第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

Riemann surfaces, uniformization theorems, and $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-structures

馬場伸平　(大阪大学大学院理学研究科)*

目　次

本講演では、Riemann 面の構造と曲面の基本群の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ への準同型写像の関係について話す。特に、準同型写像の空間内の滑らかな部分多様体の交わりを理解するこによって、これらの関係を理解する。

1. 導入

1.1. Riemann 面の一意化定理と Teichmüller 空間

Riemann 面の一意化定理は，２０世紀初頭に Poincare と Koebe によって独立に証明された。この一意化定理により Riemann 面の普遍被覆は、複素平面 $\mathbb{C}$, 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$, または $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ のいづれかと双正則になっている。また Riemann 面の Euler 標数により，どの曲面と双正則かが定まる。複素平面 $\mathbb{C}$ はと Euclid 平面と、上半平面は双曲平面 $\mathbb{H}^2$ と、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は２次元球面 $\mathbb{S}^2$ と等角になっており、被覆変換はそれぞれ曲面の等長変換である。

S を向き付け可能な閉曲面とする。このとき S 上の Riemann 面の構造を S の isotopy で同値関係を入れたものを, 印付き Riemann 面といい、以下そのような Riemann 面の構造を考える。さらに，S の種数を２以上とすると，Euler 標数は負となり，上の関係で，S 上の双曲構造と対応している。双曲平面の向き付けを保つ等長変換群は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ であるから，以下の微分同相な対応を得る。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{S上の全ての}\\ \textit{Riamann}\,\text{面の構造全体}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{\text{diffeo.}} \left\{\begin{array}{c}\text{離散で忠実な準同型写像}\\ \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\,\text{全体}\end{array}\right\} \Big/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \quad (1)$$

本研究は科研費 (課題番号:20K03610) の助成を受けたものである。

*e-mail: baba@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~baba/

ここでは，右側表現 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ に対して，双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\operatorname{Im}\rho$ が対応する。この対応により、Riemann 面の理論が大きく発展した。

左の Riemann 面の空間は、**Teichüller** 空間と呼ばれ、右側の空間は Fricke 空間と呼ばれるが、この対応により同一視され区別されないとが多い。この講演では S の向き付けを固定していないので、Teichmüller 空間は 2 つの連結成分をもち、$\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*$ で表す。T と T^* はそれぞれ $\mathbb{R}^{6g-6}$ と微分同相であり、複素多様体としては、T と T^* は反正則になっている。また忠実離散表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ は **Fuchs 表現**と呼ばれる。

1.2. Bers' simultaneous uniformization theorem

次に、(1) を複素化した関係を説明する。忠実で離散な準同型写像 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は、離散群 $\operatorname{Im}\rho$ の作用で普遍な Jordan 曲線 Λ が $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に存在するとき、**擬 Fuchs 表現**と呼ばれる。幾何群論的には、quasi-isometric embedding になっていることと同値である。よって擬 Fuchs 表現 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が与えられたとき、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \Lambda$ は位相的には 2 つの開円盤であるから、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \Lambda = \Omega^+ \sqcup \Omega^-$ とおく。このとき、離散群 $\operatorname{Im}\rho$ の開円盤 Ω^+, Ω^- それぞれの作用は、固定点をもたず真性不連続に作用している。よって $\Omega^+/\operatorname{Im}\rho, \Omega^-/\operatorname{Im}\rho$ は向き付けの異なる 2 つの Riemann 面となる。Bers によって 1960 年に証明された同時一意化定理は、以下の複素同型写像を与える ([Ber60])。

$$\left\{\begin{matrix} S\text{と同相な向きづけの異なる} \\ \textit{Riemann}\text{面の組み} \end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{bihol.}} \left\{\begin{matrix} \text{擬}\,\textit{Fuchs}\,\text{表現} \\ \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})\,\text{全体} \end{matrix}\right\} \Big/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \quad (2)$$

左側の Riemann 面の組みの空間は, $\mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ であり、右側の空間は、**擬 Fuchs 空間** QF と呼ばれる。21 世紀になって解かれた Density Theorem により、QF は $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 忠実離散な表現全体の内点集合になっており、その意味で典型的な忠実離散表現と言ってよい。Bers の定理はその後 Thurston によって革命的に発展した 3 次元双曲幾の重要な基礎となり、ひいては 3 次元の多様体のトポロジーの分類つながっている。

1.3. 非離散表現と Riemann 面の構造の対応への一般化

§1.2の Bers の定理は, measurable Riemann mapping Theorem からの帰結であり、その証明には表現が離散であること、および Riemann 面の向き付が異なることが本質的に必要である。本講演では、私のプレプリント [Bab21] を元に「離散かつ忠実」という条件、および、「向き付の異なる」という条件を除いた、対応の設定を導入し、部分的な一般化を与える。

$$\left\{\begin{matrix} S\text{と同相な} \\ \text{印付き}\,\textit{Riemann}\,\text{面の組み} \end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{??} \left\{\begin{matrix} \text{準同型写像} \\ \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\,\text{全体} \end{matrix}\right\} \Big/\!\!\Big/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \quad (3)$$

曲面 S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は、Riemann 面上の 2 次正則微分の構造をもち (3) の左側に対応し、またその holonomy は離散とは限らない $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ であるり右側に対応する。よって $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を用い上の対応の設定を以下で説明する。

2. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造

($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造一般の参考文献 [Dum09], [Kap01, §7].)

2.1. 定義

リー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の自己同型群であり，線形分数変換 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

で与えられる。F を連結な向き付可能で連結な曲面とする。F 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ **構造**とは $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))$ 構造である。つまり、F の開集合を $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に埋め込む極大の局所座標系であり、座標変換が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ への作用の制限になっているものである。特に，各の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は Riemann 面の構造を持つ。

$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の同値な定義を大域的な観点から与える。$\tilde{F}$ を F の普遍被覆とすると、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は

- 局所同相写像 $f\colon \tilde{F} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ と
- 準同型写像 $\rho\colon \pi_1(F) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

の組で、f は ρ**-同変**なものである。つまり，任意の $\gamma \in \pi_1(F)$ に対して $f\gamma = \rho(\gamma)f$ がなりたつ ([Thu97])。同値類は曲面の isotopy と $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ によって与えられる（つまり, 任意の $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,C)$ に対して，$(f,\rho) \sim (\alpha f, \alpha^{-1}\rho\alpha)$)。局所同相写像 f は **developing map** と呼ばれ、準同型写像 ρ は **holonomy 表現** と呼ばれる。

以下 (§2.1.1) に述べる例では，基本的に developing map が埋め込みまたは、像への被覆写像になっており、また holonomy 表現の像が離散になっている。但し、一般には developing map や holonomy 表現は，そのような性質を持つとは限らない。

2.1.1. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の例

曲率一定の曲面の構造は、自然に $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を持つ。Euclid 平面 $\mathbb{E}^2$ は $\mathbb{C}$ と等角に同一視され，その向き付を保つ等長変換群 $\mathrm{Isom}^+\,\mathbb{E}^2$ は自然に $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の部分群である。また $\mathbb{H}^2$ は上半平面と同一視され，その向き付を保つ等長変換群 $\mathrm{Isom}^+\,\mathbb{H}^2$ は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ である。

次に $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の開集合 Ω に $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の離散部分群 G が、固定点を持たず Ω に作用するとき，Ω/G は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を持つ。特に §1.2で扱った擬 Fuchs 表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ に対して，$\Omega^+/\operatorname{Im}\rho$, $\Omega^-/\operatorname{Im}\rho$ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を持つ。

