COHOMOLOGY OF THE SPACES OF COMMUTING ELEMENTS IN A LIE GROUP

武田　雅広　(京都大学)

1. はじめに

Lie 群 G に対して, 離散群 π から G への準同型写像全体のなす空間を $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ と書く． この空間には G の随伴作用が入り, その作用による商空間 $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ は character variety と呼ばれている．さらにこの空間は基本群が π である空間上の平坦 G 束のモジュライ空間に一致する．$\mathrm{Hom}(\pi, G)$ 自身も平坦 G 束の基点付きの場合のモジュライ空間となっている．そのため, 幾何学や物理学での先行研究があり, 例えば Kac と Smilga[8] や Witten[13],[14] らによるものが挙げられる．

今回は π が n 階自由アーベル群 $\mathbb{Z}^m$ の場合を取り扱う．この時次の自然な同相写像がある．

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G) \cong \{(g_1, g_2, \ldots, g_m) \in G^m \mid g_i g_j = g_j g_i \text{ for all } i, j\}$$

そのためこの空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ を commuting elements と呼ぶ．この空間のトポロジーに関する先行研究を紹介する．この空間へのアプローチのうち主なものは次の 2 つである．1 つ目は Adem, Bahri, Bendersky, Cohen Gitler らによって導入されたサスペンション分解 [1] で, 一般の $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ に対して, サスペンションをとることでいくつかのパーツに分解できることが示された．そしてこの方法を用いることで, Crabb や Baird, Jeffrey, Selick らによって $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{SU}(2))$ の場合に具体的に分解が与えられ, 整係数ホモロジーが計算された [5, 4]．しかしこの方法は分解されたパーツが複雑であるため, それ以上の結果は今のところ得られていない．2 つ目の方法は Baird によって与えられた $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理コホモロジーとある不変式環の同型 [3] である．この手法を用いることで様々な研究がなされた．例えば Poincaré 多項式の公式を導いた Ramras と Stafa の結果 [11], 有理コホモロジーの安定性を計算した同じく Ramras と Stafa の結果 [12], $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の基本群を計算した低次のホモトピー群を計算した Gómez, Pettet, Souto の結果 [7] などがある．その他のアプローチとしては, 例えば [2] では $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の 2 次のホモトピー群の計算を G の随伴作用を用いておこなって

いる．また私たちは $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモトピー余極限としての分解を与えることで，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモロジーにどのような p-torsion が存在するかを調べた．この結果に関しては本講義録では詳しく述べないため，[10] を参照していただきたい．

本講義録では，上記の二つ目の手法である Baird による有理係数コホモロジーの計算と Ramras と Stafa による Poincaré 多項式の公式をより深く解析することで得られた，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の性質について述べる．2 章ではそれらの先行研究を紹介する．3 章では Ramras と Stafa による Poincaré 多項式の公式を組み合わせ論的に整理する方法とその応用として $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理双曲性について述べる．4 章では Baird による有理係数コホモロジーの結果を用いて $\mathrm{SO}(2n)$ を除く古典群 G に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーの生成系を与え，その応用としてホモロジー安定性の最大範囲を与える．5 章では G がランク 2 の Lie 群の場合における $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーの環構造に関して結果を述べる．6 章ではまとめとして今後の課題を述べる．本講義録の内容は岸本大祐氏との共同研究 [9] にもとづいている．

2. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理係数コホモロジーと Poincaré 多項式

この章では，本研究で用いた先行研究を紹介する．以降，Lie 群 G はコンパクトかつ連結であると仮定する．ここでいくつか記号を定義する．T を G の極大トーラス，W を G の Weyl 群とする．また $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ を $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の $(1, 1, \ldots, 1)$ を含む連結成分とする．さらに $\mathbb{F}$ を体で標数が W の位数と互いに素なものする．

まず，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーに関する Baird の結果を紹介する．W の $G/T \times T^m$ への作用を，$g \in G, t_i \in T, w \in W$ として，

$$(gT, t_1, \ldots t_m) \cdot w = (gwT, w^{-1}t_1w, \ldots w^{-1}t_mw)$$

と定義する．$g \in G$, $t_i \in T$ として，次の写像を考える，

$$\phi\colon G \times T^m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1 \quad (g, t_1, \ldots, t_m) \mapsto (gt_1g^{-1}, \ldots, gt_mg^{-1})$$

この写像は次の写像 $\bar{\phi}$ を誘導する．

$$\bar{\phi}\colon G/T \times_W T^m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$$

