第68回
トポロジーシンポジウム
講演集

2021年8月24日～8月27日

ZOOMオンライン開催（ホスト：広島大学）

はしがき

この講演集は2021年8月24日から8月27日までの４日間，広島大学のホストによりZOOMオンライン開催された第68回トポロジーシンポジウムに際し，あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである．その目的は，シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し，研究討論を活発に行うための一助とするとともに，記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある．

世話人：古宇田　悠哉（広島大学）
小鳥居　祐香（広島大学）
野崎　雄太（広島大学）
石川　昌治（慶應義塾大学）
寺垣内　政一（広島大学）
ホームページ管理：蒲谷　祐一（北見工業大学）

共催：日本数学会トポロジー分科会

第68回トポロジーシンポジウム・オンライン

記

日　時：　2021年8月24日(火) 9:30 〜 8月27日(金) 11:50
ホスト：　広島大学

プログラム

8月24日(火)

9:30〜10:30　**馬場　伸平** (大阪大学大学院理学研究科)
Riemann surfaces, uniformization theorems, and $\mathbb{CP}^1$-structures

10:50〜11:50　**正井　秀俊** (東京工業大学理学院)
タイヒミュラー空間のホロ境界

13:30〜14:30　**吉田　純** (理化学研究所革新知能統合研究センター)
On Vassiliev derivatives of Khovanov homology

14:50〜15:50　**野崎　雄太** (広島大学大学院先進理工系科学研究科)
LMO関手を用いた不変量と写像類群への応用

8月25日(水)

9:30〜10:30　**濱田　法行** (University of Massachusetts Amherst・
北海道大学情報科学研究院 CCB)
Signatures of Lefschetz fibrations and symplectic geography

10:50〜11:50　**本多　俊一** (公立千歳科学技術大学理工学部)
空間曲線の２種類の縮閉線、伸開線及び関連する線織面

13:30〜14:30　**塚本　達也** (大阪工業大学工学部)
結び目の単純リボン変形について

14:50〜15:50　**池　祐一**（東京大学大学院情報理工学系研究科）
層の圏上のパーシステンス的距離とシンプレクティック幾何における
分離エネルギー

8 月 26 日 (木)

9:30〜10:30　**武田　雅広** (京都大学大学院理学研究科・学術振興会特別研究員 DC2)
Cohomology of the spaces of commuting elements in a Lie group

10:50〜11:50　**石田　裕昭** (鹿児島大学理学部)
Bott 多様体のコホモロジー剛性問題

13:30〜14:30　**堀内　遼** (呉工業高等専門学校)
印付単体的集合のループ空間

14:50〜15:50　**Matthew de Brecht** (京都大学大学院人間・環境学研究科)
The category of quasi-Polish spaces as a represented space

8 月 27 日 (金)

9:30〜10:30　**Lisa Piccirillo** (Massachusetts Institute of Technology)
Knot concordance and exotica

10:50〜11:50　**川﨑　盛通** (青山学院大学理工学部)
Extension problem of quasi-morphisms and commuting symplectomorphisms

第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

Riemann surfaces, uniformization theorems, and $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-structures

馬場伸平　(大阪大学大学院理学研究科)*

目　次

1. 導入 1
   1.1. Riemann 面の一意化定理と Teichmüller 空間 1
   1.2. Bers' simultaneous uniformization theorem 2
   1.3. 非離散表現と Riemann 面の構造の対応への一般化 2
2. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 2
   2.1. 定義 3
      2.1.1. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の例 3
   2.2. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造と変形空間 3
3. Holonomy を共有する $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の組 4
4. 準備 5
   4.1. Schwarzian parametrization 5
   4.2. ２次正則微分と特異点付きの Euclid 構造 5
5. 有界性 6
   5.1. Grafting cocycle の近似 6
   5.2. Grafting cocycle の構成法 7
      5.2.1. Compatible な $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の分解 7
   5.3. Grafting cocycle の例 8

本講演では、Riemann 面の構造と曲面の基本群の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ への準同型写像の関係について話す。特に、準同型写像の空間内の滑らかな部分多様体の交わりを理解するこによって、これらの関係を理解する。

1. 導入

1.1. Riemann 面の一意化定理と Teichmüller 空間

Riemann 面の一意化定理は，２０世紀初頭に Poincare と Koebe によって独立に証明された。この一意化定理により Riemann 面の普遍被覆は、複素平面 $\mathbb{C}$, 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$, または $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ のいづれかと双正則になっている。また Riemann 面の Euler 標数により，どの曲面と双正則かが定まる。複素平面 $\mathbb{C}$ はと Euclid 平面と、上半平面は双曲平面 $\mathbb{H}^2$ と、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は２次元球面 $\mathbb{S}^2$ と等角になっており、被覆変換はそれぞれ曲面の等長変換である。

S を向き付け可能な閉曲面とする。このとき S 上の Riemann 面の構造を S の isotopy で同値関係を入れたものを, 印付き Riemann 面といい、以下そのような Riemann 面の構造を考える。さらに，S の種数を２以上とすると，Euler 標数は負となり，上の関係で，S 上の双曲構造と対応している。双曲平面の向き付けを保つ等長変換群は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ であるから，以下の微分同相な対応を得る。

$$\left\{\begin{matrix}\text{S上の全ての}\\ \textit{Riamann}\text{ 面の構造全体}\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{diffeo.}} \left\{\begin{matrix}\text{離散で忠実な準同型写像}\\ \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\text{ 全体}\end{matrix}\right\} \Big/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \quad (1)$$

本研究は科研費 (課題番号:20K03610) の助成を受けたものである。

* e-mail: baba@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~baba/

ここでは， 右側表現 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ に対して，双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\operatorname{Im}\rho$ が対応する。この対応により、Riemann 面の理論が大きく発展した。

左の Riemann 面の空間は、**Teichüller** 空間と呼ばれ、右側の空間は Fricke 空間と呼ばれるが、この対応により同一視され区別されないとが多い。この講演では S の向き付けを固定していないので、Teichmüller 空間は 2 つの連結成分をもち、$\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*$ で表す。T と T^* はそれぞれ $\mathbb{R}^{6g-6}$ と微分同相であり、複素多様体としては、T と T^* は反正則になっている。また忠実離散表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ は **Fuchs 表現**と呼ばれる。

1.2. Bers' simultaneous uniformization theorem

次に、(1) を複素化した関係を説明する。忠実で離散な準同型写像 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は、離散群 $\operatorname{Im}\rho$ の作用で普遍な Jordan 曲線 Λ が $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に存在するとき、**擬 Fuchs 表現**と呼ばれる。幾何群論的には、quasi-isometric embedding になっていることと同値である。よって擬 Fuchs 表現 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が与えられたとき、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \Lambda$ は位相的には 2 つの開円盤であるから、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \Lambda = \Omega^+ \sqcup \Omega^-$ とおく。このとき、離散群 $\operatorname{Im}\rho$ の開円盤 Ω^+, Ω^- それぞれの作用は、固定点をもたず真性不連続に作用している。よって $\Omega^+/\operatorname{Im}\rho, \Omega^-/\operatorname{Im}\rho$ は向き付けの異なる 2 つの Riemann 面となる。Bers によって 1960 年に証明された同時一意化定理は、以下の複素同型写像を与える ([Ber60])。

$$\left\{\begin{matrix} S \text{ と同相な向きづけの異なる} \\ \textit{Riemann} \text{ 面の組み} \end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{bihol.}} \left\{\begin{matrix} \text{擬 } \textit{Fuchs} \text{ 表現} \\ \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \text{ 全体} \end{matrix}\right\} \Big/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \quad (2)$$

左側の Riemann 面の組みの空間は, $\mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ であり、右側の空間は、**擬 Fuchs 空間** QF と呼ばれる。21 世紀になって解かれた Density Theorem により、QF は $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 忠実離散な表現全体の内点集合になっており、その意味で典型的な忠実離散表現と言ってよい。Bers の定理はその後 Thurston によって革命的に発展した 3 次元双曲幾の重要な基礎となり、ひいては 3 次元の多様体のトポロジーの分類つながっている。

1.3. 非離散表現と Riemann 面の構造の対応への一般化

§1.2の Bers の定理は, measurable Riemann mapping Theorem からの帰結であり、その証明には表現が離散であること、および Riemann 面の向き付が異なることが本質的に必要である。本講演では、私のプレプリント [Bab21] を元に「離散かつ忠実」という条件、および、「向き付の異なる」という条件を除いた、対応の設定を導入し、部分的な一般化を与える。

$$\left\{\begin{matrix} S \text{ と同相な} \\ \text{印付き } \textit{Riemann} \text{ 面の組み} \end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{??} \left\{\begin{matrix} \text{準同型写像} \\ \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \text{ 全体} \end{matrix}\right\} \Big/\!\!\Big/ \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \quad (3)$$

曲面 S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は、Riemann 面上の 2 次正則微分の構造をもち (3) の左側に対応し、またその holonomy は離散とは限らない $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ であるり右側に対応する。よって $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を用い上の対応の設定を以下で説明する。

2. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造

($\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造一般の参考文献 [Dum09], [Kap01, §7].)

2.1. 定義

リー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の自己同型群であり，線形分数変換 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

で与えられる。F を連結な向き付可能で連結な曲面とする。F 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ **構造**とは $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))$ 構造である。つまり、F の開集合を $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に埋め込む極大の局所座標系であり、座標変換が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ への作用の制限になっているものである。特に，各の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は Riemann 面の構造を持つ。

$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の同値な定義を大域的な観点から与える。$\tilde{F}$ を F の普遍被覆とすると、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は

- 局所同相写像 $f\colon \tilde{F} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ と
- 準同型写像 $\rho\colon \pi_1(F) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

の組で、f は ρ-**同変**なものである。つまり，任意の $\gamma \in \pi_1(F)$ に対して $f\gamma = \rho(\gamma)f$ がなりたつ ([Thu97])。同値類は曲面の isotopy と $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ によって与えられる（つまり, 任意の $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,C)$ に対して，$(f,\rho) \sim (\alpha f, \alpha^{-1}\rho\alpha)$)。局所同相写像 f は **developing map** と呼ばれ、 準同型写像 ρ は **holonomy 表現** と呼ばれる。

以下 (§2.1.1) に述べる例では，基本的に developing map が埋め込みまたは、像への被覆写像になっており、また holonomy 表現の像が離散になっている。但し、一般には developing map や holonomy 表現は，そのような性質を持つとは限らない。

2.1.1. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の例

曲率一定の曲面の構造は、 自然に $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を持つ。Euclid 平面 $\mathbb{E}^2$ は $\mathbb{C}$ と等角に同一視され，その向き付を保つ等長変換群 $\mathrm{Isom}^+\,\mathbb{E}^2$ は自然に $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の部分群である。また $\mathbb{H}^2$ は上半平面と同一視され，その向き付を保つ等長変換群 $\mathrm{Isom}^+\,\mathbb{H}^2$ は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ である。

次に $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の開集合 Ω に $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の離散部分群 G が、固定点を持たず Ω に作用するとき，Ω/G は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を持つ。特に §1.2で扱った擬 Fuchs 表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ に対して，$\Omega^+/\operatorname{Im}\rho$, $\Omega^-/\operatorname{Im}\rho$ は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を持つ。

2.2. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造と変形空間

まず、S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の空間と S 上の複素構造の空間との対応を考える。S に向き付を固定してものを S^+、その反対に向き付けられたものを S^- と呼ぶことにし，T を S^+ の Teichmüller 空間、T^* を S^- の Teichmüller 空間とする。

同様に P を S^+ 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体の空間とする。このとき P は T の余接空間と同一視される。同様に P^* を S^- 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体の空間とすると、P^* は T^* の余接空間と同一視される。ここで $\psi\colon \mathsf{P} \sqcup \mathsf{P}^* \to \mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*$ は、S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の変形空間から S 上の Riemann 面への射影とすると、ベクトル束の構造を持つ。

次に表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の空間と対応を考える。S の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 指標多様体

$$\{\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})\} \mathbin{/\!\!/} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$$

は、表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 全体の空間の GIT 商である。この同値類は、ここでは $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ での共役類と思って問題ないが, 本講演で扱わない表現に関してはそれより強い同値類となる場合がある。この指標多様体は2つの連結成分をもち、表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ へ持ち上がるか否かで、どちらの連結成分に含まれるか判別される ([Gol88])。よって χ を持ち上られる表現からなる連結成分をすると、S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の holonomy 表現は, χ の滑らかな部分に含まれる。

Holonomy 写像

$$\mathrm{Hol}\colon \mathsf{P} \sqcup \mathsf{P}^* \to \chi$$

は各々の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 $C = (f, \rho)$ にの holonomy 表現 ρ を与える、つまり f を忘れる写像である。この対応は局所同相写像であるが，像への被覆写像になっていない。この大域的な複雑さが $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の多くの面白い問いに関連している。Hol の像は，どのような表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の holonomy 表現になるかを表している。それは Gallo-Kapovich-Marden [GKM00] によって代数的に特徴づけられ，特にほとんど全ての $\pi_1(S) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が holonomy 表現になり、また非離散な holonomy 表現が沢山ある。

3. Holonomy を共有する $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の組

S 上の同一の holonomy を持つ異なる $\mathbb{C}\mathrm{P}$ 構造の組み全体の集合を B とする。つまり

$$\mathsf{B} = \left\{(C, D) \in (\mathsf{P} \sqcup \mathsf{P}^*)^2 \;\middle|\; \mathrm{Hol}(C) = \mathrm{Hol}(D), C \neq D\right\}$$

とする。このとき、C, D の順番を変える $\mathbb{Z}_2$ の作用は、固定点を持たない。QF は $\mathsf{B}/\mathbb{Z}_2$ の連結成分になっており、B は QF の一般化といえる。

Δ を対角集合 $\{(X, X) \mid X \in \mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*\}$ とし，正則写像 $\Psi\colon \mathsf{B} \to (\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*)^2 \setminus \Delta$ を $\Psi(C, D) = (\psi(C), \psi(D))$ で定義する。本日の主定理は Ψ の局所的性質と帯域的性質を与える。

定理 1 ([Bab21, Theorem A])

$$\Psi\colon \mathsf{B} \to (\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*)^2 \setminus \Delta$$

は完備な局所分岐被覆写像である。

ここで、完備とは道の持ち上げが成り立つことである。局所分岐被覆写像とは、局所的には（解析的な）分岐被覆写像になっていることである。

定理1は Bers の定理 (2) の部分的な一般化と言える。特に (1) の完備性から、各々の B の連結成分 Q に対して、$\Psi|Q$ は対応する $(\mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*)^2 \setminus \Delta$ の連結成分への全射性が言える。また、Ψ は開写像であり、各々の fiber は B の離散集合である。

Ramification locus は 一般には no-where dense な解析的集合であるが、Ψ に関しては ramification locus の存在がわかっていない。よって Ψ は連結成分ごとに双正則写像になっていて Bers の定理の真の一般化を与える可能性がある。

さらに定理1を使い、Bers の定理の別証明を，measurable Riemann mapping theorem を使わずに与えることができる。まず以下のことがわかる。

- QF は $\mathsf{B}/\mathbb{Z}_2$ のなかで，開かつ閉集合である。

- 対角集合 $\{(X, X^*) \mid X \in \mathsf{T})\}$ は $\mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ ないの次元が半分の全実部分多様体であり，Morera の定理より $\mathsf{QF} \to \mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ はその対角集合上、写像度 1 である。

これと，定理1より，QF が $\mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ が写像度が 1 となり、$\mathsf{QF} \to \mathsf{T} \times \mathsf{T}^*$ が双正則となる。

4. 準備

定理1の証明のための予備知識を説明する。

4.1. Schwarzian parametrization

(例えば，[Leh87] 参照。) X を S 上の Riemann 面の構造とし，その普遍被覆を上半平面と等角に同一視する。このとき X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 C は, その developing map を上半平面からの正則関数と見ることで schwarz 微分を取り，X 上の 2 次正則微分 q が得られる。

$$q = \left[\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\right] dz^2.$$

このとき (X, q) を C の **Schwarzian パラメター**と呼ぶ。

X 上の 2 次正則微分全体は複素 $3g-3$ 次元のベクトル空間のなり $QD(X)$ で表すことにする，よって，Riemann 面 X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体の空間 P_X は，$QD(X)$ と同一視できる。Holonomy 写像 $\mathrm{Hol}\,\mathsf{P} \to \chi$ は，proper ではなく，またほとんど全ての $\rho \in \chi$ で fiber $\mathrm{Hol}^{-1}(\rho)$ は加算無限集合である。一方以下の定理が成り立つ。

定理 2 (Poincare [Poi84], Kapovich [Kap95]) 任意の S 上の Riemann 面の構造 X に対して，Hol の P_X への制限は，指標多様体 χ への proper な埋め込みである。

4.2. 2 次正則微分と特異点付きの Euclid 構造

（例えば，[FM12] 参照）$q = \phi dz^2$ を Riemann 面上 X の 2 次正則微分とする。このとき，q は X 上に特異点付きの Euclid 構造 E をあたえる。X 上の q の零点では無い点 u を固定する。このとき u の近くの零点では無い点 $w \in X$ に対して，u から w を結ぶ道に沿っての積分

$$\eta(w) = \int_u^w \sqrt{\phi}\, du$$

により，u の近傍を $\mathbb{C}$ の開集合に埋め込むことができる。$\mathbb{C}$ を自然な Eudlid 構造を入れることで, u の近傍に Euclide 構造が入り，これを貼り合わせることで X から q の零点を除いたものに，Euliden 構造がはいる。その完備な拡張として，q の零点 z は Euclid 構造の特異点になるこのとき z の degree を d とすると，$(d/2+1)\pi$ の cone angle を持つ。

複素平面 $\mathbb{C}$ は, 虚軸と平行な直線を葉とする葉層構造をもつ。また，この葉層構造対して横断的な曲線に対して，実方向の距離を測ることで，測度を与えることができる。この横断方向に測度がついた葉層構造を **vertical measured foliation** と呼ぶ。

上で q の零点以外の点の小さい近傍は，$\mathbb{C}$ の開集合と同一視された。よって，$\mathbb{C}$ 上の vertical measured foliation を引き戻し，(X, q) 上に vertical measured foliation V を得る。ここで，零点は，foliation の特異点となっており，葉が枝分かれしている。

$\mathbb{C}$ の実軸と平行な直線による $\mathbb{C}$ の horizontal measured foliation があり，vertical measured foliation と直交している。同様に $\mathbb{C}$ の horizontal measured foliation を引き戻すことで E 上に horizontal measured foliation H がえられ，H は V と直交している。

このような特異点付きの Euclid 構造で，直交する vertical measured foliation と horizontal 持つ曲面を **flat surface** と呼ぶことにする。

5. 有界性

S 上の Riemann 面の構造を X とすると，X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の全体の空間は P_X で表した。その Holonomy 表現全体 $\mathrm{Hol}(\mathsf{P}_X)$ を χ_X とおく。このとき定理2により，χ_X は、χ の次元が半分の滑らかな解析的な部多様体である。よって、このように得られる部分多様体の交わりを理解することは自然な問題である。

定理 3 ([Bab21, Theorem 10.1]) 任意の異なる $X, Y \in \mathsf{T} \sqcup \mathsf{T}^*$ に対して、$\chi_X \cap \chi_Y$ の各々の連結成分はコンパクトである。

ここで $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y$ に対して，Y 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 $C_{X,\rho}$ で holonomy 表現が ρ なものと X 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造 $C_{X,\rho}$ で holonomy 表現が ρ なものがある。

定理3により，定理1の局所的な性質が従う。

系 5.1 $\chi_X \cap \chi_Y$ は離散集合である。さらに Ψ は，局所分岐被覆である。

5.1. Grafting cocycle の近似

定理3の有界性を示すために以下の構成を考える。$\mathcal{S}$ を S 上の，可縮ではない単純閉曲の isotopy 類の集合とする。K を χ 内の十分大きい有界集合とし、$\chi_X \cap \chi_Y \setminus K$ の表現 ρ に対して，整数値関数 $\Gamma_\rho \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ を幾何学的に作り ρ に関して連続になるよう構成する (§5.2)。この整数値関数は，grafting(§5.3) という、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の切り貼りと密接に関係してとる。直感的には、X, Y の向き付けが異なる場合は，Γ_ρ は $C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の「差」を表し，X, Y の向きづけが異なる場合は，$C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の「和」をある意味で表している。正確には以下の命題のように、Γ_ρ は $C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の schwarzian パラメターから得られる vertical foliations $V_{X,\rho}, V_{Y,\rho}$(§4.2) を使って近似できる。

命題 5.2 X, Y を S 上の異なる印付き Riemann 面の構造とし，X と Y の向きづけが同じであると仮定する。また $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を S 上の非可縮な閉曲線とする。このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きい χ の有界集合 K_ϵ をとると，任意の $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y \setminus K_\epsilon$ に対して，正定数 q が存在して

$$(1-\epsilon)\Gamma_\rho(c_i) - q < V_{X,\rho}(c_i) - V_{Y_\rho}(c_i) < (1+\epsilon)\Gamma_\rho(c_i)$$

が全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して成り立つ。

ここで、 $V_{X,\rho}(c_i)$ $V_{Y_\rho}(c_i)$ は c_i に与えられる transversal measure を表している。向き付けが異なる場合は符号が変化するが同様の命題がなりたつ。

命題 5.3 X, Y を S 上の異なる印付き Riemann 面の構造で向きづけが異なるとする。また $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を S 上の非可縮な閉曲線とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きい χ の有界集合 K_ϵ をとると，正定数 q が存在して，任意の $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y \setminus K_\epsilon$ に対して，

$$(1-\epsilon)\Gamma_\rho(c_i) - q < V_{X,\rho} + V_{Y_\rho} < (1+\epsilon)\Gamma_\rho(c_i) + q$$

が全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して成り立つ。

Γ_ρ は，整数値連続関数のため，$\chi_X \cap \chi_Y$ の連結成分上，変化しない。一方，上の命題5.2または命題5.1から $\rho_i \in \chi_X \cap \chi_Y$ が任意のコンパクト集合の外に発散するとき, Γ_{ρ_i} も発散する。よって、$\chi_X \cap \chi_Y$ の各々の連結成分は有界であり、定理3が言えた。

5.2. Grafting cocycle の構成法

E を flat surface とし、V をその vertical measured foliation, H をその horizontal measured foliation とする。E 上の曲線 ℓ が，区分的に，V の leaf の線分または H の leaf の線分からなっていてかつ特異点を含まないとき，staircase(階段状) であるという。Flat structure を持たない曲面上の曲線であっても、このような階段状曲線と微分同相のものを位相的な階段状曲線という。

$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上の丸い円（round circle）は、$\mathbb{R}^3$ 内の Affine 超平面と $\mathbb{S}^2$ との交わりとして得られる円である。$\mathbb{S}^2$ と $\mathbb{CP}^1$ を等角に同一視することで、$\mathbb{CP}^1$ に、**丸い円**およびその線分である**円弧**を定義できる。このとき $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の作用で、丸い円は円弧であることは保たれる。

$C=(f,\rho)$ を $\mathbb{CP}^1$ 曲面とする。C 上の位相的な staircase 曲線 s とする。$\tilde{s}$ を s の普遍被覆として，　s が以下の条件を満たすとき **circular** であるという。

- s が $\tilde{s}$ の horizontal な線分ならば、s は f により $\mathbb{CP}^1$ 上の丸い円 c にはめ込まれる。
- v が $\tilde{s}$ の vertical な線分ならば，h_1, h_2 を v と端点を共有する $\tilde{s}$ の horizontal な線分とし，c_1, c_2 をそれぞれ $f(h_1), f(h_2)$ を含む $\mathbb{CP}^1$ 上の丸い円とすると
  - c_1, c_2 は交わりを持たず，
  - $f|v$ は, c_1, c_2 を境界にもつ $\mathbb{CP}^1$ 内の circular な円筒 A に含まれ，かつ $f|v$ は A の自然な丸い円での foliation に横断的である。

5.2.1. Compatible な $\mathbb{CP}^1$ 構造の分解

§5.1の grafting cocycle Γ_ρ は、$C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ を，比較しやすいように circular 階段状の境界を持つ曲面に分解して得られることを説明する。

$\mathcal{F}_1=(f_1,\rho_1)$ と $\mathcal{F}_2=(f_2,\rho_2)$ をそれぞれ circular な階段状境界を持つ曲面 F 上の $\mathbb{CP}^1$ 構造とする。この時 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ が以下の条件を満たすならば，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ は compatible であるという。

- ρ_1 と ρ_2 は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の元で共役 (よって $\rho_1=\rho_2$ 仮定して良い);
- 任意の $\mathcal{F}_1$ の境界の頂点 p_1 が $\mathcal{F}_2$ の境界の頂点 p_2 に対応するとき，$f_1(p_1)=f_2(p_2)$;
- h_1 と h_2 が $\partial\mathcal{F}_1$ と $\partial\mathcal{F}_2$ の対応する horizontal な線分ならば，$f_1(h_1)$ と $f_2(h_2)$ は，同一の丸い円に含まれる。
- v_1 と v_2 を $\partial\mathcal{F}_1$ と $\partial\mathcal{F}_2$ の対応する vertical な線分とすると，$f_1(h_1)=f_2(h_2)$。

上の compatible の定義では，特に $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ は同相である。$\mathcal{F}'$ が同相だが別の階段状の曲面 F' 上の $\mathbb{CP}^1$ 構造のとき、$\mathcal{F}_1$ の horizontal な辺が，$\mathcal{F}_2$ の 1 点に潰れることを許し、上の条件を見たすとき、$\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ は semi-compatible であるという。

定義 5.4 S の**曲面 train-track 分解**とは、 各辺に vertical または horizontal のラベルがついた S のグラブ γ に、よって S が内点が交わらない位相的な階段曲線を境界に持つ曲面 $B_1,\ldots,B_n$ よって与えられる分解である。これらの階段境界曲面 B_i を branch と呼ぶ。

$\mathbb{CP}^1$ 構造 C の曲面 train-track 分解は、各 branch の階段上境界が全て circular であるとき、**circular train-track 分解**という。

定義 5.5 C, C' を S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造とし，C, C' の holonomy 表現が一致すると仮定する。このとき，C の circular traintrack 分解 $\mathcal{T} = \cup \mathcal{B}_i$ が C' の circular train-track 分解と compatible $\mathcal{T}' = \cup \mathcal{B}'_i$ であるとは，印を保つ連続写像 $C \to C'$ が $\mathcal{T}$ の全て branches と $\mathcal{T}'$ の全て branches が semi-compatible に対応していることである。

命題 5.6 K が十分大きい χ 内の有界集合ならば，任意の $\rho \in \chi_X \cap \chi_Y$ に対して，$C_{X,\rho}$ と $C_{Y,\rho}$ の曲面 train-track 分解 $\mathcal{T}_{X,\rho}$ と $\mathcal{T}_{Y,\rho}$ が存在し，$C_{X,\rho}$ は $C_{Y,\rho}$ に semi-compatible になる。

命題5.6の分解を使い，それぞれの，$\mathcal{B}_i$ 上に，整数値の重みを持つ train-track graph を得る。これらをつなぎ合わせることで，閉曲面 S 上に，整数値の重みを持つ train-track graph を得る。がえられ，それとの幾何学的交点数として $\Gamma_\rho \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ を得る。

5.3. Grafting cocycle の例

上の grafting cocycle は Goldman による Fuchsia ホロノミーをもつ $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造の分類 [Gol87] に密接に関連している。

Holonomy 表現を固定したときに，対応する $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造全体は，P 内の離散集合になっており，その特徴付けは，わかっていない部分も多い。ただ，忠実離散表現 $\rho \colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ に対しては 2π-grafting という, ある種の切り貼りによって，$\mathrm{Hol}^{-1}(\rho)$ の特徴づけが完全される。この切りはりは，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 曲面内の admissible loop と呼ばれる，特定の性質を満たす輪に沿って，円筒上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を挿入して行われ，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は変化するが，holonomy 表現は保たれる。また，admissible loop に沿って，2π の正整数倍の「長さ」の円筒を挿入することができるので, grafting は admissible loop に正整数の重みをつけ表現できる。

定理 4 (Goldman [Gol87]) $\rho \colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ を忠実離散表現とする。このとき，ρ を holonomy 表現とする 任意の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造は，双曲構造 $\mathbb{H}^2/\operatorname{Im}\rho$ を正整数の重み付きの multiloop に沿って grafting することで得られる。また，この重み付き multiloop は isotopy を除き，一意に決まる。

この定理のように，より一般に grafting は，整数値の重みがついた admissible な輪に沿って行われる。$\rho \colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ を忠実離散表現とする。C_1, C_2 を holonomy が ρ である $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造であるとする。さらに，C_1, C_2 の向きづけが同じであると仮定する。このとき，$i = 1, 2$ に対して，C_i は双極構造 $\mathbb{H}^2/\operatorname{Im}\rho$ を正整数の重みつき multiloopM_i に沿って grafting して得られる。$I_{M_i} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を，S 上の単純閉曲線に，M との重みつき幾何学的交点数を与える関数として定義する。$I_{M_2} - I_{M_i} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ が C_1 と C_2 の差を表しており，Γ_ρ を実現することが適当な設定のもとで言える。

参考文献

[Bab21] Shinpei Baba. Bers' simultaneous uniformization and the intersection of poincare holonomy varieties. Preprint, 2021.

[Ber60] Lipman Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:94–97, 1960.

[Dum09] David Dumas. Complex projective structures. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 455–508. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[GKM00] Daniel Gallo, Michael Kapovich, and Albert Marden. The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 151(2):625–704, 2000.

[Gol87] William M. Goldman. Projective structures with Fuchsian holonomy. *J. Differential Geom.*, 25(3):297–326, 1987.

[Gol88] William M. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93(3):557–607, 1988.

[Kap95] Michael Kapovich. On monodromy of complex projective structures. *Invent. Math.*, 119(2):243–265, 1995.

[Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[Leh87] Olli Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*, volume 109 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[Poi84] H. Poincaré. Sur les groupes des équations linéaires. *Acta Math.*, 4(1):201–312, 1884.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

タイヒミュラー空間のホロ境界

正井　秀俊　(東京工業大学)*

1. ホロ

「ホロ」というのはラテン語で「境界」という意味らしい[1]．そのため「ホロ境界」は「サハラ砂漠」や「ナイル川」のような名前になっている．本来は「ホロ関数境界」(horofunction boundary) と呼ぶのが正しいようで，これで “境界” におわす関数たちによる空間の bordification（日本語にすると境界づけ？）という意味となる．ホロ関数による境界は，グロモフ [Gro81] によって考案され，任意の距離空間の境界を与える手法としてさまざまな対象について研究されてきた．たくさんの応用を得るうちに，だんだんと “horofunction boundary” と呼ぶのが面倒になり “horoboundadry” と呼ばれるようになったようだ．

今回はあえてホロ境界とタイトルにつけた．ホロ境界は，空間をコンパクト化する試みなのであるが，実は距離空間が固有（proper, 距離による任意の閉球がコンパクト）でないと理論が単純には動かない．固有であるという条件を満たす空間は数多くあり，ホロ関数によるコンパクト化は距離とコンパクト化をつなげる架け橋となってきたものの，だんだんと固有でない距離空間を考える状況も増えてきた．本講演で考えるタイヒミュラー空間は，多様な背景から特徴づけがなされる空間であり，その背景に応じて距離やコンパクト化が知られていた．タイヒミュラー空間を固有な距離空間にする距離を考えると，ホロ関数によるコンパクト化は，対応する背景のもと（別方法で）構成された境界を与えることが知られている (§4)．一方で，多くの研究が知られるタイヒミュラー空間論において重要な距離であり，リーマン計量から定義される Weil-Petersson 距離は完備ではない．Weil-Petersson 距離の非完備性は非固有性を導き，ホロ関数によるコンパクト化が一般論からは得られない．しかし，Weil-Petersson 距離は非完備ながら CAT(0) 空間となる（i.e. non-positive curvature を持つ）ことが知られている．CAT(0) 性により，各点周りの “方向” が定まる（visual boundary）．ホロ関数に，この方向の情報を加味すると，タイヒミュラー空間のホロコンパクト化が自然に得られることがわかる．極座標 (r, θ) における半径 r がホロ関数と，偏角 θ が方向と対応すると，講演者が勝手に思っているので，ホロ関数と方向の組み合わせを**ホロ座標**と講演者は勝手に呼んでいる．極座標は原点を中心としているが，任意の点を中心とした極座標を考えることができる．ホロ座標を導入することで，“考えうる極座標を全て束ねて” 空間を調べている，という気持ちである．そして，より大きな空間に考えたい空間を埋め込み，閉包をとることにより，新しく境界（ホロ）にホロ座標を加えることで新しいコンパクト化が得られる．まとめると，本講演では境界（ホロ）に関数ではなく，座標を導入することで，固有とは限らない空間のコンパクト化，言うなればホロ座標コンパクト化を考えたい．そしてホロ座標コンパクト化を，タイヒミュ

本研究は科研費（課題番号：19K14525）の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 57M60, 20F65
キーワード：タイヒミュラー空間，ホロ境界
* 東京都目黒区大岡山 2-12-1，東京工業大学理学院数学系
e-mail: masai@math.titech.ac.jp
[1] https://en.wiktionary.org/wiki/horosphere より．

ラー空間の Weil-Petersson 距離，さらにはタイヒミュラー空間上に定まる繰り込み体積 (renormalized volume) からなる関数に対して考えていきたい．

2. ホロ関数

距離空間 (X, d) の上に基点 $b \in X$ を一つ定めて固定する．

定義 2.1. 点 $z \in X$ に対して，$\psi_z : X \to \mathbb{R}$ を

$$\psi_z(x) = d(x, z) - d(b, z)$$

で定める．

この関数はリプシッツ性を持つ，すなわち

$$|\psi_z(x) - \psi_z(y)| \leq d(x, y)$$

が成り立つ．これは三角不等式で遊べば得られる．さらに定義により $\psi_z(b) = 0$ である．

定義 2.2. 空間 X 上のリプシッツ関数で b で消えているもの全体を $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ とかく．すなわち

$$\mathrm{Lip}_b^1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0, f \text{ はリプシッツ関数}\}$$

と定義する．

今回は $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ に各点収束の位相を入れる．これは関数の値をあてがうことで

$$\mathrm{Lip}_b^1(X) \subset \prod_{x \in X} [-d(b, x), d(b, x)]$$

と見做して，直積位相を考えた位相と同値である．右辺はチコノフの定理よりコンパクトである．

命題 2.3 (c.f. [MT18, Wal14])**.** 空間 $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ はコンパクトな距離付け可能空間である．

さて，距離空間 X を $\mathrm{Lip}_b^1(X)$ へ埋め込もう．

命題 2.4 (c.f. [Wal14, MT18])**.** 写像 $\Psi : X \to \mathrm{Lip}_b^1(X)$ を

$$\Psi(z) = \psi_z$$

で定めると，Ψ は単射で連続となる．

さて，空間が固有であればさらに次が成り立つ．

命題 2.5 ([Wal14])**.** X が固有であれば $\Psi : X \to \mathrm{Lip}_b^1(X)$ は像への同相写像である．

X が固有距離空間ならば命題 2.3 と命題 2.5 により，像 $\Psi(X)$ の閉包を取ることで X のコンパクト化が得られる．境界 $\partial_h(X) := \overline{\Psi(X)} \setminus \Psi(X)$ の元を**ホロ関数** *(horofunction)* と呼ぶ．このようにしてえら得るコンパクト化を**ホロ関数コンパクト化** *(horofunction compactification)* という．だんだんと時間が経ち，様々な研究が生まれるにつれ，境界だけでなく $\overline{\Psi(X)}$ の元をいつでもホロ関数と呼んだり，ホロ関数によるコンパクト化を単にホロコンパクト化と呼ぶようになったようだ．

3. ホロ座標

さて，距離空間が固有であればホロ関数を考えることでコンパクト化が得られることがわかった．ところが，距離空間の固有性がない場合，一般には，命題2.5は成り立たたず，Ψの逆写像が連続にならない例が知られている．ここから先，XはCAT(0)空間であるとする．さらに，Xはリーマン多様体であることも仮定する．一つ，のちの都合で完備性は仮定をしないでおく．細かい定義は必要ないので省略するが（[BH99]参照）空間がCAT(0)であると，次の性質が知られている．

命題 3.1 ([BH99])**.** 空間 X を CAT(0) 空間とする．このとき，任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，x と y を結ぶ測地線がただ一つ定まる．したがって，点 x から y への方向 $\bar{d}_y(x) \in T_x^1(X)$ を定めることができる．ここで，$T_x^1(X)$ は X の点 x における単位接空間である．

さらに任意の $x, y, z \in X$ に対して，点 z における x への方向と y への方向による角度 $\angle_z(x, y)$ を定めることができる（X がリーマン多様体の場合は，リーマン計量による角度．一般の場合はアレキサンドロフ角度と呼ばれる）．

この角度を用いてコンパクト化を考える．極座標において，原点で座標変換の連続性が壊れてしまう．ここでは，連続性の担保のために同相写像 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, 1]$ を考える．実際 $f(0) = 0$ であればなんでも良いが，例えば $f(x) = (e^x - 1)/(e^x + 1)$ などを考えれば良い．方向 $\bar{d}_y(x)$ を原点で消えるように調整した

$$d_y(x) := f(d(x, y))\bar{d}_y(x)$$

を考える．こうして次の写像を定義する．

定義 3.2 (ホロ座標 [Masa21])**.** 写像

$$\Phi : X \to \prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X)\right)$$

を

$$\Phi(z) := (\psi_z(x), d_z(x))_{x \in X}$$

で定義する．

命題2.3と同様にして次がわかる．

命題 3.3 ([Masa21])**.** 空間 $\prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X)\right)$ はコンパクトな距離付け可能空間である．

ここで，空間 $\prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X)\right)$ へは直積位相を入れていることに注意する．とくに方向に関して，接束とは位相が異なる．あとは，Φ が埋め込みであることを言えば良い．

命題 3.4 ([Masa21])**.** CAT(0) なリーマン多様体 X において，指数写像 exp が各点において，然るべき開集合からの微分同相写像であるとする．このとき，

$$\Phi : X \to \prod_{x \in X} \left([-d(b, x), d(b, x)] \times T_x^{\leq 1}(X)\right)$$

は像への同相写像である．

指数写像についての仮定は少し強めに感じるかもしれないが，後で考えるWeil-Petersson距離について成り立つ仮定である．

さて，この “方向たち”(direction) は，ホロ関数の視点から見ると，微分 (derivative) に見える．ちょうどよく双方 “d” である．

命題 3.5 ([BH99, Corollary II.3.6])**.** X を CAT(0) 空間とする．測地線 $\sigma : [0, T] \to X$ を考え， $p := \sigma(0)$ とする．このとき，

$$\lim_{s \to 0} \frac{d(\sigma(0), b) - d(\sigma(s), b)}{s} = \cos \angle_p(\dot{\sigma}(0), d_b(p))$$

が成り立つ．ここで $\dot{\sigma}(0) \in T_p^1(M)$ は σ で定まる方向である．

4. タイヒミュラー空間のホロ境界

以降，向け付け可能閉曲面 S を固定する．種数は $g \geq 2$ とする．タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(S)$ は S 上の（マーキング込みの）双曲構造，もしくは複素構造の空間である．タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(S)$ には様々な距離が乗る．代表的なものとして

- $\mathcal{T}(S)$ を双曲構造の空間だと思うサーストン距離 d_{Th}
- $\mathcal{T}(S)$ を複素構造の空間だと思うタイヒミュラー距離 $d_{\mathcal{T}}$

がある．これらはタイヒミュラー空間を固有な距離空間とする．同様に，タイヒミュラー空間には様々なコンパクト化が知られている．

- $\mathcal{T}(S)$ を双曲構造の空間だと思うサーストン境界 $\partial_{\mathrm{Th}}\mathcal{T}(S)$ [FLP79]
- $\mathcal{T}(S)$ を複素構造の空間だと思うガーディナー・メジャー境界 $\partial_{\mathrm{GM}}\mathcal{T}(S)$ [GM91]

これらの距離とコンパクト化はホロ境界を通して，自然に結びつく．

定理 4.1 ([Wal14, LS14])**.** 以下が成り立つ．

- サーストン距離 d_{Th} に関するホロ関数境界はサーストン境界 $\partial_{\mathrm{Th}}\mathcal{T}(S)$ であり，
- タイヒミュラー距離 $d_{\mathcal{T}}$ に関するホロ関数境界はガーディナー・メジャー境界 $\partial_{\mathrm{GM}}\mathcal{T}(S)$ [GM91] である．

ここでもう一つ，タイヒミュラー空間における自然な距離であるWeil-Petersson 距離について考えるのは自然である．Weil-Petersson 距離については，例えばWolpert の文献 [Wol03, Wol10] などを参照して欲しい．ここでは簡単に結果をまとめるにとどめておく．

定理 4.2. [Masa21] タイヒミュラー空間にWeil-Petersson 距離 d_{wp} を入れた距離空間は，ホロ座標によってコンパクト化できる．

5. 繰り込み体積

論文 [Masa21] における，メインの対象は繰り込み体積 (renormalized volume) である．繰り込み体積は，Graham-Witten [GW99] による考察を元に，３次元双曲多様体について近年活発に研究されている対象である（[BBB19, KS08, KM18, Sch19] など）．特に擬フックス多様体に対して，繰り込み体積を考えることで関数

$$V_R : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$$

が定義できる．この関数は

- $V_R(X,Y) \geq 0$ であり $V_R(X,Y) = 0 \iff X = Y \in \mathcal{T}(S)$ [BBB19],
- $V_R(X,Y) = V_R(Y,X)$

を満たす．しかし，V_R は三角不等式を満たさないことがわかる [Masa21]．ホロ関数境界においては，三角不等式は至る所に現れる必須の条件であるが，次の結果で代用できることがわかる．

定理 5.1 ([Sch19, Theorem 5.4],[KM18])**.** $X, Y \in \mathcal{T}(S)$ とすると次が成り立つ．

1. $V_R(X,Y) \leq 3\sqrt{\pi(g-1)}d_{\mathrm{wp}}(X,Y)$,
2. $V_R(X,Y) \leq 6\pi(g-1)d_{\mathcal{T}}(X,Y)$.

以上の性質を念頭に，次のようにホロ関数を真似る．

定義 5.2. 点 $Z \in \mathcal{T}(S)$ に対して関数 $\nu_Z : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\nu_Z(X) := V_R(X,Z) - V_R(b,Z), \text{ for } X \in \mathcal{T}(S).$$

ν_Z を **体積ホロ関数** *(volume horofunction)* と呼ぶ．

さらに，繰り込み体積の微分に関する次の結果が知られている．

定理 5.3 ([KM18, Lemma 2.4], [Sch19, Corollary 3.13])**.** 任意の $Y \in \mathcal{T}(S)$ において，$V_R(\cdot, Y)$ は $\mathcal{T}(S)$ 上微分可能である．すなわち，$\sigma : [-1,1] \to \mathcal{T}(S)$ を微分可能な道とすると

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V_R(\sigma(t), Y) = -\mathrm{Re}\langle q_Y(\sigma(0)), \dot{\sigma}(0)\rangle.$$

が成り立つ．ここで $q_Y(X)$ はベアズ埋め込みを与える写像 $\mathcal{T}(S) \to \mathrm{QD}(S)$ であり（$\mathrm{QD}(S)$ は $\mathcal{T}(S)$ 上の正則２次微分の空間），$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は正則２次微分とベルトラミのペアリングである．

また，[BBB19] などで考えられている $-V_R$ の Weil-Petersson 測地流を考えると，正則２次微分 $q_Y(X)$ は方向を与えていると考えることもできる．したがって，V_R における “ホロ座標” を次のように定める発想に至る．

定義 5.4. 定数 $C := 3\sqrt{\pi(g-1)}$ とする．このとき，次のような空間を定義する．

$$\mathrm{LQ}(S) := \prod_{X \in \mathcal{T}(S)} \left\{[-Cd_{\mathrm{wp}}(b,X), Cd_{\mathrm{wp}}(b,X)] \times \mathrm{QD}_B(X)\right\},$$

(LQ は Lipschitz と Quadratic differential である). ここで $\mathrm{QD}_B(X)$ は $X \in \mathcal{T}(S)$ 上の正則２次微分で L^∞ ノルムが上から $3/2$ で抑えられている空間である（とくに，コンパクトな空間である）．$\mathrm{LQ}(S)$ は各点収束の位相，もしくは直積位相を入れる．

すると，ホロ関数やホロ座標と同様に次がわかる．

命題 5.5 ([Masa21])**.** 空間 $\mathrm{LQ}(S)$ はコンパクトで，距離付け可能である．

そして，ベアズ埋め込みなどの性質を用いると次が得られる．

定理 5.6. 写像 $\mathcal{V} : \mathcal{T}(S) \to \mathrm{LQ}(S)$ を

$$\mathcal{V}(Z) := (\nu_Z(X), q_Z(X))_{X \in \mathcal{T}(S)}$$

と定めると，$\mathcal{V}$ は像への同相写像である．

したがって，閉包 $\overline{\mathcal{V}(\mathcal{T}(S))}$ をとると，$\mathcal{T}(S)$ のコンパクト化が得られる．本番の講演では，さらにコンパクト化 $\overline{\mathcal{V}(\mathcal{T}(S))}$ の性質や，そこから得られる帰結について紹介する．

参考文献

[BBB19] Martin Bridgeman, Jeffrey Brock, and Kenneth Bromberg, *Schwarzian derivatives, projective structures, and the Weil-Petersson gradient flow for renormalized volume*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 5, 867–896, DOI 10.1215/00127094-2018-0061. MR3934591

[BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR1744486

[FLP79] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin et al. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66, Société Mathématique de France, Paris, 1979 (French). Séminaire Orsay; With an English summary. MR568308

[GM91] Frederick P. Gardiner and Howard Masur, *Extremal length geometry of Teichmüller space*, Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237, DOI 10.1080/17476939108814480. MR1099913

[GW99] C. Robin Graham and Edward Witten, *Conformal anomaly of submanifold observables in AdS/CFT correspondence*, Nuclear Phys. B **546** (1999), no. 1-2, 52–64, DOI 10.1016/S0550-3213(99)00055-3. MR1682674

[Gro81] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 183–213. MR624814

[KS08] Kirill Krasnov and Jean-Marc Schlenker, *On the renormalized volume of hyperbolic 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **279** (2008), no. 3, 637–668, DOI 10.1007/s00220-008-0423-7. MR2386723

[KM18] Sadayoshi Kojima and Greg McShane, *Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2403–2426, DOI 10.2140/gt.2018.22.2403. MR3784525

[LS14] Lixin Liu and Weixu Su, *The horofunction compactification of the Teichmüller metric*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 355–374, DOI 10.4171/117-1/9. MR3289706

[MT18] Joseph Maher and Giulio Tiozzo, *Random walks on weakly hyperbolic groups*, J. Reine Angew. Math. **742** (2018), 187–239, DOI 10.1515/crelle-2015-0076. MR3849626

[Masa21] Hidetoshi Masai, “Compactification and distance on Teichmüller space via renormalized volume”, preprint.

[Sch19] Jean-Marc Schlenker, *Volumes of quasifuchsian manifolds.* To appear, Surveys in Differential Geometry, vol. 24, 2020. arXiv:1903.09849.

[Wal14] Cormac Walsh, *The horoboundary and isometry group of Thurston's Lipschitz metric*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 327–353, DOI 10.4171/117-1/8. MR3289705

[Wol10] Scott A. Wolpert, *Families of Riemann surfaces and Weil-Petersson geometry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 113, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR2641916

[Wol03] Scott A. Wolpert, *Geometry of the Weil-Petersson completion of Teichmüller space*, Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002), Surv. Differ. Geom., vol. 8, Int. Press, Somerville, MA, 2003, pp. 357–393, DOI 10.4310/SDG.2003.v8.n1.a13. MR2039996

第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

On Vassiliev derivatives of Khovanov homology

吉田 純　(理化学研究所革新知能統合センター)[*1]
伊藤　昇　(茨城工業高等専門学校)[*2]

2021 年 8 月 24 日

1. Introduction

本稿では、**結び目** K とは円周 S^1 のユークリッド空間への滑らかな埋め込み $S^1 \to \mathbb{R}^3$ の像のことをいい、二つの結び目が $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーによって移り合う時、それらの結び目は**同値**であるという。結び目の分類は結び目理論の成立以来の中心的な問題の一つであり様々な枠組みで研究されてきたが、一つの自然な理解として結び目全体のなす空間 $\mathcal{K}$ を調べることが考えられる。Vassiliev [41] はこの空間 $\mathcal{K}$ のコホモロジーを特異点理論の観点から調べることで、今日では *Vassiliev* **不変量**または**有限型不変量**と呼ばれる一連の不変量を定義した。文献 [6, 7] によれば、Vassiliev 不変量は空間 $\mathcal{K}$ における「壁越え」を代数的に記述した以下の漸化式で定義される結び目不変量の**微分**によって特徴付けることができる:

$$v^{(r+1)}\Big(\Big) = v^{(r)}\Big(\Big) - v^{(r)}\Big(\Big) \quad . \tag{1.1}$$

一方、近年では結び目不変量の**圏化**が盛んに研究されるようになっている。n 変数の結び目多項式 v について、その圏化とは各結び目 K に対して $(n+1)$ 重次数付きの鎖複体 $C(K)$ を与える対応 $C(-)$ で以下を満たすものである:

- K と K' が同値な結び目ならば $C(K)$ と $C(K')$ は擬同型である、すなわちそのホモロジー群 $H(K)$ の同型類は結び目不変量である。
- i 次ホモロジー群の斉次分解 $H^i(K) = \bigoplus H^{i,j_1,\dots,j_n}(K)$ について、適切な正規化のもとで以下の等式が成り立つ:

$$v_K(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j_1,\dots,j_n} (-1)^i x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \operatorname{rank} H^{i,j_1,\dots,j_n}(K) \quad . \tag{1.2}$$

上記の性質から、このような結び目不変量は**結び目ホモロジー**とも呼ばれる。結び目不変量の圏化の端緒となったのは Khovanov [17] による Jones 多項式 [15] の圏化である。Khovanov の定義した結び目ホモロジー $Kh(K)$ は *Khovanov* **ホモロジー**と呼ばれている。その他、結び目フレアホモロジー [35, 31]、Khovanov-Rozansky ホモロジー [21, 23] などの結び目ホモロジーがある。

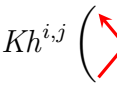
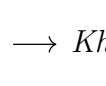
我々の研究の大きな目標は、これらの結び目ホモロジーを Vassiliev のような結び目の空間 $\mathcal{K}$ の上の高次元のコホモロジーとして捉えることである。これにより、Vassiliev

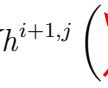
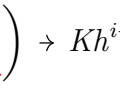
本研究は科研費 (課題番号:20K03604) の助成を受けたものである。一部、研究プロジェクト経費助成事業・研究ネットワーク形成支援事業「結び目量子情報トポロジーネットワーク」の補助も受けた。
[*1] e-mail: jun.yoshida@riken.jp
[*2] 〒 312-8508 茨城県ひたちなか市中根 866 茨城工業高等専門学校 国際創造工学科
e-mail: nito@gm.ibaraki-ct.ac.jp
web: https://researchmap.jp/noboru_ito

不変量の背景にあるより高次元の構造をホモトピー論の道具を用いて直接調べることが可能になり、結び目ホモロジーに対する Vassiliev 理論の類似を構成することが可能になると期待している。その最初の段階として Khovanov ホモロジーについて Vassiliev 微分 (1.1) の圏論的類似を構成し、古典的に知られる関係式について、それがホモロジーの段階で成立していることを示した。本質的には、これは交差交換に対応する以下の形の写像の実現である:

$\widehat{\Phi} : Kh\Big($ $\Big) \to Kh\Big($ $\Big)$. (1.3)

Khovanov ホモロジーを与える鎖複体の上にこのような写像を構成することで、それに付随する以下の長完全列によって Vassiliev 微分 (1.1) の圏化を与える:

$\cdots \to Kh^{i,j}\Big($ $\Big) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i,j}\Big($  $\Big) \longrightarrow Kh^{i,j}\Big($  $\Big)$

$\to Kh^{i+1,j}\Big($ $\Big) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i+1,j}\Big($  $\Big) \to Kh^{i+1,j}\Big($  $\Big) \to \cdots$. (1.4)

この長完全列は、式 (1.2) の意味での Euler 数において Vassiliev 微分 (1.1) を誘導することに注意されたい。すなわち長完全列 (1.1) は Jones 多項式の Vassiliev 微分の圏化である。我々は、このように二重点を持つ結び目に拡張された Khovanov ホモロジーが実際に特異結び目の不変量になることを示した。さらに、結び目多項式の Vassiliev 微分について古典的に知られる FI 関係式と 4 項関係式について、それらの圏化した類似を証明した。これら二つの関係式は、Vassiliev [41] 及び Kontsevich [27] による有限型不変量の空間の構造を記述において、最も基本的な関係式である。

本稿の目標は、我々の交差交換 (1.3) の概略を示し、上述の関係式の圏化が Vassiliev の枠組みにおいてどのようになされるのかを解説することである。

2. 結び目の空間と結び目不変量

まずはじめに、結び目の分類問題を、結び目の空間 $\mathcal{K}$ の観点から代数的に記述する方法を概説する。具体的には $\mathcal{K}$ を滑らかな埋め込み $S^1 \to \mathbb{R}^3$ の全体のなす空間とする。ここで、位相は Whitney C^∞-位相を考える。この時、空間 $\mathcal{K}$ の各点は具体的な結び目に対応し、またその上の道とは埋め込みのイソトピーに他ならない。ここで、イソトピー拡張定理 (例えば [12] を見よ) によって、埋め込みのイソトピーは常にアンビエントイソトピーに拡張できることに注意されたい。このことによって、結び目の同値類は $\mathcal{K}$ の弧状連結成分と一対一に対応する。すなわち、結び目の分類とは、弧状連結成分の集合 $\pi_0\mathcal{K}$ を求めることに他ならない。

分類問題に対しての一つの典型的なアプローチは不変量を用いることである。結び目理論もその例に漏れず、Alexander 多項式 [2], 符号数 [40, 30], Jones 多項式 [15], HOMFLY 多項式 [11, 34] など数多くの不変量が発見されてきた。このような結び目不変量は、上記の観点からはアーベル群 A への写像 $v : \pi_0\mathcal{K} \to A$ と見做せる。ところが、以下の同型によりこれは空間 $\mathcal{K}$ の 0 次のコホモロジー類に他ならない:

$$\mathrm{Map}(\pi_0\mathcal{K}, A) \cong \mathrm{Map}(\mathcal{K}, A)/(\text{ホモトピー}) \cong H^0(\mathcal{K}; A) \quad .$$

ここで A には離散位相を与えている。

上の定式化によれば、結び目の分類と結び目不変量の分類は双対であり、ともに空間 $\mathcal{K}$ のホモトピー型により決定される。より具体的には、$\mathcal{K}$ の 0 次の特異コホモロジーは以下の写像の核である:

$$H^0(\mathcal{K}; A) \cong \ker\left(A^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathrm{ev}_1^* - \mathrm{ev}_0^*} A^{\mathrm{Path}(\mathcal{K})}\right) \quad ,$$

ここで、$\mathrm{Path}(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ 上の連続な道 $I = [0,1] \to \mathcal{K}$ の全体で、$\mathrm{ev}_t : \mathrm{Path}(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ は $\mathrm{ev}_t(c) = c(t)$ で与えられる。従って $\mathcal{K}$ 上の道の構造を理解することで、結び目不変量のコホモロジー類としての姿が見えてくるはずである。

定義. 位相空間 X に対して、圏 $\Pi_1 X$ を以下で定義する:

- 対象の集合は X の点全体からなる;
- $x, y \in X$ に対し、射 $x \to y$ は連続な道 $c : I \to X$ で $c(0) = x$, $c(1) = y$ となるもののホモトピー類である;
- 合成は道の連結として定義される。

この圏 $\Pi_1 X$ を X の**基本亜群** *(fundamental groupoid)* と呼ぶ。

上の議論から、$\mathcal{K}$ の基本亜群 $\Pi_1\mathcal{K}$ はコホモロジー類としての結び目不変量を考察するために十分な情報を持っている。例えば、二つの結び目 K と K' が同値であるための必要十分条件は、それらが $\Pi_1\mathcal{K}$ の対象として同型であることであり、従って各結び目 K に元 $v(K) \in A$ を対応させる写像が結び目不変量であるための必要十分条件は、v の値が $\Pi_1\mathcal{K}$ の同型によって不変になることである。

さて、結び目不変量の構成及び計算の典型的な手法は、結び目図式を用いることである。その基礎となるのが Reidemeister の定理であるが、Carter-斎藤 [9] 及び Roseman [36] の特異点の解析により、これは基本亜群の以下の記述を与える:

定理 2.1 (本質的には [9] 及び [36])**.** 圏 $\Pi_1\mathcal{K}$ は以下で記述される圏と圏同値である*:*

- 対象は結び目図式のイソトピー類である*;*
- 射は表 *2.1* の平面曲線の特異点に対応する図式の移動によって生成される *(*これは *Reidemeister* 移動と呼ばれる*);*
- 射集合は以下で生成される同値関係の商集合である*:*
  - (i) *Reidemeister* 移動はその逆向きの移動の逆射である*;*
  - (ii) 重なりを持たない部分図式に適用される *Reidemeister* 移動同士は可換である*;*
  - (iii) 表 *2.2* にある特異点と対応する移動*.*

注意 2.2. Carter-斎藤 [9] ではさらに一般に、曲面結び目の移動の生成元を導出しており、それらは**ムービー移動**と呼ばれている。Theorem 2.1 で述べられている 表 2.2 に対応する移動は、その中で (コボルディズムとして) 可逆なものに対応している。

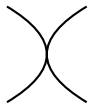
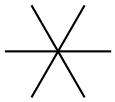
RI	RII	RIII
		
(t^2, t^3)	$(\pm t^2, t)$	triple point

表 2.1: Reidemeister 移動に対応する特異点

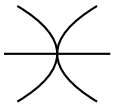
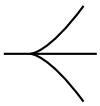
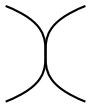
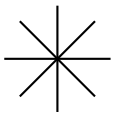
MM6	MM7	MM8	MM9	MM10
				
$(\pm t^2, t)$ and $(t, 0)$	(t^2, t^5)	(t^2, t^3) and $(0, t)$	$(\pm t^3, t)$	quadruple point

表 2.2: 可逆なムービー移動に対応する特異点

3. Khovanov ホモロジーと空間 $\mathcal{K}$

前節の結び目の空間 $\mathcal{K}$ を用いた枠組みは、アーベル群に値を取る結び目不変量を対象にしたものであったが、実は Khovanov ホモロジーも同様に $\mathcal{K}$ の枠組みで整理できる。本節ではこのことを詳しく見る。

Khovanov ホモロジーは Khovanov [17] によって考案され、その Euler 数は (空集合に関して正規化された) Jones 多項式と一致する。まずはその構成について簡単に復習する。多項式環 $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2) \cong \mathbb{Z}\{1, x\}$ を考え、その上に以下の**余積** Δ と**余単位射** ε を考える:

$$\Delta : A \to A \otimes A \ ; \quad \begin{cases} 1 & \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1 \ , \\ x & \mapsto x \otimes x \ ; \end{cases} \quad , \quad \varepsilon : A \to \mathbb{Z} \ ; \quad \begin{cases} 1 & \mapsto 0 \ , \\ x & \mapsto 1 \ . \end{cases}$$

また、積 $\mu : A \otimes A \to A$ 及び単位射 $\eta : \mathbb{Z} \to A$ とすると、これらの演算によって $(A; \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ は Frobenius 代数になる。ところで、Frobenius 代数は Atiyah [3] の意味での 2 次元の位相的量子場の理論 (TQFT) と同値であることが知られており、以下の対称モノイダル関手を引き起こす:

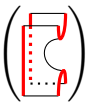
$$Z_A : \mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{Ab} \quad .$$

ここで、$\mathbf{Cob}_2$ 及び $\mathbf{Ab}$ はそれぞれ 1 次元向き付き閉多様体とそれらの間の 2 次元向き付きコボルディズムの圏及びアーベル群と群準同型の圏である。$\mathbf{Cob}_2$ の各対象は円周 S^1 の有限個の非交和であり、関手 Z_A は対象について以下のように定める：

$$Z_A\Big(\overbrace{S^1 \amalg \cdots \amalg S^1}^{n}\Big) := A^{\otimes n} \quad .$$

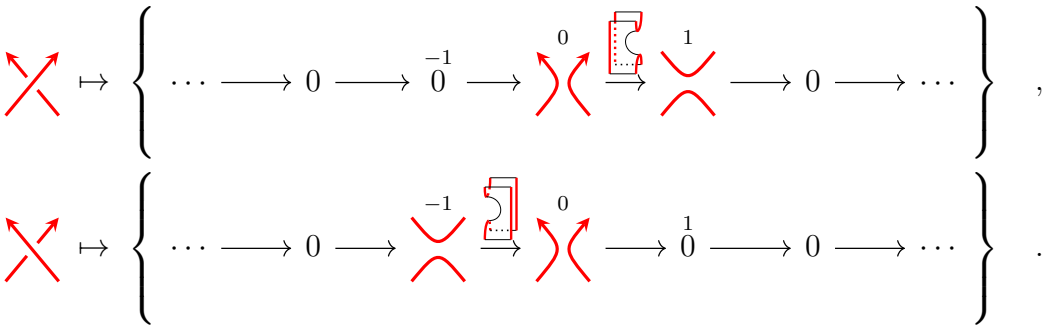
一方 $\mathbf{Cob}_2$ の射は 2 次元の場合のモース特異点に対応するコボルディズムで生成され

ており、それぞれについて Z_A は以下の射を対応させる:

$Z_A\Big($  $\Big) = \mu : A \otimes A \to A$ または $\Delta : A \to A \otimes A$,

$Z_A\Big($ $\Big) = \eta : k \to A$, $Z_A\Big($ $\Big) = \varepsilon : A \to k$.