2.2. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造と変形空間

まず、S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の空間と S 上の複素構造の空間との対応を考える。S に向き付を固定してものを S^+、その反対に向き付けられたものを S^- と呼ぶことにし，T を S^+ の Teichmüller 空間、T^* を S^- の Teichmüller 空間とする。

同様に P を S^+ 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体の空間とする。このとき P は T の余接空間と同一視される。同様に P^* を S^- 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体の空間とすると、P^* は T^* の余接空間と同一視される。ここで $\psi\colon \mathsf{P} \sqcup \mathsf{P}^* \to \mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*$ は、S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の変形空間から S 上の Riemann 面への射影とすると、ベクトル束の構造を持つ。

次に表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の空間と対応を考える。S の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 指標多様体

$$\{\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})\} /\!\!/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$$

は、表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 全体の空間の GIT 商である。この同値類は、ここでは $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ での共役類と思って問題ないが, 本講演で扱わない表現に関してはそれより強い同値類となる場合がある。この指標多様体は2つの連結成分をもち、表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ へ持ち上がるか否かで、どちらの連結成分に含まれるか判別される ([Gol88])。よって χ を持ち上られる表現からなる連結成分をすると、S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の holonomy 表現は, χ の滑らかな部分に含まれる。

Holonomy 写像

$$\mathrm{Hol}\colon \mathsf{P} \sqcup \mathsf{P}^* \to \chi$$

は各々の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 $C = (f,\rho)$ にの holonomy 表現 ρ を与える、つまり f を忘れる写像である。この対応は局所同相写像であるが，像への被覆写像になっていない。この大域的な複雑さが $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の多くの面白い問いに関連している。Hol の像は，どのような表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の holonomy 表現になるかを表している。それは Gallo-Kapovich-Marden [GKM00] によって代数的に特徴づけられ，特にほとんど全ての $\pi_1(S) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が holonomy 表現になり、また非離散な holonomy 表現が沢山ある。

3. Holonomy を共有する $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の組

S 上の同一の holonomy を持つ異なる $\mathbb{C}\mathrm{P}$ 構造の組み全体の集合を B とする。つまり

$$\mathsf{B} = \left\{ (C,D) \in (\mathsf{P} \sqcup \mathsf{P}^*)^2 \,\middle|\, \mathrm{Hol}(C) = \mathrm{Hol}(D), C \neq D \right\}$$

とする。このとき、C, D の順番を変える $\mathbb{Z}_2$ の作用は、固定点を持たない。QF は $\mathsf{B}/\mathbb{Z}_2$ の連結成分になっており、B は QF の一般化といえる。

Δ を対角集合 $\{(X,X) \mid X \in \mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*\}$ とし，正則写像 $\Psi\colon \mathsf{B} \to (\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*)^2 \setminus \Delta$ を $\Psi(C,D) = (\psi(C), \psi(D))$ で定義する。本日の主定理は Ψ の局所的性質と帯域的性質を与える。

定理 1 ([Bab21，Theorem A])

$$\Psi\colon \mathsf{B} \to (\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*)^2 \setminus \Delta$$

は完備な局所分岐被覆写像である。

ここで、完備とは道の持ち上げが成り立つことである。局所分岐被覆写像とは、局所的には（解析的な）分岐被覆写像になっていることである。

定理1は Bers の定理 (2) の部分的な一般化と言える。特に (1) の完備性から、各々の B の連結成分 Q に対して、$\Psi|Q$ は対応する $(\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*)^2 \setminus \Delta$ の連結成分への全射性が言える。また、Ψ は開写像であり、各々の fiber は B の離散集合である。

Ramification locus は 一般には no-where dense な解析的集合であるが、Ψ に関しては ramification locus の存在がわかっていない。よって Ψ は連結成分ごとに双正則写像になっていて Bers の定理の真の一般化を与える可能性がある。

さらに定理1を使い、Bers の定理の別証明を，measurable Riemann mapping theorem を使わずに与えることができる。まず以下のことがわかる。

- QF は $\mathsf{B}/\mathbb{Z}_2$ のなかで，開かつ閉集合である。

- 対角集合 $\{(X, X^*) \mid X \in \mathsf{T})\}$ は $\mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ ないの次元が半分の全実部分多様体であり，Moreraの定理より $\mathsf{QF} \to \mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ はその対角集合上、写像度 1 である。

これと，定理1より，QF が $\mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ が写像度が 1 となり、$\mathsf{QF} \to \mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ が双正則となる。

4. 準備

定理1の証明のための予備知識を説明する。

4.1. Schwarzian parametrization

(例えば，[Leh87] 参照。) X を S 上の Riemann 面の構造とし，その普遍被覆を上半平面と等角に同一視する。このとき X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 C は, その developing map を上半平面からの正則関数と見ることで schwarz 微分を取り，X 上の 2 次正則微分 q が得られる。

$$q = \left[\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\right] dz^2.$$

このとき (X, q) を C の **Schwarzian パラメターと**呼ぶ。

X 上の 2 次正則微分全体は複素 $3g-3$ 次元のベクトル空間のなり $QD(X)$ で表すことにする，よって，Riemann 面 X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体の空間 P_X は，$QD(X)$ と同一視できる。Holonomy 写像 $\mathrm{Hol}\,\mathsf{P} \to \chi$ は，proper ではなく，またほとんど全ての $\rho \in \chi$ で fiber $\mathrm{Hol}^{-1}(\rho)$ は加算無限集合である。一方以下の定理が成り立つ。

定理 2 (Poincare [Poi84], Kapovich [Kap95]) 任意の S 上の Riemann 面の構造 X に対して，Hol の P_X への制限は，指標多様体 χ への proper な埋め込みである。

4.2. 2 次正則微分と特異点付きの Euclid 構造

（例えば，[FM12] 参照）$q = \phi dz^2$ を Riemann 面上 X の 2 次正則微分とする。このとき，q は X 上に特異点付きの Euclid 構造 E をあたえる。X 上の q の零点では無い点 u を固定する。このとき u の近くの零点では無い点 $w \in X$ に対して，u から w を結ぶ道に沿っての積分

$$\eta(w) = \int_u^w \sqrt{\phi}\, du$$

により，u の近傍を $\mathbb{C}$ の開集合に埋め込むことができる。$\mathbb{C}$ を自然な Eudlid 構造を入れることで, u の近傍に Euclide 構造が入り，これを貼り合わせることで X から q の零点を除いたものに，Euliden 構造がはいる。その完備な拡張として，q の零点 z は Euclid 構造の特異点になるこのとき z の degree を d とすると，$(d/2+1)\pi$ の cone angle を持つ。

複素平面 $\mathbb{C}$ は, 虚軸と平行な直線を葉とする葉層構造をもつ。また，この葉層構造対して横断的な曲線に対して，実方向の距離を測ることで，測度を与えることができる。この横断方向に測度がついた葉層構造を **vertical measured foliation** と呼ぶ。

上で q の零点以外の点の小さい近傍は，$\mathbb{C}$ の開集合と同一視された。よって，$\mathbb{C}$ 上の vertical measured foliation を引き戻し，(X, q) 上に vertical measured foliation V を得る。ここで，零点は，foliation の特異点となっており，葉が枝分かれしている。

$\mathbb{C}$ の実軸と平行な直線による $\mathbb{C}$ の horizontal measured foliation があり，vertical measured foliation と直交している。同様に $\mathbb{C}$ の horizontal measured foliation を引き戻すことで E 上に horizontal measured foliation H がえられ，H は V と直交している。