この写像 $\bar{\phi}$ が $\mathbb{F}$ 係数コホモロジーで同型であることが Baird によって示された．さらに，$G/T \times T^m$ への W の作用が自由であることから，$G/T \times_W T^m$ のコホモロジーは

$$H^*(G/T \times_W T^m; \mathbb{F}) \cong \left(H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m}\right)^W$$

となる．以上をまとめると次の定理を得る．

Theorem 2.1 (Baird [3]). *$\mathbb{F}$ を標数が W の位数と互いに素な体とする．このとき, 次の同型を得る．*

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G); \mathbb{F}) \cong \left(H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m}\right)^W$$

この定理は $m = 1$ の場合, 次の同型を与える．

$$H^*(G; \mathbb{F}) \cong (H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F}))^W \tag{2.1}$$

この同型は Shepard-Todd の定理と Solomon の定理という古典的な不変式論の定理を用いた証明も知られている．Baird の定理はこの同型の一般化と見ることができるため, 不変式論や表現論などの分野においても興味深いものである．

では次に, Ramras と Stafa によって得られた, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ の Poincaré 多項式の公式を紹介する．Lie 群 G に対して, T の分類空間のコホモロジーの W-不変環 $H^*(BT)^W$ は多項式環になることが知られている．その多項式の生成元の次数を並べたものを Lie 群 G の特性次元と呼ぶ．

Theorem 2.2 (Ramras, Stafa [11]). *$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の Poincaré 多項式は次で与えられる．*

$$P_t(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)) = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{r} (1 - t^{2d_i}) \sum_{w \in W} \frac{\det(1 + tw^m)}{\det(1 - t^2 w)}$$

ここで, $d_1, \ldots d_r$ は G の特性次元であり, 行列式は Lie 代数への標準的な表現で計算されている．

証明を以下で与える．この証明は Ramras, Stafa のオリジナルのものとは異なる．

Proof. $H^*(G/T)$ が W の余不変式環であることから, Shephard Todd の定理より次の W-加群としての同型がある．

$$H^*(BT) \cong H^*(BT)^W \otimes H^*(G/T)$$

これを用いると次の同型が得られる．

$$(H^*(G/T; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m})^W \cong (H^*(BT; \mathbb{F}) \otimes H^*(T; \mathbb{F})^{\otimes m})^W / (H^*(BT; \mathbb{F})^W_+)$$

$H^*(BT)^W$ は次元が $d_1, \dots, d_r$ の元たちで生成される多項式環である．さらにその生成元たちは $H^*(BT)$ で正則であるので, $(H^*(BT) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W$ でも正則である．そのため, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ の Poincaré 多項式は Baird の定理を用いると,

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1; t) = P(H^*(BT; \mathbb{F}) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W; t) \prod_{i=1}^{n} (1 - t^{2d_i})$$

となる．有限群の表現論の基本的な計算を行うと

$$\begin{aligned} P((H^*(BT; \mathbb{F}) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W; t) &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{(H^*(BT;\mathbb{F}) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^i}) t^i \\ &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^{2i}(BT;\mathbb{F})}) t^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^i(T;\mathbb{F})}) t^i \right)^m \end{aligned}$$

となる．さらに

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^{2i}(BT;\mathbb{F})}) t^{2i} = \frac{1}{\det(1 - t^2 w)} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(w|_{H^i(T;\mathbb{F})}) t^i = \det(1 + tw)$$

であることも標準的な計算で出来る．よってこの定理は示された． □

この定理を用いて具体例をいくつか計算を行うと, 次のようになる．

$$\begin{aligned} P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(2))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 \\ P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(3))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 4t^5 + t^6 + 2t^7 + 3t^8 \\ P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(4))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 4t^5 + 4t^6 + 8t^7 + 6t^8 + 6t^9 + 8t^{10} \\ &\quad + 6t^{11} + 7t^{12} + 2t^{13} + 3t^{14} + 4t^{15} \\ P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{SU}(5))_1; t) &= 1 + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 4x^5 + 4t^6 + 8t^7 + 10t^8 + 14t^9 \\ &\quad + 13t^{10} + 16t^{11} + 22t^{12} + 18t^{13} + 21t^{14} + 20t^{15} + 22t^{16} \\ &\quad + 18t^{17} + 14t^{18} + 14t^{19} + 10t^{20} + 10t^{21} + 3t^{22} + 4t^{23} + 5t^{24} \end{aligned}$$

これらの計算例から次の二つのことを見て取ることが出来る．1つ目は最高次の次元が Lie 群の次元と一致しており, さらにその係数が $\mathrm{rank}\, G + 1$ に一致していることである．この性質が一般に成り立つことを示した．このことに関しては3章で述べる．2つ目は低次の項は $2\,\mathrm{rank}\, G + 1$ 次元まで係数が一致している点である．これは Ramras と Stafa によって与えられた安定性 [12] よりはるかに広い範囲である．実際に私たち

の研究でコホモロジー安定性の最大範囲が計算でき, 上記の計算例での Poincaré 多項式の安定している範囲と一致していることが分かった. このことに関しては 4 章で述べる.

