の圏 $\mathcal{D}$ を用いる。その基本概念を説明したあと [K19] に従い $\mathcal{D}$ 上にモデル構造を導入し (4 節)、[K20] に従い滑らかなホモトピー論を展開し (5-8 節)、それを (無限次元) $C^\infty$-多様体に適用する (9 節)。

## 2 抽象的ホモトピー論

この節では単体的ホモトピー論を出発点として、モデル圏論について説明する ([May, GJ, Hir, MP] 参照)。

### 2.1 単体的ホモトピー論

**定義 2.1.** (1) 圏 $\Delta$ を

$$\mathrm{ob}\,\Delta = \{[0], [1], [2], \ldots\},$$
$$\Delta([m],[n]) = \{[m] \xrightarrow{\phi} [n] \mid \phi \text{ は順序を保つ } \}$$

で定める。ここで $[n]$ は順序集合 $\{0, \ldots, n\}$ を表す。

(2) 単体的集合 $K$ とは、関手 $K : \Delta^{op} \longrightarrow Set$ のことである。よって、単体的写像の圏は関手圏 $Set^{\Delta^{op}}$ である。この圏は以降 $\mathcal{S}$ とかかれる。

定義により、単体的集合 $K$ は可算コの集合 $K_0, K_1, K_2, \ldots$ と (適切な関係をみたす)

---

* 〒965-8580 福島県会津若松市一箕町大字鶴賀上居合９０　会津大学コンピュータ理工学部
e-mail: kihara@u-aizu.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-58B05, MSC-58A40
キーワード：無限次元 $C^\infty$-多様体, 微分空間

作用素 $K_n \xrightarrow{d_i} K_{n-1}, K_n \xrightarrow{s_i} K_{n+1}$ たちからなると思うことができる。

**例 2.2.** 位相空間 $X$ に対し、単体的集合 $SX$ を

$$S_nX = \{\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \mid \sigma\text{は連続}\}$$

と明らかな $d_i, s_i$ で定めることができる。この構成は位相空間の圏 $\mathcal{T}$ から $\mathcal{S}$ への関手 $S : \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{S}$ を定める (特異関手)。

今 $K \in \mathcal{S}$ に対し、その実現 $|K| \in \mathcal{T}$ を

$$|K| = \coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n / \sim$$

で定める (ここで $\sim$ は、$d_i, s_i$ たちの生成する同値関係)。この構成は実現関手 $|\ | : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}$ を定め、$|\ | : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{T} : S$ は随伴対となる。

**注意 2.3.** 我々はこの後の応用の為 convenient category of topological spaces として弧生成空間の圏 $\mathcal{C}^0$ をとる。(位相空間 $X$ が弧生成 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $X$ の位相が連続曲線に関する終位相)。このとき実現関手と特異関手の随伴対は $|\ | : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{C}^0 : S$ に制限する。

主に 1950 年代の Kan の仕事により、単体的集合に対しホモトピー論が展開され、そのホモトピー論が関手 $|\ |, S$ を通して本質的に位相空間のホモトピー論と同一であることが示された。では、

- ある圏 $\mathcal{K}$ でホモトピー論が展開できるとはどういうことか?
- 2 つの圏 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ のホモトピー論が一致するとはどういうことか?

ということが問題になる。これに対する一つの答えを与えるのが Quillen によるモデル圏の理論である。

## 2.2 モデル圏

モデル圏の基礎的な概念について述べる。

**定義 2.4.** 圏 $\mathcal{M}$ は、3 つの射のクラス $W, F, C$ (それぞれ弱同値、ファイブレーション、コファイブレーションのクラスとよばれる) が指定されていて 5 つの公理 (M1-5) みたすときモデル圏とよばれる; M1 のみ $\mathcal{M}$ の完備性、余完備性を要求する純圏論的要請であり、M2-5 はクラス $W, F, C$ に関する要請である。

$A \in \mathcal{M}$ は始対象からの射 $\phi \longrightarrow A$ がコファイブレーションのとき、コファイブラントとよばれる。双対的に $X \in \mathcal{M}$ は終対象への射 $X \longrightarrow *$ がファイブレーションのとき、ファイブラントとよばれる。任意の対象は弱同値の範囲内でコファイブラントな対象 (ファイブラントな対象、ファイブラント-コファイブラントな対象) におきかえられる。

**例 2.5.** (1) $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ を左 $R$-加群の非負次数の鎖複体の圏とする。このとき、$\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$

は

$$W = \{M \xrightarrow{f} N \text{ s.t. } H_*(f) \text{ が同型 }\}$$
$$C = \{M \xrightarrow[mono]{f} N \text{ s.t. Coker } f \text{ の各成分が射影的 }\}$$
$$F = \{M \xrightarrow{f} N \text{ s.t. } f_k \text{ は } epi\ (k > 0)\}$$

の下 モデル圏となる。そのとき、任意の鎖複体はファイブラント、“$M$ がコファイブラント $\Leftrightarrow$ 各 $M_k$ が射影的” であり、コファイブラント対象へのおきかえ $P \longrightarrow M$ は射影分解に他ならない。このモデル構造は射影的モデル構造とよばれる ([DS])。