このような特異点付きの Euclid 構造で，直交する vertical measured foliation と horizontal 持つ曲面を **flat surface** と呼ぶことにする。

5. 有界性

S 上の Riemann 面の構造を X とすると，X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の全体の空間は P_X で表した。その Holonomy 表現全体 $\mathrm{Hol}(\mathsf{P}_X)$ を χ_X とおく。このとき定理2により，χ_X は、χ の次元が半分の滑らかな解析的な部多様体である。よって、このように得られる部分多様体の交わりを理解することは自然な問題である。

定理 3 ([Bab21, Theorem 10.1]) 任意の異なる $X, Y \in \mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*$ に対して、$\chi_X \cap \chi_Y$ の各々の連結成分はコンパクトである。

ここで $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y$ に対して，Y 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 $C_{X,\rho}$ で holonomy 表現が ρ なものと X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 $C_{X,\rho}$ で holonomy 表現が ρ なものがある。

定理3により，定理1の局所的な性質が従う。

系 5.1 $\chi_X \cap \chi_Y$ は離散集合である。さらに Ψ は，局所分岐被覆である。

5.1. Grafting cocycle の近似

定理3の有界性を示すために以下の構成を考える。$\mathcal{S}$ を S 上の，可縮ではない単純閉曲の isotopy 類の集合とする。K を χ 内の十分大きい有界集合とし、$\chi_X \cap \chi_Y \setminus K$ の表現 ρ に対して，整数値関数 $\Gamma_\rho \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ を幾何学的に作り ρ に関して連続になるよう構成する (§5.2)。この整数値関数は，grafting(§5.3) という、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の切り貼りと密接に関係してとる。直感的には、X, Y の向き付けが異なる場合は，Γ_ρ は $C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の「差」を表し，X, Y の向きづけが異なる場合は，$C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の「和」をある意味で表している。正確には以下の命題のように、Γ_ρ は $C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の schwarzian パラメターから得られる vertical foliations $V_{X,\rho}, V_{Y,\rho}$(§4.2) を使って近似できる。

命題 5.2 X, Y を S 上の異なる印付き Riemann 面の構造とし，X と Y の向きづけが同じであると仮定する。また $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を S 上の非可縮な閉曲線とする。このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きい χ の有界集合 K_ϵ をとると，任意の $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y \setminus K_\epsilon$ に対して，正定数 q が存在して

$$(1-\epsilon)\Gamma_\rho(c_i) - q < V_{X,\rho}(c_i) - V_{Y_\rho}(c_i) < (1+\epsilon)\Gamma_\rho(c_i)$$

が全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して成り立つ。

ここで、 $V_{X,\rho}(c_i)$ $V_{Y_\rho}(c_i)$ は c_i に与えられる transversal measure を表している。向き付けが異なる場合は符号が変化するが同様の命題がなりたつ。

命題 5.3 X, Y を S 上の異なる印付き Riemann 面の構造で向きづけが異なるとする。また $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を S 上の非可縮な閉曲線とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きい χ の有界集合 K_ϵ をとると，正定数 q が存在して，任意の $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y \setminus K_\epsilon$ に対して，

$$(1-\epsilon)\Gamma_\rho(c_i) - q < V_{X,\rho} + V_{Y_\rho} < (1+\epsilon)\Gamma_\rho(c_i) + q$$

が全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して成り立つ。

Γ_ρ は，整数値連続関数のため，$\chi_X \cap \chi_Y$ の連結成分上，変化しない。一方，上の命題5.2または命題5.1から $\rho_i \in \chi_X \cap \chi_Y$ が任意のコンパクト集合の外に発散するとき, Γ_{ρ_i} も発散する。よって、$\chi_X \cap \chi_Y$ の各々の連結成分は有界であり、定理3が言えた。

5.2. Grafting cocycle の構成法

E を flat surface とし、V をその vertical measured foliation, H をその horizontal measured foliation とする。E 上の曲線 ℓ が，区分的に，V の leaf の線分または H の leaf の線分からなっていてかつ特異点を含まないとき，staircase(階段状) であるという。Flat structure を持たない曲面上の曲線であっても、このような階段状曲線と微分同相のものを位相的な階段状曲線という。

$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上の丸い円（round circle）は、$\mathbb{R}^3$ 内の Affine 超平面と $\mathbb{S}^2$ との交わりとして得られる円である。$\mathbb{S}^2$ と $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ を等角に同一視することで、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に、**丸い円**および その線分である**円弧**を定義できる。このとき $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の作用で、丸い円は円弧であることは保たれる。

$C=(f,\rho)$ を $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 曲面とする。C 上の位相的な staircase 曲線 s とする。$\tilde{s}$ を s の普遍被覆として， s が以下の条件を満たすとき **circular** であるという。

- s が $\tilde{s}$ の horizontal な線分ならば、s は f により $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の丸い円 c にはめ込まれる。
- v が $\tilde{s}$ の vertical な線分ならば，h_1, h_2 を v と端点を共有する $\tilde{s}$ の horizontal な線分とし，c_1, c_2 をそれぞれ $f(h_1), f(h_2)$ を含む $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の丸い円とすると
  - c_1, c_2 は交わりを持たず,
  - $f|v$ は, c_1, c_2 を境界にもつ $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 内の circular な円筒 A に含まれ，かつ $f|v$ は A の自然な丸い円での foliation に横断的である。

5.2.1. Compatible な $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の分解

§5.1の grafting cocycle Γ_ρ は、$C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ を，比較しやすいように circular 階段状の境界を持つ曲面に分解して得られることを説明する。

$\mathcal{F}_1=(f_1,\rho_1)$ と $\mathcal{F}_2=(f_2,\rho_2)$ をそれぞれ circular な階段状境界を持つ曲面 F 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造とする。この時 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ が以下の条件を満たすならば，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ は compatible であるという。

- ρ_1 と ρ_2 は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の元で共役 (よって $\rho_1=\rho_2$ 仮定して良い);
- 任意の $\mathcal{F}_1$ の境界の頂点 p_1 が $\mathcal{F}_2$ の境界の頂点 p_2 に対応するとき， $f_1(p_1)=f_2(p_2)$;
- h_1 と h_2 が $\partial\mathcal{F}_1$ と $\partial\mathcal{F}_2$ の対応する horizontal な線分ならば，$f_1(h_1)$ と $f_2(h_2)$ は，同一の丸い円に含まれる。
- v_1 と v_2 を $\partial\mathcal{F}_1$ と $\partial\mathcal{F}_2$ の対応する vertical な線分とすると，$f_1(h_1)=f_2(h_2)$。

上の compatible の定義では，特に $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ は同相である。$\mathcal{F}'$ が同相だが別の階段状の曲面 F' 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造のとき、$\mathcal{F}_1$ の horizontal な辺が，$\mathcal{F}_2$ の 1 点に潰れることを許し、上の条件を見たすとき、$\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ は semi-compatible であるという。

定義 5.4 S の**曲面 train-track 分解**とは、 各辺に vertical または horizontal のラベルがついた S のグラブ γ に、よって S が内点が交わらない位相的な階段曲線を境界に持つ曲面 $B_1,\dots,B_n$ よって与えられる分解である。これらの階段境界曲面 B_i を branch と呼ぶ。

$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 C の曲面 train-track 分解は、各 branch の階段上境界が全て circular であるとき、**circular train-track 分解**という。

