非コンパクト多様体に対する あるトーラス同変指数について

藤田玄 (日本女子大学理学部)*

概　要

トーラス作用をもつコンパクトとは限らない多様体上である種の同変指数を構成し, それを用いた非コンパクトトーリック多様体の Riemann-Roch 数の定式化を与える. また, KK 理論における KK 積を用いたその同変指数の分解を与える.

1 序論

多様体上の微分作用素を用いて不変量を研究する様々な枠組みがある. Atiyah-Singer の指数定理を含む指数理論はその典型例であり, コンパクト (で境界のない) 多様体上の線形楕円型微分作用素の核と余核の次元の差で定義される解析的指数から位相不変量が定義される. この枠組みにおいて, コンパクト多様体上の線形楕円型微分作用素 D が Fredholm 作用素である, つまり 適切な関数空間において D の核と余核が有限次元であるという事実が重要となる. 多様体がコンパクトでないときはこの議論はうまく機能するとはかぎらない. そこで, 多様体上に付加構造がある場合, その構造を用いて作用素の変形を行う, あるいは K 理論やその一般化である KK 理論を用いた受け皿の精密化により不変量が取り出せる場合がある. 本講演では, [9] に基づき, 付加構造としてトーラス作用を用いて表現環に値をもつ同変指数のある一般化の構成を述べる. 構成におけるキーワードとして**局所化**を挙げておく. ただし, ここでの局所化はいわゆる固定点公式など群作用の固定点への局所化ではなく, Witten が見出した微分作用素の摂動による指数の局所化と同様のアイデアに基づいたものである.

本講演での同変指数の定式化は, シンプレクティック多様体 *1の不変量である Riemann-Roch(RR) 数の局所化にその動機がある. RR 数は概複素構造から決まる楕円型作用素 (Dolbeault-Dirac 作用素) の解析的指数として定義され, 幾何学的量子化の文脈で非常に基本的な量である. シンプレクティック多様体の中でも最大の Hamilton トーラス作用による対称性をもつものとしてシンプレクティックトーリック多様体がある. コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体には運動量写像の像として Delzant 多面体というある強い整数条件をみたす多面体が付随し, その多面体により分類されることが知られている. 特に, その幾何学的量子化は多面体に含まれる格子点により記述される. 具体的には, 群作用も考慮して解析的指数をトーラスの表現環の要素 (仮想表現) とみなしたとき, RR 数は Delzant 多面体内の格子点の定めるトーラスの 1 次元表現の直和にな

* e-mail: fujitah@fc.jwu.ac.jp

*1 正確には,3 で述べるように前量子化束をもつもの.

る, という結果が Danilov の定理として知られている．この現象は, RR 数の局所化, あるいは幾何学的量子化の偏極への非依存性などの話題として興味深い発展を遂げている．

Atiyah-Singer の指数定理を含む一連の指数理論は K-ホモロジー/コホモロジーの言語を用いて述べられる．特に, コンパクト多様体上の楕円型微分作用素の解析的指数は K-ホモロジーと K-コホモロジーの間のあるペアリングとして記述できる．Kasparov は K-ホモロジー/コホモロジーを統一する KK 理論を創始した．KK 理論には解析的指数を実現するペアリングを一般化する KK 積というペアリングが内包されており, 様々な操作が KK 積として記述できることが知られている．

本講演では, まずあるトーラス作用の存在のもとで多様体上の楕円型微分作用素の群作用の軌道に沿った別の微分作用素による変形を与え, 表現環の形式的完備化の元として変形された作用素の解析的指数が定まることを説明する．次に, その枠組みの適用例として非コンパクトなトーリック多様体を考え, コンパクトトーリック多様体に対して知られている幾何学的量子化の記述の非コンパクト版を述べる．我々の構成は Braverman[4] による構成と多くの類似点をもつ．Loizides-Rodsphon-Song[14] は Braverman の同変指数がある KK 類の KK 積として記述できることを示した．我々の設定でも同様の KK 積として記述ができることを説明する．なお, 本講演では楕円型作用素としては (他の作用素への一般化も可能ではあるが)Clifford 加群束の切断の空間に作用する Dirac 型作用素のみ扱う．また, 多様体は滑らかで連結なもののみ考える．本研究は科研費 (課題番号:18K03288) の助成を受けたものである．