この関手 Z_A を用いて、各結び目図式 D について鎖複体 $C(D)$ を以下のように定義する。まず、D の各交点について、水平方向及び垂直方向の二種類の平滑化を考え、その符号に応じて局所的に以下のコボルディズムの鎖複体を考える[1]:



(3.1)

図式 D の交点の集合を $c(D)$ とおくと、全ての交点を平滑化する方法は $2^{c(D)}$ 通り考えられるが、その結果は全て平面上の円周の非交和であり、また上記の方法によってそれぞれ(コ)ホモロジカルな次数を付与される。そこで、各平滑化に関手 Z_A を適用して得られる次数付きアーベル群を $C^*(D)$ と置き、鎖複体のテンソル積の要領で微分を誘導することで鎖複体を得る。さらに $Z_A(S^1) = A \cong \mathbb{Z}\{1, x\}$ であることに注意し、$\deg 1 = 1$, $\deg x = -1$ と定めることによって $Z_A(S^1)$ に次数を付与することで $C^*(D) = C^{*,\star}(D)$ は二重次数付き鎖複体となる。この $Z_A(S^1)$ の次数から誘導される $C(D)$ の次数を、(コ)ホモロジカルな次数と区別するために**量子次数**と呼ぶ。量子次数を適切に補正することで $C^*(D)$ の微分は量子次数を保つことが示される。

定理 3.1 (Khovanov [17])**.** 結び目図式 D に対して、二重次数付き鎖複体 $C^{*,\star}(D)$ は以下の性質を満たす*:*

(1) D_1, D_2 が *Reidemeister* 移動によって移り合う時、鎖ホモトピー同値 $C^{*,\star}(D_1) \simeq C^{*,\star}(D)$ が存在する。特に、そのホモロジー群

$$Kh^{i,j}(D) := H^i(C^{*,j}(D))$$

の同型類は結び目不変量を定義する。特に D が結び目 K の図式である時、上の群を $Kh^{i,j}(K)$ と書き、K の *Khovanov* ホモロジーと呼ぶ。

(2) D が表す結び目を K とする時、次式が成立する*:*

$$V_K(t)|_{t=q^2} = \frac{1}{q+q^{-1}} \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{Q}} Kh^{i,j}(D) \otimes \mathbb{Q} \quad .$$

すなわち *Khovanov* ホモロジーは *Jones* 多項式の圏化である。

[1] ここで、水平方向の平滑化については特殊な向きを入れる必要がある。詳細は [44] を参照されたい。

さて、本節の目標は Khovanov ホモロジーを $\Pi_1\mathcal{K}$ からの関手と見做すことであった。Khovanov ホモロジーそのものは二重次数付きアーベル群の圏に値を持つが、圏化の観点からは導来圏を考えることが自然である。可換環 k について $\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}}$ を全次元有限の次数付き k-加群と次数を保つ k-準同型のなす圏とし、$D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}})$ をその有界導来圏とする。この圏の対象は有限次元のホモロジーを持つ k 上の二重次数付き鎖複体であるから、上記の構成により $Kh(D)\otimes k$ を $D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}})$ の対象と思うことができる。さらに射の対応を定義する必要があるが、Theorem 2.1 により、これは以下の手順でなされる:

- Reidemeister 移動に対応して、具体的な鎖ホモトピー同値を構成する;
- Reidemeister 移動の列について 表 2.2 の特異点に対応するムービー移動で不変であることを確認する。

定理 3.2 (本質的には [10])**.** *Khovanov* ホモロジーの構成は以下の関手を定義する*:*

$$Kh : \Pi_1\mathcal{K} \to D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grVect}_k^{\mathsf{f}}) \quad .$$

注意 3.3. 上の構成は全て一般の絡み目図式 D について意味を持つ。従って Theorem 3.2 の関手は絡み目の空間の基本亜群からの関手に拡張される。

4. Vassiliev 理論における交差交換と Khovanov ホモロジーの Vassiliev 微分

本稿の冒頭で、Vassiliev 理論は空間 $\mathcal{K}$ のホモトピーを調べることによって始まったと述べた。本節ではそのことを簡単に説明した後、前節で定義した $\Pi_1\mathcal{K}$ からの関手としての Khovanov ホモロジーについて、我々の定義した Vassiliev 微分について解説したい。

今、S^1 から $\mathbb{R}^3$ への滑らかな写像全体を $\mathcal{M} := C^\infty(S^1,\mathbb{R}^3)$ と書き Whitney C^∞-位相を入れる。結び目の空間 $\mathcal{K} = \mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^3)$ は $\mathcal{M}$ の開集合である。一方、その補集合 $\Sigma = \mathcal{M}\setminus\mathcal{K}$ は何らかの意味での特異点を持つ写像の全体であり、Thom-Boardman 理論 [8] による特異点の次数によって $\Sigma = \bigcup_{i=1}^\infty \Sigma_i$ と分解される [2]。ここで、各 Σ_i は $\mathcal{M}$ において余次元 i の局所閉部分空間であり、特に次数の低いものについては以下のように書ける:

- Σ_1 は唯一の二重点を持つはめ込み写像の全体である、すなわちこれは二重点が丁度一つの特異結び目の空間である;
- Σ_2 は以下の二種類の特異点を持つ写像の全体である:
  - (i) 二重点が丁度二つのはめ込み写像;
  - (ii) 丁度一つの危点を持つ単射;

[2] 正確にはこの分解は $\Sigma_\infty \cup \bigcup_i \Sigma_i$ と書かれるべきである。ただし Σ_∞ は $\mathcal{M}$ において余次元が無限大なので、ホモトピー論の観点からは無視して良い。

Vassiliev [41] の基本的なアイデアは以下の通りである。まず空間 $\mathcal{M}$ は可縮であることに注意する。すると $\Sigma = \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ の形より、Alexander 双対を用いて以下の同型を得る:

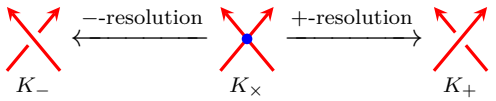
$$\widetilde{H}^*(\mathcal{K}) \cong \overline{H}_{\infty-*-1}(\Sigma) \quad . \tag{4.1}$$

ただし、左辺は $\mathcal{K}$ の既約コホモロジーであり、右辺は Σ の有限次元近似に関する Borel-Moore ホモロジーの余極限である。さて $\Sigma = \bigcup_{i>1} \Sigma_i$ であったら、これにより Σ にフィルトレーションを入れて、以下の形のスペクトル系列を得る:

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{K}) \quad . \tag{4.2}$$

第 2 節の考察によって、結び目不変量とは $\mathcal{K}$ の 0-次のコサイクルに他ならないのだから、上のスペクトル系列において $E_r^{-i,i}$ の形の群は結び目不変量の情報を持っているはずである。Vassiliev は $E_1^{-i,i}$ 及び $E_2^{-i,i}$ に関して組み合わせ的な記述を与えることによって、一連の不変量を定義した。これは後に Kontsevich [27] によってコード図式のなす代数系の言葉によって整理され、有理係数の場合には Vassiliev 型の不変量は $E_2^{-i,i}$ の形の群全体によって完全に決定されることが示された。

上記の Vassiliev の理論を低次の場合にもう少し具体的に見てみよう。同型 (4.1) は大雑把に言えば、Σ の Borel-Moore サイクル c に対して、$\mathcal{M}$ における c と $\mathcal{K}$ のサイクルとの (一般化された) 絡み数を考えることで $\mathcal{K}$ 上のコサイクルを誘導している。よって $v \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K})$ がスペクトル系列の項 $E_\infty^{-i,i}$ の像に入るための条件とは、それが Σ_i の Borel-Moore サイクルとのペアリングで自明となることである。例えば $i = 1$ の場合、これは以下のような条件として書き下せる。$K_\times$ を丁度一つの二重点を持つ特異結び目とし、その二重点を正負の交点に解消したものをそれぞれ $K_\pm$ とする:



.

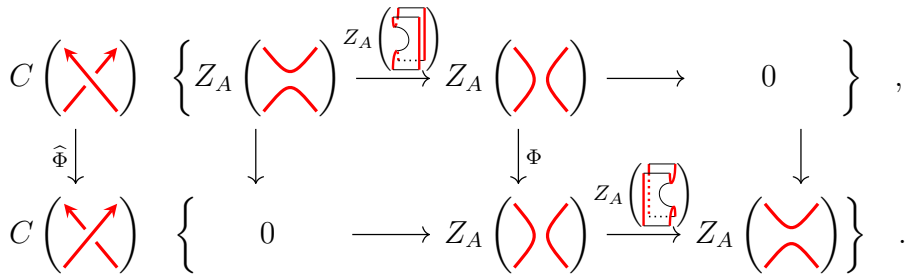
結び目不変量 $v \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K})$ が次数 1 の Vassiliev 不変量であるための条件は全ての $K_\times \in \Sigma_1$ に対して $v(K_+) - v(K_-) = 0$ となることである。これは v が交差交換によって不変であることを意味しており、よって次数 1 の Vassiliev 不変量は全て自明である。Birman [6] 及び Birman-Lin [7] により、実は高次の Vassiliev 不変量についても、v を以下の漸化式 (1.1) によって特異結び目に拡張したものによって特徴付けられることが示された。こうして得られた特異結び目の不変量 $v^{(r)}$ を r-**次の** *Vassiliev* **微分**と呼ぶ。

定理 4.1 (Birman [6], Birman-Lin [7])**.** 結び目不変量 $v \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K})$ について、それが r-次の *Vassiliev* 不変量であるための必要十分条件は、$v^{(r)} \not\equiv 0$ かつ $v^{(r+1)} \equiv 0$ となることである。

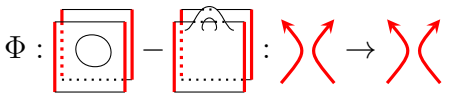
さて、$\mathcal{K}$ の立場からは、漸化式 (1.1) は $\mathcal{K}$ の連結成分を隔てる「壁」である Σ_1 を越えた時に v の値がどのように変化するかを測っていると考えられる。よって、Vassiliev スケイン関係式 (1.1) の Khovanov ホモロジーにおける類似を考えるには、この「壁越え」を鎖複体の上の以下の形の射として実現することが本質的である:

$$\widehat{\Phi} : C\left(\quad\right) \to C\left(\quad\right) \quad .$$

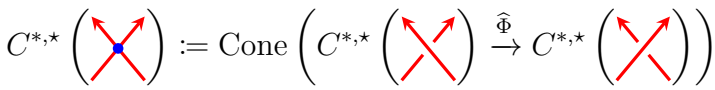
我々は文献 [13, 14] において、この射 $\widehat{\Phi}$ を以下によって記述される射として実現した:



ここで、Φ は以下のコボルディズムの形式和から誘導される射である:

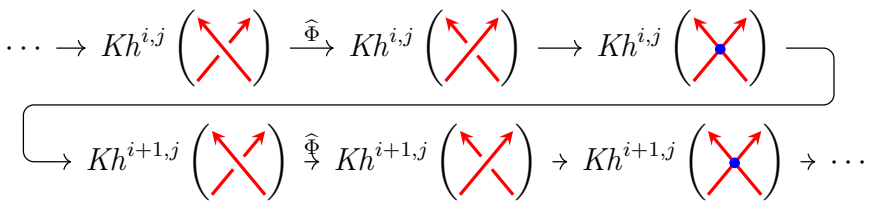


これを用いて、Khovanov ホモロジーの Vassiliev 微分として、二重点を持つ結び目図式についての Khovanov 鎖複体を以下の漸化式によって定義する:



ここで Cone(−) は鎖複体の写像錐である。

定理 4.2 (伊藤-吉田 [13, 14])**.** 上で拡張された *Khovanov* ホモロジーは特異結び目の不変量を定め、さらに各二重点に対して、以下の長完全列が存在する*:*

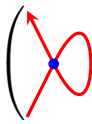


5. FI 関係式と 4 項関係式

前節では Vassiliev 微分は空間 $\mathcal{K}$ と特異結び目の空間 $\Sigma = \bigcup_{i>0} \Sigma_i$ とのペアリングで理解できることを説明したが、高次の Vassiliev 不変量に関しては Σ_i が大きな余次元を持つので、一般にはそれが Vassiliev 微分に導く関係式は単純な二項の漸化式ではない。Kontsevich [27] は有理係数の Vassiliev 不変量の構造をコード図式の言葉で整理する中で、FI 関係式と 4 項関係式と呼ばれる二つの関係式が全ての関係式を生成することを指摘した。本節ではこれらの類似が Khovanov ホモロジーにおいて成立していることを示す。

5.1. FI 関係式

特異結び目の不変量 v が FI 関係式を満たすとは、以下の等式が成立することである:



$$= 0 \quad . \tag{5.1}$$

これは、$\mathcal{K}$ のホモトピー論の立場からは、Figure 5.1 の二つの経路でのモノドロミー作用が自明になることを意味している。すなわち、結び目ホモロジーの観点では、これ

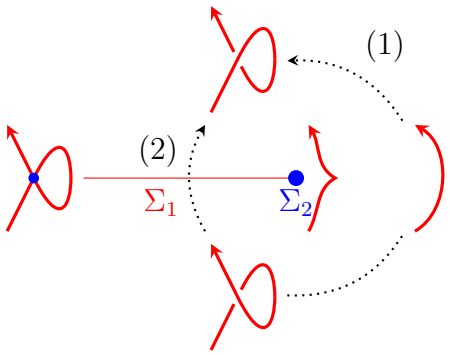
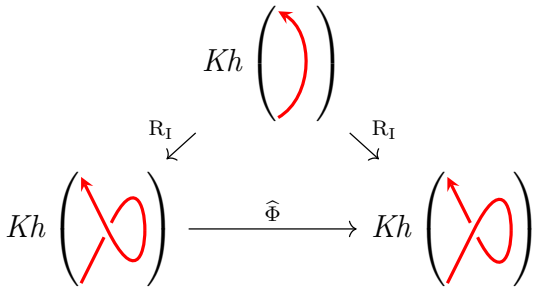


図 5.1: Two paths for the FI relation

は交差交換の射 $\widehat{\Phi}$ がタイプ I の Reidemsiter 移動と可換であることを意味している。特に、任意の結び目不変量に対して、その Vassiliev 微分は FI 関係式を満たしている。よって、結び目ホモロジーについても、その Vassiliev 微分が FI 関係式の圏化された類似を満たすことが期待される。

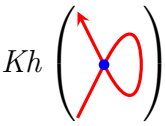
定理 5.1. *第 4 節で定義した交差交換の射 $\widehat{\Phi}$ について、$D^{\mathsf{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathsf{f}})$ の以下の図式は可換である:*



(5.2)

すなわち、$\widehat{\Phi}$ はタイプ I の Reidemeister 移動と可換である。

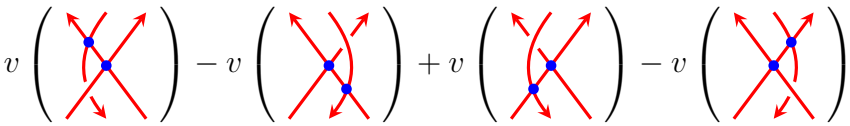
図式 (5.2) において、上から下への二つの射は擬同型である。従って、この場合の $\widehat{\Phi}$ もやはり擬同型であり、よって Theorem 4.2 より以下を得る:



このことから、Theorem 5.1 は FI 関係式の圏化された類似であるといえる。

5.2. 4 項関係式

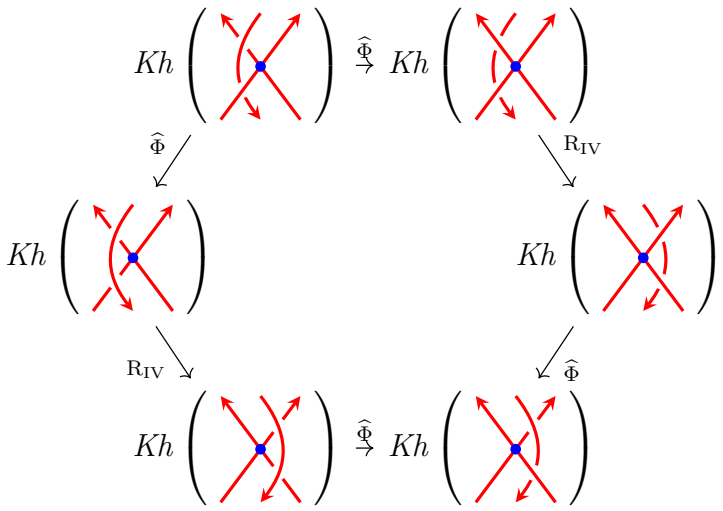
4 項関係式については、通常はコード図式に関して書かれるが、それを結び目図式の場合に書き下すと以下のようになる。特異結び目不変量 v が 4 項関係式を満たすとは、以下の等式が成立することである:



任意の結び目不変量に関して、その Vassiliev 微分は 4 項関係式を満たす。実際に、上式を $v^{(r)}$ の場合で見ると、各二重点での値を全て v で書き下してみるとタイプ III の

Reidemeister 移動で移り合う図式同士が互いに打ち消し合うことを確認できる。一方、結び目ホモロジーにおいては Reidemeister 移動は具体的に与えられた擬同型である。よってこの場合の 4 項関係式は、適切な可換図式として理解できると考えられる。

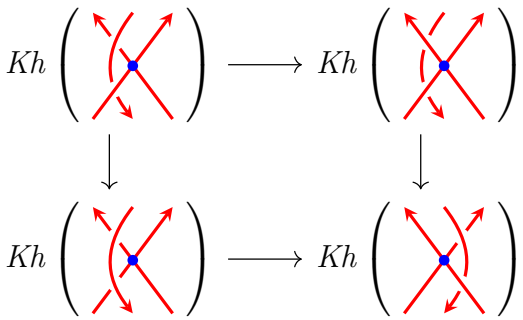
定理 5.2 (in preparation)**.** *第 4 節で定義された Khovanov ホモロジーの Vassiliev 微分について、以下の* $D^{\mathrm{b}}(\mathbf{grMod}_k^{\mathrm{f}})$ *の図式はホモトピー同値の差を除いて可換である:*



(5.3)

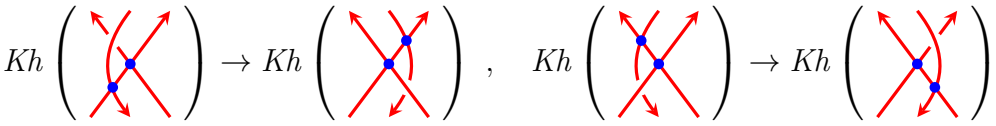
ここで $\mathrm{R_{IV}}$ はタイプ *III* の *Reidemeister* 移動が *Vassiliev* 微分に誘導する擬同型である。

図式 (5.3) の擬同型 $\mathrm{R_{IV}}$ の射を無視して書けば、これは以下のホモトピー可換図式として書ける:



(5.4)

Khovanov ホモロジーでの Vassiliev 微分の定義から、図式 (5.4) の縦横の射はそれぞれ以下の射を誘導する:



これらの射の写像錐は、ともに図式 (5.4) を三重複体と思った時の全複体と擬同型なので、従ってこれらは擬同型である。この事実を用いると、(5.4) の各項の Euler 数に誘導される関係式は、通常の 4 項関係式の他ならない。すなわち、Theorem 5.2 は 4 項関係式の圏化された類似である。

6. Vassiliev 理論と Khovanov 理論の関係について

最後に、本研究の背景と未来について俯瞰的に概説する。本節では 2010 年–2015 年頃の海外における圏化 (カテゴリフィケーション、カテゴリー化、圏論化) の雰囲気を、

特に低次元トポロジーの観点から感じたままの印象を持ち込んでいることをお許しいただきたい。

Vassiliev 理論 [41] と Khovanov 理論 [17] は数学としてそれぞれの由緒正しい起源がある。またこの２つの理論については 1990 年代以降、2000 年代以降に「爆発的」に関連論文が出たということでも知られる。これらはそれぞれ数学理論として根源的な部分を扱っており、数学が何らかの意味で進んでいくものであるならば、真っ当な方向として深めていかれるはずのものであることは間違いない。この２つの理論は半世紀先後もおそらく未解決の問題を持ちながら発展しているであろう。例えば Vassiliev 不変量に関しては次の有名な予想[3]があり未だ解決していない[4]。

予想 (Vassiliev [41])**.** Vassiliev 不変量は任意の異なる結び目を判別する。

Vassiliev 理論と Khovanov 理論、これらはもともと物理学の観点からは結びついていた。有名事実としては Witten [43] により Jones 多項式は Chern-Simons 理論から非摂動論として得られている。その一方で Chern-Simons 摂動論では摂動展開の係数が Vassiliev 不変量となり [4]、Khovanov 理論は refined-Chern Simons 理論に対応するとされる [1]。

2010 年頃といえば link homology 周辺では数学において２つの大きな未解決問題が提示されていた (下記の「Khovanov の問題」)。量子 $\mathfrak{sl}_2$ 表現の Jones 多項式に応じて Khovanov homology という圏化が Khovanov [17] により発見され、以降 Alexander 多項式に対して (Ozsváth-Szabó [31, 35])、HOMFLY-PT 多項式に対して (Khovanov-Rozansky [22, 24])、次々と圏化が見つかってきた。その流れの中で Khovanov [18], Stroppel [39] がそれぞれ ICM2006, ICM2010 の論文において問題として挙げていたものである。

Khovanov の問題

(1) Categorify polynomial invariants $P(L, \mathfrak{g})$ of knots and links associated to arbitrary complex simple Lie algebras $\mathfrak{g}$ and their irreducible representations.

(2) Categorify the Witten-Reshtikhin-Turaev invariants of 3-manifolds.

目標の的がぼやけてしまうかもしれないが、予稿集という性格上、非専門家向けに言い換えておく。

(A) 一般の量子 $\mathfrak{g}$ 表現における結び目量子不変量の圏化は何か？

(B) ３次元多様体の量子不変量の圏化は何か？

筆者 (伊藤) が 2011 年にトポロジーシンポジウムで講演させていただいた後といえば、前者の問題については Kang-柏原 [16] および Webster [42] による表現の圏化に関する論文が話題をさらい、もっと先にある多くの問題の解決が一気に進むのではないかという気運が高まったのは事実である[5]。実際、これらのことによって量子群の圏化 (KLR 代数 [19, 20, 37]) が具体的に使われる様子が理解されたといえよう。ただ、低

[3] [33, Page 46] では、“the Vassiliev Conjectue"という言い方がなされている。
[4] 但し、pure braids は Vassiliev 不変量により判別されることが河野俊丈によって示されている [26]。
[5] 筆者 (伊藤) も当時 Khovanov 研の学生さん達と一緒に Webster の論文を読んだりしてセミナーをしていた。

次元トポロジーの観点からは、上記の Khovanov の元々の問題は魅力的なまま残っているともいえる。なお、後者である３次元多様体の問題については各方面で大きな努力がなされ、道具立てとなる対象物の圏化は行われていながらも未解決である。

一方、Vassiliev 不変量が多項式となる結び目量子不変量に対して普遍性をもつものであることがいくつかの証明 (Piunikhin [32] もしくは河野俊丈の定理 [25] の系 [5]) によって明らかになっているため、次のようにも考えられよう。

Khovanov の問題 ((1)) に直接答えるために、任意の量子不変量を次数付き Euler 数として複体を構成するのは真正面の答えである。また量子不変量を Taylor 展開した各係数 (Vassiliev 不変量) の圏化を与えることができるなら、それも一つの答え方である。

ただし、以前筆者 (伊藤) は、この後者の考えは本当に筋のいいものかどうか疑問をもっていたし、周囲もそうであったのではないだろうか。なぜなら、Chern-Simons 摂動論から導かれる Vassiliev 不変量がある一方でせっかく Witten による厳密解を求める立場 (非摂動論) で述べられた Jones 多項式をもう一度近似解を求める立場 (摂動論) に戻すかのような錯覚があったからである。Khovanov 理論と Vassiliev 理論がどうして２０年以上具体的に結びつかなかったか、と問われれば、１０年前から現場にいた立場として、次の２つの若干懐疑的な雰囲気が長い間影響していたかもしれない、と答えるだろう。

- Shirokova-Webster [38] のような、Khovanov-Rozansky homology を経由した Vassiliev 定義関係式の圏化[6]についての「存在性」の確認はあったとはいえ、具体的な構成については当時、手法が全くと言っていいほどなかった。
- 脱圏化された状態においては物理学で Vassiliev 不変量がなす役割は明確である一方で、Vassiliev 不変量が圏化された理論がどう展開されるのか、圏化された対象物が物理理論でどう見えるかについて、物理学からの示唆は見えにくい状態にあった。

今回の一連の結果はこういった懐疑的な気分や錯覚から目を覚まさせるものであったといっていい (その意味で河野俊丈先生のアドバイスおよび、先入観のない吉田純氏のアプローチに依るところが大きかった)。実際、交差交換を圏化するコボルディズムが位相的場の理論 (TQFT) の文脈で発見され、そのことで Vassiliev 不変量の定義関係式が完全系列として圏化された [13, 14]。そして Kontsevich [29, 28] が Vassiliev 不変量をなす空間を生成する代数の関係式として述べた FI 関係式 (別名 one term-relation)、4 項関係式いずれもがまた圏化されたからである[7] (FI 関係式については [13, 14]、4 項関係式については本講演が初出となる)。

結果として例えば結び目解消数の評価に使われる Jones 多項式の特殊値の関係式が圏化された形で現れるだけでなく、交差交換をうまく利用できる無限列においては従来の Khovanov homology と全く異なる計算法も導出された (吉田純の単著 [45])。

位相的場の理論における交差交換の記述が引き起こす Vassiliev 定義関係式の圏化から FI 関係式, 4 項関係式の圏化へと続く議論は、2015 年前後に J. Rassmussen, S. Gukov,

[6] 伊藤-吉田 [13, 14] により明示的に解決された。

[7] Kontsevich の結果は次のように述べられる: V_n を n 次以下の Vassiliev 不変量が生成する線形空間、Δ_n を n-chord diagrams が生成する線型空間を FI 関係式 と 4 項関係式で割った商空間とする。このとき次の同型が成り立つ: $V_n/V_{n-1} \simeq \Delta_n^*$.

A. Lobb 等の seminar に身をおいていた当時の筆者 (伊藤) は、おそらく驚くだろうし、当時の議論していた人々もきっとそうなのではないかと推測する。一方で、ひょっとすると高いレベルの専門家 (有識者) にとっては、さもありなん、という理論なのかもしれない。いずれにしても発展の様相や全貌が掴めないまま、例えば筋の良さそうな射が次々に見つかっている。FI 関係式においては特異点カスプのモノドロミーと Khovanov homology の同型射の完全な対応があり [13, 14]、4 項関係式は「壁超え (wall-crossing)」のモノドロミーを表すため、「壁越え」に関する圏論的な記述が期待されている。

このような努力を続けていけば、Vassiliev 不変量との関係が深く理解されている pure braid の構造との直接的な関連付け、もしくは R 行列とその逆行列の差の圏化が見通せるかもしれない。これらは Vassiliev 不変量の圏化への示唆を与えるだろうし、そうすれば string link に関しては Milnor 不変量の圏化も視野に入ってくるに違いない。Vassiliev 理論と Khovanov 理論との邂逅は始まったばかり、しかしながら着実に歩み出したといえる。

参考文献

[1] M. Aganagic and S. Shakirov. Knot homology and refined Chern-Simons index. *Comm. Math. Phys.*, 333(1):187–228, 2015.

[2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.

[3] M. Atiyah. Topological quantum field theories. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 68(1):175–186, 1988.

[4] D. Bar-Natan. *Perturbative aspects of the Chern-Simons topological quantum field theory.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1991. Thesis (Ph.D.)–Princeton University.

[5] D. Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, 34(2):423–472, 1995.

[6] J. S. Birman. New points of view in knot theory. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 28(2):253–287, 1993.

[7] J. S. Birman and X.-S. Lin. Knot polynomials and Vassiliev's invariants. *Inventiones Mathematicae*, 111(2):225–270, 1993.

[8] J. M. Boardman. Singularities of differentiable maps. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 33:21–57, 1967.

[9] J. S. Carter and M. Saito. *Knotted Surfaces and Their Diagrams.* Number 55 in Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1998.

[10] D. Clark, S. Morrison, and K. Walker. Fixing the functoriality of Khovanov homology. *Geometry & Topology*, 13(3):1499–1582, 2009.

[11] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 12(2):239–246, 1985.

[12] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[13] N. Ito and J. Yoshida. Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(7):2050051, 24, 2020.

[14] N. Ito and J. Yoshida. A cobordism realizing crossing change on $\mathfrak{sl}_2$ tangle homology and a categorified Vassiliev skein relation. *Topology Appl.*, 296:107646, 31, 2021.

[15] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):103–111, 1985.

[16] S.-J. Kang and M. Kashiwara. Categorification of highest weight modules via Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Invent. Math.*, 190(3):699–742, 2012.

[17] M. Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.*, 101(3):359–426, 2000.

[18] M. Khovanov. Link homology and categorification. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 989–999. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[19] M. Khovanov and A. D. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I. *Represent. Theory*, 13:309–347, 2009.

[20] M. Khovanov and A. D. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(5):2685–2700, 2011.

[21] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fundamenta Mathematicae*, 199(1):1–91, 2008.

[22] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fund. Math.*, 199(1):1–91, 2008.

[23] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. II. *Geometry & Topology*, 12(3):1387–1425, 2008.

[24] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. II. *Geom. Topol.*, 12(3):1387–1425, 2008.

[25] T. Kohno. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(4):139–160, 1987.

[26] T. Kohno. Vassiliev invariants and de Rham complex on the space of knots. In *Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993)*, volume 179 of *Contemp. Math.*, pages 123–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[27] M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gel′fand Seminar*, volume 16 of *Advances in Soviet Mathematics*, pages 137–150. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[28] M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[29] M. Kontsevich. Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97–121. Birkhäuser, Basel, 1994.

[30] K. Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Transactions of the American Mathematical Society*, 117:387–422, 1965.

[31] P. Ozsváth and Z. Szabó. Holomorphic disks and knot invariants. *Adv. Math.*, 186(1):58–116, 2004.

[32] S. Piunikhin. Weights of Feynman diagrams, link polynomials and Vassiliev knot invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 4(1):163–188, 1995.

[33] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky. *Knots, links, braids and 3-manifolds*, volume 154 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology, Translated from the Russian manuscript by Sossinsky [Sosinskiĭ].

[34] J. H. Przytycki and P. Traczyk. Invariants of links of Conway type. *Kobe Journal of Mathematics*, 4(2):115–139, 1988.

[35] J. A. Rasmussen. *Floer homology and knot complements*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2003. Thesis (Ph.D.)–Harvard University.

[36] D. Roseman. Projections of codimension two embeddings. In C. M. A. Gordon, V. F. R. Jones, and et al., editors, *Knots in Hellas '98 – Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Its Ramifications*, volume 24 of *K & E series on knots and*

everything, pages 380–410. World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2000.

[37] R. Rouquier. 2-kac-moody algebras, 2008.

[38] N. Shirokova and B. Webster. Wall-crossing morphisms in khovanov-rozansky homology, 2007.

[39] C. Stroppel. Schur-Weyl dualities and link homologies. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, pages 1344–1365. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[40] H. F. Trotter. Homology of group systems with applications to knot theory. *Annals of Mathematics. Second Series*, 76:464–498, 1962.

[41] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, volume 1 of *Adv. Soviet Math.*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[42] B. Webster. Knot invariants and higher representation theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 250(1191):v+141, 2017.

[43] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. In *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, volume 9 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 239–329. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[44] J. Yoshida. Decomposition of the first Vassiliev derivative of Khovanov homology and its application. arXiv:2007.15867, 2020.

[45] J. Yoshida. Decomposition of the first vassiliev derivative of khovanov homology and its application, 2020.

第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

LMO 関手を用いた不変量と写像類群への応用

野崎　雄太　(広大先進理工)*

概　　要

本稿の目的は，曲面の写像類群の部分群である Torelli 群や Johnson 核さらにその 3 次元類似であるホモロジーシリンダーに関して，最近の研究を紹介することである．筆者は佐藤正寿氏（東京電機大学）と鈴木正明氏（明治大学）との共同研究 [37, 38] において，ホモロジーシリンダーのなすモノイド上に LMO 関手に由来する準同型を構成した．その準同型の性質と様々な応用についてまとめる．

1. 背景と動機

種数 g で境界成分 1 個の向き付けられたコンパクト曲面を $\Sigma_{g,1}$ で表し，$\mathcal{M}_{g,1}$ をその写像類群 $\pi_0(\{f \in \mathrm{Homeo}(\Sigma_{g,1}) \mid f|_{\partial\Sigma_{g,1}} = \mathrm{id}\})$ とする．写像類群は 1 次ホモロジー群 $H = H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z})$ に自然に作用し，Torelli 群と呼ばれる部分群 $\mathcal{I}_{g,1} = \mathrm{Ker}(\mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}(H))$ が定まる．Torelli 群は写像類群の研究において重要な役割を果たしており，本研究の主役の1つである．さて，群を調べる上でその Abel 化を求めることは基本的と言える．Torelli 群の Abel 化は Johnson [19] によって決定され，具体的には第 1 Johnson 準同型 $\tau_1 \colon \mathcal{I}_{g,1} \to \bigwedge^3 H$ と Birman-Craggs 準同型が鍵となった．ここで $\mathcal{I}_{g,1}(1) = \mathcal{I}_{g,1}$, $\mathcal{I}_{g,1}(n+1) = [\mathcal{I}_{g,1}(n), \mathcal{I}_{g,1}]$ によって定まる降中心列 $\mathcal{I}_{g,1}(1) \supset \mathcal{I}_{g,1}(2) \supset \cdots$ を考え，Abel 群の直和 $\mathfrak{t}_{g,1}^{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1)$ を $\mathcal{I}_{g,1}$ の線形化と見なす．最初の次数商 $\mathcal{I}_{g,1}(1)/\mathcal{I}_{g,1}(2)$ は Abel 化に他ならない．$n \geq 2$ に対する次数商は，$\mathfrak{t}_{g,1}^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ の Lie 代数の構造などに着目して，たとえば森田 [31]，Hain [15]，森田, 逆井, 鈴木 [33], Kupers, Randal-Williams [22] によって深く研究されている．一方，トーション部分群 $\mathrm{tor}\, H_1(\mathcal{I}_{g,1};\mathbb{Z})$ $(g \geq 3)$ の非自明性が Birman-Craggs 準同型で捉えられており，次の問題に興味が持たれていた．

問題 1 $n \geq 2$ において $\mathrm{tor}(\mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1))$ は非自明性か？

降中心列と並んで重要な位置付けにあるのが Johnson フィルトレーション $J_1\mathcal{M}_{g,1} \supset J_2\mathcal{M}_{g,1} \supset \cdots$ であり，基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1})$ のべき零商への作用を用いて $J_n\mathcal{M}_{g,1} = \mathrm{Ker}(\mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}(\pi/\pi(n+1)))$ と定義される．定義から $\mathcal{I}_{g,1} = J_1\mathcal{M}_{g,1}$ であり，一般に $\mathcal{I}_{g,1}(n) \subset J_n\mathcal{M}_{g,1}$ が成り立つ．特に $J_2\mathcal{M}_{g,1}$ は $\mathcal{K}_{g,1} = \mathrm{Ker}\,\tau_1$ と等しく，Johnson 核と呼ばれる．さらに分離曲線に沿った Dehn ツイストで生成される部分群に一致することが Johnson [18] によって示されており，興味深い部分群と言える．

さて，Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ $(g \geq 3)$ の有限生成性が 1983 年に Johnson [17] によって示されたのに対し，$\mathcal{K}_{g,1}$ の有限生成性は長らく未解決であった．有限生成であるためには，少なくとも $H_1(\mathcal{K}_{g,1};\mathbb{Q})$ が有限次元である必要がある．Dimca, Papadima [9] は閉曲面 Σ_g $(g \geq 4)$ の場合に $H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Q})$ の有限次元性を示した．その後 Church, Ershov,

本研究は科研費（課題番号 20K14317）の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: Primary 57K20, 57K16, Secondary 57K31.
キーワード：Torelli group, Johnson kernel, homology cylinder, clasper, LMO functor.
* 〒 739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1　広島大学大学院先進理工系科学研究科
e-mail: nozakiy@hiroshima-u.ac.jp

Putman [4] は，$\mathcal{K}_g$ 及び $\mathcal{K}_{g,1}$ $(g \geq 4)$ が実際に有限生成であることを証明した．一方 Dimca, Hain, Papadima [8] は，[9] の考察を押し進め，$H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Q})$ の構造を詳細に調べた．そして森田, 逆井, 鈴木 [33] は [8] を用いて，$H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Q})$ $(g \geq 6)$ を明示的に与えた．具体的には，Casson 不変量と森田準同型（Johnson 準同型の精密化）が有理 Abel 化を与えている．すると [33] で指摘されているように，次が重要な問題となる．

問題 2 Abel 化 $H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Z})$ にトーションが存在するか？

筆者は [37] で問題 1, 2 に取り組み，以下の結果を得た．

定理 3 ([37]) $n = 3, 5$, $g \gg 1$ のとき $\mathrm{tor}(\mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1))$ は非自明である．

定理 4 ([37]) $g \geq 6$ のとき $H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Z})$ にトーションが存在する．

主張そのものは2次元トポロジーに関するものだが，証明の鍵は3次元トポロジーにある．具体的にはホモロジーシリンダー，クラスパー手術，Jacobi 図，LMO 関手などを用いる．その詳細は次節以降で述べることにし，ここでは全体像を説明する．

まずホモロジーシリンダーとは曲面 $\Sigma_{g,1}$ の間の良いコボルディズムであり，それらの全体 $\mathcal{IC}_{g,1}$ はモノイドをなす．ここでクラスパー手術を用いて，ホモロジーシリンダーの間に Y_n 同値という関係を導入する．Y_n 同値から部分モノイドの列 $\mathcal{IC}_{g,1} = Y_1\mathcal{IC}_{g,1} \supset Y_2\mathcal{IC}_{g,1} \supset \cdots$ が定まり，これらは Torelli 群と相性が良い．具体的にはモノイド準同型 $\mathfrak{c}\colon \mathcal{I}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{IC}_{g,1}$ が存在し，$\mathfrak{c}(\mathcal{I}_{g,1}(n)) \subset Y_n\mathcal{IC}_{g,1}$ を満たす．そして Abel 群の準同型

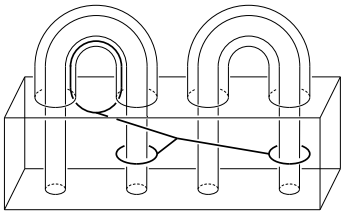


図 1: $\Sigma_{2,1} \times [-1,1]$ 内のクラスパー．

$$\mathrm{Gr}\,\mathfrak{c}\colon \mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1) \to Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$$

が誘導され，2次元と3次元が関連付けられる．群 $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$ の研究において決定的な役割を果たすのが LMO 関手 $\widetilde{Z}$ であり，いわゆる TQFT に近いものである．実際に必要となるのは $\widetilde{Z}$ が誘導する準同型 $\log \widetilde{Z}^Y\colon \mathcal{IC}_{g,1} \to \widehat{\mathcal{A}^c} \otimes \mathbb{Q}$ である．ここに $\widehat{\mathcal{A}^c}$ は Jacobi 図と呼ばれる 1,3 価 グラフの形式的級数からなる $\mathbb{Z}$ 加群である．特に 3 価頂点が n 個である Jacobi 図を取り出すことで，同型 $(Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}) \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{A}^c_n \otimes \mathbb{Q}$ が誘導される．

本研究では $\log \widetilde{Z}^Y\colon \mathcal{IC}_{g,1} \to \widehat{\mathcal{A}^c} \otimes \mathbb{Q}$ の $n+1$ 次を取り出すことで，準同型

$$\bar{z}_{n+1}\colon Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1} \to \mathcal{A}^c_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を定義した[1]．これがタイトルにある「LMO 関手を用いた不変量」である．すると $\bar{z}_2$ は Birman-Craggs 準同型と等価であることが分かり，特に Abel 化 $\mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{I}_{g,1}(2)$ のトーションを捉えている．このことから，$\bar{z}_{n+1}$ は $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{c}$ を経由して $\mathrm{tor}(\mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1))$ の情報を持っているだろうと期待される．これを実際に証明することで定理 3 を得る．また定理 4 を示すには $\mathcal{K}_g \supset \mathcal{I}_g(2)$ に着目して議論する．

以上が証明の土台である．第 2 節で各用語を定義し，3.3 節で定理 4 の証明の概略を述べる．さらにこのような研究を通して，Torelli 群や Johnson 核だけでなく，むし

[1] 安直に $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1} \to \mathcal{A}^c_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とすると well-defined でない．

ろホモロジーシリンダーに関する群 $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$ や一般に $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k}$ $(1 \leq k \leq n)$ の構造について様々な結果が得られた．これらの Abel 群は完全列

$$0 \to Y_{n+k-1}\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k} \to Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k} \to Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k-1} \to 0$$

によって互いに関連している．まず $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$ に関しては，Massuyeau, Meilhan [27, 28] が $n = 1, 2$ の場合を完全に決定した．本研究では $\bar{z}_{n+1}$ を用いることで，$n = 3, 4$ の場合を決定し，さらに $Y_3\mathcal{IC}_{g,1}/Y_5$ の構造も解明した．その応用として，Y_{n+1} 同値と n 次有限型不変量に関する Goussarov-葉廣予想を $n = 3, 4$ の場合に解決した ([37, 38])．

またホモロジー同境群 $\mathcal{IH}_{g,1} = \mathcal{IC}_{g,1}/\sim_H$ についても，興味深い結果を得ている．ここに $\sim_H$ は 4 次元多様体を経由して定義されるある同値関係である（第 5 節）．$\mathcal{IH}_{0,1}$ は「向き付けられた整ホモロジー 3 球面のなすホモロジー同境群」と同型であり，$g \geq 1$ では非可換である．$\mathcal{IH}_{g,1}$ は Levine [25, 26] や Conant, Schneiderman, Teichner [7] によって深く研究されており，Abel 群 $Y_n\mathcal{IH}_{g,1}/Y_{n+1}$ と Jacobi 図の関係もかなり分かっている．本研究では $Y_3\mathcal{IC}_{g,1}/Y_5$ の構造と比較することで $Y_3\mathcal{IH}_{g,1}/Y_5$ を決定した．2つの完全列からなる可換図式にまとめると

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_4\mathcal{IC}_{g,1}/Y_5 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & Y_3\mathcal{IC}_{g,1}/Y_5 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & Y_3\mathcal{IC}_{g,1}/Y_4 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_4\mathcal{IH}_{g,1}/Y_5 \arrow[r] & Y_3\mathcal{IH}_{g,1}/Y_5 \arrow[r] & Y_3\mathcal{IH}_{g,1}/Y_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

となり，右端の2つにトーションが存在するのに対し，左と中央の4つは自由 Abel 群である ([37, 38])．これらの詳細は第 4, 5 節で述べる．

2. 用語の準備

第 1 節に現れた用語の定義を順に説明する．これらは量子トポロジーの文脈で大きく発展してきたものであり，大槻 [39, 42] を参照するとよい．以下，誤解の恐れがないときには種数 g を省略する．

2.1. ホモロジーシリンダー

向き付けられたコンパクト 3 次元多様体 M と向きを保つ同相写像 $m\colon \partial(\Sigma_{g,1}\times[-1,1]) \to \partial M$ の組 (M, m) をコボルディズムと呼ぶことにする．ただし (M, m) と (M', m') に対して，同相写像 $f\colon M \to M'$ が存在して $f \circ m = m'$ を満たすとき，それらを同一視する．コボルディズム (M, m) が $\Sigma_{g,1}$ 上の**ホモロジーシリンダー**であるとは，各曲面 $\Sigma_{g,1} \times \{\pm 1\}$ への制限 $m_\pm$ が同型写像 $(m_\pm)_*\colon H_*(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}) \to H_*(M;\mathbb{Z})$ を誘導し，かつそれらが一致することとする．$\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダーの集合 $\mathcal{IC} = \mathcal{IC}_{g,1}$ には $M \circ M' = (M \cup_{m_+=m'_-} M', m_- \cup m'_+)$ により積が定まり，モノイドとなる．たとえば $M = \Sigma_{g,1} \times [-1, 1]$ とし，$m_+ = f \in \mathcal{I}$, $m_- = \mathrm{id}_{\Sigma_{g,1}}$ なる m を考えると，(M, m) はホモロジーシリンダーである．この構成によりモノイド準同型 $\mathfrak{c}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{IC}$ が定義され，単射であることが知られている．

2.2. クラスパー

Goussarov [11] と葉廣 [12] により創始されたクラスパー手術は，$\mathcal{IC}$ の研究において欠かせない道具である[2]．まず**グラフクラスパー**とは，3 次元多様体に埋め込まれた曲面

[2] 最近では渡邉 [48] によって，4 次元多様体へ拡張そして応用されている．

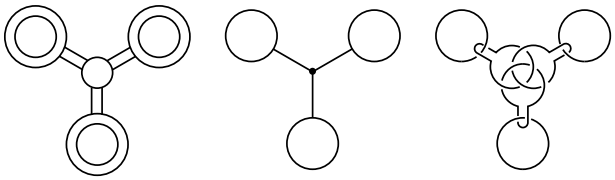


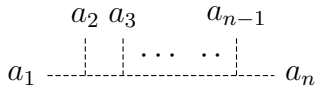
図 2: グラフクラスパーの例，その略記法，そこから得られる枠付き絡み目.

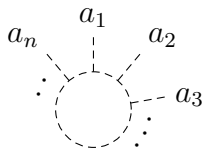
であって，いくつかの円板とバンドとアニュラスへの分解が指定されているものである（図 2 左）．詳細は [12], [39] を参照してほしい．また一般向けの記事として葉廣 [13] もある．さて，各円板を Borromean 環に置き換えることで，枠付き絡み目 L_G が得られる（図 2 右）．そして L_G に沿った Dehn 手術を施して得られる多様体を M_G と書く．

G を構成する円板の個数を次数と呼ぶ．$M, M' \in \mathcal{IC}$ が Y_n **同値**であるとは，次数 n のグラフクラスパー $G_1, \ldots, G_r$ が存在し，$M_{G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_r} = M'$ を満たすことである[3]．そして $Y_n\mathcal{IC} = \{M \in \mathcal{IC} \mid M$ は $\mathfrak{c}(\mathrm{id})$ に Y_n 同値$\}$ と置くと，部分モノイドの列 $\mathcal{IC} = Y_1\mathcal{IC} \supset Y_2\mathcal{IC} \supset \cdots$ が定まり，これを Y **フィルトレーション**と呼ぶ．Y_{n+k} 同値による商 $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ $(1 \leq k \leq n)$ は有限生成 Abel 群になることが知られており，$k = 1$ の場合がよく調べられてきた．

2.3. Jacobi 図

$Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を組合せ的に記述する道具として Jacobi 図を導入する．**Jacobi 図**とは 1, 3 価グラフであって，各 1 価頂点にラベル $1^+, \ldots, g^+, 1^-, \ldots, g^-$ のいずれかが与えられており，3 価頂点には巡回順序が指定されているものである．本稿では巡回順序は常に反時計回りとして省略し，グラフは破線で描く．また $a_1, \ldots, a_n \in \{1^\pm, \ldots, g^\pm\}$ に対して次の記号を用いる：

$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$ 

, $O(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) =$ 

.

3 価頂点を n 個持つ連結な Jacobi 図で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を AS, IHX, self-loop 関係式で割ったものを $\mathcal{A}_n^c$ と書く．$\mathcal{A}_n^c$ は 1 次 Betti 数により自然に直和分解 $\mathcal{A}_n^c = \bigoplus_{l \geq 0} \mathcal{A}_{n,l}^c$ する．たとえば $\mathcal{A}_2^c = \mathcal{A}_{2,0}^c \oplus \mathcal{A}_{2,1}^c$ は $\{T(a_1, a_2, a_3, a_4)$'s, $O(b_1, b_2)$'s$\}$ で生成される．

2.4. 手術写像

Jacobi 図 $J \in \mathcal{A}_n^c$ から $\mathfrak{c}(\mathrm{id})$ 内の n 次のグラフクラスパーが構成でき，ホモロジーシリンダーの同値類 $\mathfrak{s}_n(J) \in Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ が定まる．たとえば図 1 は $J = T(1^-, 1^+, 2^-)$ の場合である．こうして**手術写像** $\mathfrak{s}_n \colon \mathcal{A}_n^c \to Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ が定まり，$n \geq 2$ で全射準同型であることが知られている．したがって $\mathcal{A}_n^c$ と $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{s}_n$ を通して $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を理解することが可能となる．

2.5. LMO 関手

LMO 関手 $\widetilde{Z}$ は「ある種のコボルディズムを射とする圏」から「ある種の Jacobi 図の級数を射とする圏」への関手であり，Cheptea, 葉廣, Massuyeau [2] により導入された．本研究ではその性質や具体的な計算を多く用いているが，ここでは Y_n 同値や手術写像との

[3] 同様に，木クラスパーを用いて絡み目の間の C_{n+1} 同値が定義される．

関係をまとめるにとどめる．準同型 $\log \widetilde{Z}^Y : \mathcal{IC} \to \widehat{\mathcal{A}^c} \otimes \mathbb{Q}$ は $\log \widetilde{Z}^Y_{\geq 1}(Y_n\mathcal{IC}) \subset \widehat{\mathcal{A}^c_{\geq n}} \otimes \mathbb{Q}$ を満たし，したがって準同型 $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \to \mathcal{A}^c_n \otimes \mathbb{Q}$, $[M] \mapsto (\log \widetilde{Z}^Y(M))_n$ を誘導する．そして $(\log \widetilde{Z}^Y(\mathfrak{s}_n(J)))_n = \pm J \in \mathcal{A}^c_n \otimes \mathbb{Q}$ が成り立つ ([2])．

本稿では必要ないが，関連する話題をここにまとめておく．まず絡み目の有限型不変量（Vassiliev 不変量）に対して，それらを統合する普遍有限型不変量として Kontsevich 不変量 [21] がある．そして閉 3 次元多様体に対する類似として Le, 村上, 大槻 [24] によって導入されたのが LMO 不変量である[4]．大雑把に言うと，3次元多様体を枠付き絡み目 L に沿った Dehn 手術で表し，L の Kontsevich 不変量を巧みに平均化することで L の選び方に依存しない量を取り出している．LMO 不変量は村上, 大槻 [35] により TQFT の枠組みで捉えられ，Cheptea, Le [3] の研究を経て，LMO 関手 ([2]) に至った．なお LMO 不変量には Bar-Natan, Garoufalidis, Rozansky, D. Thurston [1] によって導入された Aarhus 積分を用いた定式化もあり，LMO 関手は Aarhus 積分に基づいて構成されている．

その後，様々な拡張や関連研究が行われている．たとえば大槻 [40, 41]，Katsir [20]，野崎 [36]，望月 [30]，Vera [46, 47]，Moussard [34]，伊藤 [16]，Massuyeau, Moussard [29]，葉廣, Massuyeau [14] などがある．

3. 不変量 $\bar{z}_{n+1}$ に関する諸結果と応用

3.1. $\bar{z}_{n+1}$ の定義と δ による計算公式

LMO 関手 $\widetilde{Z}$ から誘導されるモノイド準同型 $\log \widetilde{Z}^Y : \mathcal{IC} \to \widehat{\mathcal{A}^c}$ を思い出しておく．

定義 5 準同型 $\bar{z}_{n+1} \colon Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \to \mathcal{A}^c_{n+1} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $\bar{z}_{n+1}([M]) = (\log \widetilde{Z}^Y(M))_{n+1}$ で定める[5]．

$\bar{z}_{n+1}$ が well-defined であることは，[2] の結果から従う．さて，不変量が手に入るとまずは非自明性が気になる．これについては 3.1 節で定理 10 として述べるが，そのためにも計算法を確立する必要がある．LMO 関手は Kontsevich 不変量から構成されており，$\bar{z}_{n+1}$ の計算も容易ではない．論文 [37] の主定理は，$\bar{z}_{n+1}$ の計算を「Jacobi 図に対する操作 δ」に帰着する次の結果である．

定理 6 ([37]) 以下は Abel 群の可換図式である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^c_n \arrow[r, "\mathfrak{s}"] \arrow[d, "\delta"'] & Y_n\mathcal{C}/Y_{n+1} \arrow[d, "\bar{z}_{n+1}"] \\ \mathcal{A}^c_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\frac{1}{2}"] & \mathcal{A}^c_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

つまり $[M] = \mathfrak{s}(J)$ のとき $\bar{z}_{n+1}([M]) = \frac{1}{2}\delta(J)$ であり，以下で与える写像 δ によって計算できる．

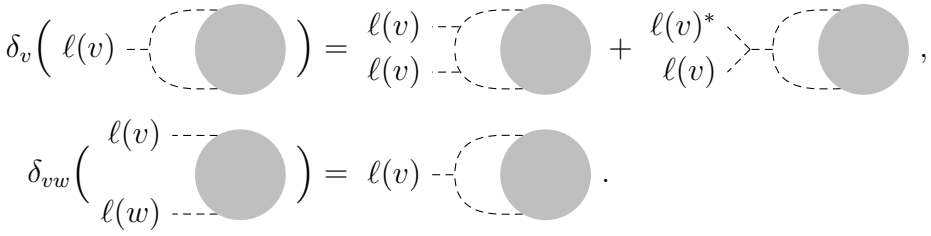
定義 7 準同型 $\delta \colon \mathcal{A}^c_n \to \mathcal{A}^c_n \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $\delta(J) = \sum_{v \in U(J)} \delta_v(J) + \sum_{\substack{v \neq w \in U(J) \\ \ell(v)=\ell(w)}} \delta_{vw}(J)$ で定める[6]．ここに $U(J)$ は J の 1 価頂点の集合，$\ell(v) \in \{1^\pm, \ldots, g^\pm\}$ は v のラベル，δ_v

[4] 過去の講演集に栗屋 [23] がある．また KKT 不変量（たとえば清水 [44] を参照）も同様の性質を持っている．

[5] LMO 関手はシンプレクティック基底と結合子の取り方に依存する．$\bar{z}_{n+1}$ も基底に依存するが，結合子には依存しない．

[6] “$\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$” を付けることで well-defined になっている．

と δ_{vw} は以下で定める（ただし $(j^{\pm})^* = j^{\mp}$ とする.）：



例 8 $J = T(1^+, 1^+, 2^-)$ とすると $\delta(J)$ は 7 項からなり，AS, IHX 関係式で整理すると $\delta(J) = T(2^-, 1^+, 1^+, 2^-) + O(1^+, 2^-)$ となる．したがって定理 6 より，$\bar{z}_2(\mathfrak{s}(J)) = \frac{1}{2}T(2^-, 1^+, 1^+, 2^-) + \frac{1}{2}O(1^+, 2^-)$ と計算できる．特に $\mathfrak{s}(J) \neq 0$ を得る[7].