(2) $Ch^{\geq 0}(R)$ 上に入射的モデル構造が定義される。

(3) 弧生成空間の圏 $\mathcal{C}^0$ は

$$W = \left\{ X \xrightarrow{f} Y \text{ s.t. } SX \xrightarrow{Sf} SY \text{ は } \mathcal{S} \text{ における弱同値 } \right\}$$
$$F = \{\Lambda^p_{k\,\mathrm{top}} \hookrightarrow \Delta^p_{\mathrm{top}} \mid p > 0,\ 0 \leq k \leq p\}^{\boxslash}$$
$$C = {}^{\boxslash}(F \cap W)$$

の下、(コファイブラント生成とよばれるよい) モデル圏となり、任意の対象はファイブラントである。また、CW-複体はコファイブラントであり、

$f : X \longrightarrow Y$ が $\mathcal{C}^0$ におけるファイブレーション $\Leftrightarrow f : X \longrightarrow Y$ が Serre ファイブレーション
$f : X \longrightarrow Y$ が $\mathcal{C}^0$ における弱同値 $\Leftrightarrow f : X \longrightarrow Y$ が弱ホモトピー同値.

(射のクラス $K$ に対し、${}^{\boxslash}K, K^{\boxslash}$ は、それぞれ左、右持ち上げ性質で定義される射のクラスを表す。)

(4) 単体的集合の圏 $\mathcal{S}$ は

$$C = \{K \xrightarrow{f} L \text{ s.t. } f_k \text{ は単射 } (k \geq 0)\}$$
$$F = \{\Lambda_k[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid n > 0, 0 \leq k \leq n\}^{\boxslash}$$

なるモデル圏構造をもつ。このとき、任意の単体的集合はコファイブラントであり、“$K$ がファイブラント $\Leftrightarrow$ $K$ が Kan 複体” である。$K, L$ ともファイブラントのときは $f : K \longrightarrow L$ が弱同値 $\Longleftrightarrow$ $f$ が弱ホモトピー同値 (つまり、あらゆるホモトピー群の同型を誘導する); 本講演で出てくる特異複体 $SX$ やその類似 $S^{\mathcal{D}}X$ はすべてファイブラントである。

モデル圏 $\mathcal{M}$ の Quillen ホモトピー圏は $\mathrm{Ho}\mathcal{M} = W^{-1}\mathcal{M}$ で定義される。$A$ がコファイブラント、$X$ がファイブラントなら、$\mathcal{M}(A, X)$ に適切なホモトピー関係が定義され、それを $\simeq_{cl}$ とかくと、

$$\mathcal{M}(A, X)/\simeq_{cl} \xrightarrow[\cong]{} \mathrm{Ho}\mathcal{M}(A, X).$$

よって $A, X$ ともファイブラント・コファイブラントなら、弱同値 $f : A \longrightarrow X$ はこのホモトピー関係 $\simeq_{cl}$ に関しホモトピー同値である。

最後に 2 つのモデル圏 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ のホモトピー論の (ある種の) 同値を定式化する Quillen 同値の概念を説明する。

$$\begin{aligned} &\text{随伴対 } \Phi : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : \Psi \text{ が Quillen 随伴} \\ \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ &\Phi \text{ がコファイブレーションを保ち、} \Psi \text{ がファイブレーションを保つ。} \end{aligned}$$

Quillen 随伴は、更に、適切な意味で弱同値を respect するとき Quillen 同値といわれる。そのとき、導来関手を通して Quillen ホモトピー圏の間の同値

$$\mathbb{L}\Phi : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}\Psi$$

が得られる。

## 3 微分空間

我々は、モデル圏の理論を用いて、滑らかなホモトピー論を構築したいのだが $C^\infty$-多様体の圏は (convenient, classical にかかわらず) 完備でも余完備でもないので、適切な 'smooth space' の convenient category を選び、そこで働く必要がある。

我々は 'smooth space' の convenient category として微分空間の圏を用いる。基礎的な概念と性質を紹介しよう ([CW14a, Section 2], [IZ] 参照)。集合 $X$ の parametrization とは写像 $p : U \longrightarrow X$ のことである (ただし、$U$ はあるユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合)。

**定義 3.1.** (1) $X = (X, D_X)$ が微分空間

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
- $X$ 集合
- $D_X$ は $X$ の parametrization の集まりで以下をみたす:
  - (i) (Covering) 任意の constant parametrization $U \xrightarrow{p} X \in D_X$.
  - (ii) (Locality) parametrization $U \xrightarrow{p} X$ に対し、$U$ の開被覆 $\{U_i\}$ で各 $p|U_i \in D_X$ なるものがあれば $p \in D_X$.
  - (iii) (Smooth compatibility) $U \xrightarrow{p} X \in D_X$ と、任意のユークリッド領域の間の滑らかな写像 $V \xrightarrow{F} U$ の合成 $p \circ F \in D_X$.

このとき $D_X$ は $X$ の diffeology とよばれ、その元は plot とよばれる。

(2) $X = (X, D_X), Y = (Y, D_Y)$ を微分空間とする。そのとき、写像 $f : X \longrightarrow Y$ が滑らか $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f_\# D_X \subset D_Y$.