定義 5.5 C, C' を S 上の $\mathbb{CP}^1$ 構造とし，C, C' の holonomy 表現が一致すると仮定する。このとき，C の circular traintrack 分解 $\mathcal{T} = \cup \mathcal{B}_i$ が C' の circular train-track 分解と compatible $\mathcal{T}' = \cup \mathcal{B}'_i$ であるとは，印を保つ連続写像 $C \to C'$ が $\mathcal{T}$ の全て branches と $\mathcal{T}'$ の全て branches が semi-compatible に対応していることである。

命題 5.6 K が十分大きい χ 内の有界集合ならば，任意の $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y$ に対して，$C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の曲面 train-track 分解 $\mathcal{T}_{X,\rho}$ と $\mathcal{T}_{Y,\rho}$ が存在し，$C_{X,\rho}$ は $C_{Y,\rho}$ に semi-compatible になる。

命題5.6の分解を使い，それぞれの，$\mathcal{B}_i$ 上に，整数値の重みを持つ train-track graph を得る。これらをつなぎ合わせることで，閉曲面 S 上に，整数値の重みを持つ train-track graph を得る。がえられ，それとの幾何学的交点数として $\Gamma_\rho \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ を得る。

5.3. Grafting cocycleの例

上の grafting cocycle は Goldman による Fuchsia ホロノミーをもつ $\mathbb{CP}^1$ 構造の分類 [Gol87] に密接に関連している。

Holonomy 表現を固定したときに，対応する $\mathbb{CP}^1$ 構造全体は，P内の離散集合になっており，その特徴付けは，わかっていない部分も多い。ただ，忠実離散表現 $\rho \colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ に対しては 2π-grafting という, ある種の切り貼りによって，$\mathrm{Hol}^{-1}(\rho)$ の特徴づけが完全される。この切りはりは，$\mathbb{CP}^1$ 曲面内の admissible loop と呼ばれる，特定の性質を満たす輪に沿って，円筒上の $\mathbb{CP}^1$ 構造を挿入して行われ，$\mathbb{CP}^1$ は変化するが, holonomy 表現は保たれる。また，admissible loop に沿って，2π の正整数倍の「長さ」の円筒を挿入することができるので, grafting は admissible loop に正整数の重みをつけ表現できる。

定理 4 (Goldman [Gol87]) $\rho \colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ を忠実離散表現とする。このとき，ρ を holonomy 表現とする 任意の $\mathbb{CP}^1$ 構造は，双曲構造 $\mathbb{H}^2/\operatorname{Im}\rho$ を正整数の重み付きの multiloop に沿って grafting することで得られる。また，この重み付き multiloop は isotopy を除き，一意に決まる。

この定理のように，より一般に grafting は，整数値の重みがついた admissible な輪に沿って行われる。$\rho \colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ を忠実離散表現とする。C_1, C_2 を holonomy が ρ である $\mathbb{CP}^1$ 構造であるとする。さらに，C_1, C_2 の向きづけが同じであると仮定する。このとき，$i = 1, 2$ に対して，C_i は双極構造 $\mathbb{H}^2/\operatorname{Im}\rho$ を正整数の重みつき multiloopM_i に沿って grafting して得られる。$I_{M_i} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を，S 上の単純閉曲線に，M との重みつき幾何学的交点数を与える関数として定義する。$I_{M_2} - I_{M_i} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ が C_1 と C_2 の差を表しており，Γ_ρ を実現することが適当な設定のもとで言える。

参考文献

[Bab21] Shinpei Baba. Bers' simultaneous uniformization and the intersection of poincare holonomy varieties. Preprint, 2021.

[Ber60] Lipman Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:94–97, 1960.

[Dum09] David Dumas. Complex projective structures. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 455–508. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[GKM00] Daniel Gallo, Michael Kapovich, and Albert Marden. The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 151(2):625–704, 2000.

[Gol87] William M. Goldman. Projective structures with Fuchsian holonomy. *J. Differential Geom.*, 25(3):297–326, 1987.

[Gol88] William M. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93(3):557–607, 1988.

[Kap95] Michael Kapovich. On monodromy of complex projective structures. *Invent. Math.*, 119(2):243–265, 1995.

[Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[Leh87] Olli Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*, volume 109 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[Poi84] H. Poincaré. Sur les groupes des équations linéaires. *Acta Math.*, 4(1):201–312, 1884.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

The category of quasi-Polish spaces as a represented space

Matthew de Brecht (Kyoto University)*

1. Introduction

Quasi-Polish spaces are a class of well-behaved countably based T_0-spaces which include most of the countably based topological spaces that occur in usual mathematical practice, such as Polish spaces (used in functional analysis, topological algebra, probability theory, etc.), ω-continuous domains (used in domain theory, programming language semantics, semilattice theory, etc.), and countably based spectral spaces (used in algebraic geometry, logic, duality theory for distributive lattices, etc.). Many theoretical results for these specific subclasses of spaces naturally generalize to all quasi-Polish spaces, such as the descriptive set theory for Polish spaces [2, 4], the properties and characterizations of the upper and lower powerspaces for ω-continuous domains [8, 5], and the Stone duality and applications to logic of spectral spaces [10, 1].

Recently, there is growing interest in the effective aspects of quasi-Polish spaces [12, 9, 11, 5]. In this paper, we will go beyond individual spaces and look at the effective aspects of the whole category QPol of quasi-Polish spaces. For this purpose, we will use the characterization of quasi-Polish spaces as spaces of ideals introduced in [9] and further studied in [5] to interpret the objects of QPol as transitive binary relations on $\mathbb{N}$, and then extend this to an interpretation of QPol as a represented space. We will then show how to explicitly compute products and equalizers in QPol, and demonstrate the computability of several powerspace functors on QPol.

2. Preliminaries

Quasi-Polish spaces were introduced in [2], and were shown to have multiple equivalent characterizations. For the purposes of this paper we can define quasi-Polish spaces as follows, based on the characterization from [9] (see also [5]).

Definition 1 *Let $\prec$ be a transitive relation on $\mathbb{N}$. A subset $I \subseteq \mathbb{N}$ is an* ideal *(with respect to $\prec$) if and only if:*

1. $I \neq \emptyset$, *(*I is non-empty*)*
2. $(\forall a \in I)(\forall b \in \mathbb{N})\,(b \prec a \Rightarrow b \in I)$, *(*$I$ is a lower set*)*
3. $(\forall a, b \in I)(\exists c \in I)\,(a \prec c \,\&\, b \prec c)$. *(*$I$ is directed*)*

The collection $\mathbf{I}(\prec)$ of all ideals has the topology generated by basic open sets of the form $[n]_\prec = \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid n \in I\}$. A space is quasi-Polish *if and only if it is homeomorphic to $\mathbf{I}(\prec)$ for some transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$.* □

We often apply the above definition to other countable sets with the implicit assumption that it has been suitably encoded as a subset of $\mathbb{N}$. Spaces of the form $\mathbf{I}(\prec)$ for a computably enumerable (c.e.) relation $\prec$ on $\mathbb{N}$ provide an effective interpretation of quasi-Polish spaces, which were called *precomputable quasi-Polish spaces* in [9], and are equivalent to the *computable quasi-Polish spaces* in [12] (see also [11]).