2 非コンパクト多様体に対するトーラス同変指数

Riemann 多様体上の Clifford 加群束とは, M 上の Hermite ベクトル束 W と Clifford 積と呼ばれる束写像 $c : TM \to \mathrm{End}(W)$ の組であって Clifford 関係式 $c(\cdot)^2 = -\|\cdot\|^2\mathrm{id}_W$(といくつかの条件) を満たすものである．典型例として接束の外積束 W と外積と内部積の組み合わせから決まる c がある．Dirac 作用素とは Clifford 積 c と整合的な W の接続と c の合成から定義される W の切断の空間に作用する線形微分作用素である．Dirac 作用素との差が 0 階作用素となる微分作用素を Dirac 型作用素という．Dirac 型作用素の主表象は Clifford 積に一致し楕円型作用素となる．実際は我々の設定では W は $\mathbb{Z}/2$ 次数付きのもの $W = W^+ \oplus W^-$ を, 作用素としてはその次数を入れ替える $D = D^+ \oplus D^-$ の形のものを考えるが記号の節約のため次数は省略する．

2.1 コンパクトな場合

T を n 次元トーラス, $R(T)$ を T の表現環とする [*2]. T-作用をもつコンパクト Riemann 多様体 M と Clifford 加群束 $W \to M$ および W の切断の空間に作用する T-同変 Dirac

[*2] ここで与える同変指数の定義は一般のコンパクト Lie 群でも可能である．しかし, 2.2 で述べる我々の構成はトーラス作用の場合に限定される．

型作用素 D が与えられると, D が楕円型であることからその核 $\ker(D)$ および余核 $\mathrm{coker}(D)$ は有限次元であり T の表現空間となる. **解析的同変指数** $\mathrm{ind}(D)$ はその差で定まる $R(T)$ の元である:

$$\mathrm{ind}(D) = \ker(D) - \mathrm{coker}(D) \in R(T).$$

$\mathrm{ind}(D)$ は Riemann 多様体上の微分作用素から定義されるが, 実際は M と W の位相構造のみに依存する. その意味で, $\mathrm{ind}(D) = [M, W]$ などと表すこともある.

2.2　非コンパクトな場合

[9] において, M がコンパクトでないときに $[M, W]$ の構成を拡張する枠組みの一つを与えた. Dirac 作用素から Fredholm 作用素を得るために, 我々は群作用に基づく作用素の変形を考える . このアイデアは Witten[16] による Dirac 作用素の変形の理論の変種であり, [10] から始まる一連の研究でも用いられた. また, [7] で構成した S^1-作用がある非コンパクト多様体上の同変指数の一般化とも見做せる. ただし, ここでの変形はそれらで用いたものと同一のものではない. また, 我々が手に入れるのは切断の空間上の Fredholm 作用素ではなく, 各既約表現 ρ に対する切断の空間の ρ-isotypic 成分上での Fredholm 作用素であり, T-Fredholm 作用素ともよばれる. つまり, 核や余核が無限次元であっても, そこに含まれる既約表現の重複度が有限であるような作用素である. 以下, 定理を述べるための設定を説明する.

$\mathfrak{t}$ を T の Lie 環とする. $\xi \in \mathfrak{t}$ に対して M 上のベクトル場 $\underline{\xi}_M$ および W の切断の空間上の Lie 微分作用素 $\mathcal{L}_\xi$ をそれぞれ

$$\underline{\xi}_M : x \mapsto (\underline{\xi}_M)_x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\xi} \cdot x \in T_xM$$

$$\mathcal{L}_\xi : s \mapsto \left[x \mapsto (\mathcal{L}_\xi s)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\xi} s(e^{-t\xi} \cdot x) \in W_x \right]$$

により定義する. W の T-不変な Hermite 接続 ∇ をとる. 各 $\xi \in \mathfrak{t}$ に対して $\nabla_{\underline{\xi}_M}$ と $\mathcal{L}_\xi$ は 1 階の微分作用素であってそれらの 1 階の項は等しく,

$$\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\underline{\xi}_M} =: \sqrt{-1}\mu_\xi$$

で定義される μ_ξ は切断 $\mu : M \to \mathrm{End}(W) \otimes \mathfrak{t}^*$ を定める. 以下, μ が $\mathfrak{t}^*$ に値を持つ T-同変写像から誘導されていると仮定する. これは, 後のシンプレクティック幾何の状況では μ が運動量写像であることに対応する仮定である.