以下、微分空間の圏を $\mathcal{D}$ と表す。有限次元 $C^\infty$-多様体の圏が $\mathcal{D}$ に充満忠実に埋め込まれることは明らかである。更に、$\mathcal{D}$ は次の性質をもつ。

**命題 3.2.** (1) $\mathcal{D}$ は下部集合関手 $\mathcal{D} \longrightarrow Set$ に関し、始及び終構造をもつ。特に、$\mathcal{D}$ は完備かつ余完備。

(2) $\mathcal{D}$ はカルテシアン閉圏である。

微分空間 $A$ の下部位相を $D_A$ に関する終位相として定め、下部位相空間を $\widetilde{A}$ とかくことにする。ユークリッド領域 $U$ の位相は弧生成なので、我々は、下部位相空間関手

$$\widetilde{\cdot} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^0$$

を得る。$\mathcal{C}^0$ のカルテシアン閉性を用いると、$\tilde{\cdot}$ が有限積を保つことがわかる。更に弧生成空間 $X$ に対し、微分空間 $RX$ を $RX = (X, D_{RX}), D_{RX} = \{X$ への $\mathcal{C}^0$-parametrizations$\}$ で定めると、関手 $R : \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{D}$ を得るが、

$$\tilde{\cdot} : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^0 : R \quad \text{は随伴対}$$

であることが容易にわかる。

## 4 $\mathcal{M}$ 上のモデル構造と $\mathcal{S}$ 圏構造

この節以降 $\mathcal{M}$ は圏 $\mathcal{D}$ または $\mathcal{C}^0$ を表すとする。

### 4.1 $\mathcal{M}$ 上のモデル構造

$\mathcal{C}^0$ 上のモデル構造を例 2.5(3) から思い出し、それにならって $\mathcal{D}$ 上にモデル構造を構成したい。

$\mathcal{D}$ 上のモデル構造の構成には 標準単体 $\Delta^p$ $(p \geq 0)$ 上にモデル公理をみたすような弱同値、ファイブレーション、コファイブレーションを定義できる diffeology が必要となる。Hector [Hec] は微分空間のホモトピー論を展開する為に $\Delta^p$ に $\mathbb{R}^{p+1}$ の sub-diffeology を与えた $\Delta^p_{sub}$ を用いた。しかし $k$-th horn $\Lambda^p_k = \{(x_0, \ldots, x_p) | x_i = 0 \text{ for some } i \neq k\}$ は $\Delta^p_{sub}$ の滑らかな変位レトラクトでないので $\mathcal{C}^0$ に対するモデル公理をチェックする為の議論が適用しない。そこで、我々は 少なくとも $p \geq 2$ に対し、$\Delta^p$ 上の新しい diffeology を構成しなければならない。論文 [K19] の半分はそのような $\Delta^p$ 上の diffeology の構成に費やされている。

我々は、この新しい diffeology を与えられた標準 $p$-単体 $\Delta^p$ $(p \geq 0)$ を用いて、$\mathcal{C}^0$ の場合と同様に次のように定める:

$$W = \left\{ \; X \xrightarrow{f} Y \text{ s.t. } S^{\mathcal{D}}X \xrightarrow{S^{\mathcal{D}}f} S^{\mathcal{D}}\,Y \text{ は } \mathcal{S} \text{ における弱同値} \; \right\}$$

$$F = \{\Lambda^p_k \hookrightarrow \Delta^p \mid p > 0,\ 0 \leq k \leq p\}^{\boxslash}$$

$$C = {}^{\boxslash}(F \cap W)$$

このとき $\mathcal{C}^0$ の場合と同様に次の定理が成立する。

**定理 4.1.** $\mathcal{D}$ はコファイブラント生成なモデル圏で、任意の対象はファイブラントである。

また、次の結果が成り立つ。

**定理 4.2.** $(X, x)$ を基点付き微分空間とすると、自然は全単射

$$\Theta_X : \pi^{\mathcal{D}}_p(X, x) \longrightarrow \pi_p(S^{\mathcal{D}}X, x) \quad p \geq 0,$$

があり、$p > 0$ では群同型である。

**系 4.3.** $f : X \longrightarrow Y$ が $\mathcal{D}$ における弱同値 $\Leftrightarrow$ $f : X \longrightarrow Y$ が滑らかなホモトピー群の上に同型を誘導する。

我々の $\Delta^p$ $(p > 0)$ を用いて滑らかな実現関手と滑らかな特異関手の随伴対 $|\ |_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} :\rightleftarrows \mathcal{D} : S^{\mathcal{D}}$ を構成すると、3つの随伴対

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, shift left, "|\ |_{\mathcal{D}}"] \arrow[rr, bend left=50, "|\ |"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "S^{\mathcal{D}}"] \arrow[r, shift left, "\widetilde{\cdot}"] & \mathcal{C}^0 \arrow[l, shift left, "R"] \arrow[ll, bend left=50, "S"] \end{tikzcd}$$

を得る。$\widetilde{\Delta^p} = \Delta^p_{\mathrm{top}}$ なので、随伴対 $(|\ |_{\mathcal{D}}, S^{\mathcal{D}})$ と $(\widetilde{\cdot}, R)$ の合成はちょうど $(|\ |, S)$ となる。

**定理 4.4.**

$$|\ |_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{D} : S^{\mathcal{D}} \text{ と } \widetilde{\cdot} : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^0 : R$$