ここで定理 6 にたどり着いた経緯と証明の流れを述べる．共同研究において LMO 関手の低次の項を計算するコンピュータプログラムを作成し，複数の具体例を観察する中で上記の δ が共通して現れることに気付いた．示すべき等式が分かれば（大変ではあるが）その証明は人の手でできる．具体的には，$\mathfrak{s}(J)$ を基本的なコボルディズムに分解し，各々に対する LMO 関手の値を関手性に基づいて組み上げればよい．これは [2] で用いられている計算法の精密化に当たる．

3.2. $\bar{z}_{n+1}$ の性質

Jacobi 図の 1 次 Betti 数 l ごとに準同型 $\bar{z}_{n+1,l}\colon Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \xrightarrow{\bar{z}_{n+1}} A^c_{n+1} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathcal{A}^c_{n+1,l} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が定まる．いろいろな組 $(n+1, l)$ に対して δ（及び Lie 代数から構成される重み系）を用いて非自明性が確認でき，たとえば次が分かる．

命題 9 ([38]) $n \geq 0$ のとき，$\bar{z}_{2n+2,n}$ は非自明である．

$l = 0, 1$ のときには，さらに精密な結果が得られる．

定理 10 ([37]) $1 \leq n \leq g$ のとき，準同型 $\bar{z}_{2n,l}\colon Y_{2n-1}\mathcal{IC}/Y_{2n} \to \mathcal{A}^c_{2n,l} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の

$$\mathrm{tor}(Y_{2n-1}\mathcal{IC}/Y_{2n}) \cap \mathrm{Im}(\mathcal{I}(2n-1)/\mathcal{I}(2n) \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\mathfrak{c}} Y_{2n-1}\mathcal{IC}/Y_{2n})$$

への制限は非自明である．特に森田準同型（Johnson 準同型の精密化）を経由しない．

定理 4 を証明する際に使う次の性質も紹介しておく．

定理 11 ([37]) $\bar{z}_{n+1}\colon Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \to A^c_{n+1} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は $Y_{\lfloor n/2 \rfloor+1}\mathcal{C}/Y_{n+1}$ 上に拡張する．

次に定義域側の Betti 数に制限を付けると，その核は「2 重化」$\Delta_{n,l}\colon \mathcal{A}^c_{n,l} \to A^c_{2n+1,2l}$ の像と関係することが分かる．

定理 12 ([37]) $r \geq 0$ に対して，

(1) $\mathrm{Ker}(\bar{z}_{2n+2} \circ \mathfrak{s}\colon \mathrm{tor}\,\mathcal{A}^c_{2n+1,2l} \to \mathcal{A}^c_{2n+2} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \supset \mathrm{Im}\,\Delta_{n,l}$.

(2) $\mathrm{Ker}(\bar{z}_{2n+2} \circ \mathfrak{s}\colon \mathrm{tor}\,\mathcal{A}^c_{2n+1,0} \to \mathcal{A}^c_{2n+2} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}\,\Delta_{n,0}$.

[7] AS 関係式により $2\mathfrak{s}(J) = 0$ だから，その非自明性を捉えるのは一般に難しい．

証明では，Conant, Schneiderman, Teichner [5, 6, 7] による高次 Sato-Levine 不変量などの先行研究を援用している．

ここで第 1 節で述べた Johnson フィルトレーション $J_n\mathcal{M}$ への応用に言及する．以下数行は $g \gg 1$ とする．さて，$\mathcal{I}(n) \subset J_n\mathcal{M}$ により自然な準同型 $(\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)) \otimes \mathbb{Q} \to (J_n\mathcal{M}/J_{n+1}\mathcal{M}) \otimes \mathbb{Q}$ があり，両者の比較に関心が寄せられている．まずこの写像は全射であることが知られている ([15])．Hain [15] は $n = 2$ のとき核が $\mathbb{Q}$ であることを示し，一方 $n = 3$ では単射であることが森田 [32] により示された[8]．さらに森田, 逆井, 鈴木 [33] は $n = 4, 5, 6$ での単射性を示し，$n \geq 7$ でも単射だろうと予想している[9]．一方，定理 10 の系として，“$\otimes\mathbb{Q}$” がない場合には単射性が成り立たないことが分かる．

系 13 ([37]) $1 \leq n \leq g$ のとき，$\mathcal{I}(2n-1)/\mathcal{I}(2n) \to J_{2n-1}\mathcal{M}/J_{2n}\mathcal{M}$ は単射でない．

ただし $n = 1$ の場合は Johnson [19] による．

3.3. 定理 4「$\operatorname{tor} H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Z}) \neq 0$」の証明の概略

証明の大部分は $\mathcal{K}_{g,1}$ に対しても有効だが，最後に「$H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Q})$ が Casson 不変量と森田準同型で捉えられること ([33])」を用いる都合で閉曲面に限定する．まず $\bar{z}_{n+1}$ の閉曲面版 $\widehat{z}_{n+1}\colon Y_n\mathcal{IC}_g/Y_{n+1} \to (\mathcal{A}^c_{n+1} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim$ が定義され，定理 6 などの類似が証明できる．さて次の可換図式に着目する：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_g \arrow[rrr, "\zeta := (\log \widetilde{Z}^Y \circ \mathfrak{c})_4"] & & & (\mathcal{A}^c_4 \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim' \\
\mathcal{I}_g(2) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathcal{I}_g(2)/\mathcal{I}_g(4) \arrow[r, "\operatorname{Gr}\mathfrak{c}"] & Y_2\mathcal{IC}_g/Y_4 \arrow[dr, dashed, "\text{定理 } 11"] & \\
& & Y_3\mathcal{IC}_g/Y_4 \arrow[u, hook] \arrow[r, "\widehat{z}_4"] & (\mathcal{A}^c_4 \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim. \arrow[uuu, two heads]
\end{tikzcd}
$$

上段の ζ は Abel 商を与えているから，$\zeta(f) \neq 0$ なる $f \in \mathcal{K}_g$ を見つければ，$[f] \neq 0 \in H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Z})$ が言える．さらに $[f]$ が Casson 不変量と森田準同型の核に入ることを示せば，[33] より $[f]$ がトーション元であることが従う．実際，上の可換図式において，$\mathfrak{s}(T(a,b,c,b,a)) \in Y_3\mathcal{IC}_g/Y_4$ に対応する $f \in \mathcal{I}_g(2)$ を見つけることができる．そして定理 6 を用いて $\zeta(f) \neq 0$ を示し，Jacobi 図 $T(a,b,c,b,a) \in \mathcal{A}^c_{3,0}$ の位数が 2 であることから Casson 不変量と森田準同型の核に入ることも分かる[10]．

4. 群 $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ の構造とその応用

前節では写像類群の部分群への応用を述べた．本節では $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ の構造に目を向ける．これは Goussarov-葉廣予想（4.3 節）やホモロジーコボルディズム群（5 節）との関係からも重要な対象である．

[8] $\Sigma_{g,1}$ の場合と Σ_g の場合で，単射性に差はない ([33])．

[9] 最近アナウンスされた Kupers, Randal-Williams [22] の結果は，予想を支持するものである．さらに $\operatorname{Gr}\mathfrak{c} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ が単射か否かという問題とも関連している．

[10] 特に $f \in J_4\mathcal{M} \setminus [\mathcal{K},\mathcal{K}]$ であり，最近 Faes [10] によって類似の内容が考察されている．

4.1. 群 $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ の構造と手術写像 $\mathfrak{s}_n\colon \mathcal{A}_n^c \to Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ の核

まず $n=1,2$ のときは Massuyeau, Meilhan [27, 28] によって決定されているから，以下 $n \geq 3$ とする．基本となるのは完全列

$$0 \to \operatorname{Ker}\mathfrak{s}_n \to \mathcal{A}_n^c \xrightarrow{\mathfrak{s}} Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \to 0$$

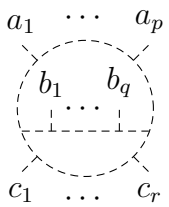
である．小さい n に対して加群 $\mathcal{A}_n^c$ の構造はよく分かっているから，$\operatorname{Ker}\mathfrak{s}_n$ を調べることが重要となる．$\operatorname{Ker}\mathfrak{s}_n \subset \operatorname{Ker}(\bar{z}_{n+1}\circ\mathfrak{s}_n)$ だから，定理 12 が核の候補を与えている．特に $n=3$ の場合には次の定理が得られ，$Y_3\mathcal{C}/Y_4$ の構造が決定される．

定理 14 ([37]) $0 \to \left(\bigwedge^3 H \oplus \bigwedge^2 H\right)\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{A}_3^c \xrightarrow{\mathfrak{s}} Y_3\mathcal{C}/Y_4 \to 0$ は完全列である．ここに j は以下で定める準同型である：

$$j(a\wedge b\wedge c) = T(a,b,c,b,a)+T(b,c,a,c,b)+T(c,a,b,a,c) = \Delta_{1,0}(T(a,b,c)), \tag{1}$$

$$j(a\wedge b) = O(a,b,a)+O(b,a,b). \tag{2}$$

(1) の拡張として $\Delta_{n,0}(T(a_1,a_2,\dots,a_{n+2})) \in \operatorname{Ker}\mathfrak{s}_{2n+1,0}$ を期待しており，これは第 5 節の $\mathcal{IH}$ の観点からも重要な問題である．$n=2$ までは確認できたが，$n\geq 3$ は懸案となっている．さて [38] では (2) の拡張に取り組み，$\operatorname{Ker}\mathfrak{s}_{n,1}$ に関する結果を得た．まず n が偶数のとき，$\operatorname{Ker}\mathfrak{s}_{n,1}=\{0\}$ が分かる．そこで以下 $n=2m-1$ $(m\geq 2)$ とする．また対称な 2 ループ Jacobi 図



$$\left(\begin{array}{l} a_i,b_i,c_i \in \{1^{\pm},\dots,g^{\pm}\}, \\ a_i=a_{p-i+1},\, b_i=b_{q-i+1},\, c_i=c_{r-i+1}, \\ p,q,r\geq 1,\, p+q+r+2=2m-1 \end{array}\right)$$

で生成される部分加群を $\langle\Theta_{2m-1}^{\geq 1,s}\rangle \subset \mathcal{A}_{2m-1}^c$ と書き，商写像 $\pi\colon Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \to (Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m})/\mathfrak{s}(\langle\Theta_{2m-1}^{\geq 1,s}\rangle)$ を考える．このとき，次が成り立つ．

定理 15 ([38]) 核 $\operatorname{Ker}(\pi\circ\mathfrak{s}_{2m-1,1})$ は階数 $\frac{1}{2}((2g)^m-(2g)^{\lceil m/2\rceil})$ の自由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 加群であり，$O(a_1,\dots,a_{m-1},a_m,a_{m-1},\dots,a_1)+O(a_m,\dots,a_2,a_1,a_2,\dots,a_m)$ で生成される．

証明の鍵は $\bar{z}_{2m,l}\colon Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \to \mathcal{A}_{2m,l}^c\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ であり，$\operatorname{Ker}(\pi\circ\mathfrak{s}_{2m-1,1})$ の上からの評価を導く．その際に $\mathcal{A}_{2m,2}^c$ の構造を知る必要があり，「1 つの 3 価頂点を円周に膨らませる」準同型 $\mathfrak{bu}\colon \mathcal{A}_{n,l}^c \to \mathcal{A}_{n+2,l+1}^c$ を用いて次の結果を得た．

定理 16 ([38]) $n\geq 3$ のとき，$\mathfrak{bu}$ は同型 $\mathfrak{bu}\colon \mathcal{A}_{n-2,1}^c \to \mathcal{A}_{n,2}^c/\langle\Theta_n^{\geq 1}\rangle$ を誘導する．

ここで $\langle\Theta_n^{\geq 1}\rangle \subset \mathcal{A}_{n,2}^c$ は $\langle\Theta_{2m-1}^{\geq 1,s}\rangle$ の定義において対称とは限らないものも含めて得られる部分加群である．一方，下からの評価のために手術写像の精密化 $\tilde{\mathfrak{s}}\colon \widetilde{\mathcal{A}_n^c} \to Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ を導入し，クラスパー手術の間の関係を導いた．

4.2. $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ への応用

$n \geq 2$ のとき $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ だけでなく $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ も Abel 群となり，完全列

$$0 \to Y_{n+1}\mathcal{IC}/Y_{n+2} \to Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2} \to Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \to 0$$

を介して $Y_{n+1}\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ と $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を関連付けている．手術写像の精密化 $\tilde{\mathfrak{s}}$ に関する結果を組み合わせることで，次を得る．

定理 17 ([38]) Abel 群 $Y_3\mathcal{IC}/Y_5$ はトーションを持たない．

一方 $\mathrm{tor}(Y_3\mathcal{IC}/Y_4) \neq \{0\}$ ([37]) だから，特に上記の完全列は分裂しない ($n = 3$).

4.3. Goussarov-葉廣予想

Abel 群への写像 $f\colon \mathcal{IC} \to A$ がグラフクラスパーによる手術（もしくは $\mathcal{I}$ の元による手術）に関して良く振る舞うとき，f を有限型不変量と呼ぶ．$M, M' \in \mathcal{IC}$ が Y_{n+1} 同値のとき，n 次有限型不変量 f に対して $f(M) = f(M')$ であることが知られている．逆に任意の n 次有限型不変量によって区別できないとき，それらは Y_{n+1} 同値だろうというのが Goussarov-葉廣予想であり，$n = 1, 2$ の場合は正しい ([28])．そして $Y_3\mathcal{IC}/Y_4$ と $Y_4\mathcal{IC}/Y_5$ に関する前述の研究の応用として，次が得られる．

定理 18 ([37, 38]) $n = 3, 4$ のとき，Goussarov-葉廣予想は正しい．

5. ホモロジー同境群

$M_1, M_2 \in \mathcal{C}$ がホモロジーコボルダント $M_1 \sim_H M_2$ であるとは，閉 3 次元多様体 $M_1 \cup_\partial M_2$ を境界に持つ滑らかな 4 次元多様体 W が存在して，包含写像の誘導する写像 $H_*(M_j;\mathbb{Z}) \to H_*(W;\mathbb{Z})$ が同型となることを言う．このとき $\mathcal{IH} = \mathcal{IC}/\sim_H$ を**ホモロジーコボルディズム群**と呼ぶ[11]．そして自然な射影 $q\colon \mathcal{IC} \twoheadrightarrow \mathcal{IH}$ から準同型 $\mathrm{Gr}\, q\colon Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \twoheadrightarrow Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1}$ が定まる．

5.1. 高次 Sato-Levine 不変量

L_n を $H = H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z})$ 上の自由 Lie 代数とし，$D_n = \mathrm{Ker}(H \otimes L_{n+1} \xrightarrow{[-,-]} L_{n+2})$ と置く．このとき第 n Johnson 準同型は $\tau_n\colon Y\mathcal{IH}/Y_{n+1} \to D_n$ を誘導する．そして次の命題は 0 ループ部分 $\bar{z}_{2m,0}$ をある準同型 κ と関連付けている．

命題 19 ([37]) $m \geq 1$ のとき，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\tau_{2m-1}\colon Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \to D_{2m-1}) \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{Gr}\, q"] & Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \arrow[r, "\bar{z}_{2m,0}"] & \mathcal{A}^c_{2m,0} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ker}(\tau_{2m-1}\colon Y_{2m-1}\mathcal{IH}/Y_{2m} \to D_{2m-1}) \arrow[rr, two heads, "\kappa"] & & L_{m+1} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \arrow[u, hook, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

ここで ν, κ は Conant, Schneiderman, Teichner [5, 6, 7] が導入した準同型で，特に κ は本質的に高次 Sato-Levine 不変量である．一方，1 ループ以上の部分がどのような情報を捉えているかについては今後の課題である．最後に定理 17 の類似を紹介する．

定理 20 ([38]) Abel 群 $Y_3\mathcal{IH}/Y_5$ はトーションを持たない．

なお $\mathcal{IC}$ の場合と同様に $\mathrm{tor}(Y_3\mathcal{IH}/Y_4) \neq \{0\}$ ([37]) だから，やはりトーションの有無に関して対照的な結果となっている．

[11] 過去の講演集に逆井 [43] や谷口 [45] がある．

6. 今後の課題

第 1 節で述べた $\mathrm{tor}(\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1))$ や $\mathrm{tor}\, H_1(\mathcal{K}_g;\mathbb{Z})$ を完全決定することが大事な課題である．本研究では 3 次元トポロジーを利用するという戦略をとったが，曲面の研究のみで別証明を与えることも興味深い[12]．また現時点では偶数位数のトーション元が存在することしか分かっておらず，たとえば $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を直和因子に持つか否か，奇数位数のトーション元があるか否かなどは定かでない．

一方，3 次元トポロジーの観点からは $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ $(1 \leq k \leq n)$ を決定することが大きな目標となる．具体的には「いつトーションが存在し，どれくらい豊富にあるか」などに興味がある．関連する群として $Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+k}$ も重要であり，Conant, Scheiderman, Teichner の仕事と合わせることでさらなる広がりが期待できる．

また $\bar{z}_{n+1,1}$ を研究する中で，Reidemeister トーションとの繋がりを見出しており，これに関しては [37, 38] に引き続く共同研究として論文を執筆中である．

謝辞． 佐藤正寿氏と鈴木正明氏には原稿に目を通していただきました．日頃の共同研究のことも含め，この場を借りて感謝申し上げます．

参考文献

[1] Dror Bar-Natan, Stavros Garoufalidis, Lev Rozansky, and Dylan P. Thurston. The Århus integral of rational homology 3-spheres. III. Relation with the Le-Murakami-Ohtsuki invariant. *Selecta Math. (N.S.)*, Vol. 10, No. 3, pp. 305–324, 2004.

[2] Dorin Cheptea, Kazuo Habiro, and Gwénaël Massuyeau. A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms. *Geom. Topol.*, Vol. 12, No. 2, pp. 1091–1170, 2008.

[3] Dorin Cheptea and Thang T. Q. Le. A TQFT associated to the LMO invariant of three-dimensional manifolds. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 272, No. 3, pp. 601–634, 2007.

[4] Thomas Church, Mikhail Ershov, and Andrew Putman. On finite generation of the Johnson filtrations. arXiv:1711.04779, 11 2017.

[5] James Conant, Rob Schneiderman, and Peter Teichner. Tree homology and a conjecture of Levine. *Geom. Topol.*, Vol. 16, No. 1, pp. 555–600, 2012.

[6] James Conant, Rob Schneiderman, and Peter Teichner. Whitney tower concordance of classical links. *Geom. Topol.*, Vol. 16, No. 3, pp. 1419–1479, 2012.

[7] James Conant, Robert Schneiderman, and Peter Teichner. Geometric filtrations of string links and homology cylinders. *Quantum Topol.*, Vol. 7, No. 2, pp. 281–328, 2016.

[8] Alexandru Dimca, Richard Hain, and Stefan Papadima. The abelianization of the Johnson kernel. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, Vol. 16, No. 4, pp. 805–822, 2014.

[9] Alexandru Dimca and Stefan Papadima. Arithmetic group symmetry and finiteness properties of Torelli groups. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 177, No. 2, pp. 395–423, 2013.

[10] Quentin Faes. Triviality of the J_4-equivalence among homology 3-spheres. arXiv:2105.14253, 2021.

[11] Mikhail Goussarov. Finite type invariants and n-equivalence of 3-manifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 329, No. 6, pp. 517–522, 1999.

[12] Kazuo Habiro. Claspers and finite type invariants of links. *Geom. Topol.*, Vol. 4, pp. 1–83, 2000.

[13] 葉廣和夫. 日本の現代数学—新しい展開をめざして, 結び目の同値関係とクラスパーについて, pp. 175–196. 数学書房, 2010.

[12] 実際，曲面の研究の範疇で再証明する試みが海外の研究者によって行われている．

[14] Kazuo Habiro and Gwénaël Massuyeau. The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies. arXiv:1702.00830, 2017.

[15] Richard Hain. Infinitesimal presentations of the Torelli groups. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 10, No. 3, pp. 597–651, 1997.

[16] Tetsuya Ito. On LMO invariant constraints for cosmetic surgery and other surgery problems for knots in S^3. *Comm. Anal. Geom.*, Vol. 28, No. 2, pp. 321–349, 2020.

[17] Dennis Johnson. The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for $\mathcal{I}$. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 118, No. 3, pp. 423–442, 1983.

[18] Dennis Johnson. The structure of the Torelli group. II. A characterization of the group generated by twists on bounding curves. *Topology*, Vol. 24, No. 2, pp. 113–126, 1985.

[19] Dennis Johnson. The structure of the Torelli group. III. The abelianization of $\mathcal{T}$. *Topology*, Vol. 24, No. 2, pp. 127–144, 1985.

[20] Ronen Katsir. Elliptic associators and the LMO functor. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 25, No. 1, pp. 1650002, 71, 2016.

[21] Maxim Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gel′fand Seminar*, Vol. 16 of *Adv. Soviet Math.*, pp. 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[22] Alexander Kupers and Oscar Randal-Williams. On the Torelli Lie algebra. arXiv:2106.16010, 2021.

[23] 栗屋隆仁. On the LMO invariant. 第51回トポロジーシンポジウム講演集, 2004.

[24] Thang T. Q. Le, Jun Murakami, and Tomotada Ohtsuki. On a universal perturbative invariant of 3-manifolds. *Topology*, Vol. 37, No. 3, pp. 539–574, 1998.

[25] Jerome Levine. Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 1, pp. 243–270, 2001.

[26] Jerome Levine. Addendum and correction to: "Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group" [Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 243–270; MR1823501 (2002m:57020)]. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 2, pp. 1197–1204, 2002.

[27] Gwénaël Massuyeau and Jean-Baptiste Meilhan. Characterization of Y_2-equivalence for homology cylinders. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 12, No. 4, pp. 493–522, 2003.

[28] Gwénaël Massuyeau and Jean-Baptiste Meilhan. Equivalence relations for homology cylinders and the core of the Casson invariant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 365, No. 10, pp. 5431–5502, 2013.

[29] Gwénaël Massuyeau and Delphine Moussard. A splicing formula for the LMO invariant. *Canad. J. Math.*, to appear.

[30] Atsushi Mochizuki. The Casson-Walker invariant of 3-manifolds with genus one open book decompositions. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 28, No. 6, pp. 1950018, 84, 2019.

[31] Shigeyuki Morita. Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces. *Duke Math. J.*, Vol. 70, No. 3, pp. 699–726, 1993.

[32] Shigeyuki Morita. Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect. In *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, Vol. 2 of *Geom. Topol. Monogr.*, pp. 349–406. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.

[33] Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki. Torelli group, Johnson kernel, and invariants of homology spheres. *Quantum Topol.*, Vol. 11, No. 2, pp. 379–410, 2020.

[34] Delphine Moussard. Splitting formulas for the rational lift of the Kontsevich integral. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 20, No. 1, pp. 303–342, 2020.

[35] J. Murakami and T. Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 188, No. 3, pp. 501–520, 1997.

[36] Yuta Nozaki. An extension of the LMO functor. *Geom. Dedicata*, Vol. 185, pp. 271–306,

2016.

[37] Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, and Masaaki Suzuki. Abelian quotients of the Y-filtration on the homology cylinders via the LMO functor. *Geom. Topol.*, to appear.

[38] Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, and Masaaki Suzuki. On the kernel of the surgery map restricted to the 1-loop part. arXiv:2103.07086, 2021.

[39] Tomotada Ohtsuki. *Quantum invariants*, Vol. 29 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002. A study of knots, 3-manifolds, and their sets.

[40] 大槻知忠. ベッチ数が1の3次元多様体に対するLMO不変量の精密化と摂動的不変量. 第55回トポロジーシンポジウム講演集, 2008.

[41] Tomotada Ohtsuki. Perturbative invariants of 3-manifolds with the first Betti number 1. *Geom. Topol.*, Vol. 14, No. 4, pp. 1993–2045, 2010.

[42] 大槻知忠. 結び目の不変量. 共立講座数学の輝き. 共立出版, 2015.

[43] 逆井卓也. 曲面のホモロジー同境全体が作る群の構造について. 第52回トポロジーシンポジウム講演集, 2005.

[44] 清水達郎. ホモロジー3球面の Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の別構成とその応用. 第61回トポロジーシンポジウム講演集, 2014.

[45] 谷口正樹. 3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境群と Chern-Simons 汎関数. 第66回トポロジーシンポジウム講演集, 2019.

[46] Anderson Vera. Alternative versions of the Johnson homomorphisms and the LMO functor. arXiv:1902.10012, 2019.

[47] Anderson Vera. Johnson-Levine homomorphisms and the tree reduction of the LMO functor. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 170, No. 2, pp. 291–325, 2021.

[48] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\mathrm{Diff}(S^4)$. arXiv:1812.02448, 2018.

Signatures of Lefschetz fibrations and symplectic geography

浜田 法行　(University of Massachusetts Amherst/北海道大学情報科学研究院CCB)*

1. 概要

本稿では，筆者と R. İnanç Baykur 氏（UMass Amherst）との共同研究 [BH20] を解説する．ただし，同時期に開催される研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」のために執筆した予稿と内容が大幅に重複することをあらかじめ断っておく．以下，多様体や写像は滑らかなものと仮定する．

Lefschetz ペンシルおよび Lefschetz ファイブレーションはもともと射影代数多様体のトポロジーを調べるために導入された，複素版モース理論とも言えるものであった．しかしその概念は可微分トポロジーのカテゴリーに自然に拡張することができる．特に4次元の場合，モノドロミーを通してファイバー曲面の写像類群における組合せ的な議論に落とし込めることから，4次元閉多様体を比較的簡単に構成することができ，非常に有用である．さらに1990年代後半になると，実は Lefschetz ペンシルおよびファイブレーションはシンプレクティック構造と対応することが明らかにされ，それ以来，シンプレクティック4次元多様体を研究する手段として大きく発展を続けている．

こういった背景から，過去30年ほどの間に多種多様な Lefschetz ファイブレーションの具体例が構成されてきた．ここでオイラー標数と並ぶ4次元多様体の基本的位相不変量である「符号数」に注目する．興味深いことに，これまで知られている Lefschetz ファイブレーション（の全空間）はすべて負の符号数を持つ．組合せ的手法でも，素朴な方法では非負の符号数は実現できそうにない．そこでこのことは一般に成り立つのではないかと予想されていた．

予想 1.1 球面上の Lefschetz ファイブレーションは常に負の符号数を持つ．

対照的に，非負の符号数を持つ Lefschetz ペンシルは（理論的には）いくらでも存在する．とくに符号数 0 の Lefschetz ペンシルを調べている中で，ふとしたことから符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションを構成することに成功した．つまり上記の予想の最初の反例を見つけたのであるが，これをきっかけにより強い以下の定理を示すことができた．

定理 1.1 任意の整数 $\sigma \in \mathbb{Z}$ に対し，球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 σ を持つものが存在する．

すなわち，実際には Lefschetz ファイブレーションの符号数に制約はまったく存在しないということがわかった．

これらの発見の契機となった符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションについては，さらにシンプレクティック4次元多様体の geography への応用がある．シンプレクティック geography 問題とは，複素曲面の geography 問題のアナロジーで，極小シンプレク

キーワード：Lefschetz fibration, Lefschetz pencil, 写像類群, 符号数

* Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts Amherst, Lederle Graduate Research Tower, 710 N. Pleasant Street, Amherst, MA 01003-9305
e-mail: hamada@math.umass.edu

ティック4次元多様体の正則オイラー標数 χ_h とチャーン数 c_1^2 の組 (χ_h, c_1^2) の取り得る値を決定することを問うものである．符号数 σ とオイラー標数 e について，$\chi_h = \frac{\sigma+e}{4}$，$c_1^2 = 3\sigma + 2e$ という関係があるので，geography は (σ, e) の範囲を決定する問題とも言い換えられる．ここでは，単連結スピンシンプレクティック4次元多様体の geography を考える．我々は以下のような結果を得，新しい (σ, e) を実現した．

定理 1.2 任意の奇数 $m \geq 23$ に対し，$\#_m(S^2 \times S^2)$ に同相だが微分同相でないシンプレクティック4次元多様体が存在する．

ここで，対応する geography は $(\sigma, e) = (0, 2m+2)$ である．これまでに知られている最良の結果が $m = 175$ なので，大きく改良できた．

記号: 本稿では次の記号を使う．

- Σ_g^k: 境界成分を k 個持つ種数 g の有向コンパクト曲面．また $\Sigma_g = \Sigma_g^0$.
- $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^k)$: Σ_g^k の（境界成分を pointwise に固定した）写像類群．
- $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$: Σ_g^k の異なる境界成分（もしくは境界成分に平行な単純閉曲線）．

2. 基礎理論

2.1. Lefschetz ファイブレーションとペンシルの定義

まず，今回の主役となる Lefschetz ファイブレーションを定義する．

定義 2.1 向き付けられた閉4次元多様体 X^4 から有向曲面 Σ への写像 $f\colon X^4 \to \Sigma$ が **Lefschetz ファイブレーション**であるとは，各臨界点 $p \in X$ と特異値 $q = f(p) \in \Sigma$ の周りで，それぞれ向きと適合する局所複素座標系 (z_1, z_2) と w が存在し，$w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ と表示されるときをいう．さらに，各特異ファイバー（すなわち特異値の逆像）には，(1) 臨界点はただ1つだけ含まれること，(2) 自己交差数が -1 の球面を含まないこと（相対極小性），を通常仮定する．付け加えてここでは，臨界点が少なくとも1つ存在することを仮定する（非自明な Lefschetz ファイブレーションともよばれる）．一般ファイバー（すなわち正則値の逆像）は有向閉曲面になり，その種数を Lefschetz ファイブレーションの種数とよぶ．

注意 2.1 我々の興味の中心は $\Sigma = S^2$，すなわち球面上の Lefschetz ファイブレーションであるが，geography への応用において $\Sigma = T^2$ の場合も扱う．

一般ファイバー $F = f^{-1}(q_0)$ を一つ固定すると，それぞれの特異ファイバー $F_i = f^{-1}(q_i)$ に応じて**消滅サイクル**とよばれる F 上の単純閉曲線 c_i が定まり，特異ファイバー F_i は一般ファイバー F から消滅サイクル c_i を縮めて一点につぶすことにより得られる．また F_i のまわりの局所モノドロミーは c_i に沿った右手デーンツイスト t_{c_i} となる．

次に定義する Lefschetz ペンシルは Lefschetz ファイブレーションの生みの親であるが，今回は補助的な役割を担う．

定義 2.2 向き付けられた閉4次元多様体 X^4 とその空でない有限部分集合 $B \subset X$ について，写像 $f\colon X^4 \setminus B \to S^2$ が **Lefschetz ペンシル**であるとは，Lefschetz ファイブレーションと同じタイプの臨界点を持ち，さらに各 $b \in B$ の周りで，向きと適合する局所複素座標系 (z_1, z_2) と向きを保つ微分同相 $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ を用い f と射影化 $(z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ を同一視できるときをいう．このとき，B の各点を

base point とよぶ．また正則値の逆像の閉包を一般ファイバーとよぶが，それは有向閉曲面になり，その種数を Lefschetz ペンシルの種数とよぶ．写像 f は有理型写像の記号を借りて，$f\colon X \dashrightarrow S^2$ と書くこともある．

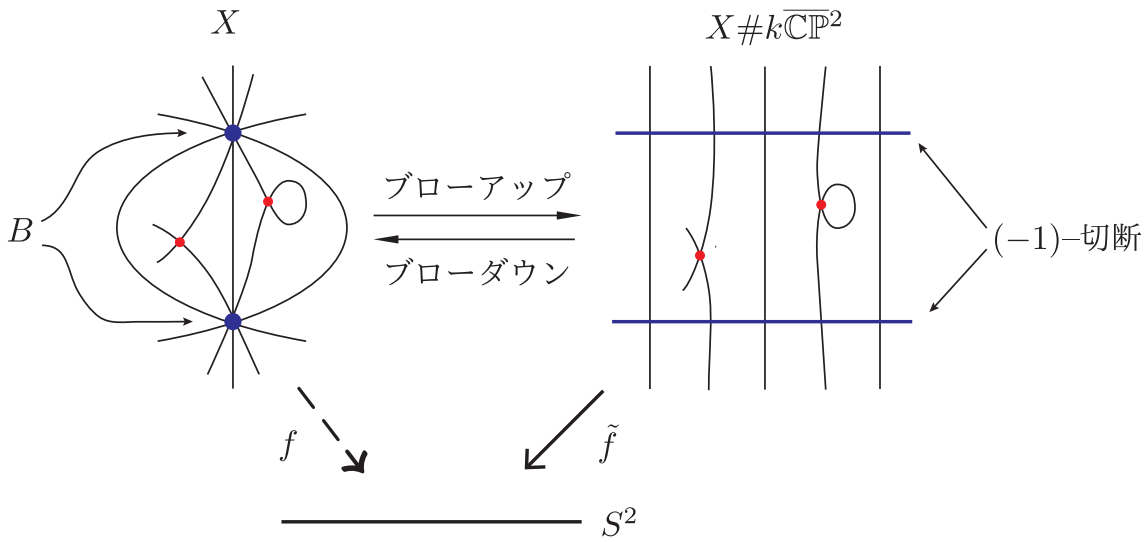


図 1: Lefschetz ペンシルと Lefschetz ファイブレーションの概念図．ここで曲面は次元を落として曲線で表現している．

Lefschetz ペンシルの各 base point でブローアップすることで，自然に Lefschetz ファイブレーション $\tilde{f}\colon X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2 \to S^2$ を得ることができる（$k = |B|$）．図 1 に概念図を示してある．このとき，ブローアップに伴う例外球面 s_j は Lefschetz ファイブレーションの切断となり，当然その自己交差数は -1 となる（(-1)–切断とよぶ）．逆に，Lefschetz ファイブレーションが (-1)–切断を持つと，ブローダウンすることにより，Lefschetz ペンシルを得ることができる．しかしながら，一般には Lefschetz ファイブレーションは Lefschetz ペンシルに由来するとは限らない（(-1)–切断を持つとは限らない）ことにも注意する．

2.2. モノドロミー分解

Lefschetz ファイブレーションの特異ファイバーの局所モノドロミーは消滅サイクルに沿ったデーンツイスト t_{c_i} であることは述べた．さらにグローバルモノドロミーを考えることにより，**モノドロミー分解**とよばれる次の形の関係式がえられる：

$$t_{c_1}t_{c_2}\cdots t_{c_n} = 1. \tag{1}$$

ここで，c_i は各特異ファイバーに対応する消滅サイクル，n は特異ファイバーの本数であり，この式は一般ファイバー $F \cong \Sigma_g$ の写像類群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ において成り立つ関係式である．逆にこの形の関係式があれば，それをモノドロミー分解として持つ Lefschetz ファイブレーションを構成することができる．モノドロミー分解は Lefschetz ファイブレーションの設計図であり，理論的にはすべての情報を持っている．

Lefschetz ファイブレーションが (-1)–切断を持つ場合，その情報もモノドロミー分解に組み込むことができる．したがって，Lefschetz ペンシルもモノドロミー分解を通じて理解することが可能である．一般ファイバーから (-1)–切断の近傍を取り除くと，

境界付き曲面 Σ_g^k が得られる．ここで k は考えている (-1)–切断の個数である．すると消滅サイクルはこの Σ_g^k に描かれるが，それらを $\tilde{c}_i$ とする．境界を円盤で埋めなおすと $\tilde{c}_i$ はもとの消滅サイクル c_i に戻る（アイソトピック）ことに注意する．このとき，モノドロミー分解は

$$t_{\tilde{c}_1} t_{\tilde{c}_2} \cdots t_{\tilde{c}_n} = t_{\delta_1} t_{\delta_2} \cdots t_{\delta_k} \tag{2}$$

という形の $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^k)$ における関係式にリフトする．ここで δ_j は境界成分に平行な曲線である．逆にこの形の関係式から (-1)–切断を構成することもできる．

要約すると，(1) 型の関係式とそれに対応する Lefschetz ファイブレーションは同一視され，(2) 型の関係式とそれに対応する Lefschetz ペンシルは同一視される．しかし，(1) と (2) を区別する短い呼び方がないので，本稿では (1) 型の関係式を **LF 型関係式**，(2) 型の関係式を **LP 型関係式**と一時的に呼ぶことにする．

我々の目標はあくまで Lefschetz ファイブレーション，つまり LF 型関係式の構成であるが，そのビルディングブロックとしては LP 型関係式を多用することになる．

2.3. シンプレクティック多様体との対応

ここで Lefschetz ペンシルと Lefschetz ファイブレーションが精力的に研究される契機となったシンプレクティック多様体との関係を述べておく．

定理 2.1 (Donaldson, Gompf) 任意のシンプレクティック 4 次元閉多様体 X に対して，全空間が X であるような Lefschetz ペンシルが存在する．逆に，Lefschetz ペンシルおよび (非自明な) Lefschetz ファイブレーションの全空間にはシンプレクティック構造が入る．

2.4. 符号数の計算

4 次元多様体の符号数とはその 2 次元コホモロジー群上の交差形式の符号数のことである．Lefschetz ファイブレーションの符号数とはその全空間の符号数を意味する．

Lefschetz ファイブレーションの符号数を計算する方法はいくつか知られているが，組合せ的観点から扱いやすいのは遠藤久顕氏と永見誠二氏による写像類群の関係子の符号数の理論である [EN05]. ここでは紙数の都合と解説が煩雑になることを避けるため正確な定式化はしないが，おおまかに言って次のようなものである．

- すべてのデーンツイストを生成系とする写像類群の群表示において，任意の関係子には符号数とよばれる整数が割り当てられる．
- 任意の関係子は，ランタン関係子と 2–チェイン関係子とよばれる原始的な関係子から生成される．
- ランタン関係子の符号数は $+1$，2–チェイン関係子の符号数は -7 である．
- 任意の関係子の符号数は，それを生成するために使われるランタン関係子と 2–チェイン関係子の符号数の代数的な和である．
- Lefschetz ファイブレーションおよびペンシルの符号数はそのモノドロミー分解の符号数に一致する．

今回最重要となる符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの構成には符号数 0 の関係式しか使わないので，そこでの計算は自明である．

2.5. ファイバー和とモノドロミーの置き換え

Lefschetz ファイブレーションの基本的な構成法として2つの方法を紹介する．

定義 2.3 同じ種数の2つの Lefschetz ファイブレーション f_1, f_2 について，それらに対応するLF型関係式を $P_1 = 1, P_2 = 1$ とする．このとき，それらを並べると $P_1P_2 = 1$ という新しいLF型関係式が得られる．この新しい Lefschetz ファイブレーションを f_1 と f_2 の**ファイバー和**とよぶ．幾何的には，f_1，f_2 それぞれの一般ファイバーの近傍を取り除いて，お互いに貼りなおすという操作に対応する．

定義 2.4 ある Lefschetz ファイブレーションが $PQR = 1$ という形のLF型関係式を持つとする．ここで P, Q, R はそれぞれ右手デーンツイストの積である．さらに別の右手デーンツイストの積 W について，関係式 $Q = W$ が成り立つとする．このとき，$PWR = 1$ という新しいLF型関係式が得られる．この操作をモノドロミーの**置き換え**とよぶ．

置き換えに用いられる関係式はほとんどの場合，LP型関係式である．

今回の結果以前に知られていた Lefschetz ファイブレーションの例はすべて負の符号数を持っている．符号数はファイバー和に関して加法的なので，それらの例をいくらファイバー和しても非負の符号数は得られない．またモノドロミーの置き換えに関しては，符号数を大きくする置き換えはかなり特殊な消滅サイクルの配置を必要とするものしか知られていない．したがって，これらの素朴な方法で非負の符号数を実現するのはほぼ絶望的である．

3. 主結果

ここで我々の主結果を（多少簡略化した形で）述べる．概要で述べたように，最初に構成した符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションがすべてのきっかけであり，最も重要である．

定理 3.1 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 0 を持つものが存在する．

符号数 0 が実現できると，ファイバー和やモノドロミーの置き換え（substitution）といった素朴な操作により，他の任意の符号数も容易に実現できる．

定理 3.2 任意の整数 $\sigma \in \mathbb{Z}$ に対し，球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 σ を持つものが存在する．

この符号数の実現問題のバリエーションとして，スピン Lefschetz ファイブレーションの符号数を考えることも自然である．スピン4次元多様体の場合，符号数は 16 で割り切れきるという基本的な制約がある（ロホリンの定理）．スピン Lefschetz ファイブレーションは消滅サイクルに制限を加えるが，幸運にも，我々の構成した符号数 0 Lefschetz ファイブレーションはその条件を満たしていた．さらに符号数を上げ下げする操作もうまくいき，結局この実現問題も以下のように解決した．

定理 3.3 任意の16の倍数 $\sigma \in 16\mathbb{Z}$ に対し，球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで全空間がスピンかつ符号数 σ を持つものが存在する．

すなわち，スピン Lefschetz ファイブレーションの符号数にはロホリンの定理以外に制約は存在しない．

ここにあげた定理で示した例はすべて単連結，極小なものをとして実現でき，また被覆空間をとることによりファイバーの種数も任意に高くすることができる．さらに，ファイバー和をとることで底空間も任意の有向曲面にすることができる．

概要で述べたように次のような geography 問題への応用もある．

定理 3.4 任意の奇数 $m \geq 23$ に対し， $\#_m(S^2 \times S^2)$ に同相だが微分同相でないシンプレクティック4次元多様体が存在する．

これらは符号数 0 のスピン Lefschetz ファイブレーションを利用して作られる．

4. Breeding

Breeding とは，低い種数のLP型関係式を高い種数の写像類群に複数埋め込み，その際現れる負のデーンツイストを正のデーンツイストでキャンセルし，新しいLP型関係式もしくはLF型関係式を得る手法である．

正負のデーンツイストのキャンセリングペアをうまく作らないといけないので難しく，工夫や経験が必要なテクニックである．ただ今回の結果のように，うまくいくとファイバー和やモノドロミーの置き換えといった従来の手法の限界を超えることも可能である．

5. 符号数0の Lefschetz ペンシル

目的の符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの構成のための，ビルディングブロックとして使われる Lefschetz ペンシル（LP型関係式）を2つ紹介する．

1つ目は，松本幸夫氏によって構成されたある種数 2 Lefschetz ファイブレーションがよく知られているが，そのLF型関係式のリフトとしてのLP型関係式である [Ha16, BH20]．図 2 にその消滅サイクルを描いてあり，モノドロミー分解は

$$ {}^tB_0\,{}^tB_1\,{}^tB_2\,{}^tC\,{}^tC'\,{}^tB_2'\,{}^tB_1'\,{}^tB_0' = {}^t\delta_1\,{}^t\delta_2\,{}^t\delta_3\,{}^t\delta_4 \tag{3} $$

で与えられる．ペンシルの base locus は4点あり，全空間は $T^2 \times S^2$ である．したがって，符号数は 0 であり，スピンでもある．構成では，6–holed torus 関係式とよばれる種数 1 のLP関係式に2つのランタン関係式を breeding する．

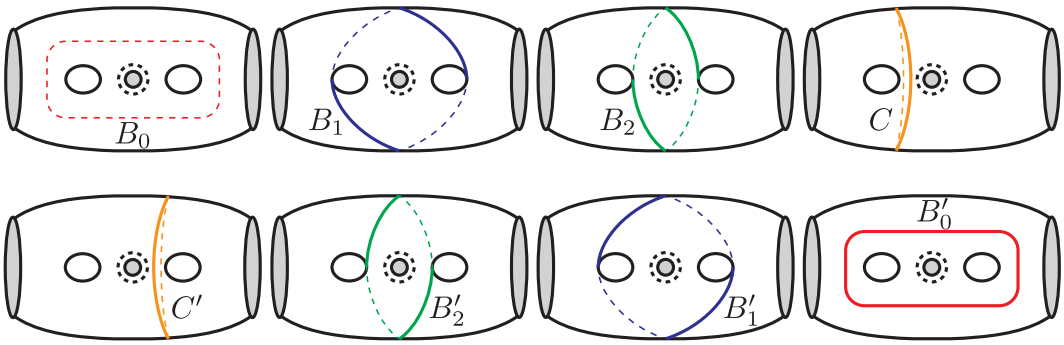


図 2: 種数 2 Lefschetz ペンシルの消滅サイクル．ここで曲面は Σ_2^4 で，境界成分4つのうち3つは灰色で埋められた曲線で表わされ，もう1つは曲面の中央裏側に位置し点線で表されている．

2つ目は，上の LP 関係式 (3) のコピーを2つ用意し，それらを分離曲線 C, C' がキャンセルされるように breeding することによって得られる種数 3 のペンシルであ

る [Ba15, HH18, BH20]．消滅サイクルは図 3 に描かれ，モノドロミー分解は

$$t_a t_{a'} t_x t_b t_{b'} t_y t_c t_{c'} t_z t_d t_{d'} t_w = t_{\delta_1} t_{\delta_2} t_{\delta_3} t_{\delta_4}. \tag{4}$$

で与えられる．これは Smith によって構成された 4 次元トーラス T^4 上の正則 Lefschetz ペンシルに同型であることがわかっている．よって，符号数は 0 であり，スピンである．このペンシル，特にそのモノドロミー分解 (4) が特別なのは，12 本ある消滅サイクル

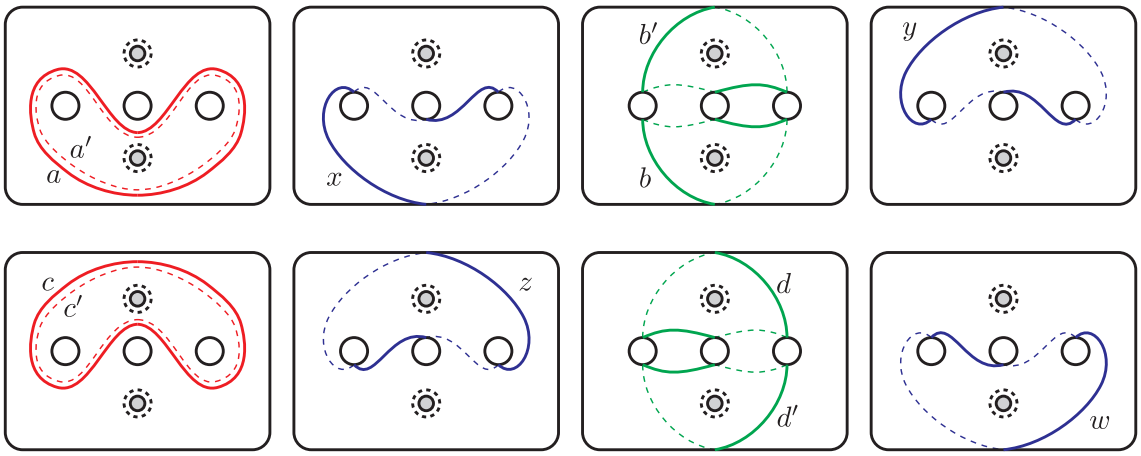


図 3: 種数 3 Lefschetz ペンシルの消滅サイクル．曲面は Σ_3^4.

のうち 8 本までが 4 つの bounding pair をなすということである．その 4 つの bounding pair は，(a, a'), (b, b'), (c, c'), そして (d, d') である．それぞれ曲面 Σ_3^4 を 2 つの Σ_1^4 に分ける．この bounding pair を多く持つということが，breeding を行う自由度を上げ，最終的に符号数 0 Lefschetz ファイブレーションの構成を可能にした．

6. 符号数 0 の Lefschetz ファイブレーション

目的の符号数 0 の LF 型関係式を作るには，種数 9 閉曲面 Σ_9 に種数 3 LP 型関係式 (4) を 6 つ埋め込んで breeding を行い，LF 型関係式を構成する．その breeding の過程では，72 個の正のデーンツイストおよび 24 個の負のデーンツイストが現れるが，それらをすべてキャンセルするように正負のデーンツイストを配置することが肝要であり，技術的にもっとも難しい部分であった．残りの 48 個の正のデーンツイストが最終的な LF 型関係式を与える．図 4に得られた消滅サイクルを描いた．モノドロミー分解は

$$\begin{aligned} &t_{w_3} t_{a_3} t_{a'_3} t_{x_3} t_{b_3} t_{b'_3} t_{y_3} t_{c_3} t_{c'_3} t_{z_3} t_{x_1} t_{x_2} t_{w_4} t_{a_4} t_{a'_4} t_{x_4} t_{b_4} t_{b'_4} t_{y_4} t_{c_4} t_{c'_4} t_{z_4} t_{y_1} t_{y_2} \\ &\cdot t_{w_5} t_{a_5} t_{a'_5} t_{x_5} t_{b_5} t_{b'_5} t_{y_5} t_{c_5} t_{c'_5} t_{z_5} t_{z_2} t_{z_1} t_{w_6} t_{a_6} t_{a'_6} t_{x_6} t_{b_6} t_{b'_6} t_{y_6} t_{c_6} t_{c'_6} t_{z_6} t_{w_1} t_{w_2} = 1 \end{aligned}$$

となる．用いた種数 3 LP 型関係式 (4) の符号数は 0 なので，得られる Lefschetz ファイブレーションの符号数は 0 であると結論できる．

7. 任意の符号数を持つ Lefschetz ファイブレーション

符号数 0 の Lefshcetz ファイブレーションの存在が一旦示されれば，任意符号数はファイバー和とランタン関係式によるモノドロミーの置き換えにより実現できる．符号数 0 を持つ種数 9 の LF 型関係式を $t_x P = 1$ とする．ここで x は（非分離型の）消滅サ

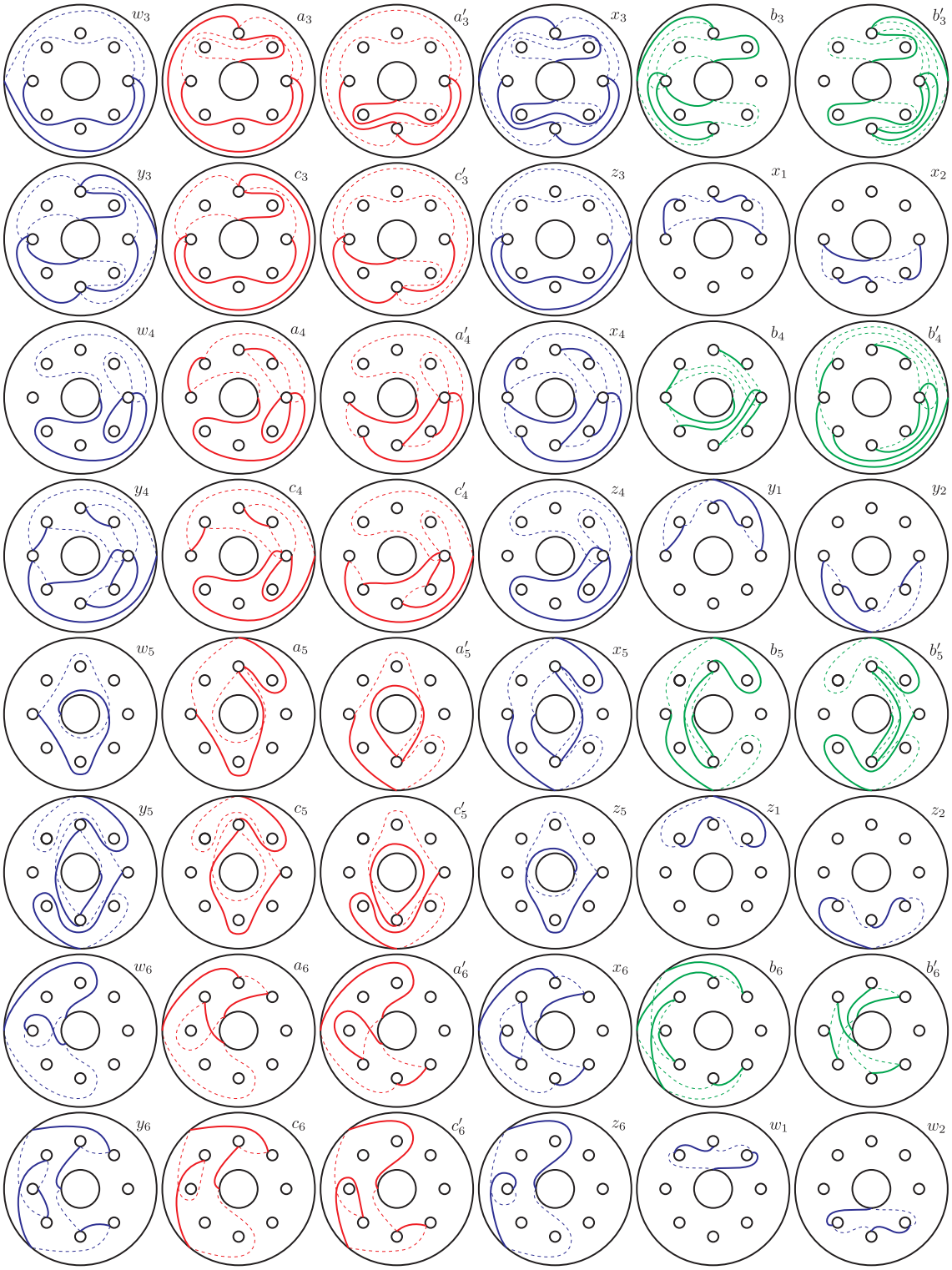


図 4: 符号数 0 を持つ Lefschetz ファイブレーションの消滅サイクル.