次に, $\mathfrak{t}$ に内積を固定し, $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}^*$ を同一視する. すると, μ は

$$M \ni x \mapsto (\underline{\mu}_M)_x := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\mu(x)} \cdot x \in T_xM$$

で定義される M 上のベクトル場 $\underline{\mu}_M$ を誘導する. 同様に, 各 $\rho \in \mathfrak{t}^*$ に対してベクトル場 $\underline{\rho}_M$ が誘導される. $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} := \ker(\exp : \mathfrak{t} \to T)$ とおく. このデータを用いて, 各

$\rho \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ に対して, W の切断の空間の L^2-完備化の ρ-isotypic 成分 $L^2(W)^{(\rho)} := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_\rho, L^2(W)) \otimes \mathbb{C}_\rho$ 上の微分作用素 D_ρ が定義できる．ただし, $\mathbb{C}_\rho$ は ρ が定める 1 次元 T-表現である．D_ρ の構成と性質は 2.3 にて述べる．次がコンパクトな場合の同変指数 $[M, W]$ の拡張である．

定理 2.1 ([9])**.** *各 $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ に対して M 上のベクトル場 $\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M$ の零点集合 $\mathrm{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ がコンパクトと仮定する．$V := M \setminus \bigcup_\rho \mathrm{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ とおく．このとき (付加的な技術的仮定のもとで), D_ρ は $L^2(W)^{(\rho)}$ 上の Fredholm 作用素となり準同型写像*

$$[M, W; V] : R(T) \to \mathbb{Z},\ \rho \mapsto \mathrm{ind}(D_\rho)$$

が定義でき, M がコンパクトなときは次の意味で通常の同変指数 $[M, W]$ と一致する．

$$[M, W; V] : \rho \mapsto [M, W]^{(\rho)},$$

ただし, $[M, W]^{(\rho)}$ は $[M, W] \in R(T)$ に含まれる ρ の重複度である．さらに, $[M, W; V]$ は適切な設定のもと, データの連続変形での不変性, 切除公式, 和公式, 積公式をみたす．

2.3 摂動項 D_T

2.2 の設定を考える．$c : TM \to \mathrm{End}(W)$ を Clifford 積とする．また, $\mathfrak{t}$ の正規直交基底 $\{\xi_i\}_i$ をとる．

定義 2.2. W の切断の空間に作用する微分作用素 D_T を

$$D_T := \sum_i c(\underline{\xi_i}_M)\nabla_{\underline{\xi}_M} = \sum_i c(\underline{\xi_i}_M)(\mathcal{L}_{\xi_i} - \sqrt{-1}\mu_{\xi_i})$$

により定める．D_T を **orbital Dirac 型作用素**とよぶ．

各 $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ に対するコンパクト集合 $\mathrm{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ の十分小さい近傍上で恒等的に 0 であり微分が L^∞-有界な T-同変固有関数 f_ρ をとる．このとき, W の Dirac 型作用素 D に対して

$$D_\rho := D + f_\rho D_T$$

とおく．

なお, $L^2(W)^{(\rho)}$ 上では $\mathcal{L}_\xi = \sqrt{-1}\rho(\xi)$ となることに注意すると, $L^2(W)^{(\rho)}$ 上では

$$D_T = \sum_i \sqrt{-1}c(\underline{\xi_i}_M)(\rho(\xi_i) - \mu_{\xi_i}) = \sqrt{-1}c(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$$

となり, 0 階の作用素となる．Clifford 積の基本関係式 $c(\cdot)^2 = -|\cdot|^2$ よりその自乗は

$$D_T^2 = |\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M|^2$$

となる．D_ρ は $L^2(W)$ 上の微分作用素としては楕円型とは限らず, 群作用の軌道に横断的な方向にのみ楕円型である横断的楕円型作用素と呼ばれるものになっているが, 各 isotypic 成分ごとに考えるわれわれの議論には影響はない．