は Quillen 同値である。

### 4.2 $\mathcal{M}$ 上の $\mathcal{S}$-圏構造

$\mathcal{M}$ $(= \mathcal{D}, \mathcal{C}^0)$ はカルテシアン閉なので、$\mathcal{M}$ 自身 $\mathcal{M}(X, Y)$ を hom-対象とする $\mathcal{M}$-圏となる。そこで、$\mathcal{M}$ は特異関手 $S^{\mathcal{M}}$ を通して $\mathcal{S}$-圏ともなる (つまり、$\mathcal{M}$ は関数複体 $S^{\mathcal{M}}\mathcal{M}(X, Y)$ をもつ $\mathcal{S}$-圏となる)。ここで、以下の記号を用いた

$$|\ |_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{M} : S^{\mathcal{M}} = \begin{cases} |\ |_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{D} : S^{\mathcal{D}} & \text{for } \mathcal{M} = \mathcal{D} \\ |\ | : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{M} : S & \text{for } \mathcal{M} = \mathcal{C}^0 \end{cases}$$

我々は次の問題を考える。
**問題** どのような条件の下で

$$\widetilde{\cdot} : S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X) \longrightarrow S\mathcal{C}^0(\widetilde{A}, \widetilde{X})$$

は $\mathcal{S}$ における弱同値となるか？

**注意 4.5.** (1) $\widetilde{\cdot}$ の $\pi_0$-部分は明らかな写像

$$[A, X]_{\mathcal{D}} := \mathcal{D}(A, X)/\simeq_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\widetilde{A}, \widetilde{X})/\simeq_{\mathcal{C}^0} = [\widetilde{A}, \widetilde{X}]_{\mathcal{C}^0}$$

であることに注意。そこで、上の問題は写像に対する平滑化問題の高次ホモトピー版である。

(2) $\widetilde{\cdot}$ は必ずしも弱同値ではない (Iglesias-Zemmour [IZ],Christensen-Wu [CW14b]).

(3) 同様に我々は切断、主束、ゲージ変換に対する平滑化問題 (の高次ホモトピー版) も考える。

## 5 連続写像の平滑化

### 5.1 $\mathcal{M}$ の関数複体とホモトピー関数複体

$\mathcal{D}, \mathcal{C}^0$ とも単体的圏構造をもち、関数複体 $S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A, X)$ と $S\mathcal{C}^0(A, X)$ が定義される。一方、$\mathcal{D}, \mathcal{C}^0$ ともモデル構造ももちホモトピー関数複体 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(A, X)$ と $\mathrm{map}_{\mathcal{C}^0}(A, X)$ が定

義される。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} & \mathcal{C}^0 \\
\text{simplicial} & S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A,X) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & S\mathcal{C}^0(A,X) \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
\text{model} & \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(A,X) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{map}_{\mathcal{C}^0}(A,X)
\end{tikzcd}
$$

我々は主に関数複体 $S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A,X)$ と $S\mathcal{C}^0(A,X)$ の関係に興味があるが、モデル圏の理論はホモトピー関数複体 $\mathrm{map}_{\mathcal{D}}(A,X)$ と $\mathrm{map}_{\mathcal{C}^0}(A,X)$ の関係を調べる手段を提供する。そこで、$\mathcal{C}^0$ 及び $\mathcal{D}$ における関数複体とホモトピー関数複体の関係を知ることが必要になる。次が成り立つ。

- $\mathcal{C}^0$ は単体的モデル圏なので、一般論により次がいえる:

$$S\mathcal{C}^0(A,X) = \mathrm{map}_{\mathcal{C}^0}(A,X) \text{ for a cofibrant } A.$$

- $\mathcal{D}$ は単体的モデル圏ではないが、次の結果を証明できる:

$$S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A,X) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{D}}(A,X) \text{ for a cofibrant } A.$$

**注意 5.1.** $\mathcal{C}^0$ は単体的モデル圏だが $\mathcal{D}$ はそうでないという重大な相違は、$\mathcal{S} \xrightarrow{|\ |} \mathcal{C}^0$ は有限積を保つが $\mathcal{S} \xrightarrow{|\ |_{\mathcal{D}}} \mathcal{D}$ はそうではないという事実に起因する。

## 5.2 クラス $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}$ と $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$

ここで 2 つの重要な微分空間のクラスを導入する。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\mathcal{D}} &= \{A \in \mathcal{D} \,|\, A \simeq_{\mathcal{D}} \text{ コファイブラント対象 }\},\\
\mathcal{V}_{\mathcal{D}} &= \{A \in \mathcal{D} \,|\, A \xrightarrow{id} R\widetilde{A} \text{ は弱同値 }\}.
\end{aligned}
$$

このとき、次が成り立つ。

**命題 5.2.** (1) $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \Rightarrow \widetilde{A}$ は CW-複体のホモトピー型をもつ。
(2) $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \Rightarrow A \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$.
(3) 次は同値
 (i) $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$.
 (ii) $S^{\mathcal{D}}A \hookrightarrow S\widetilde{A}$ は $\mathcal{S}$ における弱同値.
 (iii) $\pi_*^{\mathcal{D}}(A,a) \underset{\cong}{\longrightarrow} \pi_*(\widetilde{A},a)$ for any $a \in A$.