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K11166.
*e-mail: `matthew@i.h.kyoto-u.ac.jp`

Let $\prec_S$ and $\prec_T$ be transitive relations on $\mathbb{N}$. Any subset $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ can be viewed as a *code* for a partial function $\ulcorner R \urcorner :\subseteq \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ by defining

$$\ulcorner R \urcorner(I) = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in I)\, \langle m, n\rangle \in R\}$$

for each $I \in \mathbf{I}(\prec_S)$. It was shown in [5] that a total function $f \colon \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ is continuous (computable) if and only if there is a (c.e.) code $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ such that $f = \ulcorner R \urcorner$.

Example: Let (X, d) be a separable metric space. Fix a countable dense subset $D \subseteq X$, and define a transitive relation $\prec$ on $D \times \mathbb{N}$ as

$$\langle x, n\rangle \prec \langle y, m\rangle \iff d(x, y) < 2^{-n} - 2^{-m}.$$

Then $\mathbf{I}(\prec)$ is homeomorphic to the completion of (X, d) (see [5]). □

Let $\mathbb{S} = \{\bot, \top\}$ be the Sierpinski space, where the singleton $\{\top\}$ is open but not closed. $\mathbb{S}$ is the simplest example of a non-Hausdorff T_0-space. It is well known that every countably based T_0-space can be embedded into the product space $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$.

Example: Let $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ denote the set of finite subsets of $\mathbb{N}$, and let $\subseteq$ be the usual subset relation on $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. Then $\mathbf{I}(\subseteq)$ is homeomorphic to $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$. □

Given a topological space X, we write $\mathbf{O}(X)$ for the set of open subsets of X. We view $\mathbf{O}(X)$ as being a topological space by equipping it with the Scott-topology.

A *represented space* is a tuple (X, δ), where X is a set and $\delta :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ is a partial surjective function from Baire space to X. Given represented spaces (X, δ) and (Y, ρ), a function $f \colon X \to Y$ is *continuous* (*computable*) if there exists a continuous (computable) partial function $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ such that $f \circ \delta = \rho \circ F$. Every countably based space can be viewed as a represented space by equipping it with an *admissible representation*, and then a function between countably based spaces is continuous in the sense defined here if and only if it is continuous in the topological sense. In the case of a space of the form $\mathbf{I}(\prec)$, an admissible representation can be viewed as representing each ideal $I \in \mathbf{I}(\prec)$ by enumerating its elements, which is formally defined as the function $\delta :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{I}(\prec)$ with

$$\delta(p) = I \iff I = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N})\, p(m) = n\} \in \mathbf{I}(\prec).$$

See [14] for more on admissible representations, and see [13] for more on represented spaces.

3. The category QPol

We represent the category of quasi-Polish spaces by the tuple $\mathsf{QPol} = (\mathsf{Obj}, \mathsf{Mor}, s, t, i, \circ)$ consisting of the following data:

- Obj (objects) is the $\mathbf{\Pi}^0_2$-subspace of $\mathbb{S}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ of transitive relations. Each element $\prec$ of Obj is interpretted as the space of ideals $\mathbf{I}(\prec)$.

- Mor (morphisms) is the represented space constructed as follows. Let $\mathcal{M}$ be the $\mathbf{\Pi}^1_1$-subspace of $\mathbb{S}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathsf{Obj} \times \mathsf{Obj}$ of all triples $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ such that $\ulcorner R \urcorner :\subseteq \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ is a total function, i.e.

$$(\forall I \in \mathbf{I}(\prec_S))\, \ulcorner R \urcorner(I) \in \mathbf{I}(\prec_T).$$

Define an equivalence relation $\equiv$ on $\mathcal{M}$ as $\langle R_1, \prec_{S_1}, \prec_{T_1}\rangle \equiv \langle R_2, \prec_{S_2}, \prec_{T_2}\rangle$ if and only if $\prec_{S_1}=\prec_{S_2}$ and $\prec_{T_1}=\prec_{T_2}$ and $(\forall I \in \mathbf{I}(\prec_{S_1}))\ulcorner R_1 \urcorner(I) = \ulcorner R_2 \urcorner(I)$ (extensional equality of functions). Mor is then defined to be the quotient (in the category of represented spaces) of $\mathcal{M}$ by $\equiv$. For convenience, in the following our notation will treat Mor as if it is $\mathcal{M}$ since most of our constructions will respect the equivalence relation $\equiv$ (with the notable exception of equalizers; see below). However, the formal definition as a quotient is necessary when one works with universal constructions in category theory, such as products, which requires certain morphisms to be determined uniquely.

- $s\colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Obj}$ (source) is the projection sending $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ to $\prec_S$.
- $t\colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Obj}$ (target) is the projection sending $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ to $\prec_T$.
- $i\colon \mathsf{Obj} \to \mathsf{Mor}$ (identity) is the function sending $\prec$ to $\langle =_{\mathbb{N}}, \prec, \prec\rangle$.
- $\circ :\subseteq \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ (composition) is the partial computable function with domain
$$dom(\circ) = \{\langle g, f\rangle \in \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \mid s(g) = t(f)\}$$
and which is defined for $f = \langle R_f, \prec_S, \prec\rangle$ and $g = \langle R_g, \prec, \prec_T\rangle$ as
$$\begin{aligned} R &= \{\langle m, n\rangle \mid (\exists p \in \mathbb{N})\,[\langle m, p\rangle \in R_f \,\&\, \langle p, n\rangle \in R_g]\},\\ g \circ f &= \langle R, \prec_S, \prec_T\rangle. \end{aligned}$$
It is easy to verify that $\ulcorner R \urcorner(I) = \ulcorner R_g \urcorner(\ulcorner R_f \urcorner(I))$, hence composition of total functions yields a total function.

It is straightforward to check that QPol satisfies the axioms of a category:

- $s(g \circ f) = s(f)$ and $t(g \circ f) = t(g)$,
- $s(i(\prec)) =\prec$ and $t(i(\prec)) =\prec$,
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ when the compositions $h \circ g$ and $g \circ f$ are defined,
- if $s(f) =\prec_S$ and $t(f) =\prec_T$ then $i(\prec_T) \circ f = f = f \circ i(\prec_S)$.

See [1] for related work on topological groupoids. Note that Obj is a quasi-Polish space but Mor is not, and the fact that QPol is not cartesian closed suggests there is no natural interpretation of Mor as a quasi-Polish space. In the next two subsections we show how to compute products and equalizers in QPol.

3.1. Products and coproducts

Countable products in QPol can be defined as a computable map $\Pi\colon \mathsf{Obj}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{Obj}$ by defining $\Pi(\varphi)$ to be the relation $\prec_\Pi$ on $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ defined as

$$\sigma \prec_\Pi \tau \iff len(\sigma) < len(\tau) \,\&\, (\forall i < len(\sigma))\, \sigma(i) \prec_i \tau(i),$$

where $\prec_i$ is the relation given by $\varphi(i)$. There is a uniform projection map $p\colon \mathsf{Obj}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{Mor}^{\mathbb{N}}$ defined as $p(\varphi)(i) = \langle\{\langle \sigma, n\rangle \mid i < len(\sigma) \,\&\, \sigma(i) = n\}, \Pi(\varphi), \varphi(i)\rangle$, which is the projection map from $\Pi(\varphi)$ to $\varphi(i)$.

For $\varphi \in \mathsf{Obj}^{\mathbb{N}}$, there is a partial computable function $u(\varphi) :\subseteq \mathsf{Obj} \times \mathsf{Mor}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{Mor}$ with domain

$$dom(u(\varphi)) = \{\langle \prec, \psi \rangle \mid (\forall i \in \mathbb{N})\, [s(\psi(i)) = \prec \ \&\, t(\psi(i)) = \varphi(i)]\}$$

defined as

$$u(\varphi)(\prec, \psi) = \langle \{\langle m, \sigma \rangle \mid (\forall i < len(\sigma))(\exists p \in \mathbb{N})\, [\langle p, \sigma(i) \rangle \in \psi(i) \,\&\, p \prec m]\}, \prec, \Pi(\varphi) \rangle$$

which demonstrates the universality of the product in a uniform way[1].