D_T による変形 D_ρ の Fredholm 性はその自乗 $(D_\rho)^2$ が遠方で十分正 (最小固有値が 0 から離れている) となることから保証される．その評価について重要な点をごく簡単に述べる．Witten は Clifford 積と反可換な W 上の歪 Hermite 写像 h と実数 t による Dirac 型作用素の変形 $D + th$ を考え, t が十分大きいとき, その指数が h の退化部分 (h が同型でない点全体) にある意味で局所化することを見出した．D_T による変形も同様の思想に基づいている．これが定理 2.1 に $\mathrm{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ が現れる理由である．h の Clifford 積との反可換性は自乗 $(D+th)^2 = D^2 + (Dh+hD)t + h^2t^2$ において $Dh + hD$ が 0 階の作用素であることを導く．この性質により, $(D+th)^2$ において h が退化する部分の外側で $(Dh+hD)t$ を h^2t^2 でコントロールすることができる．D_T は T-作用の軌道方向の微分のみ含む作用素であり, 軌道に横断的な方向の Clifford 積と反可換である．ここから $DD_T + D_TD$ が軌道方向の微分のみ含むことがわかり, Witten の理論と類似の議論が機能する．この事実とコンパクト集合 $\mathrm{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ の補集合上で $(D_T)^2$ が真に正であること (+ いくつかの技術的仮定) を用いて $(D_\rho)^2$ の $L^2(W)^{(\rho)}$ 上での評価を行うと, その Fredholm 性が導かれる．こうして定理 2.1 の指数の各成分

$$[M, W; V](\rho) = \mathrm{ind}(D_\rho) \in \mathbb{Z}$$

は定義される．

[13] において Kasparov は $\sum_i c(\underline{\xi_i}_M)\mathcal{L}_{\xi_i}$ を orbital Dirac 作用素とよび, KK 理論の枠組みでその性質を考察している．また, [4] において Braverman は可換とは限らないコンパクト Lie 群の作用に関して Clifford 積 $c(\underline{\mu}_M)$ による Dirac 作用素の変形により我々と同様の同変指数を定義した．Braverman の同変指数については Atiyah の横断的指数 [1] との一致という形での指数定理が成立する．その後その理論は [15] で非コンパクトな設定での [Q,R]=0(量子化とシンプレクティック簡約の可換性) の証明などに応用された．その同変指数は $\rho \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ によらない部分集合 $\mathrm{Zero}(\underline{\mu}_M)$ に局所化する．一方, 我々の局所化は各 $\rho \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ ごとに指数の ρ 成分が $\mathrm{Zero}(\underline{\rho}_M - \underline{\mu}_M)$ に局所化するという性質をもつ．これは, Braverman の指数は定性的には固定点と $\mu^{-1}(0)$ への局所化, 我々の指数は格子点の逆像 $\mu^{-1}(\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}})$ への局所化, とそれぞれ関係していることを示唆する．両者の振る舞いには違いはあるが, ある仮定の元では一致すること, その仮定が満たされない場合は一致しないことがわかっている．

3 トーリック多様体の Riemann-Roch 数への応用

Riemann-Roch 数とは幾何学的量子化の文脈で基本的な役割を持つシンプレクティック多様体の不変量である．幾何学的量子化とは, 与えられたシンプレクティック多様体から不変量としてよいベクトル空間を取り出す一つのレシピである．その概要を述べる．(M, ω) をシンプレクティック多様体とする．つまり, ω は滑らかな多様体 M 上の非退化閉 2 次微分形式である．よく知られているように, シンプレクティック多様体にはシ

ンプレクティック構造と整合的な概複素構造が存在する．特に，コンパクト Lie 群の作用がある状況では群作用で不変なものがとれる．そのような概複素構造 J をひとつ固定し，TM を J により複素ベクトル束とみなしたものを $TM_{\mathbb{C}}$ とする．また，Riemann 計量 $g_J(\cdot,\cdot) := \omega(J\cdot,\cdot)$ を考える．この時，外積束 $W := \wedge^{\bullet} TM_{\mathbb{C}}$ は Riemann 多様体 (M, g_J) に対する Clifford 加群束となる．ただし，TM の元による Clifford 積は外積と内部積の組み合わせで定義される．M 上の Hermite 直線束 $L \to M$ とその Hermite 接続 ∇ の組 (L,∇) であってその曲率形式が $\sqrt{-1}\omega$ に一致するものは M 上の**前量子化束**とよばれる．その存在は ω の定める deRham コホモロジー類が整係数に持ち上がること (前量子化可能条件) と同値である．以下，本稿ではこのような前量子化束の存在を仮定し，一つ固定することにする．前量子化束 (L,∇) を持つシンプレクティック多様体 (M,ω) に対して $W_L := W \otimes L$ は Clifford 加群束となる．この時，∇ と (M, g_J) の Levi-Civita 接続から W_L の切断の空間に作用する Dolbeault-Dirac 作用素 D_L が定まる．