## 5.3 写像に対する平滑化定理

これらの準備の下、次が示される。

**定理 5.3.** $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}$, $X \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}} \Rightarrow S^{\mathcal{D}}\mathcal{D}(A,X) \hookrightarrow S\mathcal{C}^0(\widetilde{A},\widetilde{X})$ は $\mathcal{S}$ における弱同値。

# 6 位相的主束の平滑化

この節では、連続写像に対する平滑化定理を用いて、位相的主束の平滑化定理を示す。

## 6.1 $\mathcal{M}$ における主束

基本概念を導入しよう。

**定義 6.1.** $X \in \mathcal{M}$ とする

(1) $X$ の被覆 $\{U_i\}$ が $\mathcal{M}$-numerable
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{M}$ の関数からなる 1 の分割 $\{\varphi_i : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$ で $\{U_i\}$ に従属するものが存在する。

(2) $X$ が $\mathcal{M}$-paracompact $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $X$ の任意の開被覆が $\mathcal{M}$-numerable。

**定義 6.2.** $B \in \mathcal{M}, G$ を $\mathcal{M}$ における群とする。

(1)
- $\mathcal{M}G = (\mathcal{M}$ おける右 $G$-対象$)$.
- $E \xrightarrow{\pi} B \in \mathcal{M}G/B$ が 主 $G$-束
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}{}^{\exists}$ $\{U_i\}$ $B$ の開被覆 s.t.
$$E|_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times G \text{ in } \mathcal{M}G/U_i.$$
- $\mathsf{P}\mathcal{M}G/B = (\text{主 } G\text{-束 over } B \text{ in } \mathcal{M}) \underset{\text{full}}{\subset} \mathcal{M}G/B.$

(2)
- $E \xrightarrow{\pi} B \in \mathsf{P}\mathcal{M}G/B$ が $\mathcal{M}$-numerable
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $E \xrightarrow{\pi} B$ が $\mathcal{M}$-numerable な自明化開被覆をもつ.
このとき、$\mathsf{P}\mathcal{M}G/B$ の $\mathcal{M}$-numerable な主 $G$-束よりなる充満部分圏 $(\mathsf{P}\mathcal{M}G/B)_{\text{num}}$ が定義される。

$\mathcal{D}$ における群は 微分群 (diffeological group) とよばれる。我々は $\mathcal{C}^0$ における群を弧生成群とよぶ。$\widetilde{\cdot} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^0$ は有限積を保つので、“$G$ が微分群 $\Rightarrow \widetilde{G}$ は 弧生成群” が成り立つ。更に次が成立する。

**補題 6.3.** $B$ を微分空間、$G$ を微分群とする。そのとき関手 $\widetilde{\cdot} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^0$ は関手
$$\mathsf{P}\mathcal{D}G/X \longrightarrow \mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{B}$$
を誘導し、それは
$$(\mathsf{P}\mathcal{D}G/X)_{\text{num}} \longrightarrow (\mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{B})_{\text{num}}$$
に制限する。

## 6.2 主束の平滑化定理

本質的に小さな圏 $\mathcal{A}$ に対し、$K\mathcal{A} = \text{ob } \mathcal{A}/\cong$ と定める。このとき、よく知られた位相的主束の分類定理 (の弧生成版) と、滑らかな主束の分類定理 [CW21] を用いて、次を得る。

**定理 6.4.** $X$ を微分空間、$G$ を微分群とする。$X \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}, G \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ なら $\widetilde{\cdot} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^0$ は
$$K(\mathsf{P}\mathcal{D}G/X)_{\text{num}} \underset{\cong}{\longrightarrow} K(\mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{X})_{\text{num}}$$

を誘導する。

# 7 切断の平滑化

写像の平滑化定理を示す為の議論を精密化することで次が示される。

**定理 7.1.** $p : E \longrightarrow X$ を $\mathcal{D}$-numerable $F$-束 in $\mathcal{D}$ とする。$X \in \mathcal{W}_{\mathcal{D}}, F \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ なら自然な包含写像

$$S^{\mathcal{D}}\Gamma(X, E) \hookrightarrow S\Gamma(\widetilde{X}, \widetilde{E})$$

は $\mathcal{S}$ における弱同値である。

# 8 $(\mathsf{P}\mathcal{D}G/X)_{\mathrm{num}}$ と $(\mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{X})_{\mathrm{num}}$ の Dwyer-Kan 同値

この節ではゲージ変換の平滑化を説明し、主束とゲージ変換に対する平滑化を $(\mathsf{P}\mathcal{D}G/X)_{\mathrm{num}}$ と $(\mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{X})_{\mathrm{num}}$ の間の Dwyer-Kan 同値という形で統一する。Dwyer-Kan 同値は単体的圏の間の弱い同値として導入された概念なので、$\mathsf{P}\mathcal{M}G/X$ を enrich することから始めよう。

## 8.1 $\mathcal{M}$ に埋め込まれた圏の豊穣化

$X \in \mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ における群 $G$ に対し、次の忠実関手からなる可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{M}G \arrow[dr, hook] & \\
\mathsf{P}\mathcal{M}G/X \arrow[r, hook] & \mathcal{M}G/X \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{M} \\
 & & \mathcal{M}/X \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$ はカルラシアン閉なので、$\mathcal{M}$ 自身 $\mathcal{M}$-圏であり、hom-集合 $\mathcal{M}(A, B)$ は標準的な diffeology/arc-generated topology をもつ。他の圏の hom-集合は $\mathcal{M}$ の hom-集合への自然な包含をもつのでそれにより、sub-diffeology/arc-generated sub-topology を入れる。そのとき、上のすべての圏は $\mathcal{M}$-圏であり、すべての関手は $\mathcal{M}$-関手となる。