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{I}(\prec) \arrow[dl, "\psi(i)"'] \arrow[d, dashed, "u(\varphi)(\prec,\psi)"] \arrow[dr, "\psi(j)"] & \\
\varphi(i) & \Pi(\varphi) \arrow[l, "p(\varphi)(i)"'] \arrow[r, "p(\varphi)(j)"] & \varphi(j)
\end{tikzcd}$$

One can also define binary products, binary coproducts, and countable coproducts, but we leave the definitions to the reader as an exercise.

3.2. Equalizers

We can compute equalizers in QPol as a partial multivalued function $e :\subseteq \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \rightrightarrows \mathsf{Mor}$ with

$$\begin{aligned} dom(e) &= \{\langle f, g \rangle \in \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \mid \langle s(f), t(f) \rangle = \langle s(g), t(g) \rangle\} \\ e(f, g) &= \langle R_E, \prec_E, s(f) \rangle \end{aligned}$$

where

$$R_E = \{\langle \langle \{n\}, p \rangle, n \rangle \mid n, p \in \mathbb{N}\}$$

and for $F, G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ and $p, q \in \mathbb{N}$ we set $\langle F, p \rangle \prec_E \langle G, q \rangle$ if all of the following hold:

1. $p < q$
2. $F \subseteq G$
3. $G \neq \emptyset$
4. $(\forall m \leq p)\ [[(\exists n \in F)\, m \prec_S n] \Rightarrow m \in G]$
5. $(\forall a, b \in F)(\exists c \in G)\, [a \prec_S c \,\&\, b \prec_S c]$
6. $(\forall n \leq p) \left[[(\exists m_1 \in F)\, \langle m_1, n \rangle \in R_f^{(p)}] \Rightarrow (\exists m_2 \in G)\, \langle m_2, n \rangle \in R_g \right]$
7. $(\forall n \leq p) \left[[(\exists m_1 \in F)\, \langle m_1, n \rangle \in R_g^{(p)}] \Rightarrow (\exists m_2 \in G)\, \langle m_2, n \rangle \in R_f \right]$

[1] For the difficult direction of the proof that $\psi(i) = p(\varphi)(i) \circ u(\varphi)(\prec, \psi)$ for each $i \in \mathbb{N}$, if we choose any $j \in \mathbb{N}$ and $n_i \in \psi(i)(I)$ for each $i \leq j$, then there must exist $p_i \in I$ with $\langle p_i, n_i \rangle \in \psi(i)$. Let m be a $\prec$-upper bound of $\{p_i \mid i \leq j\}$ in I and set $\sigma(i) = n_i$ for $i \leq j$. Then $\langle m, \sigma \rangle \in u(\varphi)(\prec, \psi)$, hence $n_i \in p(\varphi)(i)(u(\varphi)(\prec, \psi)(I))$ for each $i \leq j$.

where $\prec_S$ is the relation corresponding to $s(f)$, R_f is a code for f, and $R_f^{(p)}$ is the set that is enumerated within the first p time steps of a given presentation of R_f (and similarly for g, R_g, and $R_g^{(p)}$). It is straightforward to check that $\prec_E$ is transitive. Since the relation $\prec_E$ in $e(f,g)$ depends on the codes R_f and R_g and their presentations, the output of e is multivalued.

There is a partial computable function $u :\subseteq \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ that demonstrates the universality of equalizers in a uniform way, which has domain

$$dom(u) = \{h \in \mathsf{Mor} \mid t(h) = s(f)\,\&\, f \circ h = g \circ h\}$$

and is defined as $u(h) = \langle R, s(h), \prec_E \rangle$, where

$$R = \{\langle m, \langle F, p\rangle\rangle \mid p \in \mathbb{N}\,\&\,(\forall n \in F)(\exists \langle m_0, n\rangle \in R_h)\, m_0 \prec m\}$$

and R_h is a code for h.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "u(h)"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathbf{I}(\prec_E) \arrow[r, hook, "e(f,g)"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

4. Functors

A (computable) functor on QPol is a pair $F = (F_{\mathsf{Obj}}, F_{\mathsf{Mor}})$ of (computable) functions $F_{\mathsf{Obj}} \colon \mathsf{Obj} \to \mathsf{Obj}$ and $F_{\mathsf{Mor}} \colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ satisfying

- $F_{\mathsf{Obj}} \circ s = s \circ F_{\mathsf{Mor}}$,
- $F_{\mathsf{Obj}} \circ t = t \circ F_{\mathsf{Mor}}$,
- $F_{\mathsf{Mor}} \circ i = i \circ F_{\mathsf{Obj}}$, and
- $F_{\mathsf{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathsf{Mor}}(g) \circ F_{\mathsf{Mor}}(f)$ for all composable $f, g \in \mathsf{Mor}$.

In the following subsections we show how to construct the lower, upper, and valuation powerspace functors on QPol. The double powerspace functor, which maps X to $\mathbf{O}(\mathbf{O}(X))$, is obtained by composing the lower and upper powerspace functors [8].

4.1. Lower powerspace functor

Given a topological space X, the *lower powerspace* $\mathbf{A}(X)$ is the set of all closed subsets of X with the lower Vietoris topology, which is generated by open sets of the form

$$\Diamond U = \{A \in \mathbf{A}(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$$

for open $U \in \mathbf{O}(X)$. Given a continuous function $f \colon X \to Y$, define $\mathbf{A}(f) \colon \mathbf{A}(X) \to \mathbf{A}(Y)$ as

$$\mathbf{A}(f)(A) = Cl_Y(\{f(x) \mid x \in A\})$$

for each $A \in \mathbf{A}(X)$, where $Cl_Y(\cdot)$ is the closure operator of Y. It was shown in [8] that $\mathbf{A}(\cdot)$ preserves quasi-Polish spaces, hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces.

We represent the lower powerspace functor as a computable functor $(\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as follows. For each element $\prec$ of Obj, define $\prec_L$ on $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ as

$$A \prec_L B \iff (\forall a \in A)(\exists b \in B)\, a \prec b.$$

For each element $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$ of Mor, define

$$R_L = \{\langle F, G\rangle \mid (\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Finally, define the functor $(\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec) &= \prec_L \\ \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) &= \langle R_L, \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that $(\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ is equivalent to the lower powerspace functor. It was shown in [5] that $\mathbf{I}(\prec_L)$ and $\mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$ are computably homeomorphic for every transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$, which proves that $\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}$ behaves properly on objects. For $F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, the basic open subset $[F]_{\prec_L}$ of $\mathbf{I}(\prec_L)$ corresponds to the basic open subset $\bigcap_{m\in F} \Diamond[m]_\prec$ of $\mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$. Explicitly, there are homeomorphisms $f_L \colon \mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec)) \to \mathbf{I}(\prec_L)$ and $g_L \colon \mathbf{I}(\prec_L) \to \mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$ defined as

$$\begin{aligned} f_L(A) &= \{G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid (\forall n \in G)(\exists I \in A)\, n \in I\} \\ g_L(J) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid (\forall m \in I)(\exists F \in J)\, m \in F\}. \end{aligned}$$