定義 3.1. (M,ω) がコンパクトなとき，その **Riemann-Roch 数** $RR(M)$ を D_L の解析的指数

$$RR(M) := \mathrm{ind}(D_L) = [M, W_L] \in \mathbb{Z}$$

により定義する．(M,ω) にコンパクト Lie 群 G の作用があり，その作用が (L,∇) に持ち上がっていれば，$RR_G(M) = [M, W_L]$ は G の表現環 $R(G)$ の元を定める．これを **G-同変 Riemann-Roch 数**という．

ある状況においては D_L の余核が自明に，更に J が可積分な場合には D_L の核が L の正則切断の空間 $H^0(M; L)$ に一致することがある．幾何学的量子化の手続きにおいて量子化として L の正則切断の空間を採用することがある．この観点から RR 数を (M,ω) の **(spin^c-) 量子化**とよぶこともある．$\mathbb{Z}$ あるいは $R(G)$ は K 理論の観点からは一点の K 群 $K(\mathrm{pt})$ あるいは $K_G(\mathrm{pt})$ と同型であり，

$$RR(M)\ (\text{resp. } RR_G(M)) = \ker D_L - \mathrm{coker} D_L \in K(\mathrm{pt})\ (\text{resp. } K_G(\mathrm{pt}))$$

と理解できる．

3.1 コンパクトトーリック多様体の場合

トーラスによる最大対称性をもつシンプレクティック多様体としてトーリック多様体がある．(M,ω) がトーリック多様体 [*3]であるとは，M に ω を保つ n 次元トーラス T の効果的作用があり，その作用の運動量写像 $\mu : M \to \mathrm{Lie}(T)^* = \mathfrak{t}^*$，つまり T-不変写像 μ であって任意の $\xi \in \mathfrak{t}$ に対して

$$d\langle \mu(\cdot), \xi \rangle = \omega(\cdot, \underline{\xi})$$

[*3] トーリック多様体という用語は，代数幾何の文脈で使われることも多く，ここで扱う対象はシンプレクティックトーリック多様体ともよばれる．

が M 上の 1 次微分形式として成立するものが存在する. ただし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathfrak{t}^*$ と $\mathfrak{t}$ のペアリングである.

Hamilton トーラス作用をもつコンパクトシンプレクティック多様体の運動量写像の像が凸多面体になることがよく知られているが, トーリック多様体の場合, その像は **Delzant 多面体**という非常に強い整数性条件 *4を満たすものになり, 次の意味で Delzant 多面体によって完全に分類ができることが知られている ([6]) :

- コンパクトトーリック多様体 (M,ω) と対応する運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ に対して, $P := \mu(M)$ は $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n$ 内の Delzant 多面体である.
- (M',ω') をトーリック多様体であって, 対応する運動量写像の像が (平行移動を除いて)P に一致するものとすると, (M,ω) と (M',ω') は T-同変同型である.
- 任意の Delzant 多面体 Q に対して, 運動量写像の像が Q に一致するようなトーリック多様体が存在する.

実は, トーリック多様体に対応する Delzant 多面体 P は T 作用による軌道空間に, 運動量写像は商写像になっている. 正確には, μ の T-不変性から軌道空間 M/T から $\mu(M) = P$ への写像が誘導され, それが同相写像 *5を与える. 特に, P の一点の逆像は M 内で一つの T-軌道になる. さらに, $p \in P$ に対して軌道 $\mu^{-1}(p)$ の次元は p の属する P の面の次元に一致する. 特に, P の頂点の逆像は T-作用の固定点になる.

トーリック多様体 M 上に前量子化束が存在することの必要十分条件は $\mu(M)$ が整格子多角形, つまり全ての頂点が格子点にあることである. トーリック多様体の RR 数は次のように格子点で記述できることが古典的に知られている.

定理 3.2 ([5])**.** *前量子化束をもつコンパクトトーリック多様体* (M,ω) *の* T*-同変 Riemann-Roch 数* $RR_T(M,L)$ *に対して*

$$RR_T(M) = \bigoplus_{\xi\in\mu(M)\cap\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathbb{C}_\xi \in R(T)$$

が成立する. ただし, $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ *は* $\mathfrak{t}^*$ *内の格子点全体であり,* $\mathbb{C}_\xi$ *は* $\xi \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ *の定める* T *の 1 次元複素表現である.*

この定理は, トーリック多様体の RR 数が対応する Delzant 多面体の格子点, あるいはその逆像の軌道へ局所化することを示唆する. この描像を正当化する研究として [3], [8], [11] などがあり, 今回の結果もその一つといえる.