$\mathcal{M}$-圏は特異関手 $S^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{S}$ により、$\mathcal{S}$-圏になるので、上の図式は $\mathcal{S}$-圏の可換図式とも見なされる。

## 8.2 豊穣亜群 $\mathsf{P}\mathcal{M}G/X$

**定義 8.1.** $\mathcal{V}$ をカルテシアン閉圏とし、$\mathcal{A}$ を $\mathcal{V}$-圏とする。

$\mathcal{A}$ が $\mathcal{V}$-亜群 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathcal{A}$ に対し、$\mathcal{V}$ の射

$$\cdot^{-1} : \mathcal{A}(A, A') \longrightarrow \mathcal{A}(A', A)$$

があって適切な $\mathcal{V}$ における図式を可換にする ([K20, Definition 7.2])。

$\mathcal{A}$ を $\mathcal{V}$-亜群とするとき、$A \in \mathcal{A}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$ を

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(A) = \mathcal{A}(A, A)$$

で定めると明らかに $\mathcal{V}$ における群ともなる。

**定理 8.2.** $\mathcal{M}$-圏 $\mathsf{P}\mathcal{M}G/X$ は $\mathcal{M}$-亜群であり、特異関手 $S^{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{S}$ により、$\mathcal{S}$-亜群ともなる。

$\pi:P\longrightarrow X$ を主 $G$-束 in $\mathcal{M}$ とすると、そのゲージ群 $\mathrm{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ が

$$\mathrm{Gau}_{\mathcal{M}}(P)=\mathrm{Aut}_{\mathsf{P}\mathcal{M}G/X}(P)$$

で定義される。定義より $\mathrm{Gau}_{\mathcal{M}}(P)=\mathsf{P}\mathcal{M}G/X(P,P)=\mathcal{M}G/X(P,P)$ である。$\mathsf{P}\mathcal{M}G/X$ を $\mathcal{S}$-亜群とみると、$P$ の自己同型群は $S^{\mathcal{M}}\mathrm{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ に他ならない。

### 8.3 ゲージ変換の平滑化定理

ここでは、ゲージ群 $\mathrm{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ を切断の空間と同一視し、切断に関する平滑化定理を適用し、ゲージ変換に関する平滑化定理を得る。

$\mathcal{M}$ における主 $G$-束 $\pi:P\longrightarrow X$ に対し、(主束でない) $G$-束 $P[G,\mathrm{conj}]\longrightarrow X$ を

$$\begin{aligned}P[G,\mathrm{conj}]&=P\times_G(G,\mathrm{conj})\\&=P\times G/(ug,h)\sim(u,ghg^{-1})\end{aligned}$$

で定める。

**補題 8.3.** $\pi:P\longrightarrow X$ を主 $G$-束 in $\mathcal{M}$ とする

(1) $P[G,\mathrm{conj}]\longrightarrow X$ は $\mathcal{M}/X$ における群である。よって $\Gamma(X,P[G,\mathrm{conj}])$ は $\mathcal{M}$ における群である。

(2) $\mathrm{Gau}_{\mathcal{M}}(P)$ は $\mathcal{M}$ における群として $\Gamma(X,P[G,\mathrm{conj}])$ と同型。

切断に対する平滑化定理を適用して、次を得る。

**命題 8.4.** $\pi:P\longrightarrow X$ を $\mathcal{D}$-numerable 主 $G$-束 in $\mathcal{D}$ とする。 $X\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}},G\in\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ のとき、自然な包含

$$S^{\mathcal{D}}\mathrm{Gau}_{\mathcal{D}}(P)\hookrightarrow S\mathrm{Gau}_{\mathcal{C}^0}(\widetilde{P})$$

は $\mathcal{S}$ における弱同値である。

### 8.4 Dwyer-Kan 同値

Dwyer-Kan 同値の概念を用いると、主束とゲージ変換に対する平滑化定理は次の形にまとめられる。

**定理 8.5.** $X$ を微分空間、$G$ を微分群とする。 $X\in\mathcal{W}_{\mathcal{D}},G\in\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ なら、関手

$$\widetilde{\cdot}:(\mathsf{P}\mathcal{D}G/X)_{\mathrm{num}}\longrightarrow(\mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{X})_{\mathrm{num}}$$

は $\mathcal{S}$-亜群の間の Dwyer-Kan 同値である。

## 9 $C^\infty$-多様体への応用

この節では (convenient calculus [KM] における) $C^\infty$-多様体の概念を紹介し、$C^\infty$-多様体の圏 $C^\infty$ が圏 $\mathcal{D}$ に充満忠実に埋め込めることを見る。それから次のことを説明する:

- [KM] で調べられているほとんどの重要な $C^\infty$-多様体は $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ に入る。
- すべての $C^\infty$-多様体は $\mathcal{V}_\mathcal{D}$ に入る。

そこで、既に説明した平滑化定理が $C^\infty$-多様体に適用する。

### 9.1 Convenient calculus

ここでは、 convenient calculus を簡単に復習する。

**Local calculus** $E$ を局所凸線型位相空間とする。写像 $c : \mathbb{R} \longrightarrow E$ はすべての高階の微分が存在し連続であるとき、滑らか (smooth) とよばれる - これは何の問題もない概念である。$E$ への滑らかな曲線の集合に関する終位相は $c^\infty$-位相とよばれる。それは一般的にはもとの局所凸位相より細かいが、$E$ が距離化可能なら、もとの局所的凸位相に一致する ([KM, Theorem 4.11(1)])。