イクルの一つで P はモノドロミー分解の残りである．ランタン関係式は $\mathrm{Mod}(\Sigma_9)$ に次の形で埋め込むことができる：

$$t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4} = t_a t_b t_c. \tag{5}$$

ここで，$d_1, d_2, d_3, d_4, a, b, c$ は Σ_9 内のある特別な配置をした非分離曲線である．さて，消滅サイクル x はある微分同相 $\phi\colon \Sigma_9 \to \Sigma_9$ により d_1 に写すことができる．このとき，LF 型関係式 $t_x P = 1$ に一斉に ϕ で共役をとると，$t_{d_1}P_1 = 1$ という形の LF 型関係式が得られる．これは幾何的には，一般ファイバーの Σ_9 への同一視写像の取り換えにすぎず，Lefschetz ファイブレーションとしては全く同じものである．同様のやりかたで，$t_{d_2}P_2 = 1$, $t_{d_3}P_3 = 1$, $t_{d_4}P_4 = 1$ という LF 型関係式が得られる．これらのファイバー和をとると

$$t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4}P_4P_3P_2P_1 = 1$$

という LF 型関係式を得る．この時点ではまだ符号数は 0 であるが，ここでランタン関係式 (5) でモノドロミーの置き換えを行うと，

$$t_a t_b t_c P_4 P_3 P_2 P_1 = 1$$

となり，符号数が 1 だけ上がる．したがって，出来上がった Lefschetz ファイブレーションの符号数は 1 となる．同様のアイディアで，$t_x P = 1$ のファイバー和により $t_a t_b t_c$ という積を作り，ランタン関係式を逆の方向に置き換えれば，符号数 -1 の Lefschetz ファイブレーションも作れる．符号数 $1, -1$ を実現したので，これらのファイバー和をとれば任意の符号数も実現できる．

8. スピン構造

スピン Lefschetz ファイブレーションに関しては，Stipsicz による特徴づけが基本的である．ただし，Lefschetz ファイブレーション $f\colon X \to S^2$ に対し，その一般ファイバー F が原始的である，すなわちある $S \in H_2(X;\mathbb{Z})$ が存在して $F \cdot S = 1$ となる，ことを仮定する必要がある．このような S を F の双対という．

定理 8.1 (Stipsicz [St01]) 種数 g Lefschetz ファイブレーション $f\colon X \to S^2$ のモノドロミー分解を $t_{c_1}t_{c_2}\cdots t_{c_n} = 1$ とする．一般ファイバー F は原始的であり，双対 S を持つと仮定する．このとき，X がスピン構造を許容することと，

1. 交差形式に関するある二次形式 $q\colon H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ が存在し $q(c_i) = 1$ がすべての消滅サイクル c_i について成り立ち，
2. S の自己交差数が偶数である，

こととは同値である．

我々の符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションについては，図 4にあるの消滅サイクルに対して定理の条件を満たす二次形式が存在することが確かめられる．さらに，一般ファイバーが原始的であること，双対の自己交差数が偶数であることも最終的に確かめられたが,（切断を作れなかったことにより）技術的に努力を要した部分である．

他の符号数（16 の倍数）については，ファイバー和と 5-チェイン関係式とよばれる LP 型関係式によるモノドロミーの置き換えをスピン構造を壊さないような形で施し，

まず符号数 16 を実現する．負の符号数を持つスピン Lefschetz ファイブレーションは既知のものがあり，それと今作った符号数 16 のもののファイバー和をとれば，任意の 16 の倍数もスピン Lefschetz ファイブレーションの符号数として実現できる．

9. シンプレクティック geography

前節で述べたように，我々の構成した符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションはスピンである．しかしながら，単連結ではない．そこで，このファイブレーションを $\sigma = 0$，スピン，シンプレクティックという条件を保ったまま改変して，単連結な多様体を作りたい．その際トポロジーが小さくなる（オイラー標数が小さくなる）となおよい．これがうまくいくと，$\#_m(S^2 \times S^2)$ に同相なシンプレクティック多様体ができる．ここで，$\#_m(S^2 \times S^2)$ にはシンプレクティック構造は入らないので，この新しい多様体とは微分同相ではない．この方針で最も効果的だったのが，次のような操作である．

まず符号数 0 の種数 9 スピン Lefschetz ファイブレーションの底空間は S^2 であるが，直積 $T^2 \times \Sigma_9$ をファイバー和することにより，T^2 上のファイブレーションに拡張する．これによってオイラー標数は増えてしまうが，互いに交わらない Lagrangian トーラスを大量に見つけられるという利点がある．これらの Lagrangian トーラスについて Luttinger 手術というシンプレクティック構造を壊さない手術を行うのであるが，このとき元のファイブレーションの基本群の生成元がすべて消えるように Lagrangian トーラスを選ぶことができる．同時に，交差形式を偶形式のままに保つことができる．こうしてできた単連結シンプレクティック多様体は $\sigma = 0$, $e = 48$ （=消滅サイクルの個数）を持ち，交差形式は偶形式である．単連結 4 次元多様体については，スピンであることと偶交差形式をもつこととは同値であるため，上のようにして作った多様体はスピンであることがわかる．結果として，$\#_{23}(S^2 \times S^2)$ と同相になる．

注意 9.1 上で行った Luttinger 手術はファイブレーションの構造を壊してしまうため，最終的にできあがった多様体は Lefschetz ファイブレーションの構造を持っているとは限らない．ファイブレーションを壊さない形で $\#_m(S^2 \times S^2)$ を作ることもできるが，そうすると m を小さくすることは難しい．

参考文献

[Ba15] R. I. Baykur, *Small symplectic Calabi-Yau surfaces and exotic 4–manifolds*, preprint; earlier version is available at arXiv:1511.05951 (2015).

[BH20] R. I. Baykur, N. Hamada, *Lefschetz fibrations with arbitrary signature*, preprint; available at arXiv:2010.11916 (2020).

[EN05] H. Endo, S. Nagami, *Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations*, Trans. Am. Math. Soc. 357 (8), 3179-3199 (2005).

[Ha16] N. Hamada, *Sections of the Matsumoto-Cadavid-Korkmaz Lefschetz fibration*, preprint; available at arXiv:1610.08458 (2016).

[HH18] N. Hamada, K. Hayano, *Topology of holomorphic Lefschetz pencils on the four-torus*, Algebr. Geom. Topol. 18, no. 3, 1515–1572 (2018).

[St01] A. Stipsicz, *Spin structures on Lefschetz fibrations*, Bull. London Math. Soc. 33, no. 4, 466–472 (2001).

第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

空間曲線の 2 種類の縮閉線、伸開線及び関連する線織面

本多　俊一　(公立千歳科学技術大学)*

1. はじめに

はじめに，平面曲線の縮閉線と伸開線ついて復習する．縮閉線はその曲線の曲率円の中心の軌跡として得られる曲線であり，伸開線はその曲線に巻きつけられた糸をたゆまないようにほぐしてゆくときの端点の軌跡として得られる曲線である．縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作はある種の逆操作である．縮閉線と伸開線は波の生成，光の波動性や振り子の等時性などの研究に利用されてきた曲線であり，自然に特異点を持つことが知られれている（図 1, 2）．

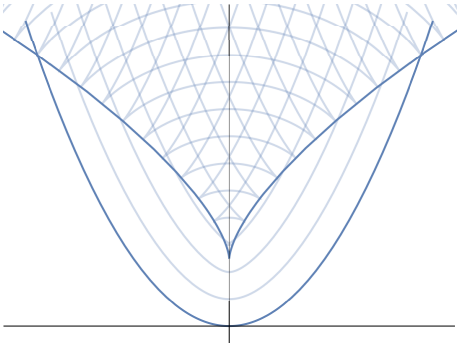


図 1: 放物線と縮閉線

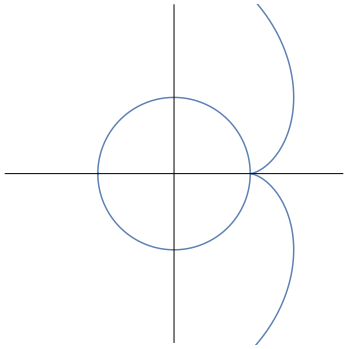


図 2: 円と伸開線

したがって，縮閉線と伸開線は正則性を仮定した従来の曲線論では取り扱うことが出来ない対象であるため，波面などの特異点を持つ曲線の微分幾何学的研究の理論を適用する必要がある．ここで，波面とは法線ベクトルが付随した平面曲線である．例えば，参考文献 [4] において，縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作が Legendre 曲線（波面と法線ベクトルの組）の曲率の微分と積分に対応することが報告されている．

本稿では，空間曲線の縮閉線，伸開線および関連する線織面について調査した結果の概要を報告する．また，縮閉線は接触球に由来する縮閉線と接触円に由来する縮閉線の両方を取り扱う．空間曲線の縮閉線と伸開線は自然に特異点を持つので，特異点を持つ空間曲線の微分幾何学的研究の理論を適用する必要がある．ここでは参考文献 [9] における枠付き曲線の理論を適用する．第 2 節において，枠付き曲線の縮閉線と伸開線を考える上で必要な枠付き曲線,（一般化された）Frenet フレーム，Bishop フレーム，線織面および可展面の概念を紹介する．第 3 節では焦点曲面と接触球に由来する縮閉線，第 4 節では平行曲線と法線曲面，第 5 節では接触円に由来する縮閉線と伸開線を紹介する．第 6 節では上記各オブジェクトの関係を紹介する．接触円に由来する縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作はある種の逆操作であり，特異点型の対応が観察出来る．また，縮閉線と伸開線の法線曲面の関係についても考察する．

本稿の内容は高橋雅朋氏（室蘭工大）との共同研究 [10, 11, 12] と参考文献 [7, 8] に基づく．

* 〒 066-8655 北海道千歳市美々758 番地 65 公立千歳科学技術大学 理工学部
e-mail: s-honda@photon.chitose.ac.jp

2. 準備

$\mathbb{R}^3$ を 3 次元Euclid空間とする．$\mathbb{R}^3$ における内積は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の標準内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を用いる．$\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ と $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のベクトル積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

で定義する．ここで，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底である．また，$S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$，$\Delta = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in S^2 \times S^2 \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0\}$ とする．

2.1. 枠付き曲線と枠付け可能曲線

本節では，枠付き曲線の理論の概要を紹介する．枠付き曲線は空間曲線とフレームの組で，退化点（i.e. $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{0}$）や特異点（i.e. $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{0}$）を許容する．詳細は参考文献 [9] と [5] を参照のこと．ここで，$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (d\boldsymbol{\gamma}/dt)(t)$，$\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (d^2\boldsymbol{\gamma}/dt^2)(t)$ である．

定義 2.1 (枠付き曲線，枠付け可能曲線) (1) 写像 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が**枠付き曲線**であるとは，任意の $t \in I$ に対して，$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_1(t) = 0$ と $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t) = 0$ が成り立つことである．(2) 曲線 $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ が**枠付け可能曲線**であるとは，ある写像 $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \Delta$ が存在して，$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ が枠付き曲線であることである．

注意 2.2 枠付け可能曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ に対して，$(\boldsymbol{\nu}_1(t), \boldsymbol{\nu}_2(t)) \in \Delta$ の取り方には回転と鏡映の自由度がある．

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ に対して，$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\nu}_1(t) \times \boldsymbol{\nu}_2(t)$ とすれば，$\{\boldsymbol{\nu}_1(t), \boldsymbol{\nu}_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

命題 2.3 (Frenet-Serret 型の公式, [9]) 枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ に対して，以下のFrenet-Serret 型の公式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1(t) \\ \boldsymbol{\nu}_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t).$$

ただし，

$$\ell(t) = \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t), \quad m(t) = \dot{\boldsymbol{\nu}}_1(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad n(t) = \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad \alpha(t) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$$

である．このとき，写像 $(\ell, m, n, \alpha) : I \to \mathbb{R}^4$ を枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ の**曲率**と呼ぶ．

定義 2.4 (枠付き曲線の合同) 2 つの枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ が**合同**であるとは，ある回転 $A \in SO(3)$ とある平行移動 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ が存在して，任意の $t \in I$ に対して，

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = A(\boldsymbol{\gamma}(t)) + \boldsymbol{a}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1(t) = A(\boldsymbol{\nu}_1(t)), \quad \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2(t) = A(\boldsymbol{\nu}_2(t))$$

が成り立つことである．

枠付き曲線の曲率は枠付き曲線の微分幾何学的不変量である．実際，以下の枠付き曲線の存在定理と一意性定理が成り立つ（定理 2.5, 2.6）．

定理 2.5 (枠付き曲線の存在定理, [9]) 写像 $(\ell, m, n, \alpha) : I \to \mathbb{R}^4$ に対して，枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ で (ℓ, m, n, α) が曲率であるものが存在する．

定理 2.6 (枠付き曲線の一意性定理, [9]) 2 つの枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ に対して，これらの曲率が一致するとする．このとき，$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ と $(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}_2)$ は合同である．

注意 2.7 枠付き曲線の曲率はパラメータの取り方に依存する．一方，枠付き曲線の曲率から写像 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ を復元することができる．

2.2. Frenet フレームと Bishop フレーム

本節では，枠付き曲線の縮閉線を考える上で重要な役割を担う枠付き曲線の Frenet フレームと Bishop フレームを紹介する．Frenet フレームの詳細は参考文献 [8, 10]，Bishop フレームの詳細は参考文献 [1, 11] を参照のこと．

2.2.1. Frenet フレーム

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ （i.e. $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \boldsymbol{0}$）とする．フレーム $\{\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{b}(t)\}$ を

$$\boldsymbol{t}(t) = \boldsymbol{\mu}(t), \quad \boldsymbol{n}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{t}}(t)\|}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t)$$

で定義する．フレーム $\{\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{b}(t)\}$ を枠付け可能曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の（一般化された）**Frenet フレーム**と呼ぶ．このとき，$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ は枠付き曲線であり，以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{t}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{n}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}(t) \\ \boldsymbol{n}(t) \\ \boldsymbol{b}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{t}(t).$$

ここで，$\kappa(t)$ と $\tau(t)$ は

$$\kappa(t) = \|\dot{\boldsymbol{t}}(t)\|, \quad \tau(t) = \frac{\det\left(\boldsymbol{t}(t), \dot{\boldsymbol{t}}(t), \ddot{\boldsymbol{t}}(t)\right)}{\|\dot{\boldsymbol{t}}(t)\|^2}$$

である．$\kappa(t)$ を枠付け可能曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の**曲率**，$\tau(t)$ を**捩率**と呼ぶ．枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ の曲率は $(\tau(t), -\kappa(t), 0, \alpha(t))$ である．Frenet フレームは第 3 節（焦点曲面と接触球に由来する縮閉線）で利用する．

2.2.2. 回転されたフレームと Bishop フレーム

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t)) \in \Delta$ を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1(t) \\ \boldsymbol{\nu}_2(t) \end{pmatrix}$$

で定義する．ここで，$\theta(t)$ は滑らかな関数である．フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を枠付け可能曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の $\theta(t)$ による**回転されたフレーム**と呼ぶ．このとき，$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は枠付き曲線であり，以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{w}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\ell}(t) & \overline{m}(t) \\ -\overline{\ell}(t) & 0 & \overline{n}(t) \\ -\overline{m}(t) & -\overline{n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t).$$

ここで，$\overline{\ell}(t) = \ell(t) - \dot{\theta}(t)$, $\overline{m}(t) = m(t)\cos\theta(t) - n(t)\sin\theta(t)$, $\overline{n}(t) = m(t)\sin\theta(t) + n(t)\cos\theta(t)$ である．特に，$\theta(t)$ が条件 $\dot{\theta}(t) = \ell(t)$（i.e. $\overline{\ell}(t) = 0$）を満たすとき，フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を枠付け可能曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の $\theta(t)$ による**Bishop フレーム**と呼ぶ．このとき，$\boldsymbol{v}(t)$ と $\boldsymbol{w}(t)$ を**Bishop ベクトル**と呼ぶ．Bishop フレームの取り方は $\boldsymbol{\gamma}(t)$ に対して一意ではなく，積分定数の自由度がある．回転されたフレームは第 4 節（平行曲線と法線曲面），Bishop フレームは第 5 節（接触円に由来する縮閉線と伸開線）で利用する．

2.3. 線織面と可展面

本節では，線織面と可展面の概要を復習する．詳細は参考文献 [16] を参照のこと．

定義 2.8 (線織面，可展面) 空間曲線 $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ と零でないベクトル $\boldsymbol{\xi} : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，曲面 $F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を $F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \lambda\boldsymbol{\xi}(t)$ で定義する．$F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ を**線織面**，$\boldsymbol{\xi}(t)$ を**導線**，固定した各 t_0 に対して得られる直線 $\boldsymbol{\gamma}(t_0) + \lambda\boldsymbol{\xi}(t_0)$ を**母線**と呼ぶ．ガウス曲率が恒等的に零であるような線織面 $F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ を**可展面**と呼ぶ．

線織面 $F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ が可展面であることの必要十分条件は，任意の $t \in I$ に対して，

$$\det\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), \dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\right) = 0$$

が成り立つことである．$\boldsymbol{\xi}(t)$ を正規化し，$\widetilde{\boldsymbol{\xi}} : I \to S^2$ を $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t)/\|\boldsymbol{\xi}(t)\|$ で定義する．任意の $t \in I$ に対して，$\dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(t) = 0$ であるとき，$F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ は（一般化された）**柱面**であるという．また，任意の $t \in I$ に対して，$\dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(t) \neq 0$ であるとき，$F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ は**非柱面的**であるという．$F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ が非柱面的であるとき，

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{t}) - \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(t)}{\dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(t) \cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}(t)} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$$

で表示される曲線を**締括線**と呼ぶ．$F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ の特異点の像は締括線上に現れることが知られている．締括線が定点であるとき，$F_{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi})}(t,\lambda)$ は（一般化された）**錐面**であるという．可展面は柱面，錐面と接線曲面に分類されることが知られている．

3. 焦点曲面と接触球に由来する縮閉線

本節では，枠付き曲線の焦点曲面と接触球に由来する縮閉線を紹介する．詳細は参考文献 [8, 10] を参照のこと．

3.1. 焦点曲面

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ （i.e. $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \boldsymbol{0}$）とし，第 2.2.1 節における Frenet フレーム $\{\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{b}(t)\}$ を考える．枠付き曲線の焦点曲面を以下で定義する．

定義 3.1 (焦点曲面) 曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を

$$FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \frac{\alpha(t)}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t) + \lambda\boldsymbol{b}(t)$$

で定義する．曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ を $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の**焦点曲面**と呼ぶ．

焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ は可展面かつ波面である．焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の可展面の型の特徴付けは以下の通りである．

定理 3.2 ([8]) (1) 焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ が柱面であるための必要十分条件は，任意の $t \in I$ に対して，$\tau(t) = 0$ が成り立つことである．(2) 任意の $t \in I$ に対して，$\tau(t) \neq 0$ とする．焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ が錐面であるための必要十分条件は，任意の $t \in I$ に対して，$\sigma(t) = 0$ が成り立つことである．ここで，$\sigma(t)$ は

$$\sigma(t) = \frac{\alpha(t)\tau(t)}{\kappa(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha(t)\dot{\kappa}(t) - \dot{\alpha}(t)\kappa(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}\right)$$

である．

第 3.2 節において，焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の締括線として接触球に由来する縮閉線を定義する．(t_0,λ_0) が焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の特異点であることの必要十分条件は，

$$\frac{\alpha(t_0)\dot{\kappa}(t_0) - \dot{\alpha}(t_0)\kappa(t_0)}{\kappa^2(t_0)} + \lambda_0\tau(t_0) = 0$$

が成り立つことである．

3.2. 接触球に由来する縮閉線

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ （i.e. $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \boldsymbol{0}$）とし，第 2.2.1 節における Frenet フレーム $\{\boldsymbol{t}(t),\boldsymbol{n}(t),\boldsymbol{b}(t)\}$ を考える．また，任意の $t \in I$ に対して，$\tau(t) \neq 0$ が成り立つとする．枠付き曲線の接触球に由来する縮閉線を以下で定義する．

定義 3.3 (接触球に由来する縮閉線) 曲線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}} : I \to \mathbb{R}^3$ を

$$SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \frac{\alpha(t)}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t) - \frac{\alpha(t)\dot{\kappa}(t) - \dot{\alpha}(t)\kappa(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}\boldsymbol{b}(t)$$

で定義する．曲線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ を $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の**接触球に由来する縮閉線**と呼ぶ．

接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ は接触球の中心の軌跡や焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の締括線として得られる曲線であり，枠付け可能曲線である．焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ と接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ の特異点型には以下の関係がある．

定理 3.4 ([10]) (t_0,λ_0) を焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の特異点とする．(1) 焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の特異点 (t_0,λ_0) がカスプ辺であることの必要十分条件は，t_0 が接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ の正則点であることである．(2) 焦点曲面 $FD_{\boldsymbol{\gamma}}(t,\lambda)$ の特異点 (t_0,λ_0) がツバメの尾であることの必要十分条件は，接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ の特異点 t_0 が 3/2 カスプであることである．

※ここで，**カスプ辺**は $(u,v) \mapsto (u,v^2,v^3)$，**ツバメの尾**は $(u,v) \mapsto (u,3v^4+uv^2,4v^3+2uv)$，**3/2 カスプ**は $t \mapsto (t^2,t^3,0)$ にそれぞれ $\mathcal{A}$ 同値な写像である．

接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ と中心が $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ で半径が $r \in \mathbb{R}$ の球 $S^2(\boldsymbol{c},r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| = r\}$ には以下の関係がある．

命題 3.5 ([10]) 接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ が定点ならば，ある定点 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ とある非負定数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して，$\boldsymbol{\gamma}(t) \in S^2(\boldsymbol{c}, r)$ が成り立つ．

命題 3.6 ([10]) 枠付け可能曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の正則点が I 上で稠密であるとする．このとき，接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ が定点であることの必要十分条件は，ある定点 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ とある正定数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して，$\boldsymbol{\gamma}(t) \in S^2(\boldsymbol{c}, r)$ が成り立つことである．

その他，縮閉線の接触，高次の縮閉線および縮閉線と元の曲線が合同になる条件などは参考文献 [8, 10] を参照のこと．

4. 平行曲線と法線曲面

本節では，枠付き曲線の平行曲線と法線曲面を紹介する．詳細は参考文献 [12] と [11] を参照のこと．

4.1. 平行曲線

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，第 2.2.2 節における回転されたフレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える．枠付き曲線の平行曲線を以下で定義する．

定義 4.1 (平行曲線) 零でない定数 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，曲線 $P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}] : I \to \mathbb{R}^3$ を

$$P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \lambda \boldsymbol{v}(t)$$

で定義する．曲線 $P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ を $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の $\boldsymbol{v}(t)$ 方向の**平行曲線**と呼ぶ．

$\dot{P}_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t) = \lambda \overline{\ell}(t) \boldsymbol{w}(t) + \{\alpha(t) + \lambda \overline{m}(t)\} \boldsymbol{\mu}(t)$ であるから，$\boldsymbol{v}(t)$ は $P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の法線ベクトルの 1 つである．また，t_0 が $P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の特異点であることの必要十分条件は，$\overline{\ell}(t_0) = 0$ と $\alpha(t_0) + \lambda \overline{m}(t_0) = 0$ が成り立つことである．一般に $P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ は枠付け可能曲線であるとは限らない．実際，以下の必要十分条件が存在する．

命題 4.2 ([11, 12]) ある単位ベクトル $\boldsymbol{n} : I \to S^2$ が存在して，$(P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ が枠付き曲線であることの必要十分条件は，ある関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ が存在して，任意の $t \in I$ と零でない定数 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，

$$\lambda \overline{\ell}(t) \cos \varphi(t) - \{\alpha(t) + \lambda \overline{m}(t)\} \sin \varphi(t) = 0$$

が成り立つことである．

注意 4.3 命題 4.2 より，Bishop フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して，$(P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は枠付き曲線である．

4.2. 法線曲面

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，第 2.2.2 節における回転されたフレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える．枠付き曲線の法線曲面を以下で定義する．

定義 4.4 (法線曲面) 曲面 $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}] : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を

$$NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t, \lambda) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \lambda \boldsymbol{v}(t)$$

で定義する．曲面 $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t, \lambda)$ を $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の $\boldsymbol{v}(t)$ 方向の**法線曲面**と呼ぶ．

$NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]_t(t,\lambda) \times NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]_\lambda(t,\lambda) = \{\alpha(t) + \lambda\overline{m}(t)\}\boldsymbol{w}(t) - \lambda\overline{\ell}(t)\boldsymbol{\mu}(t)$ であるから，$\boldsymbol{v}(t)$ は $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t,\lambda)$ の接線ベクトルの 1 つである．また，(t_0,λ_0) が $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t,\lambda)$ の特異点であることの必要十分条件は，$\alpha(t_0) + \lambda_0\overline{m}(t_0) = 0$ と $\lambda_0\overline{\ell}(t_0) = 0$ が成り立つことである．一般に $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t,\lambda)$ は枠付け可能曲面であるとは限らない．実際，以下の必要十分条件が存在する．枠付き曲面と枠付け可能曲面の詳細については参考文献 [6] を参照のこと．

命題 4.5 ([12]) ある単位ベクトル $\boldsymbol{n} : I \times \mathbb{R} \to S^2$ が存在して，$(NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が枠付き曲面であることの必要十分条件は，ある関数 $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して，任意の $(t,\lambda) \in I \times \mathbb{R}$ に対して，

$$\lambda\overline{\ell}(t)\cos\varphi(t,\lambda) - \{\alpha(t) + \lambda\overline{m}(t)\}\sin\varphi(t,\lambda) = 0$$

が成り立つことである．

注意 4.6 命題 4.5 より，Bishop フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して，$(NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ は枠付き曲面である．このとき，$NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t,\lambda)$ は可展面である．

法線曲面 $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t,\lambda)$ の特異点型（交叉帽子，カスプ辺，ツバメの尾，カスプ状交叉帽子）の特徴付けは参考文献 [12] を参照のこと．特異点型の特徴付けは参考文献 [3, 17, 19] における判定法を適用した．

5. 接触円に由来する縮閉線と伸開線

本節では，枠付き曲線の接触円に由来する縮閉線と伸開線を紹介する．詳細は参考文献 [12] を参照のこと．

5.1. 接触円に由来する縮閉線

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，第 2.2.2 節における Bishop フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える．また，任意の $t \in I$ に対して，$\overline{m}(t) \neq 0$ が成り立つとする．枠付き曲線の接触円に由来する縮閉線を以下で定義する．

定義 5.1 曲線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}] : I \to \mathbb{R}^3$ を

$$CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - \frac{\alpha(t)}{\overline{m}(t)}\boldsymbol{v}(t)$$

で定義する．曲線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ を $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の $\boldsymbol{v}(t)$ 方向の**接触円に由来する縮閉線**と呼ぶ．

接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ は $\boldsymbol{v}(t)$ 方向の接触円の中心の軌跡や法線曲面 $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t,\lambda)$ の締括線として得られる曲線であり，枠付け可能曲線である．

注意 5.2 $(CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu})$ は枠付き曲線である．ただし，$\{\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{v}(t)\}$ は接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の Bishop フレームではない．

平行曲線 $P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の $\boldsymbol{v}(t)$ 方向の接触円に由来する縮閉線とオリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の $\boldsymbol{v}(t)$ 方向の接触円に由来する縮閉線は一致する（命題 5.3）．

命題 5.3 ([12]) $CE_{P_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]}[\boldsymbol{v}](t) = CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$.

5.2. 伸開線

枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ （i.e. $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \mathbf{0}$）とする．枠付き曲線の伸開線を以下で定義する．

定義 5.4 固定された $t_0 \in I$ に対して，曲線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0] : I \to \mathbb{R}^3$ を

$$I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - \left(\int_{t_0}^{t} \alpha(t)\ dt \right) \boldsymbol{\mu}(t)$$

で定義する．曲線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ を $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の t_0 に関する**伸開線**と呼ぶ.

伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ は正則空間曲線の伸開線の直接的な一般化である（cf. [2]）.

注意 5.5 $(I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0], \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu})$ は枠付き曲線である．ここで，

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \frac{n(t)\boldsymbol{\nu}_1(t) - m(t)\boldsymbol{\nu}_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}$$

である．$\{\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{\xi}(t) \times \boldsymbol{\mu}(t)\}$ は伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の Bishop フレームである．

6. 各オブジェクトの関係

本節では，接触円に由来する縮閉線と伸開線の関係，接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係について紹介する．詳細は参考文献 [12] を参照のこと．

命題 6.1 ([12]) 枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ と Bishop フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して，$\overline{m}(t) \neq 0$ とする．このとき，$I_{CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]}[t_0](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - (\alpha(t_0)/\overline{m}(t_0))\boldsymbol{v}(t)$ が成り立つ.

命題 6.2 ([12]) 枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ とする．このとき，$CE_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t) = \boldsymbol{\gamma}(t)$ が成り立つ.

命題 6.1, 6.2 より，然るべき設定の下では，接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ をとる操作と伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ をとる操作がある種の逆操作であることが分かる．なお，接触球に由来する縮閉線 $SE_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ と 伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の関係は得られない.

オリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$，接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$，伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の特異点型の関係を考える.

定理 6.3 ([12]) 枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ と Bishop フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して，$\overline{m}(t) \neq 0$ とする．(1) オリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の特異点 t_0 が 3/2 カスプであることの必要十分条件は，t_0 が接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の正則点であることである．(2) オリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の特異点 t_0 が 4/3 カスプであることの必要十分条件は，接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の特異点 t_0 が 3/2 カスプであることである.

※ここで，**4/3 カスプ**は $t \mapsto (t^3, t^4, 0)$ に $\mathcal{A}$ 同値な写像である.

定理 6.4 ([12]) 枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ とする．また，t_1 が伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の特異点であるとする．(1) t_1 がオリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の正則点であることの必要十分条件は，伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の特異点 t_1 が 3/2 カスプであることである．(2) オリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の特異点 t_1 が 3/2 カスプであることの必要十分条件は，伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の特異点 t_1 が 4/3 カスプであることである.

次に，接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係を考える．枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ と Bishop フレーム $\{\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して，$\overline{m}(t) \neq 0$ とする．このとき，接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の $\boldsymbol{v}_{CE}(t)$ 方向の法線曲面は

$$NS_{CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]}[\boldsymbol{v}_{CE}](t, \lambda) = CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t) + \lambda \boldsymbol{v}_{CE}(t)$$

である．ただし，$\boldsymbol{v}_{CE}(t)$ は接触円に由来する縮閉線 $CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}](t)$ の Bishop ベクトルである．$NS_{CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]}[\boldsymbol{v}_{CE}](t, \lambda)$ の特異点の像は締括線である 2 次の縮閉線 $CE_{CE_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{v}]}[\boldsymbol{v}_{CE}](t)$ によってパラメータ付けされる．

一方，枠付き曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して，$m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ とする．このとき，伸開線 $I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t)$ の $\boldsymbol{v}_I(t) = -\boldsymbol{\mu}(t)$ 方向の法線曲面は

$$NS_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda) = I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0](t) - \lambda \boldsymbol{\mu}(t)$$

である．$NS_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda)$ の特異点の像は締括線であるオリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ によってパラメータ付けされる．$NS_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda)$ は非柱面的な可展面であるから，$NS_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](I \times \mathbb{R})$ がオリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の接線曲面 $\boldsymbol{\gamma}(t) + \lambda \boldsymbol{\mu}(t)$ の像と一致する（cf. [16]）．接線曲面の特異点は [13, 14, 15] などで詳しく調査されている．以上の性質をまとめると，以下のダイアグラムを得る（図 3）．ただし，点線矢印は特異点を始点とする伸開線を考えたときに成り立つ．

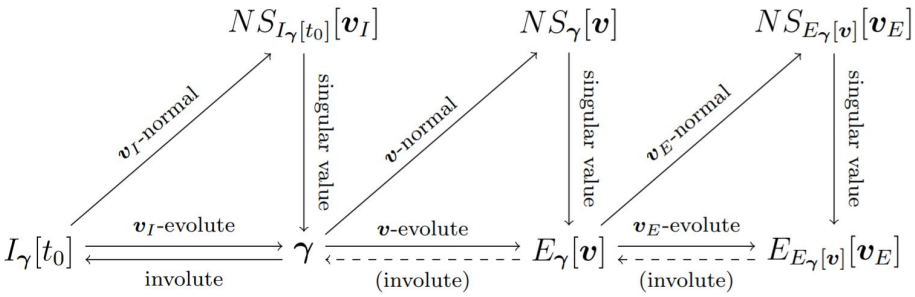


図 3: 接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係

例 6.5 (球面ネフィロイド) 写像 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : [0, 2\pi) \to S^2 \times \Delta$ を

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t, \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \right),$$
$$\boldsymbol{\nu}_1(t) = \left(-\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t, \cos^3 t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \right),$$
$$\boldsymbol{\nu}_2(t) = \left(\frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t, \sin^3 t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \right)$$

で定義する．$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ は枠付き曲線であり，オリジナルフレーム $\{\boldsymbol{\nu}_1(t), \boldsymbol{\nu}_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ は Bishop フレームである．また，オリジナル曲線 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の特異点 $t = 0$ と π は 3/2 カスプである．このとき，上記の各オブジェクトの表示式は以下の通りである：

- $\boldsymbol{\nu}_1$ 方向の法線曲面：$NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\nu}_1](t,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \lambda\boldsymbol{\nu}_1(t)$
- $\boldsymbol{\nu}_1$ 方向の接触円に由来する縮閉線：$E_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\nu}_1](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \tan t\boldsymbol{\nu}_1(t)$
- $t_0 = 0$ に関する伸開線：$I_{\boldsymbol{\gamma}}[0](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - \sqrt{3}\,(1-\cos t)\,\boldsymbol{\mu}(t)$

法線曲面の特異点型の判定法と定理 6.4 より，以下が成り立つ．

- $NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\nu}_1](t,\lambda)$ の特異点 $(t,\lambda) = (0,0)$ と $(\pi,0)$ はカスプ状交叉帽子
- $NS_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[0]}[\boldsymbol{\mu}](t,\lambda)$ の特異点 $(t,\lambda) = (0,0)$ と $(\pi,0)$ はツバメの尾
- $I_{\boldsymbol{\gamma}}[0]$ の特異点 $t = 0$ は 4/3 カスプ

上記の特異点および法線曲面，接触円に由来する縮閉線と伸開線の関係は図 4 と図 5 で観察出来る．

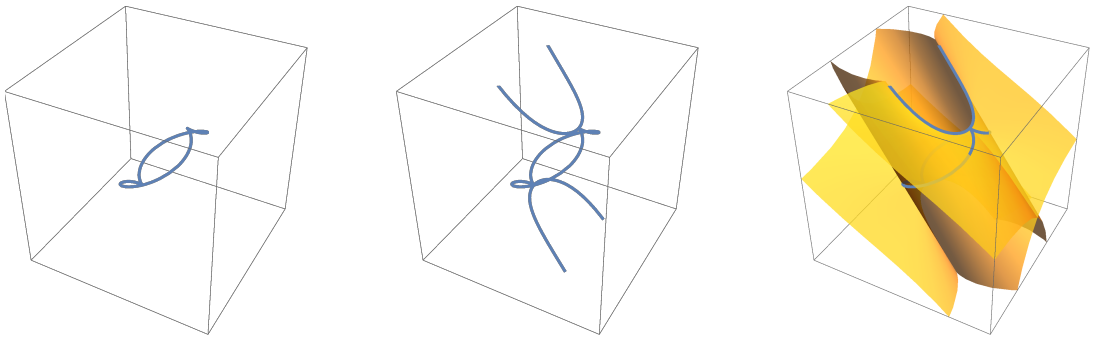


図 4: 左から順に $\boldsymbol{\gamma}$, $(\boldsymbol{\gamma}, E_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\nu}_1])$, $(\boldsymbol{\gamma}, E_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\nu}_1], NS_{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\nu}_1])$

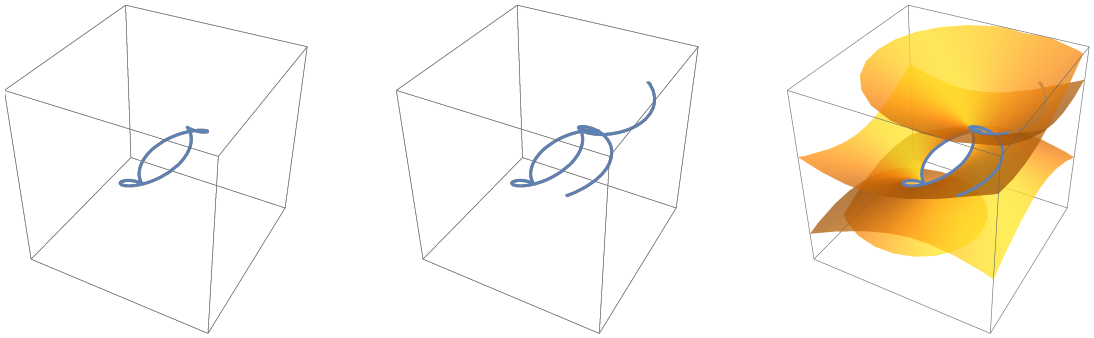


図 5: 左から順に $\boldsymbol{\gamma}$, $(\boldsymbol{\gamma}, I_{\boldsymbol{\gamma}}[0])$, $(\boldsymbol{\gamma}, I_{\boldsymbol{\gamma}}[0], NS_{I_{\boldsymbol{\gamma}}[0]}[\boldsymbol{\mu}])$

参考文献

[1] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 246–251.

[2] D. Fuchs, Evolutes and involutes of spatial curves, Amer. Math. Monthly 120 (2013), no. 3, 217–231.

[3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, Math. Z. 259 (2008), no. 4, 827–848.

[4] T. Fukunaga and M. Takahashi, Involutes of fronts in the Euclidean plane, Beitr. Algebra Geom. 57 (2016), no. 3, 637–653.

[5] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves, J. Geom. 108 (2017), no. 2, 763–774.

[6] T. Fukunaga and M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, Bull. Braz. Math. Soc. 50 (2019), no. 1, 37–65.

[7] S. Honda, Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices, Adv. Stud. Pure Math. 78 (2018), 273–292.

[8] S. Honda, Flat surfaces associated with framed base curves, doctoral theses (2018).

[9] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, Adv. Geom. 16 (2016), no. 3, 265–276.

[10] S. Honda and M. Takahashi, Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 150 (2020), no. 1, 497–516.

[11] S. Honda and M. Takahashi, Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space, Turkish J. Math. 44 (2020), no. 3, 883–899.

[12] S. Honda and M. Takahashi, Circular evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean space, preprint (2021), arXiv:2103.07041.

[13] G. Ishikawa, Determinacy of the envelope of the osculating hyperplanes to a curve, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), no. 6, 603–610.

[14] G. Ishikawa, Developable of a curve and determinacy relative to osculation-Type, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 46 (1995), no. 184, 437–451.

[15] G. Ishikawa, Topological classification of the tangent developables of space curves, J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), no. 2, 583–598.

[16] S. Izumiya and N. Takeuchi, Geometry of ruled surfaces. In Applicable Mathematics in the Golden Age, edited by Misra, J. C., pp. 305–338, Narosa Publishing House, 2003.

[17] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, Pacific J. Math. 221 (2005), no. 2, 303–351.

[18] M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, Contemp. Math. 675 (2016), 337–355.

[19] H. Whitney, The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space, Ann. of Math. (2) 45 (1944), 247–293.

結び目の単純リボン変形について

塚本 達也　(大阪工業大学工学部)*

1. はじめに

本稿では 3 次元球面内の結び目の集合上の半順序関係を与える単純リボン変形という操作について，この変形がいつ結び目の型を変えるのか，種数や Alexander 多項式といった不変量をどれだけ変化させるのか，また，この変形によって合成結び目は得られるのか，どのような結び目が自明な結び目から得られるのか，といった問題について得られた結果を報告します．

2. バンド和と単純リボン変形

結び目は 3 次元球面 S^3 内にあり向きがついているとします．2 つの結び目 k, k' は S^3 の向きを保つ自己同相写像 φ で $\varphi(k) = k'$ となるものが存在するとき**同じ型**であるといい，$k \approx k'$ と表します．分離した[1]結び目 k_0, k_1 に対し，$b(I \times I) \cap k_i = b(I \times \{i\})$ $(i = 0, 1)$ を満たす埋め込み $b : I \times I \to S^3$ があるとします．$b(I \times I)$ を k_0 と k_1 をつなぐバンドといい，単に b と表します．∂b の向きが k_0 と k_1 の向きに同調するとき，結び目 $K = k_0 \cup k_1 \cup \partial b - \mathrm{int}((k_0 \cup k_1) \cap b)$ を k_0 と k_1 の**バンド和**といいます．k_0 と k_1 を分離し，バンドと $b(I \times \{1/2\})$ でだけ交わる球面が存在するとき，b を**自明な**バンドといいます．自明なバンドによるバンド和は k_0 と k_1 の連結和 $k_0 \sharp k_1$ を与えます．２つの非自明な結び目の連結和で表される結び目を**合成結び目**といい，合成結び目でない非自明な結び目を**素な結び目**といいます．また，互いに分離した $m+1$ 個の結び目 $k_0, k_1, \cdots, k_m$ に対し，互いに交わらない次のようなバンド $b_1, \cdots, b_m$ を取ります：

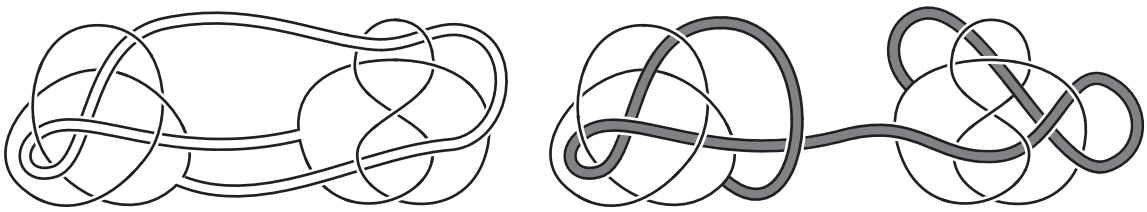
$$b_j(I \times I) \cap k_0 = b_j(I \times \{0\}), \quad b_j(I \times I) \cap k_i = \begin{cases} b_j(I \times \{1\}) & (j = i) \\ \emptyset & (j \neq i) \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

各 ∂b_j の向きが k_0 と k_j の向きに同調するとき，結び目

$$K = \cup_{i=0}^{m} k_i \cup \cup_{j=1}^{m} \partial b_j - \cup_{j=1}^{m} \mathrm{int}((k_0 \cup k_j) \cap b_j)$$

を k_0 と $k_1, \cdots, k_m$ の**バンド和**といいます． この場合にバンドが**自明**とは，互いに交わらない次のような 3 次元球体 $H_1, \cdots, H_m$ が存在するときをいいます：

$$H_i \cap \cup_{j=0}^{m} k_j = k_i, \quad \partial H_i \cap \cup_{j=1}^{m} b_j = \partial H_i \cap b_i = b_i(I \times \{1/2\})$$



バンド和の例　　自明なバンドの例

図 1

本研究は科研費 (課題番号:JP16K05162) の助成を受けたものである．

* 〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1 大阪工業大学工学部
e-mail: tatsuya.tsukamoto@oit.ac.jp

[1] すなわち，$H \cap (k_0 \cup k_1) = k_1$ となる 3 次元球体 H が存在．

以下 $k_0 = k$ と m 個の自明な結び目 $O_1, \cdots, O_m$ のバンド和を考えます．このとき，K は k から**リボン変形**で得られるといいます．また，K は k に**リボン・コンコーダント**であるといい，$K \geq k$ と表します．特に k が自明な結び目であるとき，K を**リボン結び目**といいます．リボン・コンコーダンスについて次の予想があります．

予想 2.1. (Gordon [Gor81]) $\geq$ は S^3 内の結び目の集合上の半順序関係である．

有限回のリボン変形は 1 回のリボン変形で実現されることが知られているので，$\geq$（リボン・コンコーダンス）は反射律と推移律を満たします．よって予想2.1では反対称律が成り立つかどうかが問題となります．リボン変形において，互いに交わらない m 個の 2 次元円盤 $D_1, \cdots, D_m$ を $\partial D_i = O_i$, $D_i \cap k = \emptyset$ $(i = 1, \cdots, m)$ で，バンドとは内部で横断的に弧（**リボン特異点**）で交わるように取ります．ここで各バンドも各円盤もリボン特異点を 1 つだけ含むリボン変形を**単純リボン変形**と呼びます [KST16]（図3参照）．そして K が k から有限回の単純リボン変形で得られる[2]とき，K は k に**単純リボン・コンコーダント**であるといい，$K \geq_s k$ と表します．特に k が自明な結び目であるとき，K を**単純リボン結び目**といいます．$\geq_s$ も反射律と推移律を満たしますが，さらに次が成り立ちます．ここで結び目 k を境界に持つ向きづけられた，連結な曲面を，k の**Seifert 曲面**といいます．そして k の Seifert 曲面の種数の最小値を k の**種数**といい，$g(k)$ と表します．

定理 2.2. (岸本-渋谷-塚本 [KST16]) K が k から単純リボン変形で得られるとき，$g(K) \geq g(k)$ が成り立つ．さらに次は同値である．

(1) $g(K) = g(k)$　(2) $K \approx k$　(3) 単純リボン変形を与えるバンドは自明

従って $\geq_s$ は S^3 内の結び目の集合上の半順序関係である．

また，Zemke [Zem19] によって $K \geq k$ ならば $g(K) \geq g(k)$ であることが示されています．よって，$K \geq k$ かつ $k \geq K$ であり，さらに $K \geq_s k$ または $k \geq_s K$ であれば，定理2.2 より，$K \approx k$ となります．

[**証明の概略**] K の種数 $g = g(K)$ の Seifert 曲面 E から k の Seifert 曲面 F を作ります．$\mathcal{D} = D_1 \cup \cdots \cup D_m$, $\mathcal{B} = b_1 \cup \cdots \cup b_m$ として，E は $\mathrm{int}(\mathcal{D} \cup \mathcal{B})$ と横断的に交わるとしてよく，各 i について $E \cap (D_i \cup b_i)$ は互いに交わらない弧や円周からなります．このとき，余分な交差を減らして $E \cap b_i = \emptyset$ で $E \cap D_i$ は次のような弧や円周だけからなるようにできます．ここで α_i を D_i とバンドとの交差の弧とします．

(1) $\alpha_i \cap \gamma_i = \partial\alpha_i = \partial\gamma_i$ である弧 γ_i　(2) $\alpha_i \cup \gamma_i$ を含む D_i 上の円盤を張る円周 ρ_{m+j}

ここで弧は必ず 1 本だけあり，円周は 0 個以上です．すると $F' = E \cup (\mathcal{D} \cup \mathcal{B})$ は k を境界に持ち，$\rho_i = \alpha_i \cup \gamma_i$ として特異点 $\rho_1, \cdots, \rho_m, \rho_{m+1}, \cdots, \rho_{m+q}$ を持つ，はめ込まれた曲面です．そこで図2のように各 D_i に対し，内側の円周 ρ から順に $F' - D_i$ での近傍を取り除き 2 枚の円盤で蓋をする手術を行うと，次のいずれかになります．

(a) 連結成分数は変わらず，種数が 1 だけ減る．

(b) 閉連結成分 F_ρ が生成される．

(b) の場合は F_ρ を捨てます．このとき，F_ρ の種数が 0 ならば一連の操作で種数は変わらず，正ならば種数は減ります．この操作を繰り返し，k の Seifert 曲面 F を得ます．

[2] 一般に有限回の単純リボン変形は 1 回の単純リボン変形では実現されません．

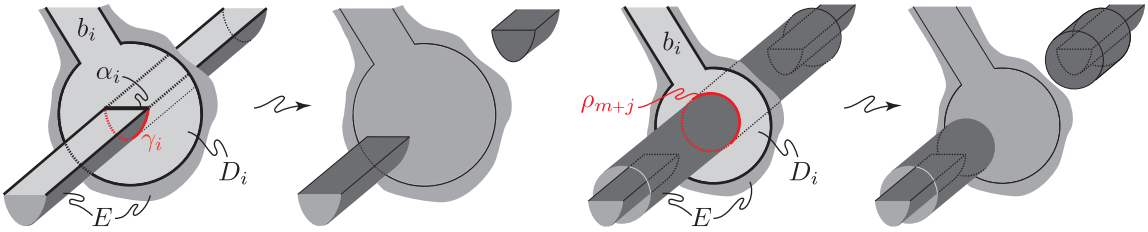


図 2

ここで F の種数を g' とすると (a), (b) より，$g' \leq g$ ですから $g(k) \leq g' \leq g = g(K)$ を得ます．また，(3)→(2)→(1) は明らかなので，(1) が成り立つとして E を $g = g(K) = g(k)$ であるように取ります．このとき，$g' = g$ となるので各円周 ρ, 特に各 $\rho_i = \alpha_i \cup \gamma_i$ $(i = 1, \cdots, m)$ について (b) でかつ F_{ρ_i} は 2 次元球面になります． これら m 個の球面を用いて，単純リボン変形を与えるバンドが自明であることが示されます． □

単純リボン変形において，各 b_i に対し，$b_i(I \times (0,1))$ と交わる D_j が唯 1 つ存在します．単純リボン変形の定義より，この対応 $i \mapsto j$ は全単射となり，置換

$$\sigma : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, m\}, \quad \sigma(i) = j$$

が定まります．σ が巡回置換である単純リボン変形を**初等的**と呼び，巡回置換の長さをその**型**といいます．任意の置換は互いに素な巡回置換の積に分解されるので，変形を与える $\mathcal{D} \cup \mathcal{B} = (D_1 \cup \cdots \cup D_m) \cup (b_1 \cup \cdots \cup b_m)$ は次のように分解されます：

$$\mathcal{D} \cup \mathcal{B} = \cup_{j=1}^{n} (\mathcal{D}^j \cup \mathcal{B}^j) = \cup_{j=1}^{n} ((D_1^j \cup \cdots \cup D_{m_j}^j) \cup (b_1^j \cup \cdots \cup b_{m_j}^j)) \ (m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n).$$

ここで各 $\mathcal{D}^j \cup \mathcal{B}^j$ は m_j 型の初等的単純リボン変形を与えます．また，$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ をその**型**といいます．例えば結び目 9_{41} と 10_{99} はそれぞれ[3]，自明な結び目から 3 型の初等的単純リボン変形と $(1,2)$ 型の単純リボン変形で得られます．

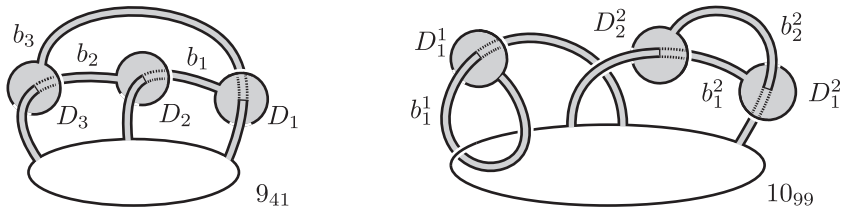


図 3

次に m 型の初等的単純リボン変形による種数の変化量を考えます．a_i を α_i 上の点 $b_{i-1}(\{1/2\} \times I) \cap D_i$ とします．そして $D_{m+1} = D_1$ として β_i を a_i と a_{i+1} を両端に持ち，a_{i+1} から a_i への向きを持つ $D_i \cup b_i$ 上の自己交差のない弧とします．このとき，$\beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_m$ は向きのついた結び目になります（図5 参照）．この結び目を初等的単純リボン変形の**随伴結び目** β と呼びます．すると次が成り立ちます．

定理 2.3. (岸本-渋谷-塚本 [KST17]) K が k から m 型の初等的単純リボン変形で得られるとき次が成り立つ．ただし，$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ である．

(1) $g(K) \geq g(k) + \left\lfloor \dfrac{m+1}{2} \right\rfloor$ （$m = 1$ かつ β と k が非分離，または $m \geq 2$）

(2) $g(K) = g(k)$ （$m = 1$ かつ β と k が分離）

定理2.3 より，バンドが自明な初等的単純リボン変形は，1 型で β と k が分離していることがわかります．

[3] 結び目のラベルは [Rol76] に従ってます．

2.1. 単純リボン変形と結び目の素性

単純リボン変形によって合成結び目が得られるかという問題を考えます．Σ を結び目 K と横断的に 2 点で交わる球面とします．$K-\Sigma$ の 2 本の弧を ξ_1, ξ_2 とし，γ を $K\cap\Sigma$ の 2 点を端点に持つ自己交差のない Σ 上の弧とします．$\gamma\cup\xi_i$ $(i=1,2)$ が非自明な結び目であるとき（向きは考えません），Σ を K の**分解球面**といいます．バンドが自明でない単純リボン変形が**素**とは，得られる結び目 K が素であるか，または，K の任意の分解球面が $\mathcal{D}\cup\mathcal{B}$ と交わるときをいいます．図4左は素でない単純リボン変形の例です．結び目 k の鏡像を取ってさらに向きを変えたものを $-k$ と表します．

定理 2.4. (岸本-渋谷-塚本 [KST18]) 結び目 k から素な初等的単純リボン変形で合成結び目 K が得られるならば，K は $3_1\sharp(-3_1)$ または $4_1\sharp(-4_1)$ であり，k は自明な結び目である．

[**証明の概略**] Σ を K の分解球面とします．Σ は $\mathcal{D}\cup\mathcal{B}$ と横断的に交わるとします．各 i について $\mathcal{S}_i=\Sigma\cap(D_i\cup b_i)$ は互いに交わらない弧や円周からなります．余分な交差を減らして各 $\mathcal{S}_i$ は端点を $\partial D_i-\partial b_i$ と $\partial b_i\cap k$ に持ち，α_i，α_{i+1} とそれぞれ 1 点で交わる弧高々 1 本からなるようにできます．$\mathcal{S}_i\neq\emptyset$ ならば，その弧は α_{i+1} と交わるので $\mathcal{S}_{i+1}\neq\emptyset$ で，帰納的にすべての i について $\mathcal{S}_i\neq\emptyset$ となります．単純リボン変形が素なので $\Sigma\cap(\mathcal{D}\cup\mathcal{B})\neq\emptyset$ であり，Σ は $\partial(\mathcal{D}\cup\mathcal{B})-k$ と高々 2 点で交わるので，この変形は 1 型か 2 型です．このとき，$k\cup(\mathcal{D}\cup\mathcal{B})$ は図4右の4 通りに限ります．変形が素なので k の左右の端点はそれぞれ結び目を作らずにつながれ，定理が示されます． □

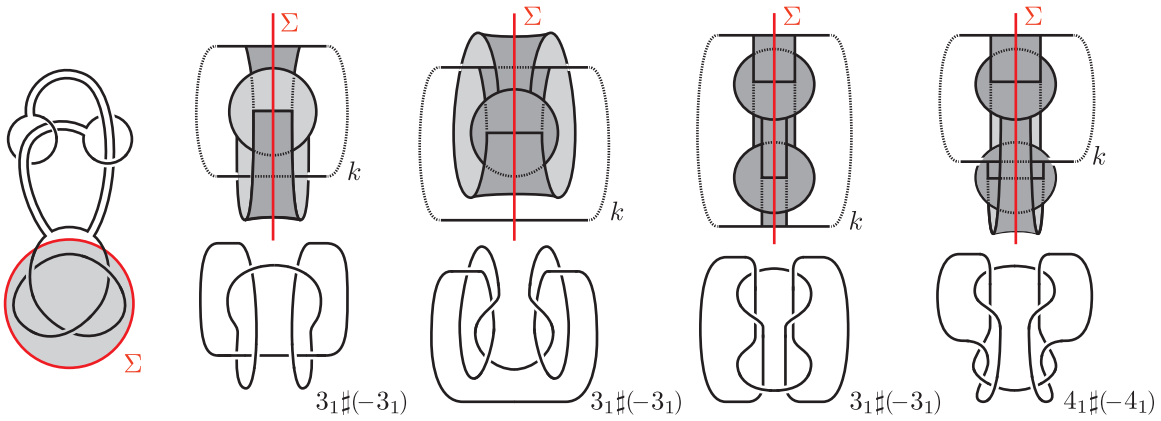


図 4

2.2. 単純リボン変形と結び目の Alexander 多項式

結び目の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ は $\pm t^s$ $(s\in\mathbb{Z})$ 倍を無視して定まる整係数 Laurent 多項式不変量です．特に $\Delta_K(t^{-1})\doteq\Delta_K(t)$ を満たします．ここで $\doteq$ は $\pm t^s$ $(s\in\mathbb{Z})$ 倍を無視して等しいことを表します．もし $K\geq k$ ならば整係数多項式 $f(t)$ を用いて $\Delta_K(t)\doteq\Delta_k(t)f(t)f(t^{-1})$ と表されます [FM66] [Gil84]．さらに $K\geq_s k$ ならば次の定理 2.5 を使って $f(t)$ を決定することができます．

定理 2.5. (岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 結び目 K が結び目 k から m 型の初等的単純リボン変形で得られるとき，次が成り立つ．

$$\Delta_K(t)\doteq\Delta_k(t)\left\{(1-t)^m-t^l(-t)^p\right\}\left\{(1-t)^m-t^{-l}(-t)^{m-p}\right\} \tag{2.1}$$

ここで l は随伴結び目 β と k との絡み数，p は $\mathcal{B}$ のバンドのうち k から進んで $\mathcal{D}$ の円盤を通過するとき裏から表へ抜けるバンドの本数である．

例えば結び目 10_{87} は自明な結び目 O から 3 型の初等的単純リボン変形で得られます（図5左）．ここで $\mathcal{B}$ の 3 本のバンドのうち O から進んで $\mathcal{D}$ の円盤を通過するとき裏から表へ抜けるのは b_3 だけなので $p=1$ です．また，随伴結び目 β は図5右のようになるので O との絡み数 l は -1 だから Alexander 多項式は次のようになります．

$$\Delta_{10_{87}}(t) \doteq \{(1-t)^3 - t^{-1}(-t)\}\{(1-t)^3 - t(-t)^2\} = (2-3t+3t^2-t^3)(1-3t+3t^2-2t^3)$$

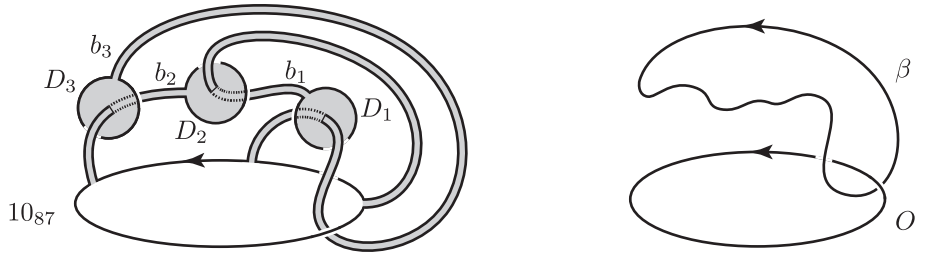


図 5

3. 単純リボン結び目

本節ではどのようなリボン結び目が単純リボン結び目であるかを考察します．まず，交点数が9 以下のリボン結び目はすべて単純リボン結び目です．しかし交点数 10 のリボン結び目のうち 10_3, 10_{22}, 10_{35}, 10_{48}, 10_{123}, $5_1\sharp(-5_1)$, および $5_2\sharp(-5_2)$ は単純リボン結び目ではありません．(交点数 10 以下の単純リボン結び目のリストを本稿末に載せています．）これを示すには Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ を，最低次数が 0 になるよう正規化した多項式 $\overline{\Delta}_K(t)$ から得られる値 $\delta_2(K)$ を見ます．$\overline{\Delta}_K(2) \neq 0$ のとき $\delta_2(K)$ を $|\overline{\Delta}_K(2)|$ の奇数の最大約数とし，$\overline{\Delta}_K(2) = 0$ のときは $\delta_2(K) = 0$ とします．

まず 10_{22}, 10_{48}, $5_1\sharp(-5_1)$ について考えます．$\delta_2(10_{22}) = 11$, $\delta_2(10_{48}) = 91 = 7 \times 13$, $\delta_2(5_1\sharp(-5_1)) = 121 = 11 \times 11$ であるので，式 (2.1) よりこれらは単純リボン結び目でないことがわかります．次に，10_3, 10_{35}, 10_{123}, $5_2\sharp(-5_2)$ について考えます．これらの δ_2 の値は 1 なので，式 (2.1) からは判定できません．それぞれの $\overline{\Delta}_K(t)$ は以下のようになります．

$$\overline{\Delta}_{10_3}(t) = 6 - 13t + 6t^2, \qquad \overline{\Delta}_{10_{35}}(t) = 2 - 12t + 21t^2 - 12t^3 + 2t^4,$$
$$\overline{\Delta}_{10_{123}}(t) = (1 - 3t + 3t^2 - 3t^3 + t^4)^2, \qquad \overline{\Delta}_{5_2\sharp(-5_2)}(t) = 4 - 12t + 17t^2 - 12t^3 + 4t^4$$

このことと次の補題 3.1 より，これらも単純リボン結び目でないことがわかります．

補題 3.1. (岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 単純リボン結び目 K が $\delta_2(K) = 1$ かつ $\overline{\Delta}_K(t) \neq 1$ を満たすならば，ある自然数 n について次が成り立つ．

$$\overline{\Delta}_K(t) = (1 - 6t + 11t^2 - 6t^3 + t^4)^n \tag{3.1}$$

従って交点数 10 以下のリボン結び目については単純リボン結び目かどうかAlexander 多項式だけを使って判定できます．しかし Alexander 多項式だけでは判定できない，単純リボン結び目でないリボン結び目が存在します [KSTI21].