---

*4 各頂点から n 本の方向ベクトルが伸び, それらが全て整数ベクトルでとれ, かつ $\mathbb{Z}^n$ の基底をなす.

*5 実はより強く, 角付き多様体の微分同相写像になる.

3.2 非コンパクトトーリック多様体の場合

定理 3.2 を鑑みて, 非コンパクトトーリック多様体の RR 数あるいは幾何学的量子化を考えると, 無限次元的なものが現れうると想像される. 例えば, トーリック多様体として $\mathbb{C}^2$ への標準的な $T=(S^1)^2$ 作用を考えると, その運動量写像による像は 2 次元座標平面の第一象限であり, 格子点は無限個含まれる. この描像を 2.2 で述べた手法により実現したのが次の定理 [*6]である. なお, この定理はコンパクトな場合の Danilov の定理の別証明にもなっている.

定理 3.3 ([9])**.** *M をコンパクトとは限らないトーリック多様体, $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ をその運動量写像とする. M への T-作用の固定化部分群 H に対し, $\mathfrak{h}^\perp$ を H の Lie 環の $\mathfrak{t}$ における直交補空間, $\iota_{H^\perp}^* : \mathfrak{t}^* \to (\mathfrak{h}^\perp)^*$ を包含写像の双対写像とする. また, M_H を固定化部分群が H であるような M の点全体とする. 任意の固定化部分群 H と任意の $\rho \in \mu(M)\cap \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ に対して $(\iota_{H^\perp}^*\circ\mu)^{-1}(\iota_{H^\perp}^*(\rho))\cap M_H$ はコンパクトであると仮定する. この時, 定理 2.1 での $[M, W_L; V]$ を用いて準同型写像*

$$\widetilde{RR}_T(M) : R(T) \to \mathbb{Z}$$

が定義でき,

$$\widetilde{RR}_T(M) = \bigoplus_{\rho\in\mu(M)\cap\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*} {}^{\#}\pi_0(\mu^{-1}(\rho))\mathbb{C}_\rho$$

となる. つまり各 $\rho \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ に対して

$$\widetilde{RR}_T(M)(\rho) = {}^{\#}\pi_0(\mu^{-1}(\rho))$$

となる. M がコンパクトなら $\widetilde{RR}_T(M) = RR_T(M)$ となる.

コンパクトトーリック多様体 (M,ω) は運動量写像 μ による像 $\mu(M)$ で分類されるが, コンパクトとは限らない場合は $\mu(M)$ だけでは分類できない. また, コンパクトな場合と違って M/T から $P=\mu(M)$ への写像は同相写像とは限らず, 一般には局所的な埋め込みにしかならない. 特に, $\rho \in \mathfrak{t}^*$ に対して $\mu^{-1}(\rho)$ はいくつかの軌道の和集合になる. 一方, μ が凸開集合への固有写像になっている場合は M/T から P への写像は同相写像であること, P で M が分類されることも知られている. 以上は全て [12] において示されている.

例 3.4. $M = S^1 \times \mathbb{R}$ に標準的なシンプレクティック構造を入れると第一成分への S^1-作用により M はトーリック多様体となり, 第二成分への射影が対応する運動量写像となる. 前量子化束などを適切にとると,

$$\widetilde{RR}_T(M) = \bigoplus_{\rho\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_\rho$$

[*6] [9] では仮定が正確に述べられておらず修正が必要である.

となる．コンパクトトーリック多様体にはトーラス作用の固定点が必ず存在する．一方, この例のように非コンパクトな場合は固定点が存在しないこともありうる．この結果から $\widetilde{RR}_T$ に各格子点から 1 次元分の寄与があること, 固定点公式とは異なる局所化であることがわかる．

例 3.5. M を $\mathbb{C}^n$ の原点の十分小さい開円板であって原点以外に格子点を含まないものとし, $T=(S^1)^n$ の M への標準的作用を考える．$\rho \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ を固定し, 前量子化束 $L \to M$ として L の原点のファイバーへの T-作用が $\mathbb{C}_\rho$ と同型なものをとる．このとき $\widetilde{RR}_T(M)=\mathbb{C}_\rho$ となる．