3. Poincaré 多項式の最高次と rational hyperbolicity

この章では, 前章で紹介した Ramras と Stafa による Poincaré 多項式の公式を組み合わせ論を用いて整理し, Poincaré 多項式の最高次の様子やそこから得られる応用を述べる.

まず具体例として $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{U}(3))$ の Poincaré 多項式を計算する. Ramras と Stafa の定理より, 次の式を得る.

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{U}(3))_1; t) = \frac{1}{6}\prod_{i=1}^{3}(1-t^{2i})\sum_{w\in\mathfrak{S}_3}\frac{\det(1+tw)^2}{\det(1-t^2w)}.$$

例えば w が長さ 3 の巡回置換 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ のとき次のように行列式が計算できる.

$$\det(1+tw) = \det\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & t\\ t & 0 & 1\end{pmatrix} = 1+t^3$$

そのほかの行列式も同様に計算でき, 上記の式の右辺の和の部分は次のように展開することができる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{w\in\mathfrak{S}_3}\frac{\det(1+tw)^2}{\det(1-t^2w)}\\
&= \left(\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right)^3 + 3\left(\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right)\left(\frac{(1-t^2)^2}{1-t^4}\right) + 2\left(\frac{(1+t^3)^2}{1-t^6}\right)\\
&= \left(-1+\frac{2}{1-t}\right)^3 + 3\left(-1+\frac{2}{1-t}\right)\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right) + 2\left(-1+\frac{2}{1-t^3}\right)\\
&= (-1+3-2) + 3(1-1)\frac{2}{1-t} - 3\left(\frac{2}{1-t}\right)^2 - 3\frac{2}{1+t^2} + 2\left(\frac{2}{1-t^3}\right)\\
&= -3\left(\frac{2}{1-t}\right)^2 - 3\frac{2}{1+t^2} + 2\left(\frac{2}{1-t^3}\right)
\end{aligned}$$

この計算を見ると, 4 行目で 2 つの項の係数が打消しあっている. このような打消しは第一種 Stirling 数を用いて書き下すことができ, 一般の $\mathrm{U}(n)$ についても同様の打消しが起こる. そのことを用いて $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{U}(n))$ の Poincaré 多項式を整理すると以下の結果を得る.

正の整数 k に対して,

$$q_k(t) = \frac{2}{1+(-1)^k t^k}$$

とし, k の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_l)$ に対して

$$q_\lambda(t) = q_{\lambda_1} \cdots q_{\lambda_l}$$

と定義する. また次の形のような分割 $\lambda = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_l, \ldots, \lambda_l}_{n_l})$ に対して, 整数 $\theta(\lambda)$ を

$$\theta(\lambda) = \lambda_1 \ldots \lambda_l n_1! \ldots n_l!$$

と定義する.

Theorem 3.1. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, U(n))$ の *Poncaré* 多項式は次で与えられる.

$$P_t(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, U(n))) = \prod_i^n (1-t^{2i}) \sum_{n-1}^n \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{n+k}}{\theta(\lambda)} q_\lambda(t)$$

この定理は第一種 Stirling 数を用いた組み合わせ的な計算を行うことで証明できる. この結果は $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n))$ の場合においても同様に成り立ち, 次の定理を得る.

Theorem 3.2. 正の整数 k に対して,

$$q_k^m(t) = (-1)^{m(k-1)} t^{(m-2)k} + \frac{(1+(-1)^{k+1}t^k)^m}{1-t^{2k}}$$

と定義し, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash k \leq n$ に対して,

$$q_\lambda^{m,n}(t) = t^{(m-2)(n-k)} q_{\lambda_1}^m(t) \cdots q_{\lambda_l}^m(t)$$

で, λ が 0 の分割ならば, $q_\lambda^{m,n}(t) = t^{(m-2)n}$ と定義する. このとき, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n))_1$ の *Poncaré* 多項式は次で与えられる.