ところで，自明な結び目から m 型の初等的単純リボン変形だけを有限回行って得られる結び目を m 型の単純リボン結び目と呼びます．このとき，異なる自然数 m, n について，m 型であり，かつ n 型である単純リボン結び目は存在するでしょうか？これについては次の結果を得ています．具体例は $3_1\sharp(-3_1)$ だけが得られていて，これは図4や図10からわかるように 1 型であり 2 型でもあります．

定理 3.2. (岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 結び目 K が m 型かつ n 型の単純リボン結び目 $(m > n)$ であるならば，$(m, n) = (3, 1), (3, 2), (2n, n)$.

[**証明の概略**] K の行列式 $|\Delta_K(-1)|$ を見ます．式 (2.1) から，m 型の単純リボン変形を結び目 k に行うと随伴結び目 β と k との絡み数l の偶奇により行列式は $(2^m-1)^2$ 倍（l：偶数）, $(2^m+1)^2$ 倍（l：奇数）されます．自明な結び目 O に対し $|\Delta_O(-1)|=1$ なので，K がm 型かつ n 型の単純リボン結び目ならば非負整数 a, b, c, d が存在して $|\Delta_K(-1)|$ は次のようになります．

$$(\,|\Delta_K(-1)|=)\ (2^m-1)^a(2^m+1)^b=(2^n-1)^c(2^n+1)^d \tag{3.2}$$

後は両辺の素因数の集合は等しいことから次の補題を用いて定理が示されます．ここで $ab\neq 0$ ならば $P(x)$ を自然数 x の素因数の集合として $P((2^m-1)^a(2^m+1)^b)=P(2^{2m}-1)$ であることに注意して下さい． □

補題 3.3. ((i) 石川-石田-雪本 [IIY04], (ii)(iii) 岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 自然数 M, N について次が成り立つ．

(i) $P(2^M-1)=P(2^N-1)$ ならば $M=N$

(ii) $P(2^M+1)=P(2^N-1)$ ならば $(M,N)=(3,2), (1,2)$

(iii) $P(2^M+1)=P(2^N+1)$ $(M>N)$ ならば $(M,N)=(3,1)$

3.1. プレッツェル結び目

結び目を 1 成分絡み目として，プレッツェル絡み目 $P(R)=P(r_0,r_1,\cdots,r_n)$ は 0 以外の整数の組 $R=(r_0,r_1,\cdots,r_n)$ で定まる図6左のような絡み目です．2 つの同心円を $n+1$ 本のひねりでつないだ図を考えればわかるように，任意の i $(1\leq i\leq n)$ に対し $P(r_i,r_{i+1},\cdots,r_n,r_0,\cdots,r_{i-1})$ も $P(R)$ と同じ型です（図6右参照）．$P(R)$ が結び目であるとき，$R=(r_0,r_1,\cdots,r_n)$ は次の 3 つの型のいずれかになります．

[I 型] n は偶数で，$r_0, r_1, \cdots, r_n$ の中で偶数であるものは唯1つ

[II 型] n は奇数で，$r_0, r_1, \cdots, r_n$ の中で偶数であるものは唯1つ

[III 型] n は偶数で，各 r_i $(i=0,1,\cdots,n)$ は奇数

R がX型（X=I, II, III）のとき，$P(R)$ もX型と呼びます．本稿では I 型のプレッツェル結び目（q を偶数として $P(q,r_1,r_2,\cdots,r_{2m})$ と書きます）について考えます．

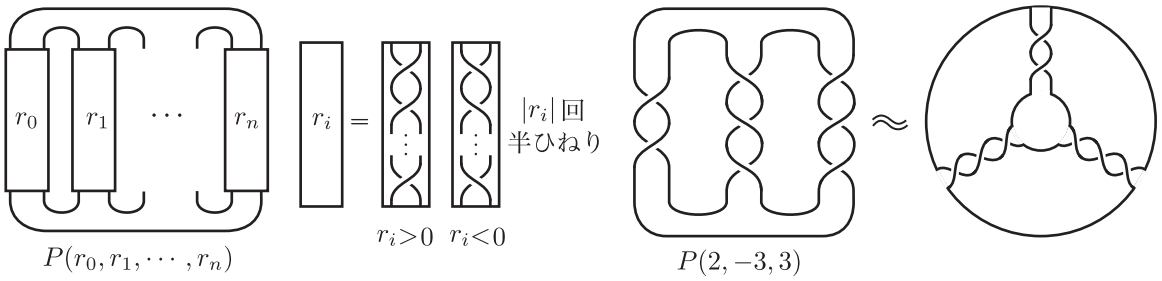


図 6

まずI型の $R=(q,r_1,r_2,\cdots,r_{2m})$ が**可約**とはある i について $r_{i+1}=-r_i$ であるときをいいます．次に**消去可能**とは $m=1$ ならば可約であるときをいい，$m>1$ ならば可約で，かつ r_i, r_{i+1} を取り除いた $R_i=(q,r_1,r_2,\cdots,r_{i-1},\check{r}_i,\check{r}_{i+1},r_{i+2},\cdots,r_{2m})$ が消去可能であるときをいいます．R が消去可能で $r_{i+1}=-r_i$ であるとき，$P(R)$ の r_i と r_{i+1} の上から 1 つめの半ひねりの下で図7のようにバンド b を取ります．そして $P(R)$ を $P(R)\cup\partial b-\mathrm{int}(P(R)\cap b)$ とする操作（フィッションといいます）を行うと，分離

したプレッツェル結び目 $K_1 = P(R_i)$ と自明な結び目を得ます．すると R_1 も消去可能ですから，同じように K_1 にフィッションを行って，互いに分離したプレッツェル結び目 K_2 と 2 成分の自明な絡み目を得ます．以下同様の操作を繰り返して，互いに分離したプレッツェル結び目 $K_m = P(q) = O$ と m 成分の自明な絡み目を得ます．リボン結び目はフィッションを何回か行って自明な絡み目にできるものなので，R が消去可能な I 型プレッツェル結び目はリボン結び目です．

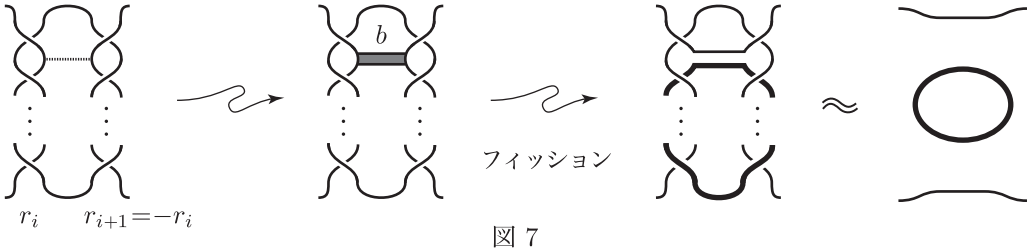


図 7

さて III 型で R の項の個数が 3 の場合 [GJ11] と R の項の正負がすべて一致している場合 [KST20b] については，プレッツェル結び目がリボン結び目であるための必要十分条件が得られています．また，III 型で R の項の個数が 5 の場合 [Mil17] と II 型の場合 [Lec15] についても，すべての i について $|r_i| > 1$ という条件の下 R の項の並び替えを許した必要条件が得られています．例えば $P(R) = P(q, r, r', -r, -r')$ がリボン結び目かどうか $|r| = |r'|$ である場合以外は一般にはわかっていません．しかし項の並び換えをすれば R は消去可能な $R' = (q, r, -r, r', -r')$ になります．I 型について次のように予想されています[4]．

予想 3.4. (Lecuona [Lec15]) I 型のプレッツェル結び目 $K = P(R) = P(q, r_1, r_2, \cdots, r_{2m})$ $(|r_i| > 1)$ がリボン結び目である必要十分条件は，R が消去可能であることである．

a, s_i を 3 以上の奇数，$a \equiv 1, 11, 37, 47, 49, 59 \pmod{60}$，$s = (s_1, \cdots, s_{m-1})$ として $R_{a,s}$ を次のように定めます．

$$R_{a,s} = \left(-\frac{(a+1)^2}{2}, a, -a-2, s_1, -s_1, \cdots, s_{m-1}, -s_{m-1}\right)$$

ここで，$R_{a,s}$ の項の並べ替えをしたもの $(2m+1)!$ 個すべてからなる集合を $\mathcal{E}_{a,s}$ とし，$\mathcal{E} = \cup_{a,s}\mathcal{E}_{a,s}$ とします．予想 3.4 について次の部分解が得られています[5]．

定理 3.5. (Lecuona [Lec15]) $R = (q, r_1, r_2, \cdots, r_{2m})$ は I 型で，$|r_i| > 1$ $(i = 1, \cdots, 2m)$ とし，$R \notin \mathcal{E}$ とする．このとき，$P(R)$ がリボン結び目であるならば，R は項の並べ替えをすれば消去可能になる．

R が項の並べ替えをすれば消去可能になる I 型プレッツェル結び目 $P(R)$ の Alexander 多項式は次の定理 3.6 を繰り返し用いて得られます．

定理 3.6. (渋谷-塚本-内田 [STU21]) $K = P(q, r_1, \cdots, r_{2m})$ を I 型プレッツェル結び目とする．また，ある i, j $(1 \le i < j \le 2m)$ に対し，$r_i + r_j = 0$ であるとする．このとき，$k = P(q, r_1, \cdots, \check{r}_i, \cdots, \check{r}_j, \cdots, r_{2m})$, $r = |r_i|$ として次が成り立つ．

$$\Delta_K(t) \doteq \Delta_k(t)\ \left(1 - t + \cdots + t^{r-1}\right)^2 \tag{3.3}$$

[4] II 型と III 型についても類似の予想がなされています．

[5] 定理 3.5 の例外条件は $a \equiv 1, 11, 37, 47, 49, 59 \pmod{60}$ が $a \equiv 1, 97 \pmod{120}$ まで改善されています [Mil17], [KLS21].

定理3.5 の例外の結び目 $P(R_{a,s})$ の Alexander 多項式についても，次の定理3.7 が得られているので，定理3.6 を繰り返し用いて求めることができます．

定理 3.7. (Lecuona [Lec15]) $K = P\left(-\dfrac{(a+1)^2}{2}, a, -a-2\right)$ のとき，

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{t^{a+2}+1}{t+1}\frac{t^a+1}{t+1} - \frac{(a+1)^2}{4}t^{a-1}(t-1)^2 \tag{3.4}$$

これらを用いて，すべての i に対し $|r_i| > 1$ である I 型プレッツェル結び目について，単純リボン結び目を決定することができます．

定理 3.8. (渋谷-塚本-内田 [STU21]) I 型プレッツェル結び目 $P(R) = P(q, r_1, r_2, \cdots, r_{2m})$ $(|r_i| > 1)$ が単純リボン結び目であるための必要十分条件は，R が消去可能で，かつすべての i について $|r_i| = 3$ であることである．

[**証明の概略**] $K = P(R)$ を単純リボン結び目とします．定理3.5 の例外の結び目 $P(R_{a,s})$ の Alexander 多項式は式 (2.1) の形に表せないことが示せるので，$R \notin \mathcal{E}$ です．よって定理3.5 より R は項の並べ替えをすれば消去可能ですから，定理3.6 により $\Delta_K(t)$ が得られます．もし $\Delta_K(t)$ が式 (2.1) の形に表せるならばすべての i について $|r_i| = 3$ となることが証明できます．したがって，項の並べ替えをすれば消去可能ですべての i について $|r_i|$ が同じ値 r です．よって q 以外の R の項は r と $-r$ が m 個ずつとなり，R が消去可能であることを示すことができます．十分性については R が消去可能なので $r_{i+1} = -r_i$ となる i があります．さらに $|r_{i+1}| = |r_i| = 3$ なので K は $K_1 = P(R_1) = P(q, r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}, \check{r}_i, \check{r}_{i+1}, r_{i+2}, \cdots, r_{2m})$ から図8のように単純リボン変形で得られます．また，R_1 も消去可能なので，この作業を m 回行えば K は $K_m = P(q)$ から 2 型の初等的単純リボン変形を m 回行って得られることがわかります．□

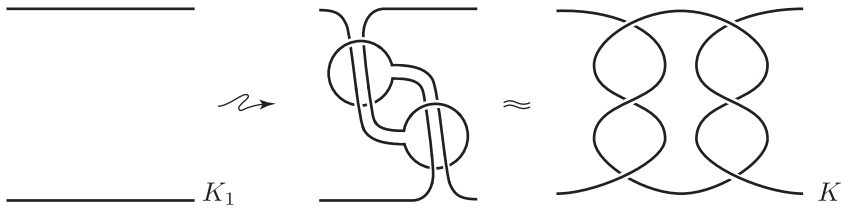


図 8

4. 絡み目への拡張

最後に定理 2.2 の絡み目への拡張に触れて本稿を終えます．絡み目も向きがついていて，2つの絡み目 ℓ, ℓ' は S^3 の向きを保つ自己同相写像 φ で $\varphi(\ell) = \ell'$ となるものが存在するとき**同じ型**であるといい，$\ell \approx \ell'$ と表します．μ 個の成分を持つ絡み目 ℓ に対して，ℓ を境界に持つ向きづけられた，閉連結成分を持たない曲面を ℓ の**Seifert 曲面**といいます．各連結成分の種数の和をその Seifert 曲面の**種数** といいます．また，ℓ の Seifert 曲面の種数の最小値を ℓ の**種数**といい，$g(\ell)$ と表します．ここで ℓ の Seifert 曲面が持ちうる連結成分数の最大値を ℓ の**非連結数**といい，$\nu(\ell)$ と表します $(1 \leq \nu(\ell) \leq \mu)$ [Gol70]．したがって ℓ の Seifert 曲面の連結成分数は 1 以上 $\nu(\ell)$ 以下の値を取ります．そして各 r $(1 \leq r \leq \nu(\ell))$ に対し，r 個の連結成分を持つ Seifert 曲面の種数の最小値を ℓ の r **位種数**といい，$g^r(\ell)$ と表します．曲面の連結和は種数を変えずに連結成分数を 1 つ下げるので $0 \leq g(\ell) = g^1(\ell) \leq g^2(\ell) \leq \cdots \leq g^{\nu(\ell)}(\ell)$ となります．このとき，次が成り立ちます．

定理 4.1. (岸本-渋谷-塚本 [KST16][KST17]) 絡み目 L が絡み目 ℓ から単純リボン変形で得られるとき，$\nu(L) \leq \nu(\ell)$ および $g^r(L) \geq g^r(\ell)$ が成り立つ $(1 \leq r \leq \nu(L))$．さらに ℓ が非分離であるならば次は同値である．(1) $\nu(L) = \nu(\ell)$ かつ $g^{\nu(L)}(L) = g^{\nu(\ell)}(\ell)$ (2) $L \approx \ell$ (3) 単純リボン変形を与えるバンドは自明

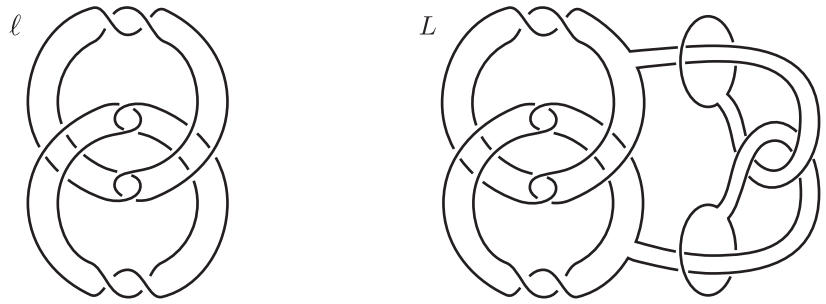


図 9

図 9 の絡み目 L と絡み目 ℓ は $g(L) = g(\ell) = 2$ ですが，同じ型ではありません [KoST14]．したがって，定理 2.2 はそのままの形では絡み目について成り立ちません．

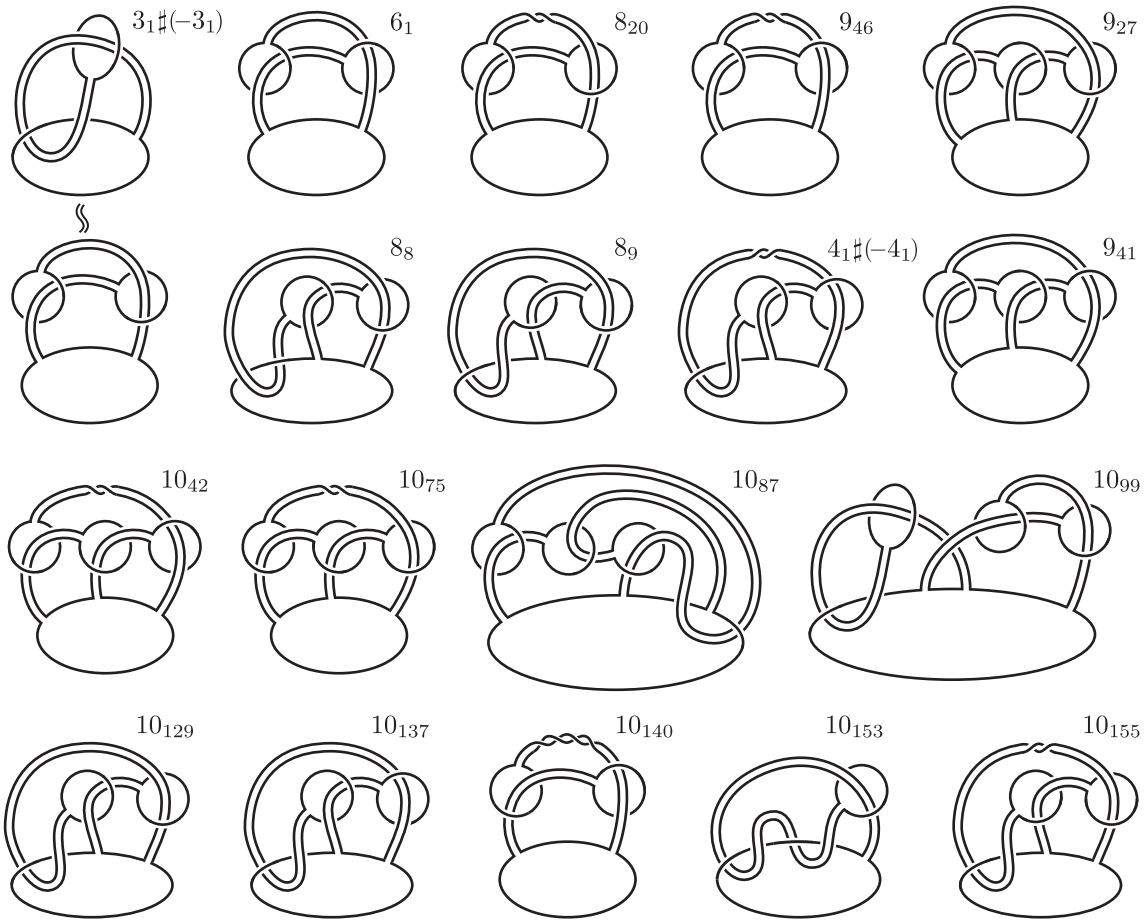


図 10:単純リボン結び目である交点数 10 以下のリボン結び目

参考文献

[FM66] R.H. Fox and J.W. Milnor, *Singularities of* 2*-spheres in* 4*-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math., **3** (1966) 257–267.

[Gil84] P.M. Gilmer, *Ribbon concordance and a partial order on* S*-equivalence classes*, Topology Appl., **18** (1984), 313–324.

[Gol70] C. Goldberg, *On the genera of links*, Ph.D. Thesis of Princeton University (1970).

[Gor81] C. McA. Gordon, *Ribbon concordance of knots in the* 3*-sphere*, Math. Ann., **257** (1981), 157–170.

[GJ11] J. Greene and S. Jabuka, *The Slice-Ribbon Conjecture for 3-stranded pretzel knots*, Amer. J. Math. **133** (2011), 555-580.

[IIY04] T. Ishikawa, N. Ishida and Y. Yukimoto, *On prime factors of* $A^n - 1$, Amer. Math. Monthly, **111** (2004), 243–245.

[KLS21] M.H. Kim, C. Lee and M. Song, *Non-slice* 3*-stranded pretzel knots*, preprint.

[KST16] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon fusions and genera of links*, J. Math. Soc. Japan, **68** (2016), 1033–1045.

[KST17] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon fusions on non-split links*, J. Knot Theory Ramifications, **26** (2017), 1741005, 15 pp.

[KST18] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon fusions and primeness of knots*, J. Knot Theory Ramifications, **27** (2018), 1850057, 11 pp.

[KST20a] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon concordance of knots*, Kobe Journal of Mathematics, **37** (2020), 1–17.

[KST20b] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Sliceness of alternating pretzel knots and links*, Topology Appl., **282** (2020), 107317.

[KSTI21] K. Kishimoto, T. Shibuya, T. Tsukamoto and T. Ishikawa, *Alexander polynomials of simple-ribbon knots*, Osaka Journal of Mathematics, **58** (2021), 41–57.

[KoST14] K. Kobayashi, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple ribbon moves for links*, Osaka J. Math., **51** (2014) 545–571.

[STU21] T. Shibuya, T. Tsukamoto and Y. Uchida, *Alexander polynomials of pretzel knots and simple-ribbon fusions*, preprint.

[Lec15] A.G. Lecuona, *On the slice-ribbon conjecture for pretzel knots*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), 2133–2173.

[Mil17] A.N. Miller, *The topological sliceness of* 3*-strand pretzel knots*, Algebr. Geom. Topol., **17** (2017), 3057–3079.

[Rol76] D.Rolfsen, *Knots and links*, Math. Lec. Series, **7**, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1976.

[Zem19] I. Zemke, *Knot Floer homology obstructs ribbon concordance*, Ann. of Math., **190** (2019), 931–947.

層の圏上のパーシステンス的距離とシンプレクティック幾何における分離エネルギー

池 祐一　(東京大学 情報理工学系研究科)*

1. 序論

柏原とSchapiraによって創始された超局所層理論は層係数のモース理論ともいえるもので，多様体上の層を局所的にだけでなく余接束内で局所的（超局所的）に調べることで層の詳しい解析を可能にする．この理論は偏微分方程式の研究に端を発し，$\mathcal{D}$ 加群理論や特異点論などに応用されてきた．近年，Nadler–Zaslow [NZ09] と Tamarkin [Tam18] の先駆的な仕事をはじめとして，超局所層理論をシンプレクティック幾何に応用する研究が盛んに行われている．本講演では話を余接束に限って，Tamarkin流のシンプレクティック幾何への層理論的アプローチ・講演者と浅野知紘氏との共同研究 [AI20a] で得られたハミルトニアンによる分離エネルギーの層理論的下限を与える手法について説明する予定である．

2. 超局所層理論におけるマイクロ台

この節では柏原とSchapiraにより創始された超局所層理論について解説する．超局所層理論において最も重要な概念の一つは「層に関する臨界点」を記述するマイクロ台というものである．ここでは基本的な文献 [KS90] に従ってマイクロ台の定義と基本性質を説明する．

まず層に関する記号を準備する．本稿では以下 $\mathbf{k}$ を体とする．位相空間 X に対して，$\mathbf{k}_X$ で茎が $\mathbf{k}$ の定数層をあらわし，$\mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X)$ で X 上の $\mathbf{k}$ ベクトル空間の層（$\mathbf{k}_X$ 加群）のなすアーベル圏をあらわす．超局所層理論では導来圏で物事を考える方が適しており，ここでもその考えに従い $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_X) \coloneqq \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X))$ で X 上の $\mathbf{k}$ ベクトル空間の層の有界導来圏をあらわす．適切な条件のもとで，導来圏の間の函手である Grothendieck の六演算 $\otimes, R\mathcal{H}om, f^{-1}, Rf_*, Rf_!, f^!$（$f\colon X \to Y$ は連続写像）が定まる．

六演算には入らないが重要な演算である相対コホモロジーについて少し説明する．これは制限射が単射・全射・同形であるかを調べるための重要な概念である．Z を X の閉部分集合，$F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X)$ とする．X の開部分集合 V に対して

$$\begin{aligned}\Gamma_{Z\cap V}(V;F) &\coloneqq \mathrm{Ker}(\Gamma(V;F) \to \Gamma(V\setminus Z;F))\\ &= \{s \in \Gamma(V;F) \mid \mathrm{supp}(s) \subset Z \cap V\}\end{aligned}$$

と定める．すると，対応 $V \mapsto \Gamma_{Z\cap V}(V;F)$ は層を定めることが確かめられ，これを $\Gamma_Z(F) \in \mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X)$ とあらわす．函手 $\Gamma_Z(*)\colon \mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X)$ は左完全函手となるので，その右導来函手 $R\Gamma_Z(*)\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_X) \to \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_X)$ が定まる．その大域切断を $R\Gamma_Z(X;F) \coloneqq R\Gamma(X;R\Gamma_Z(F))$ と書き，$j \in \mathbb{Z}$ に対して $H^j_Z(X;F) \coloneqq H^j R\Gamma_Z(X;F)$ と

本研究は科研費 (課題番号:15J07993) の助成を受けたものである。
2020 Mathematics Subject Classification: 37J11, 53D35, 55N31, 35A27
キーワード：超局所層理論，分離エネルギー，層量子化
* 〒113-8654 東京都文京区本郷7-3-1 東京大学 大学院情報理工学系研究科
e-mail: ike@mist.i.u-tokyo.ac.jp, yuichi.ike.1990@gmail.com

おいて Z に台を持つ j 次相対コホモロジーと呼ぶ．$U \coloneqq X \setminus Z$ とすると，完全三角

$$R\Gamma_Z(X;F) \to R\Gamma(X;F) \to R\Gamma(U;F) \xrightarrow{+1}$$

が得られる．コホモロジーを取れば次の長完全列が得られる：

$$\cdots \to H^j_Z(X;F) \to H^j(X;F) \to H^j(U;F) \to H^{j+1}_Z(X;F) \to \cdots .$$

上の完全三角あるいは長完全列から，$R\Gamma_Z(X;F)$ は $U = X \setminus Z$ 上の切断の空間と X 全体上の切断の空間のずれをあらわすことが分かる．特に $R\Gamma_Z(X;F) \simeq 0$ であれば制限射について同形 $R\Gamma(X;F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U;F)$ が成り立つ．トポロジーでは $H^j_Z(X;F)$ は $H^j(X, X \setminus Z; F)$ と書かれることが多い．

以降最後まで連結な境界のない C^∞ 級多様体上の層を考える．多様体 X に対して，$\pi\colon T^*X \to X$ で X の余接束をあらわし，0_X でそのゼロ切断をあらわす．また，X の閉部分多様体 M に対して，X 内の M に対する余法束を $T^*_M X$ であらわす．

以下この節の最後まで X を多様体とする．層のマイクロ台とは大雑把に言えば層のコホモロジーを同形に拡張できない余方向をあらわす余接束の部分集合である．まず，マイクロ台の定義を与え，その後で定義が直感的に何を言っているのかを説明する．

定義 2.1. $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_X)$ の<u>**マイクロ台**</u> (microsupport) $\mathrm{SS}(F) \subset T^*X$ を次で定義する：

$$\begin{cases} \text{点 } p \in T^*X \text{ が } p \notin \mathrm{SS}(F) \text{ であるとは，} p \text{ の } T^*X \text{ 内での開近傍 } U \text{ が存在して，} \\ \text{任意の } x_0 \in X \text{ と任意の } C^\infty \text{ 級関数 } \varphi\colon X \to \mathbb{R} \text{ で } d\varphi(x_0) \in U \text{ を満たすものに} \\ \text{対して } R\Gamma_{\{\varphi \geq \varphi(x_0)\}}(F)_{x_0} \simeq 0 \text{ となることをいう．} \end{cases}$$

余方向だけを考えているので $\mathrm{SS}(F)$ は T^*X の錐状（$\mathbb{R}_{>0}$ の作用で不変な）閉部分集合となる．

上のマイクロ台の定義の気持ちを直感的に説明しよう．$p \in T^*X \setminus 0_X$ として $p \notin \mathrm{SS}(F)$ の条件を考える．定義の「U が存在して」という部分は $d\varphi(x_0)$ が十分 p に近いというだけのことだからここでは無視して，$x_0 \in X$ と C^∞ 級関数 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ を $x_0 \coloneqq \pi(p)$ かつ $\varphi(x_0) = 0, d\varphi(x_0) = p$ を満たすように取る．このとき，$\{\varphi = 0\}$ は x_0 の近傍で滑らかな超曲面となり，領域 $\{\varphi < 0\}$ は境界 $\{\varphi = 0\}$ の点 x_0 において外向き法線ベクトル $p = d\varphi(x_0)$ を持つ（図 2.1 を参照）．$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{x_0} \simeq 0$ という条件はコホモロジーを取って考えれば，任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varinjlim_{x_0 \in V} H^j_{\{\varphi \geq 0\}}(V;F) \simeq 0$$

であることと同値である．ここで V は X 内の x_0 の開近傍をわたる．相対コホモロジーの長完全列を考えれば，これは任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して制限写像

$$\varinjlim_{x_0 \in V} H^j(V \cup \{\varphi < 0\}; F) \to \varinjlim_{x_0 \in V} H^j(\{\varphi < 0\}; F)$$

（切除により同値だが局所的に書けば制限写像 $\varinjlim H^j(V;F) \to \varinjlim H^j(V \cap \{\varphi < 0\}; F)$）が同形であることと同値である．状況は以下の図 2.1 を参照せよ．つまり，この条件は

領域 $\{\varphi < 0\}$ における任意のコホモロジー類が一意的に p の方向に拡張できることを述べている．実際 [KS90] では，マイクロ台は「コホモロジーが伝播しない余方向の集合」と表現されている．

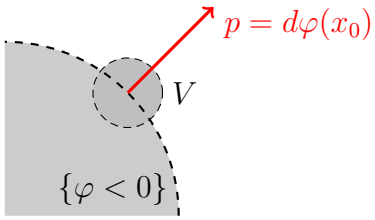


図 2.1: $p \in T^*X$，領域 $\{\varphi < 0\}$ および V の状況

例 2.2. (i) 0でない局所定数層 F に対して $\mathrm{SS}(F) = 0_X$ である．逆に $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_X)$ が $\mathrm{SS}(F) \subset 0_X$ を満たすならば，任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して $H^j(F)$ は局所定数層である．

(ii) 閉区間 $[0,1]$ 上の茎が $\mathbf{k}$ の定数層のゼロ拡張で定義される $\mathbb{R}$ 上の層 $\mathbf{k}_{[0,1]} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}})$ を考えよう．この層のマイクロ台は以下の図 2.2 のようになる．

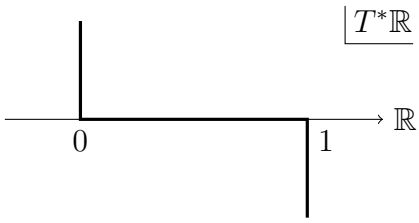


図 2.2: $\mathrm{SS}(\mathbf{k}_{[0,1]})$

$(0;1) \in T^*\mathbb{R}$ がマイクロ台に入り，$(0;-1) \in T^*\mathbb{R}$ が入らない理由を説明する．まず $(0;1)$ について判断するには，マイクロ台の定義から $(-\infty,0)$ と十分小さい $\varepsilon > 0$ に対する $(-\infty,\varepsilon)$ 上の切断を比べればよい．ここで

$$R\Gamma((-\infty,0);\mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq 0, \quad R\Gamma((-\infty,\varepsilon);\mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}$$

である．したがって，0においては正の方向にコホモロジーが同形に拡張できないので $(0;1)$ はマイクロ台 $\mathrm{SS}(\mathbf{k}_{[0,1]})$ に入ることが分かる．$(0;-1)$ についても同様に考えればよいが，今度は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$R\Gamma((0,+\infty);\mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}, \quad R\Gamma((-\varepsilon,+\infty);\mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}$$

である．ゆえに，0において負の方向にはコホモロジーは同形にのびるので，$(0;-1)$ はマイクロ台 $\mathrm{SS}(\mathbf{k}_{[0,1]})$ に入らない．

(iii) (ii) の一般化として次を示すことができる．$\psi\colon X \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数として，任意の $x \in \psi^{-1}(0)$ に対して $d\psi(x) \neq 0$ であると仮定する．X の開部分集合 U と閉部分集合 Z を $U := \{x \in X \mid \psi(x) > 0\}, Z := \{x \in X \mid \psi(x) \geq 0\}$ で定める．すると，U および Z 上の茎が $\mathbf{k}$ の定数層の X へのゼロ拡張 $\mathbf{k}_U$ および $\mathbf{k}_Z$ について

$$\mathrm{SS}(\mathbf{k}_U) = 0_X|_U \cup \{(x;cd\psi(x)) \mid \psi(x) = 0, c \leq 0\},$$
$$\mathrm{SS}(\mathbf{k}_Z) = 0_X|_Z \cup \{(x;cd\psi(x)) \mid \psi(x) = 0, c \geq 0\}$$

となる．つまり境界が滑らかな開部分集合上の定数層のゼロ拡張のマイクロ台は境界では外向きに，閉部分集合上の定数層のゼロ拡張のマイクロ台は境界では内向きに現れる．

(iv) M を X の閉部分多様体とする．このとき，$\mathrm{SS}(\mathbf{k}_M) = T^*_M X$ である．これは大雑把には M から法方向に動くときだけコホモロジーが変化することを言っている．

上でマイクロ台は「層に関する臨界点」を記述すると述べたが，それを明らかにするのが次の定理である．F が定数層 $\mathbf{k}_X$ の場合は，例 2.2(i) と合わせて「臨界値を越えなければ劣位集合のコホモロジーは同形である」という古典的なモース理論のコホモロジーに関する主張に対応する．

定理 2.3 (超局所的モースの補題). $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数，$a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ とする．さらに $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_X)$ とし，次を仮定する：

(1) φ は $\mathrm{Supp}(F)$ 上固有である．

(2) 任意の $x \in \varphi^{-1}([a,b))$ に対して，$d\varphi(x) \notin \mathrm{SS}(F)$ である．

このとき，制限射 $R\Gamma(\varphi^{-1}((-\infty,b)); F) \to R\Gamma(\varphi^{-1}((-\infty,a)); F)$ は同形である．

ここでは詳しくは述べないが，Grothendieck の六演算を施した後の層のマイクロ台は演算を施す前の層たちのマイクロ台を使って評価することが可能である．

3. シンプレクティック幾何への層理論的アプローチ

この節では Tamarkin [Tam18] に端を発するシンプレクティック幾何への超局所層理論的アプローチの基礎について説明する．Tamarkin 圏とそこでの分離定理により余接束の二つのコンパクト部分集合が交わることを層理論的に示すことができる．さらに，Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] によるハミルトンアイソトピーの層量子化を用いることで余接束へのハミルトニアンの作用を Tamarkin 圏に持ち上げられることも説明する．

以下最後まで M を（コンパクトとは限らない）連結な境界のない多様体とする．

3.1. Tamarkin の分離定理 ([Tam18, GS14])

Tamarkin は層の導来圏から Tamarkin 圏 $\mathcal{D}(M)$ を構成し，そこでの射の空間を用いて T^*M の二つのコンパクト部分集合が交わることを示せる分離定理を得た．基本的なアイデアは，T^*M のコンパクト部分集合 A に対してマイクロ台が A に含まれる $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_M)$ の部分圏 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_A(\mathbf{k}_M)$ を考え，二つのコンパクト部分集合 A, B に対して射の空間 $\mathrm{Hom}(\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_A(\mathbf{k}_M), \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_B(\mathbf{k}_M))$ を見ることで共通部分 $A \cap B$ を調べるというものである．しかし，層のマイクロ台は常に錐状であるから，一般の錐状ではないコンパクト集合に対してはこの単純なアイデアは上手く働かない．そこで Tamarkin が用いたトリックは底空間に 1 変数を付け足しコンパクト部分集合を錐状化して $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層を考えるというものである．$(x;\xi)$ で T^*M の斉次局所座標をあらわし，$(t;\tau)$ で $T^*\mathbb{R}$ の標準的な斉次座標をあらわす．そして T^*M のコンパクト部分集合 A に対しては，その錐 $c(A) := \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau > 0, (x;\xi/\tau) \in A\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ にマイクロ台が含まれる $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M\times\mathbb{R}_t})$ の部分圏を考えるのである．すると，$T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ の中の $\Omega_+ := \{\tau > 0\}$ だけでマイクロ台を考える必要があるため，次のように部分圏 $\{F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M\times\mathbb{R}_t}) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{\tau \le 0\}\}$ で割った商圏（超局所化圏）を用いる．

定義 3.1. $\Omega_+ \coloneqq \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ とする．**Tamarkin 圏** $\mathcal{D}(M)$ を

$$\mathcal{D}(M) \coloneqq \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M\times\mathbb{R}_t};\Omega_+) = \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M\times\mathbb{R}_t})/\left\{F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M\times\mathbb{R}_t}) \mid \mathrm{SS}(F) \subset \{\tau \le 0\}\right\}$$

で定める．T^*M のコンパクト部分集合 A に対して，$\mathcal{D}(M)$ の充満部分圏 $\mathcal{D}_A(M)$ を

$$\mathcal{D}_A(M) \coloneqq \{F \in \mathcal{D}(M) \mid \mathrm{SS}(F) \cap \Omega_+ \subset c(A) \coloneqq \{(x,t;\xi,\tau) \mid \tau > 0, (x;\xi/\tau) \in A\}\}$$

で定める．

上では $\mathcal{D}(M)$ を導来圏の商圏として定義したが，商圏のままでは扱いが困難になる問題がある．そこで Tamarkin [Tam18] はある射影子を用いて $\mathcal{D}(M)$ を $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M\times\mathbb{R}_t})$ の充満部分圏と同一視して議論を行った．このテクニックにより $\mathcal{D}(M)$ とそこでの射の空間の扱いがはるかに簡単になるが，ここでは詳しく説明しない．この類の射影子の一般論は [GS14] も参照せよ．

$\mathcal{D}(M)$ の射の集合を用いて Tamarkin の分離定理の弱い形は次のように述べられる．

命題 3.2 (Tamarkin の分離定理（弱い形）)．A, B を T^*M の二つのコンパクト部分集合とし，$A \cap B = \emptyset$ と仮定する．このとき，任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \simeq 0$ が成り立つ．

この命題から，$F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ であって $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \neq 0$ であるものを見つければ $A \cap B \neq \emptyset$ であることが分かる．実は上の分離定理は以下で説明する強い形の分離定理から従う．超局所層理論では全ての対象を一旦は層として扱って，それらのマイクロ台を調べることで様々な同形を導くという手法がよく用いられる．ここでも射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F,G)$ を回復する層を用いて分離定理を示す．実際，Tamarkin 圏 $\mathcal{D}(M)$ は内部 Hom 函手 $\mathcal{H}om^\star\colon \mathcal{D}(M)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ を持ち，それが

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \simeq H^0 R\Gamma_{[0,+\infty)}(\mathbb{R}_t; Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G))$$

と射の集合を回復することが示せる．ここで $q\colon M \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}_t$ は $\mathbb{R}_t$ への射影である．重要なことは，$\mathcal{H}om^\star(F,G)$ は具体的に Grothendieck の六演算を用いて構成されるため，そのマイクロ台は F と G のマイクロ台で評価が可能であるということである．この内部 Hom 函手を用いて Tamarkin の分離定理の強い形は次のように述べられる．

定理 3.3 (Tamarkin の分離定理（強い形）)．A, B を T^*M の二つのコンパクト部分集合とし，$A \cap B = \emptyset$ と仮定する．このとき，任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して $Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G) \simeq 0$ が成り立つ．

証明の概略. 一般に A と B の共通部分の仮定なしに，任意の $F, G \in \mathcal{D}(M)$ に対して $R\Gamma(\mathbb{R}; Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G)) \simeq 0$ となることが示せる．さらに，仮定 $A \cap B = \emptyset$ と層の演算に関するマイクロ台の評価を用いると

$$\mathrm{SS}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G)) \subset 0_{\mathbb{R}_t}$$

となることがチェックできる．ゆえに，例 2.2(i) で説明したことと $\mathbb{R}_t$ が可縮であることから，$Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G)$ のコホモロジー層は $\mathbb{R}_t$ 上定数である．これら二つを合わせると $Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G) \simeq 0$ が得られる． □

3.2. ハミルトンアイソトピーの層量子化 ([GKS12])

ここでは Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] によるハミルトンアイソトピーの層量子化について解説する．大雑把にはハミルトンアイソトピーのラグランジュグラフにマイクロ台が一致する層のことを層量子化と呼び，彼らの論文では存在と一意性が証明されている．前小節で述べたようにマイクロ台は錐状なので，ここでもハミルトンアイソトピーのグラフを錐状化して考える必要がある．以下でこのテクニックについてもう少し詳しく説明する．

T^*M の斉次局所座標 $(x;\xi)$ を用いて，Liouville 1-形式 θ を $\theta := \langle \xi, dx\rangle$ により定める．I を閉区間 $[0,1]$ を含む $\mathbb{R}$ の開区間とし座標を s であらわす．$H\colon T^*M \times I \to \mathbb{R}$ を時間依存するコンパクト台のハミルトン関数とすると，時間依存する T^*M 上のハミルトンベクトル場 X_{H_s} が $d\theta(X_{H_s}, *) = -dH_s$ により定まる．このハミルトンベクトル場のフローを $\phi^H = (\phi^H_s)_{s\in I}\colon T^*M \times I \to T^*M$ と書き，H が生成するハミルトンアイソトピーと呼ぶ．

ハミルトンアイソトピー ϕ^H は以下のように $\widehat{\phi}\colon \Omega_+ \times I \to \Omega_+$ に斉次に持ち上げることができる．ここで $\Omega_+ = \{\tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ であったことを思い出そう．関数 $\widehat{H}\colon T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times I \to \mathbb{R}$ を $\widehat{H}_s(x,t;\xi,\tau) := \tau \cdot H_s(x;\xi/\tau)$ により定める．すると $\widehat{H}$ は次数1の斉次関数，すなわち任意の $c \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $\widehat{H}_s(x,t;c\xi,c\tau) = c\cdot \widehat{H}_s(x,t;\xi,\tau)$ である．$\widehat{H}$ が生成するハミルトンアイソトピー $\widehat{\phi}\colon T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times I \to T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t})$ は次の図式を可換にする．ここで $\rho\colon \Omega_+ \to T^*M, (x,t;\xi,\tau) \mapsto (x;\xi/\tau)$ である：

$$\begin{tikzcd}
\Omega_+ \times I \arrow[r, "\widehat{\phi}"] \arrow[d, "\rho\times \mathrm{id}_I"'] & \Omega_+ \arrow[d, "\rho"] \\
T^*M \times I \arrow[r, "\phi^H"'] & T^*M.
\end{tikzcd}$$

構成から $\widehat{\phi}$ は斉次ハミルトンアイソトピーである．すなわち任意の $c \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $\widehat{\phi}_s(x,t;c\xi,c\tau) = c\cdot \widehat{\phi}_s(x,t;\xi,\tau)$ が成り立つ．

その斉次性により $\widehat{\phi}_s$ の $T^*((M\times\mathbb{R}_t)^2)$ 内のグラフは錐状ラグランジュ部分多様体となる．この錐状ラグランジュ部分多様体にマイクロ台が一致する $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{(M\times\mathbb{R}_t)^2})$ の対象が存在するというのが Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] の主張である．実は彼らはさらに強く，時間 s での切り口のマイクロ台が $\widehat{\phi}_s$ のグラフに一致するような族である $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{(M\times\mathbb{R}_t)^2\times I})$ の対象を構成した．このように変形族として層が得られることが，次節での応用に本質的に重要である．その族のマイクロ台を記述するために錐状ラグランジュ部分多様体 $\Lambda_{\widehat{\phi}} \subset T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times T^*I$ を

$$\Lambda_{\widehat{\phi}} := \left\{ \left(\widehat{\phi}_s(x,t;\xi,\tau), (x,t;-\xi,-\tau), (s;-\widehat{H}_s \circ \widehat{\phi}_s(x,t;\xi,\tau))\right) \;\middle|\; \begin{array}{c} (x;\xi) \in T^*M, \\ (t;\tau) \in (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}), \\ s \in I \end{array} \right\}$$

により定めよう．錐状化の構成より

$$\widehat{H_s} \circ \widehat{\phi}_s(x,t;\xi,\tau) = \tau \cdot (H_s \circ \phi^H_s(x;\xi/\tau))$$

であることが確かめられる．

定理 3.4. 上の状況で $K \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{(M\times\mathbb{R}_t)^2\times I})$ が一意的に存在して次を満たす：

(1) マイクロ台について $\mathrm{SS}(K) \subset \Lambda_{\widehat{\phi}} \cup 0_{(M\times\mathbb{R}_t)^2\times I}$ が成り立つ．

(2) 時刻 $s = 0$ において同形 $K|_{(M\times\mathbb{R}_t)^2\times\{0\}} \simeq \mathbf{k}_{\Delta_{M\times\mathbb{R}_t}}$ が成り立つ．ここで右辺は $(M\times\mathbb{R}_t)^2$ の対角集合上の茎が $\mathbf{k}$ の定数層のゼロ拡張である．

上の対象 K を斉次ハミルトンアイソトピー $\widehat{\phi}$ の**層量子化** (sheaf quantization) と呼ぶ．簡単のため以下では K を ϕ^H に付随した層量子化とも呼ぶ．$s \in I$ に対して $K_s := K|_{(M\times\mathbb{R}_t)^2\times\{s\}} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{(M\times\mathbb{R}_t)^2})$ と定める．すると，K_s を核とする積分変換は函手 $\Phi_s^H := K_s \circ (*)\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ を誘導する．さらに，K_s のマイクロ台は $\widehat{\phi}_s$ のグラフであることとマイクロ台の評価により，Φ_1^H は T^*M のコンパクト部分集合 A に対して函手 $\mathcal{D}_A(M) \to \mathcal{D}_{\phi_s^H(A)}(M)$ を誘導することも示せる．こうして T^*M へのハミルトニアンの作用が Tamarkin 圏 $\mathcal{D}(M)$ へと持ち上げられた．

4. 分離エネルギーの層理論的評価 ([AI20a])

前節で，T^*M のコンパクト部分集合が交わることを示せる分離定理と T^*M へのハミルトニアンの作用を層の圏に持ち上げることができる層量子化について説明した．二つのコンパクト部分集合が共通部分を持たなければ Tamarkin 圏における射の空間は 0 であり，層量子化による積分変換で層をハミルトン変形することができる．そこでハミルトン変形する前の層と変形した後の層がどれくらい離れているかを層の世界で調べることができれば分離エネルギーを層理論的にはかることができると考えた．これを実行したのが浅野氏との共同研究 [AI20a] である．

まず分離エネルギーの定義を思い出そう．前と同様に I を閉区間 $[0,1]$ を含む $\mathbb{R}$ の開区間とする．コンパクト台のハミルトン関数 $H\colon T^*M \times I \to \mathbb{R}$ の Hofer ノルム $\|H\|$ を

$$\|H\| := \int_0^1 \left(\max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right) ds$$

で定める．さらに T^*M の二つのコンパクト部分集合 A, B に対して

$$e(A,B) := \inf\{\|H\| \mid H\colon T^*M \times I \to \mathbb{R} \text{ はコンパクト台で } A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset\}$$

と定め，A と B の**分離エネルギー** (displacement energy) と呼ぶ．$e(A,B) = +\infty$ ならば任意の H に対して $A \cap \phi_1^H(B) \neq \emptyset$，すなわち A と B は分離不可能 (non-displaceable) であることに注意する．

エネルギー評価定理の主張を述べるために $M \times \mathbb{R}_t$ 上の平行移動が誘導する $\mathcal{D}(M)$ における射について説明する．$c \in \mathbb{R}$ に対して $T_c\colon M \times \mathbb{R}_t \to M \times \mathbb{R}_t, (x,t) \mapsto (x, t+c)$ で $\mathbb{R}_t$ 方向への平行移動写像をあらわす．すると，$F \in \mathcal{D}(M)$ と $c \leq d$ に対して $\mathcal{D}(M)$ における標準的な射 $\tau_{c,d}(F)\colon T_{c*}F \to T_{d*}F$ が定まる．$q\colon M \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}_t$ で $\mathbb{R}_t$ への射影をあらわすことを思い出すと，$F, G \in \mathcal{D}(M)$ に対しては $Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G) \in \mathcal{D}(\mathrm{pt})$ とみなせるから，$c \leq d$ に対して $\mathcal{D}(\mathrm{pt})$ における射

$$\tau_{c,d}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G))\colon T_{c*}Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G) \to T_{d*}Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G)$$

が定まる．これは $\tau_{c,d}(G)\colon T_{c*}G \to T_{d*}G$ から誘導された射と一致することが示せる．この $\tau_{c,d}$ を用いると，エネルギー評価定理は次のように述べられる．不等式中の二つ目の不等号は $\mathcal{H}om^\star$ が $\mathcal{D}(M)$ における射の集合を回復することから従う．

定理 4.1 (エネルギー評価定理 [AI20a]). A, B を T^*M の二つのコンパクト部分集合とする．このとき，任意の $F \in \mathcal{D}_A(M)$ と $G \in \mathcal{D}_B(M)$ に対して，不等式

$$\begin{aligned} e(A,B) &\geq \inf\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G)) = 0\} \\ &\geq \inf\left\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{射}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, T_{c*}G) \text{ は零射である}\right\} \end{aligned}$$

が成り立つ．

特に，任意の $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $\tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F,G)) \neq 0$ ならば A と B は分離不可能である．これがもともとの Tamarkin の分離不可能性定理 (Tamarkin [Tam18, Thm. 3.1]) の主張であり，定理 4.1 はその定量的な拡張とみなすことができる．

例 4.2. 定理 4.1 を用いた分離エネルギー評価の例を一つ紹介しよう．$M = \mathbb{R}^m$ として $T^*\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$ を考える．$(x;\xi)$ で $T^*\mathbb{R}^m$ の大域的な斉次シンプレクティック座標をあらわす．$S^m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 + y^2 = 1\}$ としてコンパクト完全ラグランジュはめ込み $\iota\colon S^m \to T^*\mathbb{R}^m, (x,y) \mapsto (x;yx)$ を考える．定理 4.1 を用いて，このはめ込みの像 $\iota(S^m)$ の分離エネルギー $e(\iota(S^m), \iota(S^m))$ の評価を与えよう．$f\colon S^m \to \mathbb{R}, f(x,y) \coloneqq -\frac{1}{3}y^3$ と定めれば，これは $\iota^*\theta = df$ を満たすことが分かる．この原始関数 f を用いて $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t$ の局所閉部分集合 Z を

$$Z \coloneqq \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t \;\middle|\; \|x\| \leq 1, -\frac{1}{3}(1-\|x\|^2)^{\frac{3}{2}} \leq t < \frac{1}{3}(1-\|x\|^2)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

と定めて，F を Z 上の茎が $\mathbf{k}$ の定数層のゼロ拡張，すなわち $F \coloneqq \mathbf{k}_Z \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t})$ とする．すると，例 2.2(iii) で見たマイクロ台の評価より，F は $\mathcal{D}_{\iota(S^m)}(\mathbb{R}^m)$ の対象を定めることが分かる．$m = 1$ の場合の状況は図 4.1 と 4.2 を参照せよ．

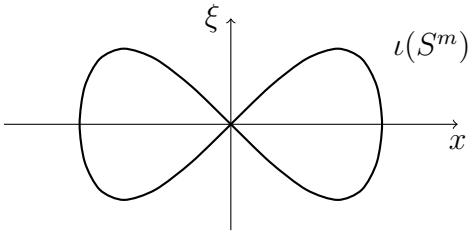


図 4.1: $m = 1$ のときの $\iota(S^m)$

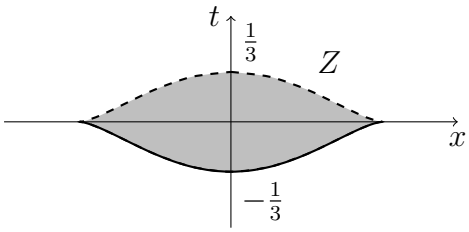


図 4.2: $m = 1$ のときの Z

この対象 F に対して，Z を $\mathbb{R}_t$ 方向に平行移動して考えてみれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, T_{c*}F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t})}(F, T_{c*}F) \simeq \begin{cases} \mathbf{k} & \left(0 \leq c < \frac{2}{3}\right) \\ 0 & \left(c \geq \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

となることが分かる．さらに，この同形を通して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F,F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, T_{c*}F)$ から誘導される射は $0 \leq c < 2/3$ に対して恒等写像である．ゆえに定理 4.1 より $e(\iota(S^m), \iota(S^m)) \geq 2/3$ が得られる．これは Akaho [Aka15] でフレアー理論的に与えられている評価と同じである．

定理 4.1 は，もし A と B に付随する良い層が存在すれば A と B の分離エネルギーの評価が可能であるということだけを主張しており，そのような層の存在については何

も述べていない．[AI20a] に続く浅野氏との共同研究 [AI20b] では，上の例 4.2 を一般化してある条件を満たすラグランジュはめ込みに対して良いエネルギー評価と交叉点の個数評価を与えるパラメータ付き Tamarkin 圏の対象が構成された．

以下で定理 4.1 の証明の概略を与える．具体的には $\mathcal{D}(M)$ に擬距離を導入して層のハミルトン変形がこの擬距離を Hofer ノルム以下だけ変化させることを示す．

定義 4.3 ([AI20a])**.** (i) $F, G \in \mathcal{D}(M)$，$a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．このとき，組 (F, G) が (a, b)-**interleaved**であるとは，射 $\alpha, \delta \colon F \to T_{a*}G$ と $\beta, \gamma \colon G \to T_{b*}F$ が存在して次の条件を満たすことをいう：

(1) 合成射 $F \xrightarrow{\alpha} T_{a*}G \xrightarrow{T_{a*}\beta} T_{a+b*}F$ は $\tau_{0,a+b}(F) \colon F \to T_{a+b*}F$ と等しい．

(2) 合成射 $G \xrightarrow{\gamma} T_{b*}F \xrightarrow{T_{b*}\delta} T_{a+b*}G$ は $\tau_{0,a+b}(G) \colon G \to T_{a+b*}G$ と等しい．

(ii) $F, G \in \mathcal{D}(M)$ に対して，$d_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ を

$$d_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \coloneqq \inf\{a + b \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{組}\,(F, G)\,\text{は}\,(a, b)\text{-interleaved である}\}$$

により定義する．すると，$d_{\mathcal{D}(M)}$ は $\mathcal{D}(M)$ 上の拡張擬距離を定めることが確認できる．

注意 4.4. Kashiwara–Schapira [KS18] はパーシステンス加群間のインターリービング距離と呼ばれる擬距離を層の導来圏上の擬距離として解釈した．これは上の定義で $M = \mathrm{pt}$ のときに $a = b, \alpha = \delta, \beta = \gamma$ という条件を付けて inf を取ったものに対応する．インターリービング距離と同じ定義を用いてしまうと，分離する H の $2\int_0^1 \|H_s\|_\infty ds$ の inf しか評価できなくなり，定理 4.1 よりも弱い評価しか得られなくなってしまう．

$\mathcal{D}(M)$ の対象とそのハミルトン変形の間の距離を考えると，次の安定性定理が示せる．

定理 4.5 (ハミルトン変形に関する安定性定理 [AI20a])**.** $G \in \mathcal{D}(M)$ として，$H \colon T^*M \times I \to \mathbb{R}$ をコンパクト台のハミルトン関数とする．このとき，不等式 $d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \|H\|$ が成り立つ．

証明の概略. $K \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$ をハミルトンアイソトピー ϕ^H に付随した層量子化として，$\mathcal{H} \coloneqq K \circ G \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t \times I})$ を時間成分 I が残った K を核とする G の積分変換とする．すると，層量子化の性質と層の演算に関するマイクロ台の評価より $\mathcal{H}$ は次の二つの条件を満たすことが分かる：

(1) $\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{0\}} \simeq G, \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{1\}} \simeq \Phi_1^H(G)$,

(2) $\mathrm{SS}(\mathcal{H}) \subset T^*M \times \{(t, s; \tau, \sigma) \mid (-\max_p H_s(p)) \cdot \tau \leq \sigma \leq (-\min_p H_s(p)) \cdot \tau\}$.