例 3.6. 次の例は [12] による．$T=(S^1)^2$ に対して, $p^{(k)} := (k(k-1)/2, k) \in \mathfrak{t}^* = \mathbb{R}^2$ $(k = 1,2,\ldots,)$ とおき, P_k を $\xi_1\xi_2$ 平面内で $p^{(l)}$ と $p^{(l+1)}$ $(l=1,2,\ldots,k-1)$ を通る合計 k 個の直線と ξ_1 軸, ξ_2 軸で囲まれた凸領域とする．$P_1 \supset P_2 \supset \cdots$ であり, $P_\infty := \bigcap_k P_k$ とする．各 P_k(および P_∞) に対して非コンパクトトーリック多様体 M_k(および M_∞) であってその運動量写像による像が P_k(および P_∞) となるものが (同型を除いて) ただ一つ存在する．このとき,

$$\widetilde{RR}_T(M_k) = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{Z}^2 \cap P_k} \mathbb{C}_\rho$$

となる．

M_∞ は P_∞ の頂点に対応して無限個の T-作用の固定点をもつため, 定理 2.1 あるいは定理 3.3 の仮定を満たさない．しかし, $\widetilde{RR}_T$ の切除公式と例 3.5 の結果 (に加えてより一般の非主軌道に対する計算) を用いると,

$$\widetilde{RR}_T(M_\infty) = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{Z}^2 \cap P_\infty} \mathbb{C}_\rho$$

という等式が正当化される．

4 KK 積による分解

以下, 再びシンプレクティック幾何を離れ一般の Riemann 多様体の設定に戻る．C^*-環は $*$-作用素とよばれる対合作用が付与された Banach 代数であり, 幾何に現れる典型例としてコンパクト空間上 X 上の複素数値連続関数のなす環 $C(X)$ がある．Kasparov により創始された KK 理論は, 2 つの C^*-環に対して Abel 群を対応させる双関手

$$KK(\cdot,\cdot) : (A,B) \mapsto KK(A,B)$$

である．$KK(A,B)$ は B-値内積が付与された Hilbert B-加群 E, A の E へのある表現, E 上のある種のコンパクト性を持つ作用素からなる組 (Kasparov (A,B)-加群) たちで生成される [*7]．細部は述べないがその基本的な性質として次が挙げられる [*8]．

---

*7 ここでは [2] による “unbounded cycle ” を用いた定義を採用している．

*8 本節の執筆にあたって有益なコメントを下さった高田土満氏 (新潟大学) に感謝する．

1. $KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.
2. 第 1 変数について反変的, 第 2 変数に関して共変的 [*9].
3. コンパクト Hasudorff 空間 X に対して $KK(\mathbb{C}, C(X))$ は X の位相的 K 群 $K^0(X)$ に一致する.
4. コンパクト多様体 M に対して $KK(C(M), \mathbb{C})$ は M の (幾何的)K ホモロジー群 $K_0^{\mathrm{geom}}(M)$ に一致する.
5. コンパクト Lie 群 G に対して $KK(C^*(G), \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(R(G), \mathbb{Z})$, ただし $C^*(G)$ は G の群 C^*-環.

KK 理論は位相的 K 理論と幾何的 K ホモロジー理論を内包しており, さらに, 次に述べる KK 積により解析的指数などの様々な概念が KK 理論における操作として理解できる. KK 積は 3 つの C^*-環 A, B, C に対して定義されるペアリング

$$KK(A, B) \times KK(B, C) \to KK(A, C),\ (x, y) \mapsto x \otimes_B y$$

である. 例えばコンパクト多様体 M に対して

$$KK(\mathbb{C}, C(M)) \otimes KK(C(M), \mathbb{C}) = K^0(M) \otimes K_0^{\mathrm{geom}}(M) \to KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

は $K_0^{\mathrm{geom}}(M)$ の元である微分作用素に対して $K^0(M)$ の元であるベクトル束を係数として解析的指数を与える写像 (指数写像) に一致する.