To show that $\mathbf{A}_{\mathsf{Mor}}$ behaves properly on morphisms, fix a code R for a total function $\ulcorner R \urcorner \colon \mathbf{I}(\prec) \to \mathbf{I}(\sqsubset)$, and we will prove $\ulcorner R_L \urcorner = f_L \circ \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_L$. Given $J \in \mathbf{I}(\prec_L)$, we clearly have $G \in \ulcorner R_L \urcorner(J)$ if and only if

$$(\exists F \in J)(\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R.$$

On the other hand, $G \in f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))\, n \in I \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in g_L(J))\, n \in \ulcorner R \urcorner(I) \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in g_L(J))\, (\exists m \in I)\, \langle m, n\rangle \in R \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists m \in \mathbb{N})\, [g_L(J) \cap [m]_\prec \neq \emptyset \,\&\, \langle m, n\rangle \in R] \\ &\iff (\exists F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))(\forall n \in G)(\exists m \in F)\, [g_L(J) \cap [m]_\prec \neq \emptyset \,\&\, \langle m, n\rangle \in R]. \end{aligned}$$

It follows that $\ulcorner R_L \urcorner(J) \subseteq f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$. Conversely, if $G \in f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$, then there is $H \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))$ and $h \colon G \to H$ such that

$$(\forall n \in G)\, [g_L(J) \cap [h(n)]_\prec \neq \emptyset \,\&\, \langle h(n), n\rangle \in R].$$

Set $F = \{h(n) \mid n \in H\}$. Then $F \in J$ by Lemma 7 of [5], and

$$(\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R,$$

hence $G \in \ulcorner R_L \urcorner(J)$. Therefore, $\ulcorner R_L \urcorner = f_L \circ \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_L$.

4.2. Upper powerspace functor

Given a topological space X, the *upper powerspace* $\mathbf{K}(X)$ is the set of all saturated compact subsets of X with the upper Vietoris topology, which is generated by open sets of the form

$$\Box U = \{K \in \mathbf{K}(X) \mid K \subseteq U\}$$

for $U \in \mathbf{O}(X)$. Given a continuous function $f\colon X \to Y$, define $\mathbf{K}(f)\colon \mathbf{K}(X) \to \mathbf{K}(Y)$ as

$$\mathbf{K}(f)(K) = Sat_Y(\{f(x) \mid x \in K\})$$

for each $K \in \mathbf{K}(X)$, where $Sat_Y(\cdot)$ is the saturation operator of Y (i.e., $Sat_Y(S) = \bigcap\{U \in \mathbf{O}(Y) \mid S \subseteq U\}$ for each $S \subseteq Y$). It was shown in [8] that $\mathbf{K}(\cdot)$ preserves quasi-Polish spaces, hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces.

We represent the upper powerspace functor as a computable functor $(\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as follows. For each element $\prec$ of Obj, define $\prec_U$ on $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ as

$$A \prec_U B \iff (\forall b \in B)(\exists a \in A)\, a \prec b.$$

For each element $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ of Mor, define

$$R_U = \{\langle F, G\rangle \mid (\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Finally, define the functor $(\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec) &= \prec_U \\ \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) &= \langle R_U, \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that $(\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ is equivalent to the upper powerspace functor. It was shown in [5] that $\mathbf{I}(\prec_U)$ and $\mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$ are computably homeomorphic for every transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$, which proves that $\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}$ behaves properly on objects. For $F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, the basic open subset $[F]_{\prec_U}$ of $\mathbf{I}(\prec_U)$ corresponds to the basic open subset $\Box \bigcup_{m\in F}[m]_\prec$ of $\mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$. Explicitly, there are homeomorphisms $f_U\colon \mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec)) \to \mathbf{I}(\prec_U)$ and $g_U\colon \mathbf{I}(\prec_U) \to \mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$ defined as

$$\begin{aligned} f_U(K) &= \{G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid (\forall I \in K)(\exists n \in G)\, n \in I\} \\ g_U(J) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid (\forall F \in J)(\exists m \in I)\, m \in F\}. \end{aligned}$$

To show that $\mathbf{K}_{\mathsf{Mor}}$ behaves properly on morphisms, fix a code R for a total function $\ulcorner R\urcorner\colon \mathbf{I}(\prec) \to \mathbf{I}(\sqsubset)$, and we will prove $\ulcorner R_U\urcorner = f_U \circ \mathbf{K}(\ulcorner R\urcorner) \circ g_U$. Given $J \in \mathbf{I}(\prec_U)$, we clearly have $G \in \ulcorner R_U\urcorner(J)$ if and only if

$$(\exists F \in J)(\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R.$$

On the other hand, $G \in f_U(\mathbf{K}(\ulcorner R\urcorner)(g_U(J)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall I \in \mathbf{K}(\ulcorner R\urcorner)(g_U(J)))(\exists n \in G)\, n \in I \\ &\iff (\forall I \in g_U(J))(\exists n \in G)\, n \in \ulcorner R\urcorner(I) \\ &\iff (\forall I \in g_U(J))(\exists n \in G)(\exists m \in I)\, \langle m, n\rangle \in R \\ &\iff g_U(J) \subseteq \bigcup_{m\in S}[m]_\prec, \text{ where } S = \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\} \\ &\iff (\exists F \in J)\, F \subseteq \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\} \\ &\iff (\exists F \in J)(\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R, \end{aligned}$$

where the fifth equivalence follows from Lemma 9 of [5]. Therefore, $\ulcorner R_U\urcorner = f_U \circ \mathbf{K}(\ulcorner R\urcorner) \circ g_U$.

4.3. Valuation powerspace functor

Let $\overline{\mathbb{R}}_+$ denote the positive extended reals (i.e., $[0,\infty]$) with the Scott-topology induced by the usual order. A *valuation* on a topological space X is a continuous function $\nu\colon \mathbf{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfying:

1. $\nu(\emptyset) = 0$, and (*strictness*)
2. $\nu(U) + \nu(V) = \nu(U \cup V) + \nu(U \cap V)$. (*modularity*)

The *valuation powerspace* on X is the set $\mathbf{V}(X)$ of all valuations on X with the *weak topology*, which is generated by subbasic opens of the form

$$\langle U, q\rangle := \{\nu \in \mathbf{V}(X) \mid \nu(U) > q\}$$

with $U \in \mathbf{O}(X)$ and $q \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{\infty\}$. Given a continuous function $f\colon X \to Y$, define $\mathbf{V}(f)\colon \mathbf{V}(X) \to \mathbf{V}(Y)$ as

$$\mathbf{V}(f)(\nu) = \lambda U \in \mathbf{O}(Y).\nu(f^{-1}(U))$$

for each $\nu \in \mathbf{V}(X)$.

$\mathbf{V}(\cdot)$ preserves quasi-Polish spaces (see [6]), hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces. Every valuation on a quasi-Polish space can be extended to a Borel measure [7], and this extension is unique if the valuation is locally finite [3]. Conversely, it clear that the restriction of a Borel measure to the open sets is a valuation. In particular, there is a bijection between probabilistic valuations (i.e., valuations satisfying $\nu(X) = 1$) and probabilistic Borel measures on quasi-Polish spaces.

We represent the valuation powerspace functor as a computable functor $(\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as follows. Let $\mathcal{B}$ be the (countable) set of all partial functions $r :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{>0}$ such that $dom(r)$ is finite, where $\mathbb{Q}_{>0}$ is the set of rational numbers strictly larger than zero. For each element $\prec$ of Obj, define $\prec_V$ on $\mathcal{B}$ as $r \prec_V s$ if and only if

$$\sum_{b\in F} r(b) < \sum_{c\in \uparrow F \cap dom(s)} s(c)$$

for every non-empty $F \subseteq dom(r)$, where $\uparrow F = \{c \in \mathbb{N} \mid (\exists b \in F)\, b \prec c\}$.