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, U(n))_1; t) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i}) \sum_{k=n-1}^{n} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{n+k}}{\theta(\lambda)} q_\lambda^{m,n}(t) & (m \ \mathit{even}) \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i}) \sum_{k=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(-1)^{k}}{\theta(\lambda)} q_\lambda^{m,n}(t) & (m \ \mathit{odd}). \end{cases}$$

この式を見ると, 和の添え字を見ることで m が偶数の時には多くの打消しが起こっていることが分かる. このような Poincaré 多項式の公式は他の古典群, つまり $\mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n), \mathrm{Spin}(n)$ でも同様に得ることができる. 結果は [9] にある.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の Poincaré 多項式の最高次の計算を行う. 古典群の場合には上記のような公式が得られるので, それを用いることで計算することができる. 例外群の場合, コンピュータを用いて Ramras, Stafa の公式を計算することで次のような結果を得た.

$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G_2)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 2t^{11} + 2t^{13} + 3t^{14}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, F_4)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 4t^{49} + 4t^{51} + 5t^{52}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, E_6)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 6t^{75} + 6t^{77} + 7t^{78}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, E_7)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 7t^{130} + 7t^{132} + 8t^{133}$$
$$P(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, E_8)_1; t) = 1 + t^2 + 2t^3 + t^4 + \cdots + 8t^{245} + 8t^{247} + 9t^{248}.$$

実際にはすべての項の係数を計算しており, [9] の Appendix に計算結果を載せている. 以上の結果をまとめると次の定理を得る.

Theorem 3.3. *G が単純であるとき, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の Poincaré 多項式の最高次は*

$$(\mathrm{rank}\, G + 1) t^{\dim G}$$

で表される.

任意のコンパクト Lie 群 G に対して, 単純 Lie 群の組 $G_1, \ldots G_k$ と l 次元トーラス T^l が存在して, 有限被覆写像

$$G_1 \times \cdots \times G_k \times T^l \to G$$

があることが知られている．このとき $G_1,\dots G_k$ を G の単純因子と呼ぶ．次の Lemma が Theorem2.1 より容易に証明できる．

Lemma 3.4. *Lie* 群 G が上記のような有限被覆写像を持つとする．このとき次の同型がある．

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m,G)_1;\mathbb{F})\cong\bigotimes_{1\le i\le k}H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m,G_i)_1;\mathbb{F})\otimes H^*(T^{ml};\mathbb{F})$$

Theorem3.3 と Lemma3.4 より, 次の定理を得る．

Theorem 3.5. $G_1,\dots G_k$ を G の単純因子とする．このとき $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2,G)$ の *Poincaré* 多項式の最高次は

$$(\mathrm{rank}\,G_1+1)\dots(\mathrm{rank}\,G_k+1)t^{\dim G+\mathrm{rank}\,\pi_1(G)}$$

で表される．

次に, 得られた Poincaré 多項式の最高次の計算の応用について述べる．以下の有理ホモトピー論に関する内容は Félix, Halperin, Thomas による成書 [6] を参照している。単連結空間 X が有理双曲性をもつとは, $\sum_{i\le n}\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}$ の次元が n に対して指数関数的に増大することである．また単連結空間 X が有理楕円性をもつとは, $\sum_{0\le i}\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}$ の次元が有限であることである．X が単連結有限 CW-複体ならば, 有理双曲性か有理楕円性のどちらか一方の性質をもつことが知られてる．また X が有理楕円性をもつならば, X の Poincaré 多項式は再帰的になることが知られている．そのことから有理楕円性をもつ空間の Poincaré 多項式の最高次の係数は 1 となることが分かる．以上の有理ホモトピー論の結果と Poincaré 多項式の結果を合わせると次の結果を得る．

Theorem 3.6. コンパクト単連結 *Lie* 群 G に対して, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m,G)$ は有理双曲性をもつ．

4. コホモロジーの生成元とコホモロジー安定性

この章では, $\mathrm{SO}(2n)$ を除く古典群の場合に, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m,G)$ の $\mathbb{F}$-係数コホモロジーの生成集合とその結果から得られるコホモロジー安定性の最大範囲について述べる．ここで $G=\mathrm{SO}(2n+1)$ の場合, Theorem2.1 より $\mathbb{F}$-係数コホモロジーは $G=\mathrm{Sp}(n)$ の場合と一致し, $G=\mathrm{SU}(n)$ の場合は Theorem3.4 より $H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m,U(n));\mathbb{F})\cong$

$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, SU(n)); \mathbb{F}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{F})$ となる．よってここでは, $G = \mathrm{U}(n), \mathrm{Sp}(n)$ の場合について述べる．コホモロジー環の生成元たちを

$$H^*(BT; \mathbb{F}) = \mathbb{F}[x_1, \ldots x_n]$$
$$H^*(T; \mathbb{F}) = \bigotimes_{1 \le i \le m} \bigwedge (y_1^i, \ldots, y_n^i)$$