すなわち $\mathcal{H}$ は G と $\Phi_1^H(G)$ をつなぐ層の変形族であり，そのマイクロ台を含む錐状集合の開きはハミルトン関数で統制されている．ここで次の補題を準備する：

補題 4.6. $\mathcal{H} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t \times I})$ とし，$s_1 < s_2$ を I 内の二点とする．ある $a, b, r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して

$$\mathrm{SS}(\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times (s_1 - r, s_2 + r)}) \subset T^*M \times \{(t, s; \tau, \sigma) \mid -a \cdot \tau \leq \sigma \leq b \cdot \tau\}$$

であると仮定する．このとき，不等式

$$d_{\mathcal{D}(M)}(\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{s_1\}}, \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{s_2\}}) \leq (a + b)(s_2 - s_1)$$

が成り立つ．

この補題の証明は述べないが，感覚としてはマイクロ台は層の変化を記述する部分集合であり，$T^*(\mathbb{R}_t \times I)$ 成分の錐の開き方が I 方向に変化させたときの $\mathbb{R}_t$ 方向のずれ方，すなわち $d_{\mathcal{D}(M)}$ を統制していることから従う．

上の補題と条件 (1), (2) を使えば，任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \max_{s \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} \left(\max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right)$$

となり，$n \to +\infty$ とすれば右辺は $\|H\|$ に近づくから結論が得られる．この証明で見たように層量子化が時間パラメータ I を持つ族，すなわち $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$ の対象として得られていることが有効に働くのである． □

最後に定理 4.1 が定理 4.5 から従うことを説明しよう．

<u>定理 4.5 ⇒ 定理 4.1 の証明</u>．まず，擬距離の定義から

$$\inf\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F, G)) = 0\} = d_{\mathcal{D}(\mathrm{pt})}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F, G), 0)$$

となることに注意する．ハミルトン関数 $H \colon T^*M \times I \to \mathbb{R}$ が $A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset$ を満たすとする．すると，Tamarkin の分離定理から $Rq_* \mathcal{H}om^\star(F, \Phi_1^H(G)) \simeq 0$ である．ゆえに，Rq_* と $\mathcal{H}om^\star(F, *)$ により擬距離が大きくならないことと安定性定理（定理 4.5）より，不等式

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}(\mathrm{pt})}(Rq_* \mathcal{H}om^\star(F, G), 0) &\leq d_{\mathcal{D}(M)}(\mathcal{H}om^\star(F, G), \mathcal{H}om^\star(F, \Phi_1^H(G))) \\ &\leq d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \|H\| \end{aligned}$$

が得られて，エネルギー評価定理が証明された． □

参考文献

[AI20a] T. Asano and Y. Ike, Persistence-like distance on Tamarkin's category and symplectic displacement energy, *J. Symplectic Geom.*, **18** (2020), no. 3, 613–649.

[AI20b] T. Asano and Y. Ike, Sheaf quantization and intersection of rational lagrangian immersions, arXiv preprint, `arXiv:2005.05088 [math.SG]`, 2020.

[Aka15] M. Akaho, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions, arXiv preprint, `arXiv:1505.06560 [math.SG]`, 2015.

[GKS12] S. Guillermou, M. Kashiwara, and P. Schapira, Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems, *Duke Math. J.*, **161** (2012), no. 2, 201–245.

[GS14] S. Guillermou and P. Schapira, Microlocal theory of sheaves and Tamarkin's non displaceability theorem, In *Homological mirror symmetry and tropical geometry*, Vol. **15** of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.* 43–85, Springer, Cham, 2014.

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Vol. **292** of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[KS18] M. Kashiwara and P. Schapira, Persistent homology and microlocal sheaf theory, *Journal of Applied and Computational Topology*, **2** (2018), no. 1–2, 83–113.

[NZ09] D. Nadler and E. Zaslow, Constructible sheaves and the Fukaya category, *J. Amer. Math. Soc.*, **22** (2009), no. 1, 233–286.

[Tam18] D. Tamarkin. Microlocal condition for non-displaceability. In M. Hitrik, D. Tamarkin, B. Tsygan, and S. Zelditch, editors, *Algebraic and Analytic Microlocal Analysis* 99–223, Cham, 2018. Springer International Publishing.

COHOMOLOGY OF THE SPACES OF COMMUTING ELEMENTS IN A LIE GROUP

武田　雅広　(京都大学)

1. はじめに

Lie 群 G に対して, 離散群 π から G への準同型写像全体のなす空間を $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ と書く．この空間には G の随伴作用が入り, その作用による商空間 $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ は character variety と呼ばれている．さらにこの空間は基本群が π である空間上の平坦 G 束のモジュライ空間に一致する．$\mathrm{Hom}(\pi, G)$ 自身も平坦 G 束の基点付きの場合のモジュライ空間となっている．そのため, 幾何学や物理学での先行研究があり, 例えば Kac と Smilga[8] や Witten[13],[14] らによるものが挙げられる．

今回は π が n 階自由アーベル群 $\mathbb{Z}^m$ の場合を取り扱う．この時次の自然な同相写像がある．

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G) \cong \{(g_1, g_2, \ldots, g_m) \in G^m \mid g_i g_j = g_j g_i \text{ for all } i, j\}$$

そのためこの空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ を commuting elements と呼ぶ．この空間のトポロジーに関する先行研究を紹介する．この空間へのアプローチのうち主なものは次の 2 つである．1 つ目は Adem, Bahri, Bendersky, Cohen Gitler らによって導入されたサスペンション分解 [1] で, 一般の $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ に対して, サスペンションをとることでいくつかのパーツに分解できることが示された．そしてこの方法を用いることで, Crabb や Baird, Jeffrey, Selick らによって $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{SU}(2))$ の場合に具体的に分解が与えられ, 整係数ホモロジーが計算された [5, 4]．しかしこの方法は分解されたパーツが複雑であるため, それ以上の結果は今のところ得られていない．2 つ目の方法は Baird によって与えられた $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理コホモロジーとある不変式環の同型 [3] である．この手法を用いることで様々な研究がなされた．例えば Poincaré 多項式の公式を導いた Ramras と Stafa の結果 [11], 有理コホモロジーの安定性を計算した同じく Ramras と Stafa の結果 [12], $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の基本群を計算した低次のホモトピー群を計算した Gómez, Pettet, Souto の結果 [7] などがある．その他のアプローチとしては, 例えば [2] では $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の 2 次のホモトピー群の計算を G の随伴作用を用いておこなって

いる．また私たちは $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモトピー余極限としての分解を与えることで, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモロジーにどのような p-torsion が存在するかを調べた．この結果に関しては本講義録では詳しく述べないため, [10] を参照していただきたい．

本講義録では, 上記の二つ目の手法である Baird による有理係数コホモロジーの計算と Ramras と Stafa による Poincaré 多項式の公式をより深く解析することで得られた, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の性質について述べる．2 章ではそれらの先行研究を紹介する．3 章では Ramras と Stafa による Poincaré 多項式の公式を組み合わせ論的に整理する方法とその応用として $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理双曲性について述べる．4 章では Baird による有理係数コホモロジーの結果を用いて $\mathrm{SO}(2n)$ を除く古典群 G に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーの生成系を与え, その応用としてホモロジー安定性の最大範囲を与える．5 章では G がランク 2 の Lie 群の場合における $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーの環構造に関して結果を述べる．6 章ではまとめとして今後の課題を述べる．本講義録の内容は岸本大祐氏との共同研究 [9] にもとづいている．

2. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理係数コホモロジーと Poincaré 多項式

この章では, 本研究で用いた先行研究を紹介する．以降, Lie 群 G はコンパクトかつ連結であると仮定する．ここでいくつか記号を定義する．T を G の極大トーラス, W を G の Weyl 群とする．また $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ を $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の $(1, 1, \ldots, 1)$ を含む連結成分とする．さらに $\mathbb{F}$ を体で標数が W の位数と互いに素なものする．

まず, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーに関する Baird の結果を紹介する．W の $G/T \times T^m$ への作用を, $g \in G, t_i \in T, w \in W$ として,

$$(gT, t_1, \ldots t_m) \cdot w = (gwT, w^{-1}t_1w, \ldots w^{-1}t_mw)$$

と定義する．$g \in G$, $t_i \in T$ として, 次の写像を考える,

$$\phi\colon G \times T^m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1 \quad (g, t_1, \ldots, t_m) \mapsto (gt_1g^{-1}, \ldots, gt_mg^{-1})$$

この写像は次の写像 $\bar{\phi}$ を誘導する．

$$\bar{\phi}\colon G/T \times_W T^m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$$

この写像 $\bar{\phi}$ が $\mathbb{F}$ 係数コホモロジーで同型であることが Baird によって示された．さらに, $G/T \times T^m$ への W の作用が自由であることから, $G/T \times_W T^m$ のコホモロジーは

$$H^*(G/T \times_W T^m; \mathbb{F}) \cong \left(H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m}\right)^W$$

となる. 以上をまとめると次の定理を得る.

Theorem 2.1 (Baird [3])**.** $\mathbb{F}$ を標数が W の位数と互いに素な体とする. このとき, 次の同型を得る.

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G); \mathbb{F}) \cong \left(H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m}\right)^W$$

この定理は $m = 1$ の場合, 次の同型を与える.

$$H^*(G; \mathbb{F}) \cong (H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F}))^W \tag{2.1}$$

この同型は Shepard-Todd の定理と Solomon の定理という古典的な不変式論の定理を用いた証明も知られている. Baird の定理はこの同型の一般化と見ることができるため, 不変式論や表現論などの分野においても興味深いものである.

では次に, Ramras と Stafa によって得られた, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ の Poincaré 多項式の公式を紹介する. Lie 群 G に対して, T の分類空間のコホモロジーの W-不変環 $H^*(BT)^W$ は多項式環になることが知られている. その多項式の生成元の次数を並べたものを Lie 群 G の特性次元と呼ぶ.

Theorem 2.2 (Ramras, Stafa [11])**.** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の *Poincaré* 多項式は次で与えられる.

$$P_t(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)) = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{r} (1 - t^{2d_i}) \sum_{w \in W} \frac{\det(1 + tw^m)}{\det(1 - t^2 w)}$$

ここで, $d_1, \ldots d_r$ は G の特性次元であり, 行列式は *Lie* 代数への標準的な表現で計算されている.

証明を以下で与える. この証明は Ramras, Stafa のオリジナルのものとは異なる.

Proof. $H^*(G/T)$ が W の余不変式環であることから, Shephard Todd の定理より次の W-加群としての同型がある.

$$H^*(BT) \cong H^*(BT)^W \otimes H^*(G/T)$$

これを用いると次の同型が得られる.

$$(H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m})^W \cong (H^*(BT; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m})^W / (H^*(BT; \mathbb{F})^W_+)$$

$H^*(BT)^W$ は次元が $d_1, \ldots, d_r$ の元たちで生成される多項式環である．さらにその生成元たちは $H^*(BT)$ で正則であるので, $(H^*(BT) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W$ でも正則である．そのため, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ の Poincaré 多項式は Baird の定理を用いると,

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1; t) = P(H^*(BT; \mathbb{F}) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W; t) \prod_{i=1}^{n} (1 - t^{2d_i})$$

となる．有限群の表現論の基本的な計算を行うと

$$\begin{aligned} P((H^*(BT; \mathbb{F}) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W; t) &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{(H^*(BT;\mathbb{F}) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^i}) t^i \\ &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^{2i}(BT;\mathbb{F})}) t^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^i(T;\mathbb{F})}) t^i \right)^m \end{aligned}$$

となる．さらに

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^{2i}(BT;\mathbb{F})}) t^{2i} = \frac{1}{\det(1 - t^2 w)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^i(T;\mathbb{F})}) t^i = \det(1 + tw)$$

であることも標準的な計算で出来る．よってこの定理は示された． □

この定理を用いて具体例をいくつか計算を行うと, 次のようになる．

$$\begin{aligned} P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(2))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 \\ P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(3))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 4t^5 + t^6 + 2t^7 + 3t^8 \\ P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(4))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 4t^5 + 4t^6 + 8t^7 + 6t^8 + 6t^9 + 8t^{10} \\ &\quad + 6t^{11} + 7t^{12} + 2t^{13} + 3t^{14} + 4t^{15} \\ P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(5))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 4x^5 + 4t^6 + 8t^7 + 10t^8 + 14t^9 \\ &\quad + 13t^{10} + 16t^{11} + 22t^{12} + 18t^{13} + 21t^{14} + 20t^{15} + 22t^{16} \\ &\quad + 18t^{17} + 14t^{18} + 14t^{19} + 10t^{20} + 10t^{21} + 3t^{22} + 4t^{23} + 5t^{24} \end{aligned}$$

これらの計算例から次の二つのことを見て取ることが出来る．1 つ目は最高次の次元が Lie 群の次元と一致しており, さらにその係数が $\mathrm{rank}\, G + 1$ に一致していることである．この性質が一般に成り立つことを示した．このことに関しては 3 章で述べる．2 つ目は低次の項は $2\,\mathrm{rank}\, G + 1$ 次元まで係数が一致している点である．これは Ramras と Stafa によって与えられた安定性 [12] よりはるかに広い範囲である．実際に私たち

の研究でコホモロジー安定性の最大範囲が計算でき, 上記の計算例での Poincaré 多項式の安定している範囲と一致していることが分かった. このことに関しては 4 章で述べる.

3. Poincaré 多項式の最高次と rational hyperbolicity

この章では, 前章で紹介した Ramras と Stafa による Poincaré 多項式の公式を組み合わせ論を用いて整理し, Poincaré 多項式の最高次の様子やそこから得られる応用を述べる.

まず具体例として $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{U}(3))$ の Poincaré 多項式を計算する. Ramras と Stafa の定理より, 次の式を得る.

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{U}(3))_1; t) = \frac{1}{6}\prod_{i=1}^{3}(1-t^{2i})\sum_{w\in\mathfrak{S}_3}\frac{\det(1+tw)^2}{\det(1-t^2w)}.$$

例えば w が長さ 3 の巡回置換 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ のとき次のように行列式が計算できる.

$$\det(1+tw) = \det\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & t\\ t & 0 & 1\end{pmatrix} = 1+t^3$$

そのほかの行列式も同様に計算でき, 上記の式の右辺の和の部分は次のように展開することができる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{w\in\mathfrak{S}_3}\frac{\det(1+tw)^2}{\det(1-t^2w)}\\
&= \left(\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right)^3 + 3\left(\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right)\left(\frac{(1-t^2)^2}{1-t^4}\right) + 2\left(\frac{(1+t^3)^2}{1-t^6}\right)\\
&= \left(-1+\frac{2}{1-t}\right)^3 + 3\left(-1+\frac{2}{1-t}\right)\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right) + 2\left(-1+\frac{2}{1-t^3}\right)\\
&= (-1+3-2) + 3(1-1)\frac{2}{1-t} - 3\left(\frac{2}{1-t}\right)^2 - 3\frac{2}{1+t^2} + 2\left(\frac{2}{1-t^3}\right)\\
&= -3\left(\frac{2}{1-t}\right)^2 - 3\frac{2}{1+t^2} + 2\left(\frac{2}{1-t^3}\right)
\end{aligned}$$

この計算を見ると, 4 行目で 2 つの項の係数が打消しあっている．このような打消しは第一種 Stirling 数を用いて書き下すことができ, 一般の $\mathrm{U}(n)$ についても同様の打消しが起こる．そのことを用いて $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{U}(n))$ の Poincaré 多項式を整理すると以下の結果を得る.

正の整数 k に対して,

$$q_k(t) = \frac{2}{1+(-1)^k t^k}$$

とし, k の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_l)$ に対して

$$q_\lambda(t) = q_{\lambda_1} \cdots q_{\lambda_l}$$

と定義する．また次の形のような分割 $\lambda = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_l, \ldots, \lambda_l}_{n_l})$ に対して, 整数 $\theta(\lambda)$ を

$$\theta(\lambda) = \lambda_1 \ldots \lambda_l n_1! \ldots n_l!$$

と定義する.

Theorem 3.1. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, U(n))$ の *Poncaré* 多項式は次で与えられる.

$$P_t(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, U(n))) = \prod_i^n (1-t^{2i}) \sum_{n-1}^{n} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{n+k}}{\theta(\lambda)} q_\lambda(t)$$

この定理は第一種 Stirling 数を用いた組み合わせ的な計算を行うことで証明できる. この結果は $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n))$ の場合においても同様に成り立ち, 次の定理を得る.

Theorem 3.2. 正の整数 k に対して,

$$q_k^m(t) = (-1)^{m(k-1)} t^{(m-2)k} + \frac{(1+(-1)^{k+1}t^k)^m}{1-t^{2k}}$$

と定義し, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash k \leq n$ に対して,

$$q_\lambda^{m,n}(t) = t^{(m-2)(n-k)} q_{\lambda_1}^m(t) \cdots q_{\lambda_l}^m(t)$$

で, λ が 0 の分割ならば, $q_\lambda^{m,n}(t) = t^{(m-2)n}$ と定義する. このとき, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n))_1$ の *Poncaré* 多項式は次で与えられる.

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n))_1; t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i}) \sum_{k=n-1}^{n} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{n+k}}{\theta(\lambda)} q_\lambda^{m,n}(t) & (m \ \ even) \\ \prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i}) \sum_{k=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{k}}{\theta(\lambda)} q_\lambda^{m,n}(t) & (m \ \ odd). \end{cases}$$

この式を見ると, 和の添え字を見ることで m が偶数の時には多くの打消しが起こっていることが分かる. このような Poincaré 多項式の公式は他の古典群, つまり $\mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n), \mathrm{Spin}(n)$ でも同様に得ることができる. 結果は [9] にある.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の Poincaré 多項式の最高次の計算を行う. 古典群の場合には上記のような公式が得られるので, それを用いることで計算することができる. 例外群の場合, コンピュータを用いて Ramras, Stafa の公式を計算することで次のような結果を得た.

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G_2)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 2t^{11} + 2t^{13} + 3t^{14}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, F_4)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 4t^{49} + 4t^{51} + 5t^{52}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, E_6)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 6t^{75} + 6t^{77} + 7t^{78}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, E_7)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 7t^{130} + 7t^{132} + 8t^{133}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, E_8)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 8t^{245} + 8t^{247} + 9t^{248}.$$

実際にはすべての項の係数を計算しており, [9] の Appendix に計算結果を載せている. 以上の結果をまとめると次の定理を得る.

Theorem 3.3. *G が単純であるとき, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の Poincaré 多項式の最高次は*

$$(\mathrm{rank}\, G + 1)t^{\dim G}$$

で表される.

任意のコンパクト Lie 群 G に対して, 単純 Lie 群の組 $G_1, \ldots G_k$ と l 次元トーラス T^l が存在して, 有限被覆写像

$$G_1 \times \cdots \times G_k \times T^l \to G$$

があることが知られている．このとき $G_1, \dots G_k$ を G の単純因子と呼ぶ．次の Lemma が Theorem2.1 より容易に証明できる．

Lemma 3.4. *Lie* 群 G が上記のような有限被覆写像を持つとする．このとき次の同型がある．

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1; \mathbb{F}) \cong \bigotimes_{1 \le i \le k} H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G_i)_1; \mathbb{F}) \otimes H^*(T^{ml}; \mathbb{F})$$

Theorem3.3 と Lemma3.4 より, 次の定理を得る．

Theorem 3.5. $G_1, \dots G_k$ を G の単純因子とする．このとき $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の *Poincaré* 多項式の最高次は

$$(\mathrm{rank}\, G_1 + 1) \dots (\mathrm{rank}\, G_k + 1) t^{\dim G + \mathrm{rank}\, \pi_1(G)}$$

で表される．

次に, 得られた Poincaré 多項式の最高次の計算の応用について述べる．以下の有理ホモトピー論に関する内容は Félix, Halperin, Thomas による成書 [6] を参照している。単連結空間 X が有理双曲性をもつとは, $\sum_{i \le n} \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ の次元が n に対して指数関数的に増大することである．また単連結空間 X が有理楕円性をもつとは, $\sum_{0 \le i} \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ の次元が有限であることである．X が単連結有限 CW-複体ならば, 有理双曲性か有理楕円性のどちらか一方の性質をもつことが知られてる．また X が有理楕円性をもつならば, X の Poincaré 多項式は再帰的になることが知られている．そのことから有理楕円性をもつ空間の Poincaré 多項式の最高次の係数は 1 となることが分かる．以上の有理ホモトピー論の結果と Poincaré 多項式の結果を合わせると次の結果を得る．

Theorem 3.6. コンパクト単連結 *Lie* 群 G に対して, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ は有理双曲性をもつ．

4. コホモロジーの生成元とコホモロジー安定性

この章では, $\mathrm{SO}(2n)$ を除く古典群の場合に, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の $\mathbb{F}$-係数コホモロジーの生成集合とその結果から得られるコホモロジー安定性の最大範囲について述べる．ここで $G = \mathrm{SO}(2n+1)$ の場合, Theorem2.1 より $\mathbb{F}$-係数コホモロジーは $G = \mathrm{Sp}(n)$ の場合と一致し, $G = \mathrm{SU}(n)$ の場合は Theorem3.4 より $H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n)); \mathbb{F}) \cong$

$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, SU(n)); \mathbb{F}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{F})$ となる．よってここでは, $G = \mathrm{U}(n), \mathrm{Sp}(n)$ の場合について述べる．コホモロジー環の生成元たちを

$$H^*(BT; \mathbb{F}) = \mathbb{F}[x_1, \dots x_n]$$

$$H^*(T; \mathbb{F}) = \bigotimes_{1 \le i \le m} \bigwedge (y_1^i, \dots, y_n^i)$$

と定め, $H^*(G/T; \mathbb{F})$ の生成元は $H^*(G/T; \mathbb{F}) \cong H^*(BT; \mathbb{F})/H^*(BT; \mathbb{F})^W$ より誘導される $x_1, \dots x_n$ をとる．

Example 4.1. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{Sp}(1))$ のコホモロジー環の計算を行う．Theorem2.1 より, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{Sp}(1))$ のコホモロジー環は

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, Sp(1)); \mathbb{F}) \cong \left(\mathbb{F}[x_1]_{\mathbb{Z}/2} \otimes \Lambda(y_1^1, y_1^2)\right)^{\mathbb{Z}/2}$$

と表される．Weyl 群 $\mathbb{Z}/2$ の x_1, y_1^1, y_1^2 への作用はすべて -1 倍であるので, コホモロジーは次のように表される．

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, Sp(1)); \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[x_1y_1^1, x_1y_1^2, y_1^1y_1^2]/(x_1y_1^1, x_1y_1^2, y_1^1y_1^2)^2$$

このように $H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, Sp(1)); \mathbb{F})$ は $\{x_1y_1^1, x_1y_1^2, y_1^1y_1^2\}$ で生成されていると分かる．

環 A の部分集合 S が A を最小生成するとは, S が A を生成しかつ S の任意の真部分集合が A を生成しないことである．このとき帰納法や様々な計算を行うことで次の定理を証明することが出来る。

Theorem 4.2. G が $\mathrm{U}(n)$ または $\mathrm{Sp}(n)$ とする．$z(k, I)$ を

$$z(k, I) = \begin{cases} \sum_j x_j^{k-1} y_j^I & (G = U(n)) \\ \\ \sum_j x_j^{2k+\epsilon_{|I|}-2} y_j^I & (G = Sp(n)). \end{cases}$$

と定義する．ここで ϵ_i は

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & (i \ \ even) \\ 1 & (i \ \ odd) \end{cases}$$

とする．このときコホモロジー環 $H^*\left(\mathrm{Hom}(Z^m, G); \mathbb{F}\right)$ は $\{z(k, I) | k \ge 1, I \subset [m], k + |I| - 1 \le n\}$ で最小生成される．

この結果を用いて, コホモロジー安定性の最大範囲を得ることができる. そのとき次の Proposition が有用である. 今, 次数付き集合 S に対して, $\mathbb{F}\langle S\rangle$ を次数付き $\mathbb{F}$-代数として S で自由生成された環とする.

Proposition 4.3. $G = \mathrm{U}(n), \mathrm{Sp}(n)$ として $z(k, I)$ を定理 *4.2* と同じものとする. このとき次の写像

$$\mathbb{F}\langle\{z(k,I)|k \geq 1, , I \subset [m], k + |I| - 1 \leq n\}\rangle \to H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G))$$

は次数

$$\begin{cases} 2n - m & (G = \mathrm{U}(n)) \\ 2n + 1 & (G = \mathrm{Sp}(n)) \end{cases}$$

以下で同型となる.

この Proposition を用いて計算をすると $G = \mathrm{U}(n)$ の時のコホモロジー安定性は次のように表される.

Theorem 4.4. $n \geq m$ のとき $H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{U}(n)); \mathbb{F}) \to H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{U}(n+1)); \mathbb{F})$ は $2n - m + 1$ 次元以下で同型. さらに, $2n - m + 2$ 次元では全射ではない.

同様に $G = \mathrm{Sp}(n)$ の時のコホモロジー安定性は次のように表される.

Theorem 4.5. $n \geq m$ のとき $H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{Sp}(n)); \mathbb{F}) \to H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{Sp}(n+1)); \mathbb{F})$ は $2n + 1$ 次元以下で同型. さらに, $2n + 2$ 次元では全射ではない.

ここでこれら二つの定理では述べられていない $n < m$ の場合も同様の計算でコホモロジー安定性の最大範囲を計算することが可能である.

5. ランク 2 の Lie 群の場合

この章では G がランク 2 の単純 Lie 群の場合における $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジー環の構造を紹介する. Theorem2.1 を用いて計算を行い得られたのが次の結果である.

Theorem 5.1. G をランクが *2* の単連結単純 *Lie* 群とする. このとき $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ のコホモロジー環は次で与えられる.

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G); \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}\langle a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, b_1, b_2\rangle/(a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, b_1, b_2)^3 + I,$$

ここで I は

$$b_1b_2, \quad {b_2}^2, \quad a_2^1b_2, \quad a_2^2b_2, \quad a_1^1b_2+a_2^1b_1, \quad a_1^2b_2+a_2^2b_1, \quad a_1^1a_2^2+a_1^2a_2^1,$$

で生成されるイデアルであり, 生成元の次元は

$$|a_i^j| = \begin{cases} 2i+1 & (G=SU(3)) \\ 4i-1 & (G=Sp(2)) \\ 8i-5 & (G=G_2), \end{cases}$$

$$|b_i| = \begin{cases} 2i & (G=SU(3)) \\ 4i-2 & (G=Sp(2)) \\ 8i-6 & (G=G_2) \end{cases}$$

である.

ここで, $G=\mathrm{SU}(3), \mathrm{Sp}(2)$ の場合は Section 4.2 で定めた生成元と同じものである. この定理からこれら 3 つの空間のコホモロジーは次数を無視するとすべて同型である. $m=1$ の場合,$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ は Lie 群 G と一致するため, そのコホモロジー環は次数を無視すれば同じ環構造であることは分かる. この定理はその一般化の可能性を示唆している.

6. 今後の課題

この章では私たちの結果から出てきた課題について述べる. まず Section 3 で Poincaré 多項式について私たちは古典群の場合にのみ組み合わせ論を用いた整理を行った. そこで次の問題が考えられる.

Question 6.1. G が例外群の場合, Poincaré 多項式を組み合わせ論を用いて整理できるのか？

私たちは Theorem3.3 で G が単純な場合に $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の Poincaré 多項式の最高次を求めた. これは G の次元とランクのみに依存する綺麗な形で表されている. しかしこの公式はすべての単純 Lie 群に対して個別に計算を行った結果であるため次の疑問が浮かぶ.

Question 6.2. Theorem3.3 の公式に位相幾何学的な解釈はあるのか？

Section5 の最後に述べたように, Theorem5.1 はより一般の定理の存在を示唆している．それは以下のようなものである．

Question 6.3. G が単純な場合, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の $\mathbb{F}$-係数コホモロジーの次数を無視した環構造は G の rank のみに依存するのか？そしてその環構造はどのように表されるのか?

最後に本研究の内容はすべて Baird によって導入された定理 2.1 を用いて行った．そのため本研究ではホモロジーの torsion などの情報を調べることはできていない．次のような問題が考えられる．

Question 6.4. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモロジーは p-torsion を持つか？

この問題は $G = \mathrm{SU}(n)$ の場合やその他いくつかの場合で私たちが解決した [10]．その際には $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ をホモトピー余極限で分解するという手法を新たに導入した．この手法は Baird の手法に比べて多くの情報を調べることができるという点で優れているが, 複雑ではある．この手法を用いた研究も今後進めていきたいと考えている．

References

[1] A. Adem, A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen and S. Gitler, On decomposing suspensions of simplicial spaces. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **15** (2009), no. 1, 91–102.

[2] A. Adem, J.M. Gómez and S. Gritschacher, On the second homotopy group of spaces of commuting elements in Lie groups, arXiv:2009.09045.

[3] T.J. Baird, Cohomology of the space of commuting n-tuples in a compact Lie group, Alg. Geom. Topol. **7** (2007), 737-754.

[4] T. Baird, L.C. Jeffrey and P. Selick, The space of commuting n-tuples in SU(2), Illinois J. Math. **55**, no. 3, (2011), 805-813.

[5] M.C. Crabb, Spaces of commuting elements in SU(2), Proc. Edinburgh Math. Soc. **54** (2011), 67-75.

[6] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Graduate texts in Math. **205**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] J.M. Gómez, A. Pettet and J. Souto, On the fundamental group of $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, Math. Z. **271** (2012), 33-44.

[8] V.G. Kac and A.V. Smilga, Vacuum structure in supersymmetric Yang-Mills theories with any gauge group, The many faces of the superworld, World Sci. Publ. River Edge, NJ, (1999) 185-234.

[9] D. Kishimoto, M. Takeda, Spaces of commuting elements in the classical groups. Adv. Math. **386** (2021).

[10] D. Kishimoto, M. Takeda, Torsion in the space of commuting elements in a Lie group arXiv:2103.11662

[11] D.A. Ramras and M. Stafa, Hilbert-Poincaré series for spaces of commuting elements in Lie groups, Math. Z. **292** (2019), 591-610.

[12] D.A. Ramras and M. Stafa, Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups, accepted by Int. Math. Res. Not.

[13] E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, Nuclear Phys. B **202** (1982), 253-316.

[14] E. Witten, Toroidal compactification without vector structure, J. High Energy Phys. Paper 6 (1998).

〒 606-8502　京都市左京区北白川追分町　京都大学　大学院理学研究科

Email address: takeda.masahiro.87u@st.kyoto-u.ac.jp

Bott多様体のコホモロジー剛性問題

石田 裕昭　(鹿児島大学)*

概　　要

この講演では, Bott多様体のコホモロジー剛性問題および強コホモロジー剛性問題について概説する. また8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性について, 講演者の得た進展を報告する.

1. 序

1.1. Bott tower と Bott 多様体

まずこの講演の主役であるBott多様体を導入する. 高さ n の **Bott tower** とは, $\mathbb{C}P^1$-束の列

$$B_\bullet : B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{\text{a point}\}$$

であって, 各ファイブレーション $B_j \to B_{j-1}$ が次のように順に構成されるものである: B_j は B_{j-1} 上の複素直線束 ξ_j, ξ'_j の Whitney 和 $\xi_j \oplus \xi'_j$ の射影化 $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$. Bott tower に現れる B_j 達を **Bott 多様体**という. Bott 多様体 B_n は実 $2n$ 次元の閉多様体多様体であり, 直線束 ξ_j, ξ'_j たちの選び方に依存する.

例 1. B_0 は1点で, B_0 上のベクトル束は直積束である. したがって B_1 は複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ に他ならない. B_2 は **Hirzebruch 曲面**と呼ばれ, 位相型は2つある. しかしながら $n \geq 3$ に対して B_n の位相型は加算無限個ある.

以下では, 直線束, ベクトル束といえば全て複素直線束, 複素ベクトル束を意味することとする. Bott多様体の位相型あるいは微分位相型を分類することが問題である.

1.2. コホモロジー剛性問題 (cohomological rigidity problem) と強コホモロジー剛性問題 (strong cohomological rigidity problem)

コホモロジーは位相空間のホモトピー不変量であるが, 完全ではない. しかしながら特別な族に制限すれば完全不変量となりうる. 典型的な例として, 閉曲面はコホモロジーによって分類することができる. **コホモロジー剛性問題**とは, 与えられた多様体の族に対して, 次に述べるコホモロジー剛性が成り立つかどうかを問うものである:

定義 2. 可微分多様体の族 $\mathcal{M}$ が**コホモロジー剛性 (cohomological rigid)** であるとは, 次を満たすことをいう: $M, N \in \mathcal{M}$ のコホモロジー環 $H^*(M)$ と $H^*(N)$ が同型ならば, M と N は微分同相である.

この講演ではコホモロジーは全て整係数のものを考えるが, 異なる係数をとれば別の問題になる. また, 微分同相ではなく同相やホモトピー同値を考えることもできる.

定義 3. 可微分多様体の族 $\mathcal{M}$ が**強コホモロジー剛性 (strong cohomological rigid)** であるとは, 次を満たすことをいう: $M, N \in \mathcal{M}$ のコホモロジー環の間の任意の同型 $\varphi\colon H^*(N) \to H^*(M)$ に対し, 微分同相写像 $f\colon M \to N$ で $f^* = \varphi$ を満たすものが存在する.

*〒890-0065 鹿児島市郡元1丁目21番地 鹿児島大学理学部理学科数理情報科学プログラム
e-mail: ishida@sci.kagoshima-u.ac.jp

強コホモロジー剛性は明らかにコホモロジー剛性を導く．また, 強コホモロジー剛性である必要十分条件は, コホモロジー剛性かつ, 任意の $M \in \mathcal{M}$ とコホモロジー環の自己同型 $\varphi\colon H^*(M) \to H^*(M)$ に対して自己微分同相 $f\colon M \to M$ で $f^* = \varphi$ を満たすものが存在することである．これに注意すれば, 例えば向き付け可能な閉曲面のなす族は強コホモロジー剛性であることがわかる．

Bott 多様体に関しては, これまでのところコホモロジー剛性の反例は知られておらず, 以下に記載するようにいくつかの肯定的な結果が知られている．

1.3. いくつかの知られている結果

ここではBott 多様体のコホモロジー剛性問題に関して, 本講演と関連の深いものを, 議論の概略と共に簡潔に紹介する．先行研究を全て網羅しているわけではないことを断っておく．

- Hirzebruch 曲面, すなわち実 4 次元の Bott 多様体はコホモロジー剛性である．γ を $\mathbb{C}P^1$ 上の tautological 直線束とし, 整数 a に対して Σ_a を $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{\otimes a})$ と定める．[Hir1951] において Σ_a と Σ_b が (微分) 同相であることと, a, b の偶奇が等しいことが同値であることを示されている．一方で, $H^*(\Sigma_a)$ と $H^*(\Sigma_b)$ のコホモロジー環が同型になることと, a, b の偶奇が等しいことが同値であることは, 簡単な計算によって示すことができる．

- 6 次元 Bott 多様体はコホモロジー剛性である．[CMS2010] では 6 次元 Bott 多様体 B_3, B_3' のコホモロジーの間の環同型は第一 Pontrjagin 類と第二 Stiefel-Whitney 類を保つことを示し, [Jup1973] を用いて示された．

- Bott 多様体 B_n のうち, $\mathbb{Q}$-係数コホモロジー環 $H^*(B_n, \mathbb{Q})$ が $H^*((\mathbb{C}P^1)^n, \mathbb{Q})$ と同型となるものを $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体と呼ぶ．[CM2012] では, 後で述べる階数 2 の分解可能ベクトル束の分解と, 注意深い考察によって, $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体は強コホモロジー剛性であることが示されている．

- さらに [Cho2015] では, $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体の強コホモロジー剛性を用いて,「6 次元 Bott 多様体は強コホモロジー剛性であること」「8 次元 Bott 多様体はコホモロジー剛性であること」が示されている．

- [CMM2015] では, コホモロジー環の生成元を上手くとることによって, 純粋な代数的手法で Bott 多様体のコホモロジー環の間の任意の同型はそれぞれの Pontrjagin 類を保つことが示されている．また同時に環同型の構造を調べることによって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-trivial Bott 多様体は強コホモロジー剛性であることが示されている．ここで Bott 多様体 B_n が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-trivial であるとは, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-係数コホモロジー環 $H^*(B_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が $H^*((\mathbb{C}P^1)^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型となることを言う．

2. 準備

2.1. Bott 多様体の整係数コホモロジー環

Bott tower

$$B_\bullet : B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{\text{a point}\}$$

について, 各 B_j は B_{j-1} 上の複素直線束 ξ_j, ξ'_j の Whitney 和 $\xi_j \oplus \xi'_j$ の射影化 $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$ であり, また直線束は第一 Chern 類によって分類される．ここでは Bott 多様体のコホモロジー環は ξ_j, ξ'_j たちの第一 Chern 類によって帰納的に記述できることを説明する．

まず初めに, ベクトル束の射影化について注意しておく．ベクトル束 ξ に対して, その射影化を $P(\xi)$ で表す．多様体 B を底空間とする階数 n のベクトル束 V と直線束 L に対して, テンソル積 $L \otimes V$ は V と階数の等しいベクトル束である．これらの射影化 $P(V)$ と $P(L \otimes V)$ は共に B 上の $\mathbb{C}P^{n-1}$-束であるが, これらの間には自然な同型がある．各点 $x \in B$ に対し, V_x, L_x をそれぞれ V, L のファイバーとし, L_x の 0 でない元 ℓ を用いて同型 $V_x \to L_x \otimes V_x$ を $v \mapsto \ell \otimes v$ によって定めれば, これは射影空間の微分同相 $P(V_x) \to P(L_x \otimes V_x)$ を誘導し, この微分同相は ℓ の取り方に依存しない．

Bott tower において, 各 B_j は B_{j-1} 上の複素直線束 ξ_j, ξ'_j の Whitney 和 $\xi_j \oplus \xi'_j$ の射影化 $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$ であった．上の注意から, ξ_j のテンソル積に関する逆元をテンソルすることによって, 1つ目の直線束は自明束 $\underline{\mathbb{C}}$ であると仮定しても一般性を失わない．以下, ξ_j は B_{j-1} 上の直線束で $B_j = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j)$ とする．γ_j を $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j)$ の tautological 直線束, すなわち底空間を B_j, 全空間を

$$\gamma_j = \{(\ell, v) \in P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j) \times (\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j) \mid \ell \ni v\}$$

とする直線束とする．$B_j \to B_{j-1}$ は $\mathbb{C}P^1$-束であり, また $\mathbb{C}P^1$ のコホモロジーは tautological 直線束の第一 Chern 類によって生成される．このことと Leray-Hirsch の定理 ([Hat2002] など) によって, B_j の整係数コホモロジー $H^*(B_j)$ は, $H^*(B_{j-1})$-加群として 1 と γ_j の第一 Chern 類 $x_j := c_1(\gamma_j) \in B_j$ によって生成されることがわかる．$H^*(B_{j-1})$-代数としての構造を理解するには, $x_j^2 \in H^4(B_j)$ さえ理解できれば十分である．ベクトル束 $\mathbb{C} \oplus \xi_j$ の $\pi_j \colon B_j \to B_{j-1}$ による引き戻し $\pi_j^*(\mathbb{C} \oplus \xi_j)$ にエルミート計量を一つ取り, 部分束 γ_j の直交補空間束を $\gamma_j^\perp$ とする．このとき $\pi_j^*(\mathbb{C} \oplus \xi_j) = \gamma_j \oplus \gamma_j^\perp$ であるから, 両辺の全 Chern 類を比較すれば $x_j(-x_j + \pi_j^* c_1(\xi_j)) = 0$ を得る．従って $H^*(B_j)$ は $H^*(B_{j-1})$-代数として

$$H^*(B_j) \cong H^*(B_{j-1})[X]/(X^2 - c_1(\xi_j)X)$$

となる．

以上のことから, B_n の整係数コホモロジー環は次のように記述される．$X_j := \pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(x_j) \in H^2(B_n)$ とすれば, $X_1, \ldots, X_n$ は $H^2(B_n)$ の $\mathbb{Z}$-基底となり, $H^*(B_n)$ を $\mathbb{Z}$-代数として生成する．また $c_1(\xi_j) \in H^2(B_{j-1})$ より, $\pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_j^*(c_1(\xi_j))$ は $X_1, \ldots, X_{j-1}$ の一次結合 $\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i$ で表され, $X_j^2 = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i X_j$ となる．従って対角成分が 0, 各成分が整数の n 次の上三角行列 (a_{ij}) を用いて

$$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(X_j^2 - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i X_j \mid j = 1, \ldots, n), \quad \deg X_j = 2$$

と表示できる．

2.2. Bott 多様体に対応する上三角行列

前節で説明したことの逆を辿っていけば, 上三角行列から Bott tower を定めることができる．対角成分が 0, 各成分が整数の n 次の上三角行列 (a_{ij}) に対して, Bott tower

$$B_\bullet : B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{\text{a point}\}$$

が次のように定まる: B_0 は1点, B_1 は複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ で, $x_1^{(1)} \in H^2(B_1)$ は B_1 の tautological 直線束の第一 Chern 類とする. B_1 上の直線束 ξ_2 を $c_1(\xi_2) = a_{12}x_1^{(1)}$ となるものとし, $B_2 = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_2)$ とする. $x_2^{(2)}$ を B_2 の tautological 直線束の第一 Chern 類とする. 射影 $\pi_2\colon B_2 \to B_1$ を用いて $x_1^{(2)} = \pi_2^* x_1^{(1)}$ とし, B_2 上の直線束 ξ_3 を $c_1(\xi_3) = a_{13}x_1^{(2)} + a_{23}x_2^{(2)}$ となるものとし, $B_3 = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_3)$ とする. この操作を繰り返すことによって, Bott tower で

$$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(X_j^2 - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_iX_j \mid j = 1, \ldots, n), \quad \deg X_j = 2$$

となるものが (微分同相を除いて) 一意的に構成される.

2.3. Bott 多様体上の階数 2 の分解可能ベクトル束の分類

Bott 多様体のコホモロジー剛性問題にあたって, 次の命題は有用である:

命題 4 ([Ish2012])**.** Bott 多様体 B_n 上の階数 2 の分解可能なベクトル束 V_1, V_2 について, V_1 と V_2 がベクトル束として同型なのは, V_1 と V_2 の全 Chern 類 $c(V_1)$ と $c(V_2)$ が等しいときかつその時に限る.

実際, Hirzebruch 曲面 Σ_a は次のように分類ができる. γ は $B_1 = \mathbb{C}P^1$ 上の tautological 直線束とする. $\Sigma_a = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{\otimes a})$ は, a が偶数 $2k$ のとき, $\gamma^{\otimes(-k)}$ をテンソルすれば $\Sigma_a = P(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k})$ を得る. 一方で $c(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k}) = c(\gamma^{\otimes(-k)})c(\gamma^{\otimes k}) = (1+x)(1-x) = 1$ より $\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k}$ は自明である. したがって a が偶数の時, Σ_a は $(\mathbb{C}P^1)^2$ と微分同相である. a が奇数 $2k+1$ のときも同様に $\gamma^{\otimes(-k)}$ をテンソルすれば $\Sigma_a = P(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)})$ を得る. 一方で $c(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)}) = 1 + x$ より $\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)}$ は $\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma$ と同型である. したがって a が奇数のとき, Σ_a は $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma)$ と微分同相である. これが $(\mathbb{C}P^1)^2$ と同相でないことは, 整係数コホモロジー環の間に同型が存在しないことから導かれる.

Hirzebruch 曲面, すなわち 4 次元の Bott 多様体の場合ほど単純ではないが, $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体の場合でも同様の議論によって分類がなされる ([CM2012]). 実 $2n$ 次元の $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体は, n の分割の個数だけ位相型がある. Hirzebruch 曲面は $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体である.

3. $\mathbb{C}P^1$-束の強コホモロジー剛性と Bott tower の強コホモロジー剛性

3.1. $\mathbb{C}P^1$-束の強コホモロジー剛性

Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ に対し, $\mathbb{C}P^1$-束 $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \to B_n$ の全空間 $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ はまた Bott 多様体である. また前述の通り $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi))$ は自然に $H^*(B_n)$-代数の構造をもち,

$$H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)) \cong H^*(B_n)[X]/(X^2 - c_1(\xi)X), \quad \deg X = 2$$

となる. ごく簡単な計算および命題 4 によって, 次がわかる:

命題 5. Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ, ξ' に対し, 次は同値:

1. $H^*(B_n)$-代数として $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)) \cong H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi'))$,
2. ある $a \in H^2(B_n)$ が存在して $1 + c_1(\xi) = (1+a)(1+a+c_1(\xi'))$.
3. ある直線束 L が存在して $\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi \cong L \otimes (\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')$,

4. B_n 上の $\mathbb{C}P^1$-束として $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \cong P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')$.

特に, B_n 上の分解可能な直線束の Whitney 和から定まる $\mathbb{C}P^1$-束は, 全空間のコホモロジーの $H^*(B_n)$-代数としての構造によって分類される. また次も簡単な計算によって示すことは容易い:

命題 6. Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ に対し, $H^*(B_n)$-代数としての $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi))$ の自己同型はちょうど2つある. 1つは恒等写像であり, もう1つは $X \mapsto -X + c_1(\xi)$ で定まるものである.

$X \mapsto -X + c_1(\xi)$ によって定まる自己同型が, $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ の $\mathbb{C}P^1$-束としての自己同型によって誘導されることをみる. ベクトル束 $\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi$ に Hermite 計量を1つ取って固定し, $f\colon P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \to P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ を $\ell \in P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ に対してその直交補空間 $\ell^\perp$ を対応させる微分同相とする. f は $\mathbb{C}P^1$-束の自己同型であり, さらに $f^*\gamma \cong \gamma^\perp$ を満たすことが示される. ここで, γ は $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ の tautological 直線束である. したがって f は $X \mapsto -X + c_1(\xi)$ で定まる自己同型を誘導する. 命題5と合わせれば, 次がわかる:

命題 7 ($\mathbb{C}P^1$-束の強コホモロジー剛性)**.** Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ, ξ' について, 任意の $H^*(B_n)$-代数としての同型 $\varphi\colon H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')) \to H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi))$ は, ある $\mathbb{C}P^1$-束の同型 $f\colon P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \to P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')$ によって誘導される.

3.2. Bott tower の強コホモロジー剛性

高さ n の2つの Bott tower

$$B_\bullet\colon B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0$$

と

$$B'_\bullet\colon B'_n \xrightarrow{\pi'_n} B'_{n-1} \xrightarrow{\pi'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi'_2} B'_1 \xrightarrow{\pi'_1} B'_0$$

が同型であることを, 次で定める: 微分同相写像の系列 $f_\bullet = \{f_k\colon B_k \to B'_k\}_{k=0}^n$ が存在して, 図式

$$\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "f_n"] & B_{n-1} \arrow[r, "\pi_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\pi_2"] & B_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f_1"] & B_0 \arrow[d, "f_0"] \\
B'_n \arrow[r, "\pi'_n"] & B'_{n-1} \arrow[r, "\pi'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\pi'_2"] & B'_1 \arrow[r, "\pi'_1"] & B'_0
\end{tikzcd}$$

が可換になる. Bott tower の同型類は, 次に導入するフィルター付き次数付き環によって分類される.