局所凸線形型位相空間の $c^\infty$-開集合の間の写像 $f : U \longrightarrow V$ は、滑らかな曲線を保つとき、滑らか (smooth, $C^\infty$) とよばれる。有限次元では、これは通常の滑らかな写像の概念を与える ([KM, Corollary 3.14])。滑らかな写像は明らかに $c^\infty$-位相に関し連続である; しかしもとの局所凸位相に関しては連続とは限らない ([KM, Corollary 2.11])。

**$C^\infty$-多様体の概念** convenient calculus では、$C^\infty$-多様体は convenient ベクトル空間の $c^\infty$-開集合を微分同相ではり合わせることにより定義される (convenient ベクトル空間は弱い完備性をみたす局所凸線形位相空間である [KM, Theorem 2.14])。

$C^\infty$-多様体 $M, N$ の間の滑らかな写像はチャートを用いて明らかなやり方で定義される。そのとき、"$f : M \longrightarrow N$ が滑らか $\Leftrightarrow$ $f$ が滑らかな曲線を保つ" である。以下、$C^\infty$-多様体の圏を $\mathcal{C}^\infty$ で表す。

$C^\infty$-多様体 $M$ の下部位相空間 $\widetilde{M}$ は集合 $M$ に滑らかな曲線全体に関する終位相を入れたものとして定義される。

### 9.2 $\mathcal{C}^\infty$ の $\mathcal{D}$ への埋め込み

圏 $\mathcal{C}^\infty$ は圏 $\mathcal{D}$ の充満部分圏とみなされることを見る。実際、充満忠実な埋め込み

$$I : \mathcal{C}^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}$$

は $C^\infty$-多様体 $M$ に、微分空間 $IM = (M, D_{IM})$ を対応させることで定義される。ここで

$$D_{IM} = \{M \text{ の } C^\infty\text{-parametrizations}\}$$

([K20, Section 2.2])。微分空間 $IM$ は誤解の恐れがなければ単に $M$ とかかれる。

**注意 9.1.** (1) 関手 $I : \mathcal{C}^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}$ は有限積を保ち下部位相空間をとる操作と可換。

(2) Losik [L] は Fréchet 多様体が $\mathcal{D}$ に充満忠実に埋め込めることを示した。しかし、convenient calculus で働くなら、上述のようにすべての $C^\infty$-多様体が充満忠実に $\mathcal{D}$ に埋め込まれる (しかもその証明はほとんど自明)。

### 9.3 $C^\infty$-多様体の滑らかなホモトピー

我々は次の結果をもつ。

**定理 9.2.** 局所可縮な微分空間は $\mathcal{V}_\mathcal{D}$ に入る。

よって

**系 9.3.** すべての $C^\infty$-多様体は $\mathcal{V}_\mathcal{D}$ に入る。

次の結果は tom Dieck の定理 [TD] の微分版であり、$C^\infty$-多様体が $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ に入る為の十分条件を与える際の鍵となる。

**定理 9.4.** $X$ を微分空間とし、$U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を $X$ の $\mathcal{D}$-numerable な被覆とする。そのとき、

$$\phi \neq^{\forall} \sigma \underset{\text{有限}}{\subset} A \text{ に対し } U_\sigma(:= \bigcap_{\alpha\in\sigma} U_\alpha) \in \mathcal{W}_\mathcal{D} \Rightarrow X \in \mathcal{W}_\mathcal{D}.$$

$C^\infty$-多様体が $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ に入る為の十分条件を記述する為に次の概念を必要とする。

**定義 9.5.** (1) $C^\infty$-多様体 $M$ が遺伝的 $C^\infty$-paracompact $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $M$ の任意の開集合が $C^\infty$-paracompact。

(2) $C^\infty$-多様性 $M$ が準古典的
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $M$ が次をみたすようなアトラス $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を許す: 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$u_\alpha(U_\alpha)$ 及び $u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ はモデルベクトル空間 $E_\alpha$ において、局所凸位相に関し開集合。

**注意 9.6.** (準古典性について)

(1) $u_\alpha(U_\alpha)$ と $u_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ はモデルベクトル空間 $E_\alpha$ の $c^\infty$-開集合だが、もとの局所凸位相に関し開であるとは限らない。
(2) ほとんどの重要な $C^\infty$-多様性は次の 2 つの事実により、準古典性条件をみたす:
   - $E$ が Fréchet 空間または Silva 空間なら、$E$ の $c^\infty$-位相は、もとの局所凸位相に一致する。
   - 古典的な無限次元解析で定義された $C^\infty$-多様体は (モデルベクトル空間が convenient なら) 準古典的な $C^\infty$-多様体を定める。

**系 9.7.** すべての遺伝的 $C^\infty$-paracompact 準古典的 $C^\infty$-多様性は $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ に入る。

約 50 年前、Palais、Heisey、Milnor は無限次元位相多様体が CW-複体のホモトピー型をもつ為の十分条件を調べた [P, Hei, Mil]。上の系と次の例は彼らの結果を可微分な文脈で精密化したものと考えられる。

**例 9.8.** (1) $M$ を paracompact $C^\infty$-多様体で、モデルベクトル空間が、次のいずれかであるとする:
   (i) Hilbert 空間 (特に、有限次元ベクトル空間).
   (ii) 核型 Fréchet 空間.
   (iii) 核型 Silva 空間.
そのとき、$M$ は遺伝的 $C^\infty$-paracompact かつ準古典的、よって $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ に入る。

(2) $M, N$ を有限次元 $C^\infty$-多様体とする。そのとき、次の $C^\infty$-多様体は遺伝的 $C^\infty$-paracompact かつ準古典的、よって $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ に入る:
   - $\mathfrak{C}^\infty(M, N)$

- $\mathrm{Diff}(M)$, $\mathrm{Emb}(M, N)$
- $B(M, N) = \mathrm{Emb}(M, N)/\mathrm{Diff}(M)$.