For each element $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ of Mor, define

$$R_V = \left\{ \langle r, s\rangle \,\middle|\, (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \sum_{a\in A^R_{G,r}} r(a) > \sum_{b\in G} s(b) \right] \right\}$$

where

$$A^R_{G,r} = \{a \in dom(r) \mid (\exists a_0 \in \mathbb{N})(\exists b \in G)\, [a_0 \prec a \,\&\, \langle a_0, b\rangle \in R]\}.$$

Finally, define the functor $(\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}(\prec) &= \prec_V \\ \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) &= \langle R_V, \mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that $(\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}})$ is equivalent to the valuations powerspace functor. It was shown in [6] that $\mathbf{I}(\prec_V)$ and $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec))$ are computably homeomorphic for every transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$, which proves that $\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}$ behaves properly on objects. Explicitly, there are homeomorphisms $f_V\colon \mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec)) \to \mathbf{I}(\prec_V)$ and $g_V\colon \mathbf{I}(\prec_V) \to \mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec))$

defined as

$$f_V(\nu) = \left\{ s \in \mathcal{B} \,\middle|\, (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \nu(\bigcup_{b \in G}[b]_\prec) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \right\},$$

$$g_V(I) = \lambda U. \bigvee \left\{ \sum_{a \in dom(r)} r(a) \,\middle|\, r \in I \text{ and } \bigcup_{a \in dom(r)} [a]_\prec \subseteq U \right\}.$$

To show that $\mathbf{V}_{\mathsf{Mor}}$ behaves properly on morphisms, fix a code R for a total function $\ulcorner R \urcorner \colon \mathbf{I}(\prec) \to \mathbf{I}(\sqsubset)$, and we will prove $\ulcorner R_V \urcorner = f_V \circ \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_V$. Given $I \in \mathbf{I}(\prec_V)$, we clearly have $s \in \ulcorner R_V \urcorner(I)$ if and only if

$$(\exists r \in I)(\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \sum_{a \in A^R_{G,r}} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right].$$

Next we consider $f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$. As mentioned after the proof of Theorem 13 in [6], if $S \subseteq \mathbb{N}$ then

$$g_V(I)\left(\bigcup_{a \in S}[a]_\prec\right) = \bigvee \left\{ \sum_{a \in dom(r)} r(a) \,\middle|\, r \in I \text{ and } (\forall a \in dom(r))(\exists a_0 \in S) a_0 \prec a \right\}.$$

It follows that for any $q \in \mathbb{R}$, we have $g_V(I)\left(\bigcup_{\substack{b \in G\,\&\\ \langle a,b\rangle \in R}} [a]_\prec\right) > q$ if and only if there is $r \in I$ such that $\sum_{a \in dom(r)} r(a) > q$ and

$$(\forall a \in dom(r))(\exists a_0 \in \mathbb{N})(\exists b \in G)\,[a_0 \prec a \,\&\, \langle a_0, b\rangle \in R]. \tag{1}$$

As shown in Lemma 5 of [6], if $r \in I$ and $A \subseteq dom(r)$, then the restriction $r|_A$ is also in I. In particular, for any $r \in I$, the resriction $r' = r|_{A^R_{G,r}}$ is also in I, and r' automatically satisfies (1) with r' in place of r. Therefore,

$$g_V(I)\left(\bigcup_{\substack{b \in G\,\&\\ \langle a,b\rangle \in R}} [a]_\prec\right) > q \iff (\exists r \in I) \sum_{a \in A^R_{G,r}} r(a) > q.$$

Thus $s \in f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I))(\bigcup_{b \in G}[b]_\prec) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow g_V(I)\left(\ulcorner R \urcorner^{-1}\left(\bigcup_{b \in G}[b]_\prec\right)\right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow g_V(I)\left(\bigcup_{\substack{b \in G\,\&\\ \langle a,b\rangle \in R}} [a]_\prec\right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow (\exists r \in I) \sum_{a \in A^R_{G,r}} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right]
\end{aligned}$$

It immediately follows that $\ulcorner R_V \urcorner(I) \subseteq f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$.

For the other inclusion, assume $s \in f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$, and for each non-empty $G \subseteq dom(s)$ fix $r_G \in I$ with $\sum_{a \in A^R_{G,r_G}} r_G(a) > \sum_{b \in G} s(b)$. Let r be an $\prec_V$-upper bound of the r_G in I. Let $G \subseteq dom(s)$ be non-empty. Then the choice of r_G and assumption $r_G \prec_V r$ implies

$$\sum_{b \in G} s(b) < \sum_{a \in A^R_{G,r_G}} r_G(a) < \sum_{a \in \uparrow A^R_{G,r_G} \cap dom(r)} r(a).$$

Since $\uparrow A^R_{G,r_G} \cap dom(r) \subseteq A^R_{G,r}$, we obtain

$$\sum_{b \in G} s(b) < \sum_{a \in \uparrow A^R_{G,r}} r(a),$$

hence $s \in \ulcorner R_V \urcorner(I)$. Therefore, $\ulcorner R_V \urcorner = f_V \circ \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_V$.

References

[1] R. Chen. Borel functors, interpretations, and strong conceptual completeness for $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 372:8955–8983, 2019.

[2] M. de Brecht. Quasi-Polish spaces. *Annals of Pure and Applied Logic*, 164:356–381, 2013.

[3] M. de Brecht. Extending continuous valuations on quasi-Polish spaces to Borel measures. Twelfth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 2015.

[4] M. de Brecht. A generalization of a theorem of Hurewicz for quasi-Polish spaces. *Logical Methods in Computer Science*, 14:1–18, 2018.

[5] M. de Brecht. Some notes on spaces of ideals and computable topology. In *Proceedings of the 16th Conference on Computability in Europe, CiE 2020*, volume 12098 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 26–37, 2020.

[6] M. de Brecht. Constructing the space of valuations of a quasi-Polish space as a space of ideals. (arXiv:2106.15780), 2021.

[7] M. de Brecht, J. Goubault-Larrecq, X. Jia, and Z. Lyu. Domain-complete and LCS-complete spaces. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 345:3–35, 2019.

[8] M. de Brecht and T. Kawai. On the commutativity of the powerspace constructions. *Logical Methods in Computer Science*, 15:1–25, 2019.

[9] M. de Brecht, A. Pauly, and M. Schröder. Overt choice. *Computability*, 9:169–191, 2020.

[10] R. Heckmann. Spatiality of countably presentable locales (proved with the Baire category theorem). *Math. Struct. in Comp. Science*, 25:1607–1625, 2015.

[11] M. Hoyrup, C. Rojas, V. Selivanov, and D. Stull. Computability on quasi-Polish spaces. In *Descriptional Complexity of Formal Systems*, pages 171–183. Springer, 2019.

[12] K. Margarita and K. Oleg. On higher effective descriptive set theory. In *Unveiling Dynamics and Complexity*, pages 282–291. Springer, 2017.

[13] A. Pauly. On the topological aspects of the theory of represented spaces. *Computability*, 5(2):159–180, 2016.

[14] M. Schröder. Extended admissibility. *Theoretical Computer Science*, 284(2):519 – 538, 2002.