高さ n の Bott tower

$$B_\bullet\colon B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0$$

に対して, フィルター付き次数付き環 $F_\bullet H^*(B_\bullet)$ を

- $i \geq n$ に対し, $F_i H^*(B_\bullet) := H^*(B_n)$,
- $0 \leq j \leq n-1$ に対し, $F_j H^*(B_\bullet) := \pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(H^*(B_j))$

と定める. 高さに関する帰納法と命題7によって, 次が示される ([Ish2012]):

定理 8 (Bott towerの強コホモロジー剛性)**.** $B_\bullet = (\{B_k\}_{k=0}^n, \{\pi_k\}_{k=0}^n)$, $B'_\bullet = (\{B'_k\}_{k=0}^n, \{\pi'_k\}_{k=0}^n)$ は高さ n の Bott tower, $\varphi_\bullet\colon F_\bullet H^*(B'_\bullet) \to F_\bullet H^*(B_\bullet)$ はフィルトレーションを保つ次数付き環の同型とする．このとき, Bott tower の同型 $f_\bullet = \{f_k\colon B_k \to B'_k\}_{k=0}^n$ で各 $k = 0, \ldots, n$ に対し $f_k^* = \varphi_k$ を満たすものが存在する．

高さ n の Bott tower の一番上の Bott 多様体 B_n の 2 次コホモロジー群には, (Bott towerの構成に用いた直線束の選び方に依存する)tautological 直線束の第一 Chern 類から定まる特別な基底 $X_1, \ldots, X_n \in H^2(B_n)$ があった．この生成元を用いれば, 定理??は次のように言い換えることができる:

系 9. B_n, B'_n はBott多様体とする．コホモロジー環の同型 $\varphi\colon H^*(B'_n) \to H^*(B_n)$ の先の生成元に関する表現行列が上三角行列ならば, φ は微分同相 $f\colon B_n \to B'_n$ によって誘導される．

4. Hirzebruch 曲面束の強コホモロジー剛性と 8 次元 Bott 多様体の強コホモロジー剛性

前節では $\mathbb{C}P^1$-束について述べたが, 講演者は最近, Bott 多様体上の Hirzebruch 曲面束に関して強コホモロジー剛性と, その応用を得た．ここではそれについて概略を述べる．

4.1. Hirzebruch 曲面束の強コホモロジー剛性

B_n はBott多様体とし, B_n 上の直線束 ξ_{n+1} と, $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1})$ 上の直線束 ξ_{n+2} をとる．このとき2つの射影

$$E = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+2}) \to P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1}) \to B$$

の合成 $E \to B$ はファイバーを Hirzebruch 曲面とするファイバー束であり, また E 自身も Bott 多様体である．E のコホモロジー環 $H^*(E)$ は自然に $H^*(B_n)$-代数の構造が入る．

定理 10. Bott 多様体 B_n 上の Hirzebruch 曲面束 $E \to B_n$, $E' \to B_n$ と $H^*(B_n)$-代数としての同型 $\widetilde{\varphi}\colon H^*(E') \to H^*(E)$ に対し, B_n 上の束の同型 $\widetilde{f}\colon E \to E'$ で $\widetilde{f}^* = \widetilde{\varphi}$ を満たすものが存在する．

Hirzebruch 曲面束の (弱い) コホモロジー剛性については, 命題 4 と代数的な計算のみ (ただし場合分けが煩雑ではあるが) で迫ることができる．一方で “強い” コホモロジー剛性の証明は, $\mathbb{C}P^1$-束の場合と比べてずっと難しい．Hirzebruch 曲面束 $E \to B_n$ のコホモロジーの $H^*(B_n)$-代数としての自己同型 $\varphi\colon H^*(E) \to H^*(E)$ が, $c_1(\xi_{n+1}) \in H^2(B_n)$ と $c_1(\xi_{n+2}) \in H^2(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_1))$ に与える代数的な制約を考察する．具体的には, 次のような議論を行う: 射影の誘導する準同型は単射．$H^*(B_n) \subset H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1})) \subset H^*(E)$ とみなす．$\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}$ をそれぞれ $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1})$, $E = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+2})$ の tautological 直線束とする．x_{n+1}, x_{n+2} は $H^*(E)$ の $H^*(B)$-代数としての生成元になる．ξ_{n+2} の第一 Chern 類は $a \in \mathbb{Z}$ と $y \in H^2(B_n)$ によって $c_1(\xi_{n+2}) = ax_{n+1} + y$ と書ける．このとき $E \to B_n$ のファイバーは Σ_a．$H^*(E)/H^{>0}(B_n) \cong H^*(\Sigma_a)$ より, $H^*(B_n)$-代数としての同型 $\widetilde{\varphi}\colon H^*(E) \to H^*(E)$ は同型 $\varphi\colon H^*(\Sigma_a) \to H^*(\Sigma_a)$ を誘導する．一方で, $H^*(\Sigma_a)$ の任意の同型が $H^*(E)$ の同型に持ち上がるかどうかはわからない．そこで,

1. 同型 $\varphi\colon H^*(\Sigma_a) \to H^*(\Sigma_a)$ を1つ固定する．φ は8個あり, それらについて場合分けを行う．

2. φ が $\widetilde{\varphi}\colon H^*(E) \to H^*(E)$ に持ち上がるための $c_1(\xi_{n+1})$ と $c_1(\xi_2) = ax_{n+1} + y$ に関する必要十分条件を得る．特に, φ の持ち上げ可能性が $E \to B_n$ の構造群にどのような制約を与えるかを調べる．

3. 得られた必要十分条件を使って, $\widetilde{f}^* = \widetilde{\varphi}$ を満たす $\widetilde{f}\colon E \to E$ を構成する．

命題7と定理10を用いれば, 帰納的に次が証明できる:

系 11. B_n, B'_n はBott多様体とする．コホモロジー環の同型 $\varphi\colon H^*(B'_n) \to H^*(B_n)$ の先の生成元に関する表現行列が

$$\begin{pmatrix} A_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n_k} \end{pmatrix}, \quad A_{n_j} \text{ は } 1\times 1 \text{ あるいは } 2\times 2 \text{ の行列}$$

ならば, φ はある微分同相 $f\colon B_n \to B'_n$ によって誘導される．

4.2. 8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性

先述の通り, これまで8次元Bott多様体はコホモロジー剛性であることが知られていた ([Cho2015])．系11のおかげで, 8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性を以下の順に示すことができる．

1. B_4 は8次元Bott多様体, $\varphi\colon H^*(B_4) \to H^*(B_4)$ は同型とする．8次元Bott多様体はコホモロジー剛性であるから, φ が微分同相 $f\colon B_4 \to B_4$ に誘導されることを示せば十分である．

2. B_4 が $\mathbb{Q}$-trivial ならば [CM2012] による．B_4 は $\mathbb{Q}$-trivial でないと仮定してよい．

3. B_4 が $\mathbb{Q}$-trivial でないとき, Bott tower $B_4 \to B_3 \to B_2 \to B_1 \to B_0$ の最初のファイブレーション $B_4 \to B_3$ は, B_1 上の $\mathbb{C}P^1$-束の引き戻しでないと仮定して良い．

4. 上の仮定によって, φ の表現行列は

$$\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

となることがわかる．

5. φ の表現行列が前者のときは系11から φ は微分同相によって誘導されることがわかる．後者のときは, 6次元Bott多様体の強コホモロジー剛性 ([Cho2015]) と命題7から微分同相によって誘導されることがわかる．

参考文献

[Cho2015] S. Choi, *Classification of Bott manifolds up to dimension 8*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **58** (2015), no. 3, 653–659. MR3391366

[CM2012] S. Choi and M. Masuda, *Classification of $\mathbb{Q}$-trivial Bott manifolds*, J. Symplectic Geom. **10** (2012), no. 3, 447–461. MR2983437

[CMM2015] S. Choi, M. Masuda, and S. Murai, *Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), no. 2, 965–986. MR3342682

[CMS2010] S. Choi, M. Masuda, and D. Y. Suh, *Topological classification of generalized Bott towers*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 2, 1097–1112. MR2551516

[Hat2002] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354

[Hir1951] F. Hirzebruch, *Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **124** (1951), 77–86. MR45384

[Ish2012] H. Ishida, *Filtered cohomological rigidity of Bott towers*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 2, 515–522. MR2945760

[Jup1973] P. E. Jupp, *Classification of certain* 6*-manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973), 293–300. MR314074

印付単体的集合のループ空間

堀内遼

1　はじめに

位相空間という概念を推し進めていって得られた現在の数学における到達点は少なくとも 2 つあるだろう。1 つは貼り合せや被覆といったものに重きをおくトポスという対象である。もう 1 つは、これは一般の位相空間というよりユークリッド空間というアイディアの発展系と言うべきかもしれないが、空間には点・辺・面... などの次元づけられた構成物があり、それが重要であるとするホモトピー仮説である。この講演は後者に関するものである。[*1]

$(\infty, 0)$-圏と呼ばれる組合せ的対象を調べる事と位相空間をホモトピー群を通して調べる事は等価である、というのがホモトピー仮説の内容であった。そしてその組合せ的対象のモデルとして Kan 複体を採れば、この仮説は定理と言える。これがここ数十年間でのホモトピー論・高次元圏論における 1 つの最も大きな結果だと言えるだろう。ホモトピー仮説自体は 20 世紀後半には Grothendieck たちにより考えられていたようだが (例えば [4] に Quillen への手紙がある)、その定式化ないし解決には Joyal と Lurie の貢献が大きい ([7] や [10] など)。

もちろん他の高次元圏もこれまでに研究されてきており、例えば ω-圏を単体的手法を用いて調べるために stratified simplicial set[*2] という概念が導入されている[*3]。次節で定義を与えるが、これはいくらかの単体が指定された単体的集合である。[18] において Verity は、特別なクラスの stratified simplicial set が Kan 複体と ω-圏の共通の一般化であることを示した。そして現在では、stratified simplicial set を使って (∞, n)-圏のモデルが構

[*1] もちろん他にも色々な概念がある。例えば位相空間は距離空間の一般化であるが、非対称距離空間も距離空間のまた別の一般化である。

[*2] simplicial set with marking とか marked simplicial set とか simplicial set with hollowness とも呼ばれる。この講演では印付単体的集合と呼ぶ事にしたい。

[*3] [15] や [17] による ω-圏に関するある予想を解くために [19] で導入されたようである。

成できるという事が専門家の間では認められているようである ([12])。

すなわち Verity らの一連の仕事により、(∞, n)-圏の単体的なモデルが手に入ったという格好になっている。一方で、代数的位相幾何学においてよく知られているように、$(\infty, 0)$-圏のモデルである Kan 複体に対しては単体的ホモトピー論と呼ばれる幾何学がある。そこで我々は、単体的ホモトピー論の諸々の幾何学的構成が stratified simplicial set による (∞, n)-圏の単体的なモデルに対してまでどれくらい持ち上がるのかを調べてみたい。

ひとまずの試みとして、単体的ホモトピー群やループ空間などの単体的ホモトピー論における基本的な構成が stratified simplicial set の枠組みにまで素直に持ち上がることがチェックできたので、そのことを報告する。

2 単体的集合の印付け

まずは単体的集合の定義を思い出しておく。

定義 2.1. Δ と書いて、有限全順序集合 $[n] := \{0 < 1 < \cdots < n\} (n \in \mathbb{N})$ を対象とし、順序を保つ写像を射とする圏を表すものとする。集合の圏 Set に値を持つ Δ 上の前層のことを単体的集合という。単体的集合の間の射は前層の間の自然変換である。

単体的集合のなす圏には $(\infty, 1)$-圏のモデル構造が入ることが知られていて、さらにそのある局所化として $(\infty, 0)$-圏のモデル構造が入ることも知られている ([7])。そしてそれが位相空間の伝統的なホモトピー論に一致するというのは古典的な事実である ([16])。従って、$n \geq 2$ に対して (∞, n)-圏はどうなっているのかということが自然と問題になるだろう。[*4]

単体的集合の単体を適切に “印付ける”事でそれらの高次元圏が単体的手法を用いて調べられる事が知られている。

定義 2.2 ([19])**.** 対 $(X, \mathrm{m}\, X)$ が印付単体的集合 *(stratified simplicial set)* であるとは

- X は単体的集合
- $\mathrm{m}\, X$ は $\bigcup_{n \geq 1} X_n$ の部分集合であり、任意の退化単体を含むもの

となっている事である。$\mathrm{m}\, X$ の元を X の印付けられた単体と呼ぶ。

[*4] directed algebraic topology(例えば [3] など) と $(\infty, 1)$-圏との関係を問うのも自然であると思う。

印付けられた単体は、適切な意味で “可逆”な単体と見なすことができる。例えば退化した単体というのは同型射のような働きをするので印付けておく必要がある。

また、任意の単体的集合 X に対して 2 つの極端な印付単体的集合が得られることが定義よりわかる。1 つはできるだけ多く印付けた $(X, \bigcup_{n\geq 1} X_n)$ であり、もう 1 つはできるだけ少なく印付けた $(X, \mathrm{d}\, X)$ である。ここで $\mathrm{d}\, X$ は X の退化単体のなす集合である。以下、特に断りがなければ単体的集合 X に対してそれに対応する印付単体的集合を $(X, \mathrm{d}\, X)$ とする。一般に、$(X, \mathrm{m}\, X)$ を X と略記することも多い。印付単体的集合の射とは、単体的集合の射であって印付けられた単体を印付けられた単体に写すものとする。

[18] などに従って基本的な印付単体的集合の用語を思い出しておく。擬圏 (quasicategory) や Kan 複体を定義するには、プレーンな horn inclusions だけ考えれば十分だったが、より高次の圏のためにはそれに色々な印付けを施したものが必要となる。

定義 2.3 ([18], [14])**.** $n \geq 1$、$k \in [n]$ として、以下の印付単体的集合を定義する。

- $\Delta[n]_t := (\Delta[n], \mathrm{d}\, \Delta[n] \cup \{\mathrm{Id}_{[n]}\})$
- $\Delta^k[n] := (\Delta[n], \mathrm{d}\, \Delta[n] \cup \{\alpha \in \Delta[n] | \{k-1, k, k+1\} \cap [n] \subset \mathrm{Im}(\alpha)\})$
- $\Lambda^k[n]$ とは、その台単体的集合が $\Delta[n]$ の k-次ホーンであって、$\Delta^k[n]$ から誘導される印付が定まっている印付単体的集合[*5]
- $\Delta^k[n]'' := (\Delta[n], \mathrm{d}\, \Delta[n] \cup \{\alpha \in \Delta[n] | \{k-1, k, k+1\} \cap [n] \subset \mathrm{Im}(\alpha)\} \cup \Delta[n][n-1])$
  つまり $\Delta^k[n]$ の全ての $n-1$-単体をさらに印付けて得られるものである。同様に、$\Lambda^k[n]'$ を $\Lambda^k[n]$ の全ての $n-1$-単体をさらに印付けて得られる印付単体的集合とする。
- $\Delta^k[n]' := \Delta^k[n] \cup \Lambda^k[n]'$
- $\Delta[3]_{eq} := (\Delta[3], \bigcup_{n\geq 1} \Delta[3][n] \setminus \{[01], [23]\})$
  ここで、$[01]$ と $[23]$ はそれぞれ、$\Delta[3][1]$ の元であって像が $\{0, 1\}$ と $\{2, 3\}$ であるものである。
- $\Delta[3]^\sharp := (\Delta[3], \bigcup_{n\geq 1} \Delta[3][n])$

高次圏の同型射だけでなく、同値射もうまく扱うためには saturated condition と呼ばれるものを導入する必要がある ([14])。そのために印付単体的集合の結 (join) という概念を導入する。これは有限全順序集合の “足し算”から自然に定まるものであり、位相空間

[*5] $\{\delta^i : [n-1] \to [n] | i \in [n] \setminus \{k\}\}$ で生成される $\Delta[n]$ の部分単体的集合の標準的な記法 $\Lambda^k[n]$ と被っているが、$(\Lambda^k[n], \mathrm{d}\, \Lambda^k[n])$ とは別物である

の結の類似でもある。

定義 2.4. 圏 Δ に空な順序集合 $[-1] = \emptyset$ を始対象として添加して得られる圏を Δ_+ と書くことにする。Set に値を持つ Δ_+ 上の前層のことを添加単体的集合 *(augmented simplicial set)* という。

Δ_+ の 2 つの射 $\theta : [n] \to [m]$ と $\theta' : [n'] \to [m']$ に対し、それらを単に並べる事で Δ_+ の射 $\theta \star \theta' : [n+n'+1] \to [m+m'+1]$

$$\theta \star \theta'(i) = \begin{cases} \theta(i) & 0 \leq i \leq n \\ \theta'(i-n-1)+m+1 & n+1 \leq i \leq n+n'+1 \end{cases}$$

を得る。これは Δ_+ にモノイダル構造を誘導する。$[-1]$ が単位対象となる。

そしてこのモノイダル構造の Day convolution により、添加単体的集合のなす圏にもモノイダル構造が誘導され、その積を再び $\star$ で表す事にする。

単体的集合 X に対して、$X_{-1} = *$ とおくことでこのモノイダル構造をさらに単体的集合のなす圏にも誘導できる。（昔からよく知られている構成であるが、例えば [1] や [8] にまとまった記述がある。）具体的には、単体的集合 X と Y に対してその結 $X \star Y$ の n-単体のなす集合は

$$(X \star Y)_n = \bigcup_{\substack{k,l \geq -1 \\ k+l=n-1}} X_k \times Y_l$$

となっている。

[18] に従って、印付単体的集合 $(X, \mathrm{m}\, X)$ と $(Y, \mathrm{m}\, Y)$ に対してもその結を、台単体的集合は直上で定めた $X \star Y$ であり、

$$x \star y \in \mathrm{m}(X \star Y) \Leftrightarrow x \in \mathrm{m}\, X \text{ または } y \in \mathrm{m}\, Y$$

で得られる印付単体的集合として定める。

これを使って本講演の主な研究対象である (n-trivial) saturated weak complicial set が定義できる。

定義 2.5 ([18], [14], [12])**.** X を印付単体的集合、$[n] \in \Delta$、$k \in [n]$、$[l] \in \Delta_+$ とする。

1. $\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta^k[n]$ と $\Delta^k[n]' \hookrightarrow \Delta^k[n]''$ に右持ち上げ性質を持つとき、X は *weak complicial set* という[*6]

[*6] weak を付けずに complicial set と呼ぶ文献もあるが、別のものを complicial set と呼ぶ文献もある。なお、complicial という単語は composition と simplicial から作った造語らしい。

2. X が *weak complicial set* であって、さらに $\Delta[l] \star \Delta[3]_{eq} \hookrightarrow \Delta[l] \star \Delta[3]^{\sharp}$ に右持ち上げ性質を持つとき、X は *saturated weak complicial set* という
3. 任意の $m > n$ に対し $\Delta[m] \hookrightarrow \Delta[m]_t$ に右持ち上げ性質を持つとき、X は *n-trivial* という

これらの概念のためのホモトピー論も存在する。

定理 2.6 ([18], [14], [12])**.** 印付単体的集合のなす圏 msSet にはそれぞれ、*weak complicial set*、*saturated weak complicial set*、*n-trivial saturated weak complicial set* がちょうどファイブラント対象であるようなモデル構造が入る。[*7]

この講演では、saturated weak complicial set をファイブラント対象とするモデル構造を (∞, ∞)-圏のモデル構造と呼び[*8]、n-trivial saturated weak complicial set をファイブラント対象とするモデル構造を (∞, n)-圏のモデル構造と呼ぶ事にしたい。実は、擬圏と Kan 複体はそれぞれ 1-trivial saturated weak complicial set と 0-trivial saturated weak complicial set と同一視できる ([14])。特に、Kan 複体はその 0-単体以外の全ての単体を印付ける事により 0-trivial saturated weak complicial set となる。

この翻訳に則って、Kan 複体に対する色々な幾何学的構成を (n-trivial saturated) weak complicial set にまで適用していきたいというのがこの講演の研究の動機である。[*9]

3 主結果

3.1 単体的ホモトピー群の拡張

Kan 複体に対するホモトピー群の構成はいくつか知られているが、この節では Kan による組合せ論的構成が weak complicial set の枠組みにまで自然に持ち上がり、モノイドに値を持つ不変量が構成できる事を確認する。印付単体的集合のカルテジアン積を $\circledast$ で表す事にする。

定義 3.1 ([18])**.** $f, g : A \to X$ を印付単体的集合の射とする。この時、$f \sim g$ とは以下の

[*7] ここで挙げられているどのモデル構造においても、任意の対象がコファイブラントである

[*8] これは標準的な言葉遣いではないかもしれない。詳しくは [12] 参照のこと。

[*9] 例えば Verity は [19] で “It is sometimes instructive to think of ω-categories as being *oriented combinatorial CW-complexes* or *globular spaces* and ...”と述べている。

図式を可換にする射 H が存在することをいう 。

$$\begin{tikzcd}
A \circledast \Delta[0] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "1_A \times \delta^1"'] & A \arrow[dr, "f"] & \\
A \circledast \Delta[1]_t \arrow[rr, "H"] & & X \\
A \circledast \Delta[0] \arrow[u, "1_A \times \delta^0"] \arrow[r, "\cong"'] & A \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

この H はホモトピーと呼ばれるものだが、我々の目的は単体的ホモトピー群の類似物の構成なので、同様にして相対ホモトピーの概念も用意しておく。

定義 3.2. $f, g : A \to X$ を印付単体的集合の射とし、 $B \subset A$ とする。 さらに $f|_B = g|_B$ とする。$f \sim_B g$ とは $f \sim g$ であって以下の可換図式があることをいう。

$$\begin{tikzcd}
A \circledast \Delta[1]_t \arrow[r, "H"] & X \\
B \circledast \Delta[1]_t \arrow[u, hook] \arrow[r] & B \arrow[u, "f|_B = g|_B"']
\end{tikzcd}$$

ここで H は $f \sim g$ を与える射である。

Verity の定理 ([18, Theorem 75]) と Kan 複体に対する古典的な議論 ([9] や [2] や [11] など) を使って以下を得る。[*10]

補題 3.3. 任意の *weak complicial set* X に対して、上で定義した二項関係は同値関係である。

X を weak complicial set とし、$x \in X$ をその 0-単体とし、$n \geq 1$ を自然数とする。$\tau_n(X, x)$ を以下の図式を可換にするような n-単体 α たちの $\sim_{\partial\Delta[n]}$ による同値類のなす集合とする。

$$\begin{tikzcd}
\Delta[n] \arrow[r, "\alpha"] & X \\
\partial\Delta[n] \arrow[u, hook] \arrow[r] & \Delta[0] \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

[*10] ここには saturated condition は必要ない

Kan 複体の単体的ホモトピー群の群構造 ([9] や [2] や [11] など) を思い出して以下の対応を考える。

境界が x になっている 2 つの n-単体 α と β に対して、$(x, x, ..., x, \alpha, \text{-}, \beta) : \Lambda^n[n+1] \to X$ を考える。つまり 0 番目から $n-2$ 番目までの n 単体は一点 x に潰れていて、$n-1$ 番目が α で $n+1$ 番目が β になっているようなホーンを考える。n 番目の面は与えられていない。任意の退化単体が印付けられていて、X が今 weak complicial set であることから、これは $\theta : \Delta^n[n+1] \to X$ に延びる。そして n-単体 $d_n(\theta)$ を得る。

次の命題は、weak complicial set の右持ち上げ性質を用いて、Kan 複体に対する単体的ホモトピー群のものと同様な議論で証明される。

命題 3.4 ([5])**.** $[\alpha]$ と $[\beta]$ の積を $[\alpha][\beta] := [d_n(\theta)]$、$[x]$ を単位元として $\tau_n(X, x)$ はモノイドとなる。

X が Kan 複体の時、それに対応する 0-trivial weak complicial set を $\mathrm{th}_0(X)$ と書けば、構成から $\pi_n(X, x) \cong \tau_n(\mathrm{th}_0(X), x)$ がわかる。$n = 0$ の時でも同様に π_n を τ_n に拡張できる。そしてこれらの構成は全て関手的なので、結局以下の図式が手に入った事になる。[*11]

$$\begin{tikzcd}
(\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r, "\tau_n"] & \mathsf{Mon} \\
(\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_n"] & \mathsf{Grp} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r, "\tau_0"] & \mathsf{Set} \arrow[d, equal] \\
(\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_0"] & \mathsf{Set}
\end{tikzcd}$$

ここで (∞,∞)-Cat は saturated weak complicial set のなす圏、$(\infty,0)$-Cat は 0-trivial saturated weak complicial set あるいは Kan 複体のなす圏であり、Mon と Grp はそれぞれモノイドと群のなす圏である。

3.2 印付単体的集合のループ空間

次に、従来のホモトピー群とループ空間との関係 $\pi_{n+1} = \pi_n \circ \Omega$ が印付単体的集合の枠組みに持ち上がるかどうかを確かめたい。τ_* は、少なくとも形式的には、球面からの射で定義されているわけではないことに注意したい。これが持ち上がるかどうかを確認するためには、τ_* が weak complicial set に対してしか定義されていないことから、X が weak

[*11] 0 でない n に対して、msSet に入る (∞, n)-圏のモデル構造の弱同値は τ_* の同型で与えられているわけではない。詳細は [18] や [12] 参照のこと。

complicial set ならそのループ空間もそうであるかどうかをまずは調べたい。そのためにはそもそも印付単体的集合のループ空間という概念を定義する必要があるので、[13] の懸垂の構成を参考にして約懸垂を定義してみる。

定義 3.5 ([6])**.** X を基点付印付単体的集合とする。X の約懸垂 $\Sigma_+(X)$ を以下の押し出しで定める。

$$\begin{tikzcd} X \cup \langle *x \rangle \arrow[r] \arrow[d] & \Delta[0] \arrow[d] \\ \Delta[0] \star X \arrow[r] & \Sigma_+(X) \end{tikzcd}$$

ここで $\langle *x \rangle \subset \Delta[0] \star X$ は $\Delta[0]$ の基点と X の基点 x から生成される印付単体的集合である。そしてこの構成は、基点付印付単体的集合のなす圏 msSet_* 上の自己関手 $\Sigma_+ : \mathsf{msSet}_* \to \mathsf{msSet}_*$ となる。

この関手 Σ_+ には右随伴関手として、ループ空間関手 $\Omega : \mathsf{msSet}_* \to \mathsf{msSet}_*$ があるが、[13, Lemma 2.7] の類似により以下がわかる。これは Ω がループ空間を与える関手であるというからには成り立っていてほしい事実である。

定理 3.6 ([6])**.** Ω は基点付 $(\infty, n+1)$-圏のモデル構造から基点付 (∞, n)-圏のモデル構造への右 *Quillen* 関手でもあり、基点付 (∞, ∞)-圏のモデル構造から基点付 (∞, ∞)-圏のモデル構造への右 *Quillen* 関手でもある。特に X が基点付 *($n+1$-trivial) saturated weak complicial set* ならば $\Omega(X)$ は基点付 *(n-trivial) saturated weak complicial set* である。

証明. 定義 2.5 で挙げられている (n-trivial) saturated weak complicial set を定める acyclic cofibration を Σ_+ で写した時に、それが弱同値になっていることをチェックすれば良い。 □

これによってループ空間の構成が基点付 saturated weak complicial set にまで持ち上がった事になる。

$$\begin{tikzcd} (\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat}_* \arrow[r, "\Omega"] & (\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat}_* \\ (\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat}_* \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Omega"] & (\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat}_* \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

さらに言えば、X が基点付 saturated weak complicial set であればそのループ空間 $\Omega(X)$ の τ_n たちが意味を持つ概念となった。系として、本節の目的であった次の同型を得る。

系 3.7 ([6])**.** 基点付 *saturated weak complicial set* (X, x) と $n \in \mathbb{N}$ に対し以下のモノイドの同型がある

$$\tau_{n+1}(X, x) \cong \tau_n(\Omega(X), x)$$

証明. ジョインの定義より $\Delta[n+1] \cong \Delta[0] \star \Delta[n]$ が従い、約懸垂とループ空間の随伴性から全単射 $\tau_{n+1}(X, x) \cong \tau_n(\Omega(X), x)$ を得る。τ_m の積構造の定義より、これが求めるべきモノイド同型を与えることがわかる。 □

定理 3.6 と系 3.7 と Kan 複体の 2 次以上のホモトピー群が可換であるという古典的事実を使えば、自然数 $n \geq 0$ と $k \geq n+1$、基点付 n-trivial saturated weak complicial set (X, x) に対して、$\tau_k(X, x)$ は群になり、$\tau_{k+1}(X, x)$ は可換群になってしまうということもわかる。[*12]

参考文献

[1] P. J. Ehlers and Tim Porter, Joins for (Augmented) Simplicial Sets, Jour. Pure Applied Algebra, 145 (2000) 37-44,

[2] Paul Goerss, Rick Jardine, Simplicial homotopy theory, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1996)

[3] Grandis, Marco Directed algebraic topology. Models of non-reversible worlds. New Mathematical Monographs, 13. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. x+434 pp.

[4] Alexander Grothendieck, Pursuing Stacks, 1983

[5] R. Horiuchi, On complicial homotopy monoids, arXiv:2006.05058

[6] R. Horiuchi, On loop spaces with marking, arXiv:2104.11860

[7] A. Joyal, The theory of quasi-categories, in preparation.

[8] A. Joyal, Quasi-categories and Kan complexes, J. Pure Appl. Algebra, 175 (2002), 207-222.

[9] Dan Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 67, No. 2 (Mar., 1958), pp. 282-312

[10] J. Lurie, Higher topos theory, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659

[*12] $\tau_k(X, x)$ が群になる事は構成からでもすぐにわかる。

[11] Peter May, Simplicial objects in algebraic topology, University of Chicago Press, 1967

[12] Viktoriya Ozornova and Martina Rovelli, Model structures for (∞, n)-categories on (pre)stratified simplicial sets and prestratified simplicial spaces, Algebr. Geom. Topol. 20 (2020), no. 3, 1543-1600. MR 4105558

[13] Viktoriya Ozornova and Martina Rovelli, Fundamental pushouts of n-complicial sets, arXiv:2005.05844

[14] Riehl, Emily, Complicial sets, an overture. 2016 MATRIX annals, 49-76, MATRIX Book Ser., 1, Springer, Cham, 2018.

[15] J.E. Roberts, Complicial sets, handwritten manuscript, 1978.

[16] Dan Quillen, Homotopical Algebra, LNM 43, Springer, (1967)

[17] R.H. Street, The algebra of oriented simplexes, J. Pure Appl. Algebra 49 (1987) 283-335.

[18] D. Verity, Weak complicial sets. I. Basic homotopy theory, Adv. Math. 219 (2008), no. 4, 1081-1149,

[19] Dominic Verity, Complicial sets characterising the simplicial nerves of strict ω-categories, Mem. Amer. Math. Soc. 193 (2008), no. 905, xvi+184. MR 2399898

The category of quasi-Polish spaces as a represented space

Matthew de Brecht (Kyoto University)*

1. Introduction

Quasi-Polish spaces are a class of well-behaved countably based T_0-spaces which include most of the countably based topological spaces that occur in usual mathematical practice, such as Polish spaces (used in functional analysis, topological algebra, probability theory, etc.), ω-continuous domains (used in domain theory, programming language semantics, semilattice theory, etc.), and countably based spectral spaces (used in algebraic geometry, logic, duality theory for distributive lattices, etc.). Many theoretical results for these specific subclasses of spaces naturally generalize to all quasi-Polish spaces, such as the descriptive set theory for Polish spaces [2, 4], the properties and characterizations of the upper and lower powerspaces for ω-continuous domains [8, 5], and the Stone duality and applications to logic of spectral spaces [10, 1].

Recently, there is growing interest in the effective aspects of quasi-Polish spaces [12, 9, 11, 5]. In this paper, we will go beyond individual spaces and look at the effective aspects of the whole category QPol of quasi-Polish spaces. For this purpose, we will use the characterization of quasi-Polish spaces as spaces of ideals introduced in [9] and further studied in [5] to interpret the objects of QPol as transitive binary relations on $\mathbb{N}$, and then extend this to an interpretation of QPol as a represented space. We will then show how to explicitly compute products and equalizers in QPol, and demonstrate the computability of several powerspace functors on QPol.

2. Preliminaries

Quasi-Polish spaces were introduced in [2], and were shown to have multiple equivalent characterizations. For the purposes of this paper we can define quasi-Polish spaces as follows, based on the characterization from [9] (see also [5]).

Definition 1 *Let $\prec$ be a transitive relation on $\mathbb{N}$. A subset $I \subseteq \mathbb{N}$ is an* ideal *(with respect to $\prec$) if and only if:*

1. $I \neq \emptyset$, *(I* is non-empty*)*
2. $(\forall a \in I)(\forall b \in \mathbb{N})\,(b \prec a \Rightarrow b \in I)$, *($I$* is a lower set*)*
3. $(\forall a, b \in I)(\exists c \in I)\,(a \prec c \,\&\, b \prec c)$. *($I$* is directed*)*

The collection $\mathbf{I}(\prec)$ of all ideals has the topology generated by basic open sets of the form $[n]_\prec = \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid n \in I\}$. A space is quasi-Polish *if and only if it is homeomorphic to $\mathbf{I}(\prec)$ for some transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$.* □

We often apply the above definition to other countable sets with the implicit assumption that it has been suitably encoded as a subset of $\mathbb{N}$. Spaces of the form $\mathbf{I}(\prec)$ for a computably enumerable (c.e.) relation $\prec$ on $\mathbb{N}$ provide an effective interpretation of quasi-Polish spaces, which were called *precomputable quasi-Polish spaces* in [9], and are equivalent to the *computable quasi-Polish spaces* in [12] (see also [11]).

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K11166.

* e-mail: matthew@i.h.kyoto-u.ac.jp

Let $\prec_S$ and $\prec_T$ be transitive relations on $\mathbb{N}$. Any subset $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ can be viewed as a *code* for a partial function $\ulcorner R \urcorner :\subseteq \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ by defining

$$\ulcorner R \urcorner(I) = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in I)\, \langle m, n \rangle \in R\}$$

for each $I \in \mathbf{I}(\prec_S)$. It was shown in [5] that a total function $f\colon \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ is continuous (computable) if and only if there is a (c.e.) code $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ such that $f = \ulcorner R \urcorner$.

Example: Let (X, d) be a separable metric space. Fix a countable dense subset $D \subseteq X$, and define a transitive relation $\prec$ on $D \times \mathbb{N}$ as

$$\langle x, n \rangle \prec \langle y, m \rangle \iff d(x, y) < 2^{-n} - 2^{-m}.$$

Then $\mathbf{I}(\prec)$ is homeomorphic to the completion of (X, d) (see [5]). □

Let $\mathbb{S} = \{\bot, \top\}$ be the Sierpinski space, where the singleton $\{\top\}$ is open but not closed. $\mathbb{S}$ is the simplest example of a non-Hausdorff T_0-space. It is well known that every countably based T_0-space can be embedded into the product space $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$.

Example: Let $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ denote the set of finite subsets of $\mathbb{N}$, and let $\subseteq$ be the usual subset relation on $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. Then $\mathbf{I}(\subseteq)$ is homeomorphic to $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$. □

Given a topological space X, we write $\mathbf{O}(X)$ for the set of open subsets of X. We view $\mathbf{O}(X)$ as being a topological space by equipping it with the Scott-topology.

A *represented space* is a tuple (X, δ), where X is a set and $\delta :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ is a partial surjective function from Baire space to X. Given represented spaces (X, δ) and (Y, ρ), a function $f\colon X \to Y$ is *continuous* (*computable*) if there exists a continuous (computable) partial function $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ such that $f \circ \delta = \rho \circ F$. Every countably based space can be viewed as a represented space by equipping it with an *admissible representation*, and then a function between countably based spaces is continuous in the sense defined here if and only if it is continuous in the topological sense. In the case of a space of the form $\mathbf{I}(\prec)$, an admissible representation can be viewed as representing each ideal $I \in \mathbf{I}(\prec)$ by enumerating its elements, which is formally defined as the function $\delta :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{I}(\prec)$ with

$$\delta(p) = I \iff I = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N})\, p(m) = n\} \in \mathbf{I}(\prec).$$

See [14] for more on admissible representations, and see [13] for more on represented spaces.

3. The category QPol

We represent the category of quasi-Polish spaces by the tuple $\mathsf{QPol} = (\mathsf{Obj}, \mathsf{Mor}, s, t, i, \circ)$ consisting of the following data:

- Obj (objects) is the $\mathbf{\Pi}^0_2$-subspace of $\mathbb{S}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ of transitive relations. Each element $\prec$ of Obj is interpretted as the space of ideals $\mathbf{I}(\prec)$.

- Mor (morphisms) is the represented space constructed as follows. Let $\mathcal{M}$ be the $\mathbf{\Pi}^1_1$-subspace of $\mathbb{S}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathsf{Obj} \times \mathsf{Obj}$ of all triples $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$ such that $\ulcorner R \urcorner :\subseteq \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ is a total function, i.e.

$$(\forall I \in \mathbf{I}(\prec_S))\, \ulcorner R \urcorner(I) \in \mathbf{I}(\prec_T).$$

Define an equivalence relation $\equiv$ on $\mathcal{M}$ as $\langle R_1, \prec_{S_1}, \prec_{T_1}\rangle \equiv \langle R_2, \prec_{S_2}, \prec_{T_2}\rangle$ if and only if $\prec_{S_1} = \prec_{S_2}$ and $\prec_{T_1} = \prec_{T_2}$ and $(\forall I \in \mathbf{I}(\prec_{S_1}))\ulcorner R_1 \urcorner(I) = \ulcorner R_2 \urcorner(I)$ (extensional equality of functions). Mor is then defined to be the quotient (in the category of represented spaces) of $\mathcal{M}$ by $\equiv$. For convenience, in the following our notation will treat Mor as if it is $\mathcal{M}$ since most of our constructions will respect the equivalence relation $\equiv$ (with the notable exception of equalizers; see below). However, the formal definition as a quotient is necessary when one works with universal constructions in category theory, such as products, which requires certain morphisms to be determined uniquely.

- $s\colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Obj}$ (source) is the projection sending $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ to $\prec_S$.
- $t\colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Obj}$ (target) is the projection sending $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ to $\prec_T$.
- $i\colon \mathsf{Obj} \to \mathsf{Mor}$ (identity) is the function sending $\prec$ to $\langle =_{\mathbb{N}}, \prec, \prec\rangle$.
- $\circ :\subseteq \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ (composition) is the partial computable function with domain
$$dom(\circ) = \{\langle g, f\rangle \in \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \mid s(g) = t(f)\}$$
and which is defined for $f = \langle R_f, \prec_S, \prec\rangle$ and $g = \langle R_g, \prec, \prec_T\rangle$ as
$$\begin{aligned} R &= \{\langle m, n\rangle \mid (\exists p \in \mathbb{N})\,[\langle m, p\rangle \in R_f \,\&\, \langle p, n\rangle \in R_g]\}, \\ g \circ f &= \langle R, \prec_S, \prec_T\rangle. \end{aligned}$$
It is easy to verify that $\ulcorner R \urcorner(I) = \ulcorner R_g \urcorner(\ulcorner R_f \urcorner(I))$, hence composition of total functions yields a total function.

It is straightforward to check that QPol satisfies the axioms of a category:

- $s(g \circ f) = s(f)$ and $t(g \circ f) = t(g)$,
- $s(i(\prec)) = \prec$ and $t(i(\prec)) = \prec$,
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ when the compositions $h \circ g$ and $g \circ f$ are defined,
- if $s(f) = \prec_S$ and $t(f) = \prec_T$ then $i(\prec_T) \circ f = f = f \circ i(\prec_S)$.

See [1] for related work on topological groupoids. Note that Obj is a quasi-Polish space but Mor is not, and the fact that QPol is not cartesian closed suggests there is no natural interpretation of Mor as a quasi-Polish space. In the next two subsections we show how to compute products and equalizers in QPol.

3.1. Products and coproducts

Countable products in QPol can be defined as a computable map $\Pi\colon \mathsf{Obj}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{Obj}$ by defining $\Pi(\varphi)$ to be the relation $\prec_\Pi$ on $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ defined as

$$\sigma \prec_\Pi \tau \iff len(\sigma) < len(\tau) \,\&\, (\forall i < len(\sigma))\, \sigma(i) \prec_i \tau(i),$$

where $\prec_i$ is the relation given by $\varphi(i)$. There is a uniform projection map $p\colon \mathsf{Obj}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{Mor}^{\mathbb{N}}$ defined as $p(\varphi)(i) = \langle\{\langle \sigma, n\rangle \mid i < len(\sigma) \,\&\, \sigma(i) = n\}, \Pi(\varphi), \varphi(i)\rangle$, which is the projection map from $\Pi(\varphi)$ to $\varphi(i)$.

For $\varphi \in \mathsf{Obj}^{\mathbb{N}}$, there is a partial computable function $u(\varphi) :\subseteq \mathsf{Obj} \times \mathsf{Mor}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{Mor}$ with domain

$$dom(u(\varphi)) = \{\langle \prec, \psi \rangle \mid (\forall i \in \mathbb{N})\, [s(\psi(i)) = \prec \;\&\, t(\psi(i)) = \varphi(i)]\}$$

defined as

$$u(\varphi)(\prec, \psi) = \langle \{\langle m, \sigma \rangle \mid (\forall i < len(\sigma))(\exists p \in \mathbb{N})\, [\langle p, \sigma(i) \rangle \in \psi(i) \,\&\, p \prec m]\}, \prec, \Pi(\varphi) \rangle$$

which demonstrates the universality of the product in a uniform way[1].

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{I}(\prec) \arrow[dl, "\psi(i)"'] \arrow[d, dashed, "u(\varphi)(\prec,\psi)"] \arrow[dr, "\psi(j)"] & \\
\varphi(i) & \Pi(\varphi) \arrow[l, "p(\varphi)(i)"'] \arrow[r, "p(\varphi)(j)"] & \varphi(j)
\end{tikzcd}$$

One can also define binary products, binary coproducts, and countable coproducts, but we leave the definitions to the reader as an exercise.

3.2. Equalizers

We can compute equalizers in QPol as a partial multivalued function $e :\subseteq \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \rightrightarrows \mathsf{Mor}$ with

$$\begin{aligned} dom(e) &= \{\langle f, g \rangle \in \mathsf{Mor} \times \mathsf{Mor} \mid \langle s(f), t(f) \rangle = \langle s(g), t(g) \rangle\} \\ e(f, g) &= \langle R_E, \prec_E, s(f) \rangle \end{aligned}$$

where

$$R_E = \{\langle \langle \{n\}, p \rangle, n \rangle \mid n, p \in \mathbb{N}\}$$

and for $F, G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ and $p, q \in \mathbb{N}$ we set $\langle F, p \rangle \prec_E \langle G, q \rangle$ if all of the following hold:

1. $p < q$
2. $F \subseteq G$
3. $G \neq \emptyset$
4. $(\forall m \leq p)\ [[(\exists n \in F)\, m \prec_S n] \Rightarrow m \in G]$
5. $(\forall a, b \in F)(\exists c \in G)\, [a \prec_S c \,\&\, b \prec_S c]$
6. $(\forall n \leq p) \left[[(\exists m_1 \in F)\, \langle m_1, n \rangle \in R_f^{(p)}] \Rightarrow (\exists m_2 \in G)\, \langle m_2, n \rangle \in R_g\right]$
7. $(\forall n \leq p) \left[[(\exists m_1 \in F)\, \langle m_1, n \rangle \in R_g^{(p)}] \Rightarrow (\exists m_2 \in G)\, \langle m_2, n \rangle \in R_f\right]$

[1] For the difficult direction of the proof that $\psi(i) = p(\varphi)(i) \circ u(\varphi)(\prec, \psi)$ for each $i \in \mathbb{N}$, if we choose any $j \in \mathbb{N}$ and $n_i \in \psi(i)(I)$ for each $i \leq j$, then there must exist $p_i \in I$ with $\langle p_i, n_i \rangle \in \psi(i)$. Let m be a $\prec$-upper bound of $\{p_i \mid i \leq j\}$ in I and set $\sigma(i) = n_i$ for $i \leq j$. Then $\langle m, \sigma \rangle \in u(\varphi)(\prec, \psi)$, hence $n_i \in p(\varphi)(i)(u(\varphi)(\prec, \psi)(I))$ for each $i \leq j$.

where $\prec_S$ is the relation corresponding to $s(f)$, R_f is a code for f, and $R_f^{(p)}$ is the set that is enumerated within the first p time steps of a given presentation of R_f (and similarly for g, R_g, and $R_g^{(p)}$). It is straightforward to check that $\prec_E$ is transitive. Since the relation $\prec_E$ in $e(f,g)$ depends on the codes R_f and R_g and their presentations, the output of e is multivalued.

There is a partial computable function $u :\subseteq \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ that demonstrates the universality of equalizers in a uniform way, which has domain

$$dom(u) = \{h \in \mathsf{Mor} \mid t(h) = s(f) \,\&\, f \circ h = g \circ h\}$$

and is defined as $u(h) = \langle R, s(h), \prec_E \rangle$, where

$$R = \{\langle m, \langle F, p\rangle\rangle \mid p \in \mathbb{N} \,\&\, (\forall n \in F)(\exists \langle m_0, n\rangle \in R_h)\, m_0 \prec m\}$$

and R_h is a code for h.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "u(h)"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
\mathbf{I}(\prec_E) \arrow[r, hook, "e(f,g)"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

4. Functors

A (computable) functor on QPol is a pair $F = (F_{\mathsf{Obj}}, F_{\mathsf{Mor}})$ of (computable) functions $F_{\mathsf{Obj}} \colon \mathsf{Obj} \to \mathsf{Obj}$ and $F_{\mathsf{Mor}} \colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ satisfying

- $F_{\mathsf{Obj}} \circ s = s \circ F_{\mathsf{Mor}}$,
- $F_{\mathsf{Obj}} \circ t = t \circ F_{\mathsf{Mor}}$,
- $F_{\mathsf{Mor}} \circ i = i \circ F_{\mathsf{Obj}}$, and
- $F_{\mathsf{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathsf{Mor}}(g) \circ F_{\mathsf{Mor}}(f)$ for all composable $f, g \in \mathsf{Mor}$.

In the following subsections we show how to construct the lower, upper, and valuation powerspace functors on QPol. The double powerspace functor, which maps X to $\mathbf{O}(\mathbf{O}(X))$, is obtained by composing the lower and upper powerspace functors [8].

4.1. Lower powerspace functor

Given a topological space X, the *lower powerspace* $\mathbf{A}(X)$ is the set of all closed subsets of X with the lower Vietoris topology, which is generated by open sets of the form

$$\Diamond U = \{A \in \mathbf{A}(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$$

for open $U \in \mathbf{O}(X)$. Given a continuous function $f \colon X \to Y$, define $\mathbf{A}(f) \colon \mathbf{A}(X) \to \mathbf{A}(Y)$ as

$$\mathbf{A}(f)(A) = Cl_Y(\{f(x) \mid x \in A\})$$

for each $A \in \mathbf{A}(X)$, where $Cl_Y(\cdot)$ is the closure operator of Y. It was shown in [8] that $\mathbf{A}(\cdot)$ preserves quasi-Polish spaces, hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces.

We represent the lower powerspace functor as a computable functor $(\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as follows. For each element $\prec$ of Obj, define $\prec_L$ on $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ as

$$A \prec_L B \iff (\forall a \in A)(\exists b \in B)\, a \prec b.$$

For each element $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$ of Mor, define

$$R_L = \{\langle F, G\rangle \mid (\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Finally, define the functor $(\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec) &= \prec_L \\ \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) &= \langle R_L, \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that $(\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ is equivalent to the lower powerspace functor. It was shown in [5] that $\mathbf{I}(\prec_L)$ and $\mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$ are computably homeomorphic for every transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$, which proves that $\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}$ behaves properly on objects. For $F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, the basic open subset $[F]_{\prec_L}$ of $\mathbf{I}(\prec_L)$ corresponds to the basic open subset $\bigcap_{m\in F} \Diamond[m]_{\prec}$ of $\mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$. Explicitly, there are homeomorphisms $f_L \colon \mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec)) \to \mathbf{I}(\prec_L)$ and $g_L \colon \mathbf{I}(\prec_L) \to \mathbf{A}(\mathbf{I}(\prec))$ defined as

$$\begin{aligned} f_L(A) &= \{G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid (\forall n \in G)(\exists I \in A)\, n \in I\} \\ g_L(J) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid (\forall m \in I)(\exists F \in J)\, m \in F\}. \end{aligned}$$

To show that $\mathbf{A}_{\mathsf{Mor}}$ behaves properly on morphisms, fix a code R for a total function $\ulcorner R \urcorner \colon \mathbf{I}(\prec) \to \mathbf{I}(\sqsubset)$, and we will prove $\ulcorner R_L \urcorner = f_L \circ \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_L$. Given $J \in \mathbf{I}(\prec_L)$, we clearly have $G \in \ulcorner R_L \urcorner(J)$ if and only if

$$(\exists F \in J)(\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R.$$

On the other hand, $G \in f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))\, n \in I \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in g_L(J))\, n \in \ulcorner R \urcorner(I) \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists I \in g_L(J))\, (\exists m \in I)\, \langle m, n\rangle \in R \\ &\iff (\forall n \in G)(\exists m \in \mathbb{N})\, [g_L(J) \cap [m]_{\prec} \neq \emptyset \,\&\, \langle m, n\rangle \in R] \\ &\iff (\exists F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))(\forall n \in G)(\exists m \in F)\, [g_L(J) \cap [m]_{\prec} \neq \emptyset \,\&\, \langle m, n\rangle \in R]. \end{aligned}$$

It follows that $\ulcorner R_L \urcorner(J) \subseteq f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$. Conversely, if $G \in f_L(\mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner)(g_L(J)))$, then there is $H \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}))$ and $h \colon G \to H$ such that

$$(\forall n \in G)\, [g_L(J) \cap [h(n)]_{\prec} \neq \emptyset \,\&\, \langle h(n), n\rangle \in R].$$

Set $F = \{h(n) \mid n \in H\}$. Then $F \in J$ by Lemma 7 of [5], and

$$(\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R,$$

hence $G \in \ulcorner R_L \urcorner(J)$. Therefore, $\ulcorner R_L \urcorner = f_L \circ \mathbf{A}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_L$.

4.2. Upper powerspace functor

Given a topological space X, the *upper powerspace* $\mathbf{K}(X)$ is the set of all saturated compact subsets of X with the upper Vietoris topology, which is generated by open sets of the form

$$\Box U = \{K \in \mathbf{K}(X) \mid K \subseteq U\}$$

for $U \in \mathbf{O}(X)$. Given a continuous function $f\colon X \to Y$, define $\mathbf{K}(f)\colon \mathbf{K}(X) \to \mathbf{K}(Y)$ as

$$\mathbf{K}(f)(K) = Sat_Y(\{f(x) \mid x \in K\})$$

for each $K \in \mathbf{K}(X)$, where $Sat_Y(\cdot)$ is the saturation operator of Y (i.e., $Sat_Y(S) = \bigcap\{U \in \mathbf{O}(Y) \mid S \subseteq U\}$ for each $S \subseteq Y$). It was shown in [8] that $\mathbf{K}(\cdot)$ preserves quasi-Polish spaces, hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces.

We represent the upper powerspace functor as a computable functor $(\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as follows. For each element $\prec$ of Obj, define $\prec_U$ on $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ as

$$A \prec_U B \iff (\forall b \in B)(\exists a \in A)\, a \prec b.$$

For each element $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ of Mor, define

$$R_U = \{\langle F, G\rangle \mid (\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\}.$$

Finally, define the functor $(\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec) &= \prec_U \\ \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) &= \langle R_U, \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that $(\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ is equivalent to the upper powerspace functor. It was shown in [5] that $\mathbf{I}(\prec_U)$ and $\mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$ are computably homeomorphic for every transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$, which proves that $\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}$ behaves properly on objects. For $F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, the basic open subset $[F]_{\prec_U}$ of $\mathbf{I}(\prec_U)$ corresponds to the basic open subset $\Box\bigcup_{m\in F}[m]_{\prec}$ of $\mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$. Explicitly, there are homeomorphisms $f_U\colon \mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec)) \to \mathbf{I}(\prec_U)$ and $g_U\colon \mathbf{I}(\prec_U) \to \mathbf{K}(\mathbf{I}(\prec))$ defined as

$$\begin{aligned} f_U(K) &= \{G \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid (\forall I \in K)(\exists n \in G)\, n \in I\} \\ g_U(J) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid (\forall F \in J)(\exists m \in I)\, m \in F\}. \end{aligned}$$

To show that $\mathbf{K}_{\mathsf{Mor}}$ behaves properly on morphisms, fix a code R for a total function $\ulcorner R \urcorner\colon \mathbf{I}(\prec) \to \mathbf{I}(\sqsubset)$, and we will prove $\ulcorner R_U \urcorner = f_U \circ \mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_U$. Given $J \in \mathbf{I}(\prec_U)$, we clearly have $G \in \ulcorner R_U \urcorner(J)$ if and only if

$$(\exists F \in J)(\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R.$$

On the other hand, $G \in f_U(\mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner)(g_U(J)))$

$$\begin{aligned} &\iff (\forall I \in \mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner)(g_U(J)))(\exists n \in G)\, n \in I \\ &\iff (\forall I \in g_U(J))(\exists n \in G)\, n \in \ulcorner R \urcorner(I) \\ &\iff (\forall I \in g_U(J))(\exists n \in G)(\exists m \in I)\, \langle m, n\rangle \in R \\ &\iff g_U(J) \subseteq \bigcup_{m\in S}[m]_{\prec}, \text{ where } S = \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\} \\ &\iff (\exists F \in J)\, F \subseteq \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\} \\ &\iff (\exists F \in J)(\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R, \end{aligned}$$

where the fifth equivalence follows from Lemma 9 of [5]. Therefore, $\ulcorner R_U \urcorner = f_U \circ \mathbf{K}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_U$.

4.3. Valuation powerspace functor

Let $\overline{\mathbb{R}}_+$ denote the positive extended reals (i.e., $[0,\infty]$) with the Scott-topology induced by the usual order. A *valuation* on a topological space X is a continuous function $\nu\colon \mathbf{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfying:

1. $\nu(\emptyset) = 0$, and (*strictness*)
2. $\nu(U) + \nu(V) = \nu(U \cup V) + \nu(U \cap V)$. (*modularity*)

The *valuation powerspace* on X is the set $\mathbf{V}(X)$ of all valuations on X with the *weak topology*, which is generated by subbasic opens of the form

$$\langle U, q\rangle := \{\nu \in \mathbf{V}(X) \mid \nu(U) > q\}$$

with $U \in \mathbf{O}(X)$ and $q \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{\infty\}$. Given a continuous function $f\colon X \to Y$, define $\mathbf{V}(f)\colon \mathbf{V}(X) \to \mathbf{V}(Y)$ as

$$\mathbf{V}(f)(\nu) = \lambda U \in \mathbf{O}(Y).\nu(f^{-1}(U))$$

for each $\nu \in \mathbf{V}(X)$.

$\mathbf{V}(\cdot)$ preserves quasi-Polish spaces (see [6]), hence it is an endofunctor on the category of quasi-Polish spaces. Every valuation on a quasi-Polish space can be extended to a Borel measure [7], and this extension is unique if the valuation is locally finite [3]. Conversely, it clear that the restriction of a Borel measure to the open sets is a valuation. In particular, there is a bijection between probabilistic valuations (i.e., valuations satisfying $\nu(X) = 1$) and probabilistic Borel measures on quasi-Polish spaces.

We represent the valuation powerspace functor as a computable functor $(\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as follows. Let $\mathcal{B}$ be the (countable) set of all partial functions $r :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{>0}$ such that $dom(r)$ is finite, where $\mathbb{Q}_{>0}$ is the set of rational numbers strictly larger than zero. For each element $\prec$ of Obj, define $\prec_V$ on $\mathcal{B}$ as $r \prec_V s$ if and only if

$$\sum_{b\in F} r(b) < \sum_{c\in\uparrow F\cap dom(s)} s(c)$$

for every non-empty $F \subseteq dom(r)$, where $\uparrow F = \{c \in \mathbb{N} \mid (\exists b \in F)\, b \prec c\}$.

For each element $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ of Mor, define

$$R_V = \left\{ \langle r, s\rangle \;\middle|\; (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \sum_{a\in A^R_{G,r}} r(a) > \sum_{b\in G} s(b) \right] \right\}$$

where

$$A^R_{G,r} = \{a \in dom(r) \mid (\exists a_0 \in \mathbb{N})(\exists b \in G)\, [a_0 \prec a \,\&\, \langle a_0, b\rangle \in R]\}.$$

Finally, define the functor $(\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}})$ on QPol as

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}(\prec) &= \prec_V \\ \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) &= \langle R_V, \mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle. \end{aligned}$$

We briefly show that $(\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{V}_{\mathsf{Mor}})$ is equivalent to the valuations powerspace functor. It was shown in [6] that $\mathbf{I}(\prec_V)$ and $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec))$ are computably homeomorphic for every transitive relation $\prec$ on $\mathbb{N}$, which proves that $\mathbf{V}_{\mathsf{Obj}}$ behaves properly on objects. Explicitly, there are homeomorphisms $f_V\colon \mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec)) \to \mathbf{I}(\prec_V)$ and $g_V\colon \mathbf{I}(\prec_V) \to \mathbf{V}(\mathbf{I}(\prec))$

defined as

$$f_V(\nu) = \left\{ s \in \mathcal{B} \,\middle|\, (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \nu(\bigcup_{b \in G} [b]_{\prec}) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \right\},$$

$$g_V(I) = \lambda U. \bigvee \left\{ \sum_{a \in dom(r)} r(a) \,\middle|\, r \in I \text{ and } \bigcup_{a \in dom(r)} [a]_{\prec} \subseteq U \right\}.$$

To show that $\mathbf{V}_{\mathsf{Mor}}$ behaves properly on morphisms, fix a code R for a total function $\ulcorner R \urcorner \colon \mathbf{I}(\prec) \to \mathbf{I}(\sqsubset)$, and we will prove $\ulcorner R_V \urcorner = f_V \circ \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_V$. Given $I \in \mathbf{I}(\prec_V)$, we clearly have $s \in \ulcorner R_V \urcorner(I)$ if and only if

$$(\exists r \in I)(\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \sum_{a \in A^R_{G,r}} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right].$$

Next we consider $f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$. As mentioned after the proof of Theorem 13 in [6], if $S \subseteq \mathbb{N}$ then

$$g_V(I) \left(\bigcup_{a \in S} [a]_{\prec} \right) = \bigvee \left\{ \sum_{a \in dom(r)} r(a) \,\middle|\, r \in I \text{ and } (\forall a \in dom(r))(\exists a_0 \in S) a_0 \prec a \right\}.$$

It follows that for any $q \in \mathbb{R}$, we have $g_V(I) \left(\bigcup_{\substack{b \in G \,\&\, \\ \langle a,b \rangle \in R}} [a]_{\prec} \right) > q$ if and only if there is $r \in I$ such that $\sum_{a \in dom(r)} r(a) > q$ and

$$(\forall a \in dom(r))(\exists a_0 \in \mathbb{N})(\exists b \in G) \, [a_0 \prec a \,\&\, \langle a_0, b \rangle \in R]. \tag{1}$$

As shown in Lemma 5 of [6], if $r \in I$ and $A \subseteq dom(r)$, then the restriction $r|_A$ is also in I. In particular, for any $r \in I$, the resriction $r' = r|_{A^R_{G,r}}$ is also in I, and r' automatically satisfies (1) with r' in place of r. Therefore,

$$g_V(I) \left(\bigcup_{\substack{b \in G \,\&\, \\ \langle a,b \rangle \in R}} [a]_{\prec} \right) > q \iff (\exists r \in I) \sum_{a \in A^R_{G,r}} r(a) > q.$$

Thus $s \in f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I))(\bigcup_{b \in G} [b]_{\prec}) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow g_V(I) \left(\ulcorner R \urcorner^{-1} \left(\bigcup_{b \in G} [b]_{\prec} \right) \right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow g_V(I) \left(\bigcup_{\substack{b \in G \,\&\, \\ \langle a,b \rangle \in R}} [a]_{\prec} \right) > \sum_{b \in G} s(b) \right] \\
&\iff (\forall G \subseteq dom(s)) \left[G \neq \emptyset \Rightarrow (\exists r \in I) \sum_{a \in A^R_{G,r}} r(a) > \sum_{b \in G} s(b) \right]
\end{aligned}$$

It immediately follows that $\ulcorner R_V \urcorner(I) \subseteq f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$.

For the other inclusion, assume $s \in f_V(\mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner)(g_V(I)))$, and for each non-empty $G \subseteq dom(s)$ fix $r_G \in I$ with $\sum_{a \in A^R_{G,r_G}} r_G(a) > \sum_{b \in G} s(b)$. Let r be an $\prec_V$-upper bound of the r_G in I. Let $G \subseteq dom(s)$ be non-empty. Then the choice of r_G and assumption $r_G \prec_V r$ implies

$$\sum_{b \in G} s(b) < \sum_{a \in A^R_{G,r_G}} r_G(a) < \sum_{a \in \uparrow A^R_{G,r_G} \cap dom(r)} r(a).$$

Since $\uparrow A^R_{G,r_G} \cap dom(r) \subseteq A^R_{G,r}$, we obtain

$$\sum_{b \in G} s(b) < \sum_{a \in \uparrow A^R_{G,r}} r(a),$$

hence $s \in \ulcorner R_V \urcorner(I)$. Therefore, $\ulcorner R_V \urcorner = f_V \circ \mathbf{V}(\ulcorner R \urcorner) \circ g_V$.

References

[1] R. Chen. Borel functors, interpretations, and strong conceptual completeness for $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 372:8955–8983, 2019.

[2] M. de Brecht. Quasi-Polish spaces. *Annals of Pure and Applied Logic*, 164:356–381, 2013.

[3] M. de Brecht. Extending continuous valuations on quasi-Polish spaces to Borel measures. Twelfth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 2015.

[4] M. de Brecht. A generalization of a theorem of Hurewicz for quasi-Polish spaces. *Logical Methods in Computer Science*, 14:1–18, 2018.

[5] M. de Brecht. Some notes on spaces of ideals and computable topology. In *Proceedings of the 16th Conference on Computability in Europe, CiE 2020*, volume 12098 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 26–37, 2020.

[6] M. de Brecht. Constructing the space of valuations of a quasi-Polish space as a space of ideals. (arXiv:2106.15780), 2021.

[7] M. de Brecht, J. Goubault-Larrecq, X. Jia, and Z. Lyu. Domain-complete and LCS-complete spaces. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 345:3–35, 2019.

[8] M. de Brecht and T. Kawai. On the commutativity of the powerspace constructions. *Logical Methods in Computer Science*, 15:1–25, 2019.

[9] M. de Brecht, A. Pauly, and M. Schröder. Overt choice. *Computability*, 9:169–191, 2020.

[10] R. Heckmann. Spatiality of countably presentable locales (proved with the Baire category theorem). *Math. Struct. in Comp. Science*, 25:1607–1625, 2015.