[14] において Loizides-Rodsphon-Song らは, コンパクト Lie 群 G の等長的作用をもつコンパクトとは限らない Riemann 多様体 M 上で Braverman による Dirac 作用素の変形 $D + \sqrt{-1}c(\underline{\mu})$ が定める同変指数をある KK 群の要素の KK 積として記述した. 具体的には Kasparov による Dirac 作用素 D が定める KK 類 $[D_{M,\Gamma}] \in KK(G \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M), \mathbb{C})$ と $\underline{\mu}$ の定める KK 類 $[\sqrt{-1}c(\underline{\mu})] \in KK(C^*(G), G \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M))$ を用いて

$$[D + \sqrt{-1}c(\underline{\mu})] = [\sqrt{-1}c(\underline{\mu})] \otimes_{G \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M)} [D_{M,\Gamma}] \in KK(C^*(G), \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(R(G), \mathbb{Z})$$

となること [*10]を示した. ここでは詳細は述べないが, $\mathrm{Cl}_\Gamma(M)$ は群作用の軌道に沿ったベクトルの生成する Clifford 代数束 $Cl(TM)$ の切断のなす C^*-環の部分 C^*-環である. また, $G \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M)$ は $C^*(G)$ と $\mathrm{Cl}_\Gamma(M)$ のクロス積とよばれる C^*-環である. Loizides-Rodsphon-Song は, この分解を用いて切除公式や同境不変性など同変指数 $[D+\sqrt{-1}c(\underline{\mu})]$ の性質の KK 理論的な再証明を与えた. 平行した議論により, 我々の変形も KK 積として記述できる.

定理 4.1. *orbital Dirac 型作用素 D_T は KK 群 $KK(C^*(T), T \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M))$ の元を定め, 定理 2.1 の仮定のもと, KK 積*

$$KK(C^*(T), T \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M)) \times KK(T \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M), \mathbb{C}) \to KK(C^*(T), \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(R^*(T), \mathbb{Z})$$

[*9] 空間 X から C^*-環 $C(X)$ の対応は反変的なので, 空間を入力とすると共変と反変が入れ替わる.
[*10] 正確には, $\underline{\mu}$ が定める同変 KK 群 $KK_G(\mathbb{C}, \mathrm{Cl}_\Gamma(M))$ の元の descent 写像による像として定まる元を用いる.

に関して

$$[D_T] \otimes_{T \ltimes \mathrm{Cl}_\Gamma(M)} [D_{M,\Gamma}] = [M, W; V]$$

が成立する.

参考文献

[1] M. F. Atiyah. *Elliptic Operators and Compact Groups.*, Vol. 401 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1974.

[2] S. Baaj and P. Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 296, No. 21, pp. 875–878, 1983.

[3] T. Baier, C. Florentino, J. M. Mourao, and J. P. Nunes. Toric Kähler metrics seen from infinity, quantization and compact tropical amoebas. *J. Differential Geom.*, Vol. 89, No. 3, pp. 411–454, 2011.

[4] M. Braverman. Index theorem for equivariant Dirac operators on noncompact manifolds. *K-Theory*, Vol. 27, No. 1, pp. 61–101, 2002.

[5] V. Danilov. The geometry of toric varieties (Russian). *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 33, No. 2, pp. 85–134, 1978. English translation: Russian Math. Surveys 33 (1978), no. 2, 97–154.

[6] T. Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 116, No. 3, pp. 315–339, 1988.

[7] H. Fujita. S^1-equivariant local index and transverse index for non-compact symplectic manifolds. *Math. Res. Lett.*, Vol. 23, No. 5, pp. 1351–1367, 2016.

[8] H. Fujita. A Danilov-type formula for toric origami manifolds via localization of index. *Osaka J. Math.*, Vol. 55, No. 4, pp. 619–645, 2018.

[9] H. Fujita. Deformation of dirac operators along orbits and quantization of noncompact hamiltonian torus manifolds. *Canad. J. Math.*, pp. 1–31, 2021.

[10] H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida. Torus fibrations and localization of index I—polarization and acyclic fibrations. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–26, 2010.

[11] K. Hattori and M. Yamashita. Spectral convergence in geometric quantization — the case of toric symplectic manifolds. arXiv:2002.12495.

[12] Y. Karshon and E. Lerman. Non-compact symplectic toric manifolds. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, Vol. 11, pp. Paper 055, 37, 2015.

[13] G. Kasparov. Elliptic and transversally elliptic index theory from the viewpoint of KK-theory. *J. Noncommut. Geom.*, Vol. 10, No. 4, pp. 1303–1378, 2016.

[14] Y. Loizides, R. Rodsphon, and Y. Song. A KK-theoretic perspective on deformed Dirac operators. *Adv. Math.*, Vol. 380, , 2021.

[15] X. Ma and W. Zhang. Geometric quantization for proper moment maps. (english, french summary). *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Vol. 347, No. 7-8, pp. 389–394, 2009.

[16] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geometry*, Vol. 17, No. 4, pp. 661–692 (1983), 1982.