### 9.4 $C^\infty$-多様性に対する平滑化

以上の結果を用いて、以下の $C^\infty$-多様体に対する平滑化定理を得る。圏 $C^\infty, C^\infty/M, \mathsf{P}C^\infty G/M$ 等は $\mathcal{D}, \mathcal{D}/M, \mathsf{P}\mathcal{D}G/M$ への (よって $\mathcal{D}$ への) 埋め込みにより $\mathcal{D}$-圏とみなす。

**定理 9.9.** $M, N$ を $C^\infty$-多様体とする。$M$ が遺伝的 $C^\infty$-paracompact かつ準古典的なら、自然な包含

$$S^{\mathcal{D}}C^\infty(M, N) \hookrightarrow S\mathcal{C}^0(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

は $\mathcal{S}$ における弱同値である。

**定理 9.10.** $p : E \longrightarrow M$ を $C^\infty$-多様体の滑らかなファイバー束とする。$M$ が遺伝的 $C^\infty$-paracompact かつ準古典的なら、自然な包含

$$S^{\mathcal{D}}\Gamma(M, E) \hookrightarrow S\Gamma(\widetilde{M}, \widetilde{E})$$

は $\mathcal{S}$ における弱同値である。

**定理 9.11.** $M$ を $C^\infty$-多様体、$G$ を Lie 群とする。$M$ が遺伝的 $C^\infty$-paracompact かつ準古典的なら、関手

$$\widetilde{\cdot} : \mathsf{P}C^\infty G/M \longrightarrow \mathsf{P}\mathcal{C}^0\widetilde{G}/\widetilde{M}$$

は単体的亜群の間の Dwyer-Kan 同値である。

## 参考文献


[CW14a] J. D. Christensen, G. Sinnamon, and E. Wu, *The D-topology for diffeological spaces,* Pacific Journal of Mathematics **272** (2014), no. 1, 87-110.

[CW14b] J. D. Christensen and E. Wu, *The homotopy theory of diffeological spaces,* New York J. Math **20** (2014) 1269-1303.

[CW21] J. D. Christensen and E. Wu, *Smooth classifying spaces*, *Israel Journal of Mathematics* 241.2 (2021): 911-954.

[DS] W. G. Dwyer and J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories,* Handbook of algebraic topology (1995) 73-126.

[GJ] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy theory*, Birkhäuser, Verlag, Basel (1999).

[Hec] G. Hector, *Géométrie et topologie des espaces difféologiques,* Analysis and geometry in foliated manifolds (Santiago de Compostela, 1994) (1995) 55-80.

[Hei] R. E. Heisey, *Manifolds modelled on $R^\infty$ or bounded weak-$*$ topologies*, Transactions of the American Mathematical Society 206 (1975): 295-312.

[Hir] P. S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, No. 99, American Mathematical Soc, (2009).

[IZ] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology,* Vol. 185, American Mathematical Soc, (2013).

[K19] H. Kihara, *Model category of diffeological spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures, 14.1 (2019): 51-90.

[K20] H. Kihara, *Smooth Homotopy of Infinite-Dimensional $C^\infty$-Manifolds*, to appear in Memoirs of the American Mathematical Society, available at arXiv:2002.03618 (2020).

[KM] A. Kriegl and P. W. Michor, *The convenient setting of global analysis,* Vol. 53, American Mathematical Society (1997).

[KM02] A. Kriegl and P. W. Michor, *Smooth and continuous homotopies into convenient manifolds agree*, unpublished preprint, 2002.

[L] M. V. Losik, *Fréchet manifolds as diffeological spaces*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika 5 (1992): 36-42.

[May] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology,* University of Chicago Press, 1993

[MP] J. P. May and K. Ponto, *More concise algebraic topology: localization, completion, and model categories,* University of Chicago Press, (2011).

[Mil] J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex,* Transactions of the American Mathematical Society (1959) 272-280

[MW] C. Müller and C. Wockel, *Equivalences of smooth and continuous principal bundles with infinite-dimensional structure group*, Advances in Geometry 9.4 (2009) 605-626.

[P] R. S. Palais, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology 5.1 (1966): 1-16.

[TD] T. T. Dieck, *Partitions of unity in homotopy theory*, Composito Math 23 (1971): 159-167.

[Wo07] C. Wockel, *Lie group structures on symmetry groups of principal bundles*, Journal of Functional Analysis 251.1 (2007): 254-288.

[Wo09] C. Wockel, *A generalization of Steenrod' s approximation theorem*, Arch. Math.(Brno) 45.2 (2009) 95-104.