[11] M. Hoyrup, C. Rojas, V. Selivanov, and D. Stull. Computability on quasi-Polish spaces. In *Descriptional Complexity of Formal Systems*, pages 171–183. Springer, 2019.

[12] K. Margarita and K. Oleg. On higher effective descriptive set theory. In *Unveiling Dynamics and Complexity*, pages 282–291. Springer, 2017.

[13] A. Pauly. On the topological aspects of the theory of represented spaces. *Computability*, 5(2):159–180, 2016.

[14] M. Schröder. Extended admissibility. *Theoretical Computer Science*, 284(2):519 – 538, 2002.

Knot concordance and exotica

Lisa Piccirillo

Since the work of Freedman and Donaldson in the early 1980's, there have been techniques available for producing closed *exotic* 4-manifolds, i.e. 4-manifolds which admit more than one smooth structure. However, these (gauge theoretic) tools are difficult to wield on 4-manifolds with very little algebraic topology, and cannot be used to demonstrate that S^4 is exotic.

There is an alternate, well-known strategy which a priori *can* be used to distinguish smooth structures on very simple closed 4-manifolds; produce a knot K in S^3 which is (smoothly) slice in one smooth filling W of S^3, but not slice in some homeomorphic smooth filling W'. However, this strategy had never actually been used in practice, even to reproduce known complicated exotica. In this manuscript I will discuss joint work with Manolescu and Marengon [MMP20] which gives the first application of this strategy. I will also discuss joint work with Manolescu [MP21] which gives a systematic approach towards using this strategy to produce candidates for exotic homotopy spheres.

This manuscript only aims to provide an overview, for more detailed exposition and references, see the full papers [MMP20, MP21]. All manifolds and embedding are taken to be smooth unless otherwise specified.

1 Introduction

Definition 1.1 A smooth 4-manifold X is *exotic* if there exists a smooth 4-manifold Y such that Y is homeomorphic but not diffeomorphic to X.

The following is a brief survey of the simplest 4-dimensional exotica known: for non-compact manifolds it can be shown as a consequence of Donaldson's theorem [Don83] and work of Freedman [Fre82] that $\mathbb{R}^4$ is exotic. In the setting of compact 4-manifolds with boundary, it is known that there are contractible exotic 4-manifolds, [AR16]. In the closed case, the smallest (in terms if b_2) known exotic manifold is $\mathbb{C}P^2\#_2\overline{\mathbb{C}P^2}$, [AP10].

In the results above, the diffeomorphism obstruction comes from Gauge theoretic 4-manifold invariants. Consider instead the following primitive argument showing that some X is not diffeomorphic to some Y; find a manifold M such that M embeds in X but M does not embed in Y. Of course, this argument only gives an advantage over a direct argument

using diffeomorphism invariants of X and Y if one has techniques for constructing and obstructing embeddings which are better developed or easier to use than direct diffeomorphism invariants.

I will now introduce a certain type of 4-manifold M for which this is the case.

Definition 1.2 A knot trace $X(K)$ is the 4-manifold obtained by attaching a 0-framed 2-handle to B^4 along K.

The following lemma comes essentially from [FM66], for proof see [HP19].

Lemma 1.3 *For any knot K and closed 4-manifold Y, $X(K) \hookrightarrow Y$ with $\iota_*(H_2(X(K)) = \beta \in H_2(Y)$ if and only if $\overline{K}$ bounds a disk $D^2 \hookrightarrow \mathring{Y}$ with $[D] = \beta \in H_2(\mathring{Y}, \partial)$.*

Throughout, $\mathring{Y}$ is defined to be the complement of an open B^4 in Y. There are many invariants in the literature for obstructing a knot K from bounding such a disk in some $\mathring{Y}$, especially when $\mathring{Y} \cong B^4$. Thus, knot traces provide a compelling source of W for the outline above. In particular, it is well known that Rasmussen's s invariant [Ras10] may be able to obstruct $X(K)$ embedding in S^4 even if $X(K)$ embeds in some homotopy sphere, see [FGMW10]. Since we are particularly interested in this setting, we will be particularly interested in the following type of slice disk:

Definition 1.4 A knot K is *H-slice* in X (or $\mathring{X}$) if K bounds a disk $D^2 \hookrightarrow \mathring{Y}$ with $[D] = 0 \in H_2(\mathring{Y}, \partial)$. A knot K is *slice* if K bounds a disk $D^2 \hookrightarrow B^4$.

In this language, the smooth 4-dimensional Poincare conjecture implies:

Conjecture 1.5 *There does not exist a knot K in S^3 which is H-slice in some homotopy 4-ball Y but such that K is not H-slice in B^4.*

The main theorem of this manuscript is the following:

Theorem 1.6 ([MMP20]) *There exist homeomorphic closed 4-manifolds X and Y and a knot K which is H-slice is Y but not H-slice in X.*

Surprisingly, this provides the first source of exotic closed 4-manifolds which are distinguished by the embedding outline, and provides a proof-of-concept for this approach on the Poincare conjecture.

In the second part of the manuscript, I will discuss joint work with Ciprian Manolescu in which we develop systematic methods for producing knots which are H-slice in some homotopy B^4 but which may not be H-slice in B^4.

2 Using H-sliceness to produce exotica

The goal of this section is to outline a proof of Theorem 1.6. The main technical result with powers Theorem 1.6 is the following:

Theorem 2.1 *[Theorem 1.4 of [MMP20]] Let X be a closed 4-manifold with $b_2^+(X) > 1$ such that there exists a spin^c structure $\mathfrak{s}$ with Bauer-Furuta invariants $BF(X, \mathfrak{s}) \neq 0$. Then there are no spheres $S^2 \hookrightarrow X$ with $S \cdot S \geq 0$ and $[S] \neq 0$.*

This adjunction inequality for the Bauer-Furuta invariants is proved identically to the analogous statement for the Sieberg Witten invariants. We are primarily interested in the following corollary:

Corollary 2.2 *[MMP20] For $(X, \mathfrak{s})$ a closed 4-manifold and spin^c structure such that $BF(X, \mathfrak{s})$ are very nice[1], if some knot $\overline{K}$ bounds $D^2 \hookrightarrow \mathring{X}$ with $D \cdot D \geq 0$ and $[D] \neq 0$ then K is not H-slice in X.*

Sketch of corollary The "very nice" condition is precisely what is needed to conclude that $BF(X\#X, \mathfrak{s}\#\mathfrak{s}) \neq 0$[2]. Now suppose some knot $\overline{K}$ bounds $D^2 \hookrightarrow \mathring{X}$ with $D \cdot D \geq 0$ and $[D] \neq 0$ and suppose for a contradiction that K is H-slice in X with H-slice disk D'. Then $D \cup D' \hookrightarrow X\#X$ is a 2-sphere with $S \cdot S \geq 0$ and $[S] \neq 0$, violating Theorem 2.1. □

The advantage of Corollary 2.2 is that it allows one to prove an obstructive claim with a constructive method; one simply needs to demonstrate the existence of a certain disk (D) for $\overline{K}$ to obstruct the existence of an H-slice disk for K. This is how we prove Theorem 1.6. The following sketch gives an particularly straightforward example; the reader can modify this method to produce other examples as an exercise.

Sketch of Theorem 1.6 It is well known that the left hand trefoil bounds a disk D in $K3$ (thus in $K3\#\overline{\mathbb{C}P^2}$) with $D \cdot D = 0$ and $[D] \neq 0$ (see proof in [MMP20]). Corollary 2.2 then implies that the right hand trefoil is not H-slice in $K3\#\overline{\mathbb{C}P^2}$.

It is also well known that the right hand trefoil is H-slice in $\mathbb{C}P^2$ (thus in $\#_3\mathbb{C}P^2\#_{20}\overline{\mathbb{C}P^2}$). Further, the intersection forms of $K3\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ and $\#_3\mathbb{C}P^2\#_{20}\overline{\mathbb{C}P^2}$ are isomorphic, thus the manifolds are homeomorphic by work of Freedman. Since the right hand trefoil is H-slice in one manifold and not the other, the manifolds are not diffeomorphic. □

[1] for precise condition, see [MMP20]

[2] The reason we work with Bauer-Furuta invariants is precisely because they do not necessarily vanish under connected sum. This observation has subsequently been used to greater advantage, see [IMT21]

We remark that this proof relies on the fact that $K3\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ has nice, non-vanishing Bauer-Furuta invariants, and it is also the case that $\#_3\mathbb{C}P^2\#_{20}\overline{\mathbb{C}P^2}$ does not. Thus there is a more direct proof, without reference to H-sliceness, that the manifolds are non-diffeomorphic. It is of considerable interest to produce exotic 4-manifolds distinguished by H-sliceness in the absence of another proof.

3 Systematically producing knots which are H-slice in a homotopy ball

We now turn our attention to the problem of systematically producing knots K with are H-slice in some 4-manifold Y which is homeomorphic to B^4 but which may not be slice in B^4. We will be aided by the following folklore lemma.

Lemma 3.1 *If knots K and J have $\partial(X(K)) \cong \partial(X(J))$ and K slice then J is H-slice in some Y homeomorphic to B^4.*

Remark 3.2 For proof of the lemma, we refer the reader to [MP21], but we note here that for explicit knots K and J as in the lemma, the proof of the lemma constructs an explicit Y homeomorphic to B^4.

3.1 Starting with a slice knot

In the most direct attempt to apply Lemma 3.1, one would like to take some slice knot K and construct a J with $\partial(X(K)) \cong \partial(X(J))$. We remind the reader that $\partial(X(K))$ is the familiar 3-manifold obtained by 0-framed Dehn surgery along K, denoted $S^3_0(K)$. We develop previous work of the author [Pic19] to give a fully general construction of pairs of knots which share a 0-surgery. Our construction is called an *RBG link*; for details of the construction, see [MP21]. For this exposition it suffices to know the statement:

Theorem 3.3 *Any RBG link has a pair of associated knots K_B and K_G with $S^3_0(K_B) \cong S^3_0(K_G)$. Conversely, for any knots K and J with homeomorphism $\phi : S^3_0(K) \to S^3_0(J)$ there exists and RBG link with associated knots $K_B \cong K$ and $K_G \cong J$.*

Theorem 3.3 gives a complete method for understanding 0-surgery homeomorphisms when they exist, but it does not help the user necessarily find a J for their favorite (in our setting, slice) knot K. In fact, it is known that there are knots K for with it is not possible to find a distinct J with $S^3_0(K) \cong S^3_0(J)$, for example:

Theorem 3.4 ([Gab83]) *The unknot, both trefoils and the figure eight knot are characterized by their 0-surgeries.*

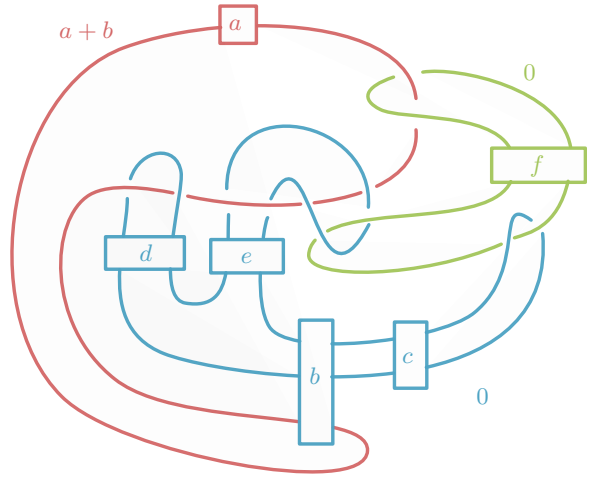


Figure 1: A many parameter family of RBG links

At present, it is technically out of reach to systematically produce a distinct knot J with $S^3_0(K) \cong S^3_0(J)$ for any given slice knot K. However, there are some situations for which such a J can be readily produced, for example:

Proposition 3.5 *[Pic20] If the unknotting number if K is one, there exists an BRG link with $K_B = K$.*

A part of the work in [MP21] consists of, for a handful of slice knots K, the production of infinite families of knots J_i each with $S^3_0(K) \cong S^3_0(J_i)$. Of course, the goal of producing such J_i (which are H-slice in a homotopy B^4 by Lemma 3.1) is to find that $s(J_i) \neq 0$. Unfortunately, for all the J_i we build, either $s(J_i) = 0$ or the knot J_i was too large and s could not be computed.

While these computations overall result in a failed attempt, we point out that these examples do contribute a new source of simple 4-manifolds Y_i homeomorphic to B^4, see Remark 3.2. We fail to show these Y_i are not diffeomorphic to B^4, but we also cannot systematically standardize them[3]; we hope the study of these new simple potential counterexamples will motivate the development of new techniques.

3.2 Starting with a pair

Our attempts at systematizing approach in Subsection 3.1 are hobbled by the technical difficulties inherent in producing a knot J with $S^3_0(J) \cong S^3_0(K)$ for a given slice knot K.

[3]Since our preprint appeared, a graduate student Kai Nakamura has already developed new arguments which standardize some of our examples. His work is in progress.

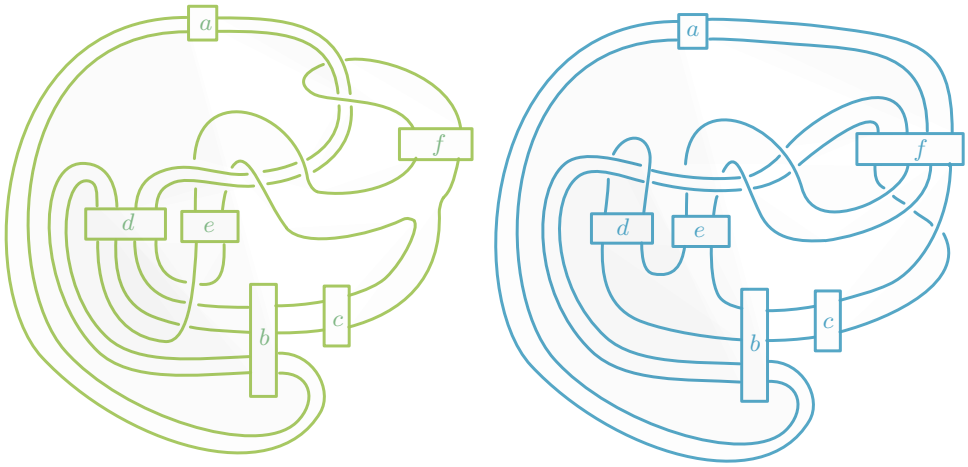


Figure 2: A many parameter family pairs of knots K_B and K_G with the same 0-surgery. We only consider elements with small parameters, for details see [MP21]

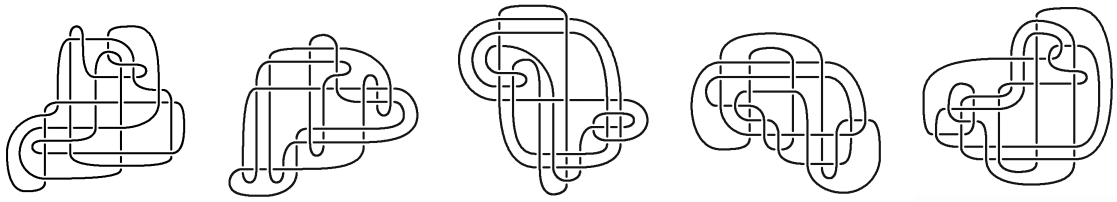
Even when it is possible to produce such a J, at present time that J is built by hand, thus it is impractical to build and compute J and $s(J)$ for large families of slice knots K.

The second part of the work in [MP21] attempts to wield Lemma 3.1 from a different, more systematic, perspective. We begin with a many parameter family of RBG links, see Figure 1. From this family of links, we get a large (3375 element) family of pairs of knots with $S^3_0(K_B) \cong S^3_0(K_G)$, see Figure 2. We are interested in whether this family contains a pair such that one knot is slice and the other has $s \neq 0$. For ease of exposition, I will refer to a search for a pair with K_B slice and $s(K_G) \neq 0$; of course the search with the roles of B and G reversed must be performed also.

With help of a computer, we searched the family for pairs that may have this property. To begin, we searched for pairs with $s(K_B) = 0$ and $s(K_G) \neq 0$. Finding many such pairs, we are interested in whether any of those K_B are actually slice. We computed all readily computable[4] sliceness invariants for these potentially slice K_B; these other sliceness invariants showed that many of the remaining K_B are not slice, but surprisingly, not all. Thus

Theorem 3.6 ([MP21]) *If any of the 5 topologically slice knots in Figure 3 are slice then the smooth 4-dimensional Poincare conjecture is false.*

[4]After our preprint appeared, Nathan Dunfield and Sherry Gong introduced a new computer program for computing twisted Alexander polynomials. Computations of the twisted Alexander polynomials ruled out 16 of our candidates, our Theorem has been updated to include their calculations.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Figure 3: Candidates for slice knots.

Recently, in forthcoming work, Kai Nakamura developed a new argument which shows that the 5 knots from Theorem 3.6 are not slice. However, Kai's arguments do not show that any such examples coming from any such search on any family of RBG links are not slice. So while the particular examples of our paper our now known not to provide counterexamples to the Poincare conjecture, the process may still provide interesting examples. There is ongoing work in the community to continue to wield and systematize our work, as well as the work of Dunfield, Gong, and Nakamura, towards better understanding the examples generated by the techniques in Subsections 3.1 and 3.2.

References

[AP10] Anar Akhmedov and B. Doug Park. Exotic smooth structures on small 4-manifolds with odd signatures. *Invent. Math.*, 181(3):577–603, 2010.

[AR16] Selman Akbulut and Daniel Ruberman. Absolutely exotic compact 4-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 91(1):1–19, 2016.

[Don83] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, 18(2):279–315, 1983.

[FGMW10] Michael Freedman, Robert Gompf, Scott Morrison, and Kevin Walker. Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincaré conjecture. *Quantum Topol.*, 1(2):171–208, 2010.

[FM66] Ralph H. Fox and John W. Milnor. Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots. *Osaka Math. J.*, 3:257–267, 1966.

[Fre82] Michael H. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(3):357–453, 1982.

[Gab83] David Gabai. Foliations and the topology of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 8(1):77–80, 1983.

[HP19] Kyle Hayden and Lisa Piccirillo. The trace embedding lemma and spinelessness. preprint, arXiv:1912.13021, 2019.

[IMT21] Nobuo Iida, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi. An adjunction inequality for Bauer Furuta type invariants, with applications to sliceness and 4-manifold topology. preprint, arXiv:2102.02076, 2021.

[MMP20] Ciprian Manolescu, Marco Marengon, and Lisa Piccirillo. Relative genus bounds in indefinite four-manifolds. preprint, arXiv:2012.12270, 2020.

[MP21] Ciprian Manolescu and Lisa Piccirillo. From zero surgeries to candidates for exotic definite four-manifolds, 2021.

[Pic19] Lisa Piccirillo. Shake genus and slice genus. *Geom. Topol.*, 23(5):2665–2684, 2019.

[Pic20] Lisa Piccirillo. The Conway knot is not slice. *Ann. of Math. (2)*, 191(2):581–591, 2020.

[Ras10] Jacob Rasmussen. Khovanov homology and the slice genus. *Invent. Math.*, 182(2):419–447, 2010.

MIT

piccirli@mit.edu

Extension problem of quasi-morphisms and commuting symlectomorphisms

川﨑 盛通　(青山学院大学理工学部数理サイエンス学科(旧物理・数理学科))*

令和三年八月二十七日

1. シンプレクティック幾何における変換群

まずはシンプレクティック幾何の基本事項と, シンプレクティック多様体の自然な変換群であるハミルトン微分同相群とシンプレクティック微分同相群について説明する. なお, 本章は二年前の筆者のトポロジーシンポジウムの要項と重複する説明も多く, 詳しい方は本章を飛ばして読むと良い(逆に詳しく知りたい方は[Ban97, PR14]など参照). 本稿では多様体は全て連結で境界のない滑らかなものを考えるとする.

定義 1.1. M を $2n$ 次元多様体とする. M 上の二次微分形式 ω がシンプレクティック形式であるとは, ω が閉形式, つまり $d\omega = 0$ であって, 任意の $x \in M$ について $(\omega^n)_x \neq 0$ となることである. 偶数次元多様体 M とその上のシンプレクティック形式 ω の組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**という.

シンプレクティック幾何学の歴史的起源は解析力学にあり, 余接束には自然なシンプレクティック形式が入り, その上のハミルトン力学系(後述)が解析力学におけるハミルトン力学系と対応する.

さて, シンプレクティック多様体の自然な変換群についてであるが, まず定義から思いつくのはシンプレクティック構造を保つような微分同相写像の成す群である. すなわち, 多様体 M の微分同相群を $\mathrm{Diff}(M)$ として, シンプレクティック多様体 (M, ω) の**シンプレクティック微分同相群** $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ を以下のように定義する.

$$\mathrm{Symp}(M, \omega) = \{\psi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \psi^*\omega = \omega\}.$$

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし, その上の C^∞ 級ベクトル場の成す集合を $\mathcal{X}(M)$ とする. M 上の函数 $H\colon M \to \mathbb{R}$ について, その**ハミルトン・ベクトル場** X_H を

$$\text{任意の } V \in \mathcal{X}(M) \text{ について}, \ \omega(X_H, V) = -dH(V)$$

によって定義する (ω は非退化二次形式なので, このような X_H は一意に定まる).

円周 S^1 を $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ によって定める. また, 本稿では時間依存しコンパクト台をもつハミルトン函数を考える. つまり本稿において, **シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のハミルトン函数とは, 滑らかな函数 $H\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ であって, その台が $[0,1] \times M$ 内のコンパクト部分集合となるものを指す**. また, ハミルトン函数 $H\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ について, その時間パラメータ t を固定したものを H_t で定める. つまり $H_t\colon M \to \mathbb{R}$ を $H_t(x) = H(t, x)$ によって定義する.

本稿は木村満晃氏(京都大学), 松下尚弘氏(琉球大学), 丸山修平氏(名古屋大学), 見村万佐人氏(東北大学)との共同研究 [KKMM21, KKM+21] に基づくもので, 科研費 (課題番号:18J00765, 21K13790, 21J11199, 19K14536 と 17H04822) の助成を受けたものである.
キーワード：擬準同型, ハミルトン微分同相群, カラビ擬準同型
* 〒 252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1, 青山学院大学数理サイエンス学科
e-mail: kawasaki@math.aoyama.ac.jp

ハミルトン函数 $H\colon [0,1]\times M \to \mathbb{R}$ について, そのハミルトン・イソトピー $\{\phi_H^t\}_{t\in[0,1]}$ を時間変化するベクトル場 $\{X_{(H_t)}\}_t$ による積分として定義する. つまり, 微分方程式 $\phi_H^0 = \mathrm{id}$, $\frac{d\phi_H^t}{dt} = X_{(H_t)}$ の解として定義する. 更に, ϕ_H^1 を ϕ_H と略記し, これを H **により生成されたハミルトン微分同相写像**と呼び, ハミルトン函数から生成される微分同相写像を**ハミルトン微分同相写像**と呼ぶ.

シンプレクティック多様体 (M,ω) についてハミルトンの成す集合を**ハミルトン微分同相群**と呼び, $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ と表記する. これは名前の通り写像の合成について群を成す. (ただし,「ハミルトン函数で生成される」という形での定義のため, 実際に群を成すことを証明するのは少し非自明である.)

任意のハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保存し, 更にいえばハミルトン微分同相群はシンプレクティック微分同相群の正規部分群である.

ハミルトン微分同相群 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ を「リー群」とみなす場合, その「リー環」である $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}(M,\omega))$ はハミルトン・ベクトル場の成す線形空間となる. ハミルトン・ベクトル場がハミルトン函数の微分のみで決まることを考えると, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}(M,\omega))$ は $C^\infty(M)/\mathbb{R}$ と同一視でき, 特にハミルトン微分同相群は「無限次元リー群」である.

2. 主結果

少し唐突ではあるが,「シンプレクティック微分同相群はどのくらい可換な元の組を持っているか」という問題を考える. 一般には自由群のように可換な元の組のほとんどないような群もあるが, シンプレクティック微分同相群の場合は以下のように多くの可換なシンプレクティック微分同相写像がある.

(i) $2n$ 次元のシンプレクティック・トーリック多様体には自然に n 次元トーラスによるハミルトン作用 : $\mathbb{T}^n \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ がある. もちろんトーラスは可換群であるので, この作用から可換な元の組をとることができる.

(ii) 互いに交わらない開集合 U_1,U_2 をとる. 開集合 U_1, U_2 をそれぞれ台に持つようなシンプレクティック微分同相写像 ϕ_1, ϕ_2 を考えると, これらは可換となる. ここで, 微分同相写像 ϕ の台とは, 集合 $\{x \in M\,;\, \phi(x) \neq x\}$ の閉包として定義される.

(iii) $\mathcal{L}_X\omega = 0$ を満たすようなベクトル場 X により生成されるフロー $\{\phi_X^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を考える. このとき, 各 ϕ_X^t はシンプレクティック微分同相写像で, 任意の $s,t \in \mathbb{R}$ について ϕ_X^s と ϕ_X^t は可換.

さて, このように見ると, 可換なシンプレクティック微分同相写像の組は無数に存在するように思えるが, **可換になるための必要条件**は何か存在するのであろうか. シンプレクティック多様体が曲面の場合のこの問題への一つの答えが本稿の主結果であるが, それを記述するためにフラックス準同型を導入する. シンプレクティック微分同相群の単位元成分を $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ とおく.

定義 2.1 ([Ban78])**.** 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. フラックス準同型 $\mathrm{Flux}_\omega\colon \mathrm{Symp}_0(S,\omega) \to H_c^1(S;\mathbb{R})$ を

$$\mathrm{Flux}_\omega(h) = \int_0^1 [\iota_{X_t}\omega]dt.$$

ここで, $\{\psi^t\}_{t\in[0,1]}$ は $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ の中のイソトピーで, $\psi^0 = 1$, $\phi^1 = h$ を満たすもの. このとき, $\mathrm{Flux}_\omega(h)$ の値は $\{\psi^t\}_{t\in[0,1]}$ の選び方に依存せず, $\mathrm{Flux}_\omega\colon \mathrm{Symp}_0(S,\omega) \to H^1_c(S;\mathbb{R})$ は *well-defined* な準同型となる.

本稿で解説する主定理は以下である.

定理 2.2 ([KKMM21])**.** 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ の元の組 $(h_1,\dots,h_n)$ であって任意の i,j に対して $h_ih_j = h_jh_i$ を満たすものに対して, 以下が成立する.

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1),\dots,\mathrm{Flux}(h_n)\rangle_{\mathbb{R}} \le l.$$

この定理によれば, 可換なシンプレクティック微分同相写像の組があれば, そのフラックス準同型の像には上のような制限が付くことになる. この定理を群作用の言葉で言い換えたのが以下である.

定理 2.3 ([KKMM21])**.** 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, 任意の準同型 $A\colon \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Im}(\mathrm{Flux}_\omega \circ A)\rangle_{\mathbb{R}} \le l.$$

更に二個の可換なシンプレクティック微分同相群について以下の予想を提唱する.

予想 2.4 ([KKMM21])**.** 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, 条件 $h_1h_2 = h_2h_1$ を満たす任意の $h_1,h_2 \in \mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に対して, 以下が成立する.

$$\mathrm{Flux}_\omega(h_1) \smile \mathrm{Flux}_\omega(h_2) = 0.$$

この予想の状況証拠として以下の定理を示した.

定理 2.5 ([KKMM21])**.** 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, 条件 $h_1h_2 = h_2h_1$, $\mathrm{Flux}_\omega(h_1) \in \mathrm{Sp}(2l,\mathbb{Z})\cdot W_\beta$ を満たす任意の $h_1,h_2 \in \mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に対して, 以下が成立する.

$$\mathrm{Flux}_\omega(h_1) \smile \mathrm{Flux}_\omega(h_2) = 0.$$

定理 2.5 は定理 2.2 の「兄弟」ともいえる定理であるが, これより本稿においては定理 2.2 に絞って解説する.

3. カラビ準同型, カラビ擬準同型

定理 2.2, 2.5 を証明する上で眶となる道具が **Py のカラビ擬準同型** [Py06] である. これを説明するために, まずは「擬準同型」とは何であるかを説明する.

定義 3.1. 群 G 上の実数値函数 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ に対して障害 *(detect)* $D(\mu)$ を以下で定義する.

$$D(\mu) = \sup_{x,y\in G} |\mu(x) + \mu(y) - \mu(xy)|.$$

障害 $D(\mu)$ が有限, つまり $D(\mu) < \infty$ となるとき, μ は**擬準同型**であるという. 擬準同型 μ が任意の $x \in G$, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mu(x^n) = n\mu(x)$ を満たすとき, μ は**同次擬準同型**であるという. 群 N に対して G 上の同次擬準同型の成す空間を $\mathrm{Q}(G)$ と書く *(*定義よりこの空間は実線形空間となる*)*.

注意 3.2. $D(\mu) = 0$ のとき, μ は準同型であり, これが「擬準同型」と呼称する由来である.

有界函数は定義より明らかに擬準同型である. また, 群 G について G 上の擬準同型の成す実線形空間を $\overline{\mathrm{Q}}(G)$, G 上の有界函数の成す実線形空間を $B(G)$ とすると,

$$\overline{\mathrm{Q}}(G)/B(G) \cong \mathrm{Q}(G)$$

が成立する. これが同次擬準同型を考える動機の一つである.

例 3.3. 同次擬準同型の最も古典的な例はポアンカレの回転数で, これは円周の向きを保つ同相群 $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}^+(S^1)$ の上で定義される同次擬準同型である.

また, 幾何学的群論で盛んに研究されているグロモフ双曲群も *(*非初等的な場合には*)* 非自明な同次擬準同型を許容する *[EF97]*. 一方で, 次元が *2,4* でない閉多様体の微分同相群が非自明な同次擬準同型を持たないことも *[Tsu12]* によって知られている [1].

「擬準同型」の次は「カラビ擬準同型」なる概念について説明するが, その前に「カラビ準同型」について説明する.

シンプレクティック多様体 (M, ω) が**完全**であるとは, シンプレクティック形式 ω が完全形式であることである. $2n$ 次元の完全シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のカラビ準同型 $\mathrm{Cal}\colon \mathrm{Ham}(M, \omega) \to \mathbb{R}$ を以下の式で定義する.

$$\mathrm{Cal}_M(\phi) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n \, dt.$$

ここで, $F\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ は $\varphi_F = \phi$ となるコンパクト台ハミルトン函数である. 値 $\mathrm{Cal}_M(\phi)$ はハミルトン函数 F の選び方に依存せず, したがってカラビ準同型 $\mathrm{Cal}\colon \mathrm{Ham}(M, \omega) \to \mathbb{R}$ は well-defined な準同型である. (詳しくは [Cal70, Ban97] など参照)

閉シンプレクティック多様体は完全シンプレクティック多様体とはならないことが知られている. そこで自然な問題として「閉シンプレクティック多様体上でカラビ準同型のような概念を考えられるか」という問いが発生する. [2]

しかし, そこで問題になるのはバンヤガの以下の有名な結果 ([Ban78]) である.

定理 3.4 ([Ban78])**.** 閉シンプレクティック多様体 (M, ω) のハミルトン微分同相群 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ は単純群である.

この定理により, 閉シンプレクティック多様体の場合には $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 上にカラビ準同型どころか準同型も存在し得ないことも分かる. そこで,「準同型」の部分を上述の「擬準同型」に緩めてカラビ準同型の類似を考えたのが, Entov と Polterovich [EP03] である. カラビ擬準同型の導入のために以下の概念を導入する.

定義 3.5. 同次擬準同型 $\mu\colon \mathrm{Ham}(M, \omega) \to \mathbb{R}$ を考える. 空でない M の開集合 U が μ **についてカラビ性を満たす**とは, $[0,1] \times U$ にコンパクト台をもつ任意のハミルトン函数

[1] 次元が 2,4 のときに微分同相群が非自明な同次擬準同型を許容するかは長く未解決であったが, 2 次元の場合は [BHW19] が (高種数の場合に) 同次擬準同型を許容することを示した.4 次元の場合は未だに未解決である

[2] カラビ準同型の定義式 $\mathrm{Cal}_M(\phi) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n \, dt$ をそのまま閉シンプレクティック多様体の場合に適用してカラビ準同型を定義しようとすると well-defined 性が破綻する. なぜならば, $\varphi_F = \phi$ となるコンパクト台ハミルトン函数 F をとったとき, それに非零定数 C を加えた $F + C$ も $\varphi_{F+C} = \phi$ を満たしているが, $\int_0^1 \int_M (F_t + C)\omega^n \, dt = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n \, dt + \int_0^1 \int_M C\omega^n \neq \int_0^1 \int_M F_t \omega^n \, dt$ となってしまうからである.

$F\colon [0,1]\times U \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\mu(\varphi_F) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n \, dt.$$

となることである.

定義 3.6. *X, Y をシンプレクティック多様体 (M,ω) の部分集合とする. X が Y* **から** ***displaceable*** *であるとは, ある $f \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ が存在して, $f(X)\cap \bar{Y} = \emptyset$ となることである. ここで, $\bar{Y}$ は Y の閉包である. 単に X が* ***displaceable*** *といった場合には, X が X 自身から displeceable であることを指す.*

定義 3.7. 同次擬準同型 $\mu\colon \mathrm{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ がカラビ擬準同型であるとは, M の任意の *displaceable* な開部分集合が μ についてカラビ性を満たすことである.

注意 3.8. さて, カラビ擬準同型の研究されてきた歴史的背景についてだが, 定義 *3.7* に *displaceability* が出てくるように, *displaceability* の判定問題が背景にある.

例えば, 閉シンプレクティック多様体上の任意の可積分系[3] は *displaceable* でないファイバーを持つことが知られているが, これは *[EP06]* の有名な結果で, 証明にはカラビ擬準同型の一般化であるカラビ部分擬準同型を用いる[4].

この *[EP06]* の結果の特殊な場合として, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内のクリフォード・トーラス

$$\{[z_0;\dots;z_n] \in \mathbb{C}P^n \,;\, |z_0|^2 = |z_1|^2 = \cdots = |z_n|^2\}$$

が *displaceable* でないことも知られている *[BEP04]* [5].

Entov と Polterovich の [EP03] に始まる一連の研究 (サーベイとしては [Ent14, PR14] を薦める) では, ハミルトン・フレアー理論を用いて構成したカラビ擬準同型を用いていた. 一方で, 種数 2 以上の閉リーマン面の場合にフレアー理論を用いないカラビ擬準同型の構成を考えたのが Py[Py06] である. 彼の構成を一言で述べるのはなかなか難しいが, 「種数 2 以上の閉リーマンの普遍被覆はポアンカレ円盤で, その境界は円周なので, その円周を用いて (円周の同相群の普遍被覆の上の擬準同型である) 回転数の構成のアナロジーを行う」というのが大雑把なアイディアである.

種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω に対し, Py の構成したカラビ擬準同型を μ_P とかくものとする. 定理 2.2, 2.5 を証明する上で眶となる定理が以下である.

定理 3.9 (Py のカラビ擬準同型の拡張不能性)**.** *$\hat{\mu}|_{\mathrm{Ham}(S,\omega)} = \mu_P$. 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. 曲面 S のコホモロジー群 $H^1(S;\mathbb{R})$ の部分線形空間 V の次元が l より大きいとすると, $\mathrm{Flux}_\omega^{-1}(V)$ 上の同次擬準同型 $\hat{\mu}$ であって, $\hat{\mu}|_{\mathrm{Ham}(S,\omega)} = \mu_P$ となるものは存在***しない***.*

4. 擬準同型の拡張定理

定理 2.2, 2.5 の証明には擬準同型のある種の拡張定理を用いるが,

[3] 可積分系ということで思い出したが, 可積分系研究者の Anna Kiesenhofer さんが東京五輪自転車競技女子ロードレースで金メダルを受賞されたことをお祝い申し上げる.

[4] この結果の一般化としては筆者らの論文 [KR19] も参照 (我田引水)

[5] $\mathbb{C}P^n$ のシンプレクティック形式としてはフビニ・スタディ形式を考えている.

命題 4.1 (Proposition 6.4 of [KKMM20])**.** 群の完全列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{q} Q \to 1$$

を考える. 準同型 $q\colon G \to G/N$ が実質的切断 *(virtual section)* を持つ, つまり群 Q の有限位数部分群 Λ であって群準同型 $s_1\colon \Lambda \to G$ で任意の $x \in \Lambda$ に対して $Q \circ s_1(x) = x$ となるものがあると仮定する. このとき, 写像 $i^*\colon \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)^G$ は全射.

注意 4.2. 命題 *4.1* の Λ が自明群, つまり Q が有限群の場合は石田智彦氏の結果である *([Ish14])*. 命題 *4.1* の証明自体も石田氏の手法の一般化であり, 今回の主定理の証明で重要な定理 *4.3* の証明も同様に石田氏のアイディアが鍵となる.

この定理の「一様格子版」が以下の定理であり, これが定理 2.2, 2.5 の証明のもう一つの眶となる.

定理 4.3 (一様格子に対する拡張定理)**.** G を位相群, N を G の部分位相群, そして Q を局所コンパクトな位相群とする. 群の完全列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{q} Q \to 1$$

を考える. 群 Q の離散部分群 Λ であって群準同型 $s_1\colon \Lambda \to G$ で任意の $x \in \Lambda$ に対して $q \circ s_1(x) = x$ となるものを考える. 更に, 作用 $\Lambda \curvearrowright Q$ の相対コンパクトな狭義基本領域 B で以下を満たすものが存在すると仮定する.

(∗) 写像 $q|_{q^{-1}(\overline{B})}\colon q^{-1}(\overline{B}) \to \overline{B}$ の連続な切断 *(*準同型であることは仮定しない*)* $\bar{s}_2\colon \overline{B} \to G$ が存在する.

このとき, 任意の G 不変な連続擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ に対して, G 上の同次擬準同型 $\hat{\mu}\colon G \to \mathbb{R}$ であって, $\hat{\mu}|_N = \mu$ となるものが存在する.

5. 定理 2.2 の証明

本章では, 定理 3.9, 4.3 を用いて定理 2.2 を証明する.

ここで注意すべきは, 定理 4.3 において, 拡張される擬準同型の連続性を仮定していたことである. したがって, Py のカラビ擬準同型 μ_P が連続となるように $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ の位相を選ぶ必要があるが, 筆者らにはどのような位相を選べば良いのか分からなかった. そこで, Py のカラビ擬準同型 μ_P を連続にするように「改造」する. このための用いるのが Brandenbursky の構成したカラビ擬準同型である.

Brandenbursky [Bra15] は曲面組紐群上の擬準同型を用いることで, $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ 上にカラビ擬準同型 $\mu_B\colon \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$ を構成した. これは元々石田 [Ish14] が S が円盤の場合に行った議論を種数 2 以上の有向閉曲面の場合に一般化したものである.

定理 5.1 ([EPP12])**.** 組 (S,ω) を閉曲面 S にシンプレクティック形式 *(*面積形式*)* ω の付随したものとする. 函数 $\mu_1, \mu_2\colon \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ 上のカラビ擬準同型であるとする. このとき, μ_1 と μ_2 の差 $\mu_1 - \mu_2\colon \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$ は C^0 位相について連続な函数となる.

練習問題 5.2. 任意のシンプレクティック多様体 (M,ω) とその上のカラビ擬準同型 $\mu\colon \mathrm{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ について, μ は C^0 位相について連続とはなりえないことを示せ.

この定理を用いて μ_P を連続な擬準同型 $\mu_P - \mu_B$ に置き換えて定理 4.3 を適用するわけであるが, 定理 2.2 を用いたい都合上, $\mu_P - \mu_B$ の拡張可能性が改めて問題になる. ところがなんと, Brandenbursky のカラビ擬準同型 μ_B は $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ 上の同次擬準同型の $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ への制限として構成されており, μ_B は自明に $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に拡張可能である. したがって, $\mu_P - \mu_B$ の拡張可能性の問題は μ_P のそれと全く等価なのである.

定理 *2.2* の証明. 背理法で証明するので, $\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_n) \rangle_{\mathbb{R}} > l$ と仮定する. ここで, $h_1, \ldots, h_n$ を適当に並び替えることにより, $\mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1})$ が一次独立であると仮定する. ここで,

$$V = \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}},$$
$$\Lambda = \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

とおくと, Λ は V の一様格子である.

更に, 完全列

$$1 \to \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathrm{Flux}^{-1}(V) \xrightarrow{q} V \to 1$$

一様格子 Λ から $\mathrm{Flux}^{-1}(V)$ への写像 $s_1 \colon \Lambda \to \mathrm{Flux}^{-1}(V)$ を

$$s_1\left(a_1 \mathrm{Flux}(h_1) + \cdots + a_{l+1} \mathrm{Flux}(h_{l+1})\right) = h_1^{a_1} \circ \cdots \circ h_{l+1}^{a_{l+1}}$$

とおくと, $h_i h_j = h_j h_i$ より s_1 は準同型である.

よって, 定理 4.3 より, $\mu_P - \mu_B$ は $\mathrm{Flux}^{-1}(V)$ へ拡張可能である.

ここで, $\mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1})$ は一次独立なので,

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}} > l$$

となり, この拡張可能性は定理 3.9 と矛盾する. したがって,

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}} \leq l.$$

□

6. 定理 3.9 の証明

定理 3.9 を証明する上で眶となるのは次の補題である.

補題 6.1 ([KK19, Lemma 4.8])**.** 群 G と, その正規部分群 N の上の同次擬準同型 $\mu \colon N \to \mathbb{R}$ を考える. 以下の条件を満たす $f, g \in G$ の存在を仮定する.

- $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$,
- $[f,g] \in N$,
- $\mu([f,g]) \neq 0$.

このとき, G 上の同次擬準同型 $\hat{\mu}$ であって $\hat{\mu}|_G = \mu$ となるものは存在**しない**.

これは以下の補題からただちに従う.

補題 6.2. 同次擬準同型 $\hat{\mu}\colon G \to \mathbb{R}$ を考える. さらに, $f, g \in G$ で $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$ を満たすものを考える. このとき,

$$\hat{\mu}([f, g]) = 0.$$

練習問題 6.3. 補題 *6.2* を示せ.

補題 6.1 の条件を満たす $f, g \in \mathrm{Flux}^{-1}(V)$ を実際に構成して μ_P が $\mathrm{Flux}^{-1}(V)$ へ拡張不能なのを示すのが, 定理 3.9 の証明である. ただし, その構成は図を大量に用いるので, 紙面に限りのある本稿で解説するのは適当でないと思われる. 実際のトポロジーシンポジウムでの講演を聞いていただくか, もしくは原論文を実際に読まれることを薦める. 原論文の第 3 章の図だけを眺めるだけでも構成の雰囲気は伝わるものかと思う.

7. 拡張不能擬準同型の成す空間について

本章では [KKM+21] の研究について解説するが, 簡単のために非常に限定的な場合に絞って紹介する.

Py のカラビ擬準同型の拡張不能性が問題になったわけだが, より一般の問題として, 群とその正規部分群の組 (G, N) に対して,

- N 上の同次擬準同型で G へ (同次擬準同型として) 拡張不能なものが存在するか.
- 拡張不能なものが存在するとしたらどのくらい存在するか.

という問題が考えられるであろう. この問題にアプローチしたのが [KKM+21] である.

正規部分群 N から G への包含写像を $i\colon N \to G$ とした場合に, これは線形空間の間の準同型 $i^*\colon \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)$ を誘導する. そこで, 「拡張不能な擬準同型がどのくらい存在するか」を測る量として線形空間 $\mathrm{Q}(N)/i^*\mathrm{Q}(G)$ の次元が一つ適当であろう. しかしながら, 拡張不能性には以下のような自明な障害が存在する. 群 G の正規部分群 N 上の同次擬準同型 μ が G**–不変**であるとは, 任意の $x \in N$, $g \in G$ について $\mu(g^{-1}xg) = \mu(x)$ となることである.

命題 7.1. 群 G 上の任意の同次擬準同型は G–不変である.

練習問題 7.2. 命題 *7.1* を示せ.

この命題 7.1 より明らかに $i^*\mathrm{Q}(G) \subset \mathrm{Q}(N)^G$ であるので, $\mathrm{Q}(N)^G/i^*\mathrm{Q}(G)$ を「拡張不能な擬準同型の成す空間」として考えることとしよう.

以下, 群 G に対して, その交換子群 $[G, G]$ を G', そのアーベル化 $G/[G, G]$ を G^{ab} とかく. 交換子群 G' から G への包含写像を $i\colon G' \to G$, G から G^{ab} への商写像を $q\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ とかく. また, 本章では**コホモロジー群は全て実係数とする**.

定理 7.3.

$$\dim \mathrm{Q}(G')^G/i^*\mathrm{Q}(G) \leq \dim \mathrm{H}^2(G^{\mathrm{ab}})$$

更に, もしも G がグロモフ双曲的であれば, このとき,

$$\dim \mathrm{Q}(G')^G/i^*\mathrm{Q}(G) = \dim \mathrm{H}^2(G^{\mathrm{ab}}).$$

例 7.4. 種数lが2以上の連結有向閉曲面Sを考える. 群GをSの基本群$\pi_1(S)$とする.
このとき, Gは双曲群となるのが知られており, 定理 *7.3* より

$$\dim \mathrm{Q}(G')^G / i^*\mathrm{Q}(G) = \dim \mathrm{H}^2(G^{\mathrm{ab}}) = l(2l-1).$$

となることが分かる. これまで説明してきた事項からただちに分かる結果ではないが, *[KKM+21]* では更に

$$\dim \left(\mathrm{Q}(G')^G \Big/ (\mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G)) \right) = 1$$

も証明している.

定理 7.5. 以下の同型

$$\mathrm{Q}(G')^G / \left(\mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G) \right) \cong \mathrm{Im}(q^*) \cap \mathrm{Im}(c_G),$$

が存在する. ここで, $c_G \colon \mathrm{H}^2_b(G)^6 \to \mathrm{H}^2(G)$は比較写像である. 特に,

$$\dim \left(\mathrm{Q}(G')^G \Big/ (\mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G)) \right) \leq \dim \mathrm{H}^2(G).$$

例 7.6. 群Gが自由群や組紐群の場合, $\mathrm{H}^2(G) = 0$が知られており, 定理 *7.5* から

$$\mathrm{Q}(G')^G = \mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G)$$

となることが分かる.

注意 7.7. 定理 *7.3, 7.5* は原論文 *[KKM+21]* においてはより一般的な形で書かれている. 具体的には, 商G/Nが従順*(amenable)*であるような群Gとその正規部分群Nに対して, 定理 *7.3, 7.5* のG'をN, G^{ab}をG/Nに置き換えた主張が成立する.

8. 混合交換子長との比較問題

群G上の2つの非負値函数$\mu_1, \mu_2 \colon G \to \mathbb{R}_{>0}$が**(双リプシッツ)同値**であるとは, ある定数$c > 0$が存在して任意の$g \in G$に対して$c^{-1} \cdot \mu_2(g) < \mu_1(g) < c \cdot \mu_2(g)$となることである.

群Gとその正規部分群Nを考える. 群Gの元xが(G, N)**-交換子**であるとは, ある$g \in G$と$a \in N$が存在して$x = [g, a] = gag^{-1}a^{-1}$とかけることである. 群$G$の部分群$[G, N]$を$(G, G)$-交換子によって生成された部分群として定義する. NはGの正規部分群だったので, $[G, N]$はNの正規部分群となる. $[G, N]$の元xに対して, (G, N)**-交換子長** $\mathrm{cl}_{G,N}(x)$を

$$\mathrm{cl}_{G,N}(y) := \min\{k \mid \exists x_1, \ldots, x_k \in N, \exists g_1, \ldots, g_k \in G \text{ such that } y = [g_1, x_1] \cdots [g_k, x_k]\}$$

によって定義する. また, Feketeの補題により, 以下の極限

$$\mathrm{scl}_{G,N}(x) := \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{cl}_{G,N}(x^n)}{n}$$

が存在して, この$\mathrm{scl}_{G,N}(x)$をxの**安定** (G, N)**-交換子長**と呼称する.

$N = G$となるとき, $\mathrm{scl}_{G,G} = \mathrm{scl}_{N,N}$のことを単に**安定交換子長**といい, これは古典的によく研究された概念である. 安定交換子長scl についての基本文献としては[Cal09][7]

[6] これは有界コホモロジーと呼ばれるもので, [KKM+21] において極めて重要な役割を果たすものであるが, 紙面の関係で説明を省略する. 詳しく知りたい方は例えば, [Fri17], [Cal09] など参照

[7] なんと『scl』が正式な書名である!

がある．安定交換子長の他の有名な研究としては [EK01], [BIP08], [Mim10], [Tsu12], [CMS14], [BBF16], [BHW19] など参照.

安定交換子長の一般化である安定 (G, N)-交換子長を提唱したのは筆者らの仕事([KK19])で, その後も [KKMM20], [Kar21a],[Kar21b] による仕事もあるが, 本稿で紹介する [KKM+21] で示したのは以下である.

定理 8.1 ([KKM+21])**.** 群 G とその正規部分群 N が $\mathrm{Q}(N)^G = i^*\mathrm{Q}(G) + \mathrm{H}^1(N)^G$ を満たすとする. このとき,

(1) scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は $[G, N]$ 上で同値である.

(2) さらに, もし $N = [G, G]$ ならば, 任意の $x \in [G, N]$ に対して $\mathrm{scl}_G(x) = \mathrm{scl}_{G,N}(x)$ となる.

定理 8.1 と例 7.6 により, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値である例が構成できる. 更に [KKM+21] では G が自由群 F_n の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ で N が IA 自己同型群 IA_n の場合にも scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値なのを示している.

そこで興味深い問題として, scl_G **と** $\mathrm{scl}_{G,N}$ **が同値でない例として何があるか**がある. まず定理 8.1 より $\mathrm{Q}(N)^G \neq i^*\mathrm{Q}(G) + \mathrm{H}^1(N)^G$ が必要条件であり, 既述のように我々はその例をいくつか得た. そのうちで scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値でないことを実際に示せるものはあるのだろうか. 実は, 現地点で知られている例は本質的には以下のみである.

例 8.2. 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S, その上の面積形式 ω と S のコホモロジー群 $H^1(S;\mathbb{R})$ の部分線形空間 V を考え, $G = \mathrm{Symp}_0(S, \omega)$, $N = \mathrm{Flux}_\omega^{-1}(V)$ とおく. もし V の次元が l より大きいとすると, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は同値ではない.

上の主張は定理 3.9 の Py のカラビ擬準同型の拡張不能性の証明を議論を用いて証明できるが, その際に重要なのは拡張不能擬準同型の具体的な形が分かっていることである.

[KKMM21] では条件 $\mathrm{Q}(N)^G \neq i^*\mathrm{Q}(G) + \mathrm{H}^1(N)^G$ を満たす (G, N) の例が例 7.4 など多数挙げられているが, **これらの群で** scl_G **と** $\mathrm{scl}_{G,N}$ **が同値かどうかは一切分かっていない**. これらの群においては拡張不能擬準同型の具体的な形が分からないのが一つの大きな障害である.

練習問題解答

練習問題 *5.2* の解答. シンプレクティック多様体 M 上の一点 x とリーマン計量を固定する. 函数列 $\{F_n\colon M \to \mathbb{R}\}_{n=1,2,\dots}$ を, 各 n に対して台が x を中心とする半径 $1/n$ の球体に含まれていて, かつ $\int_M F_n\omega^m = n$ (M の次元を $2m$ とする) となるものとする.

このとき, ϕ_{F_n} はハミルトン微分同相写像の列は C^0 位相で恒等写像に収束する. 一方, μ はカラビ擬準同型なので十分大きい n に対して $\mu(\phi_{F_n}) = n$ となって, $\mu(\phi_{F_n}) = n$ は $n \to \infty$ で発散する. よって μ は C^0 位相について連続ではない. □

練習問題 *7.2* の解答. 任意の同次擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$, 任意の $f, g \in G$ について $\mu(gfg^{-1}) = \mu(f)$ を示す. こ

のとき, 任意の n について,

$$\begin{aligned}|\mu(g^{-1}fg)-\mu(f)| &= \frac{1}{n}\cdot|\mu(g^{-1}f^ng)-\mu(f^n)| \\ &\le \frac{1}{n}\cdot\Big(|\mu(g)+\mu(f^n)+\mu(g^{-1})-\mu(f^n)|+2D(\mu)\Big) \\ &\le \frac{1}{n}\cdot(|\mu(g)+n\mu(f)-\mu(g)-n\mu(f)|+2D(\mu)) \\ &= \frac{2}{n}D(\mu).\end{aligned}$$

上の n は任意だったので, $\mu(g^{-1}fg)=\mu(f)$ を得る. □

練習問題 *6.3* の解答. 条件 $f,g\in G$ で $f(gf^{-1}g^{-1})=(gf^{-1}g^{-1})f$ より, 任意の n について

$$[f,g]^n=\Big(f(gf^{-1}g^{-1})\Big)^n=f^n(gf^{-1}g^{-1})^n=f^ngf^{-n}g^{-1}=[f^n,g].$$

$\mu\colon G\to\mathbb{R}$ は同次擬準同型なので,

$$\begin{aligned}|\mu([f,g])| &= \frac{1}{n}\cdot|\mu([f^n,g])| \\ &\le \frac{1}{n}\cdot\Big(|\mu(g)+\mu(f^n)+\mu(g^{-1})+\mu(f^{-n})|+3D(\mu)\Big) \\ &\le \frac{1}{n}\cdot(|\mu(g)+n\mu(f)-\mu(g)-n\mu(f)|+3D(\mu)) \\ &= \frac{3}{n}D(\mu).\end{aligned}$$

上の n は任意だったので, $\mu([f,g])=0$ を得る. □

謝辞

まずは本稿執筆の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝いたします. この機会に共同研究者の皆様にも改めて感謝したく思います. 他にも本研究を支えてくださった数多くの方々に感謝いたします.

参考文献

[Ban78] Augustin Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), no. 2, 174–227.

[Ban97] ———, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, vol. 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[BBF16] Mladen Bestvina, Ken Bromberg, and Koji Fujiwara, *Stable commutator length on mapping class groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **66** (2016), no. 3, 871–898. MR 3494163

[BEP04] Paul Biran, Michael Entov, and Leonid Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 5, 793–802.

[BHW19] Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, and Richard Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, preprint, arXiv:1909.07164 (2019).

[BIP08] Dmitri Burago, Sergei Ivanov, and Leonid Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Groups of diffeomorphisms, Adv. Stud. Pure Math., vol. 52, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, pp. 221–250.

[Bra15] Michael Brandenbursky, *Bi-invariant metrics and quasi-morphisms on groups of Hamiltonian diffeomorphisms of surfaces*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 9, 1550066, 29.

[Cal70] Eugenio Calabi, *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, Problems in analysis (Lectures at the Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), 1970, pp. 1–26.

[Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[CMS14] Danny Calegari, Naoyuki Monden, and Masatoshi Sato, *On stable commutator length in hyperelliptic mapping class groups*, Pacific J. Math. **272** (2014), no. 2, 323–351.

[EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289. MR 1452851

[EK01] H. Endo and D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 169–175.

[Ent14] Michael Entov, *Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 1147–1171.

[EP03] Michael Entov and Leonid Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 30, 1635–1676.

[EP06] _____, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 1, 75–99.

[EPP12] Michael Entov, Leonid Polterovich, and Pierre Py, *On continuity of quasimorphisms for symplectic maps*, Perspectives in analysis, geometry, and topology, Progr. Math., vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, With an appendix by Michael Khanevsky, pp. 169–197.

[Fri17] Roberto Frigerio, *Bounded cohomology of discrete groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 227, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[Ish14] Tomohiko Ishida, *Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk via braid groups*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **1** (2014), 43–51.

[Kar21a] Bastien Karlhofer, *Aut-invariant quasimorphisms on free products*, preprint, arXiv:2103.01354 (2021).

[Kar21b] _____, *Aut-invariant quasimorphisms on graph products of abelian groups*, preprint, arXiv:2107.12171 (2021).

[KK19] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura, *$\hat{G}$-invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, to appear in *Israel J. Math*, arXiv:1911.10855v2 (2019).

[KKM+21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, preprint, arXiv:2107.08571 (2021).

[KKMM20] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, preprint, arXiv:2007.02257 (2020).

[KKMM21] _____, *Commuting symplectomorphisms on a surface and the flux homomorphism*, preprint, arXiv:2102.12161 (2021).

[KR19] Morimichi Kawasaki and Orita Ryuma, *Existence of pseudo-heavy fibers of moment maps*, to appear in *Communications in Contemporary Mathematics*, arXiv:1901.09395 (2019).

[Mim10] Masato Mimura, *On quasi-homomorphisms and commutators in the special linear group over a Euclidean ring*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 18, 3519–3529.

[PR14] Leonid Polterovich and Daniel Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, CRM Monograph Series, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. MR 3241729

[Py06] Pierre Py, *Quasi-morphismes et invariant de Calabi*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 1, 177–195.

[Tsu12] Takashi Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 141–185.