と定め, $H^*(G/T; \mathbb{F})$ の生成元は $H^*(G/T; \mathbb{F}) \cong H^*(BT; \mathbb{F})/H^*(BT; \mathbb{F})^W$ より誘導される $x_1, \ldots x_n$ をとる．

Example 4.1. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{Sp}(1))$ のコホモロジー環の計算を行う． Theorem2.1 より, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathrm{Sp}(1))$ のコホモロジー環は

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, Sp(1)); \mathbb{F}) \cong \left(\mathbb{F}[x_1]_{\mathbb{Z}/2} \otimes \Lambda(y_1^1, y_1^2)\right)^{\mathbb{Z}/2}$$

と表される．Weyl 群 $\mathbb{Z}/2$ の x_1, y_1^1, y_1^2 への作用はすべて -1 倍であるので, コホモロジーは次のように表される．

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, Sp(1)); \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[x_1 y_1^1, x_1 y_1^2, y_1^1 y_1^2]/(x_1 y_1^1, x_1 y_1^2, y_1^1 y_1^2)^2$$

このように $H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, Sp(1)); \mathbb{F})$ は $\{x_1 y_1^1, x_1 y_1^2, y_1^1 y_1^2\}$ で生成されていると分かる．

環 A の部分集合 S が A を最小生成するとは, S が A を生成しかつ S の任意の真部分集合が A を生成しないことである．このとき帰納法や様々な計算を行うことで次の定理を証明することが出来る。

Theorem 4.2. G が $\mathrm{U}(n)$ または $\mathrm{Sp}(n)$ とする．$z(k, I)$ を

$$z(k, I) = \begin{cases} \sum_j x_j^{k-1} y_j^I & (G = U(n)) \\ \\ \sum_j x_j^{2k+\epsilon_{|I|}-2} y_j^I & (G = Sp(n)). \end{cases}$$

と定義する．ここで ϵ_i は

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & (i \ \ even) \\ 1 & (i \ \ odd) \end{cases}$$

とする．このときコホモロジー環 $H^*\left(\mathrm{Hom}(Z^m, G); \mathbb{F}\right)$ は $\{z(k, I) | k \ge 1, I \subset [m], k + |I| - 1 \le n\}$ で最小生成される．

この結果を用いて, コホモロジー安定性の最大範囲を得ることができる．そのとき次の Proposition が有用である．今, 次数付き集合 S に対して, $\mathbb{F}\langle S\rangle$ を次数付き $\mathbb{F}$-代数として S で自由生成された環とする．

Proposition 4.3. $G = \mathrm{U}(n), \mathrm{Sp}(n)$ として $z(k, I)$ を定理 4.2 と同じものとする．このとき次の写像

$$\mathbb{F}\langle\{z(k,I)|k \geq 1,, I \subset [m], k + |I| - 1 \leq n\}\rangle \to H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G))$$

は次数

$$\begin{cases} 2n - m & (G = \mathrm{U}(n)) \\ 2n + 1 & (G = \mathrm{Sp}(n)) \end{cases}$$

以下で同型となる．

この Proposition を用いて計算をすると $G = \mathrm{U}(n)$ の時のコホモロジー安定性は次のように表される．

Theorem 4.4. $n \geq m$ のとき $H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{U}(n)); \mathbb{F}) \to H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{U}(n+1)); \mathbb{F})$ は $2n - m + 1$ 次元以下で同型．さらに, $2n - m + 2$ 次元では全射ではない．

同様に $G = \mathrm{Sp}(n)$ の時のコホモロジー安定性は次のように表される．

Theorem 4.5. $n \geq m$ のとき $H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{Sp}(n)); \mathbb{F}) \to H_*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathrm{Sp}(n+1)); \mathbb{F})$ は $2n + 1$ 次元以下で同型．さらに, $2n + 2$ 次元では全射ではない．

ここでこれら二つの定理では述べられていない $n < m$ の場合も同様の計算でコホモロジー安定性の最大範囲を計算することが可能である．

5. ランク 2 の Lie 群の場合

この章では G がランク 2 の単純 Lie 群の場合における $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジー環の構造を紹介する．Theorem2.1 を用いて計算を行い得られたのが次の結果である．

Theorem 5.1. *G をランクが 2 の単連結単純 Lie 群とする．このとき* $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ *のコホモロジー環は次で与えられる．*

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G); \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}\langle a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, b_1, b_2\rangle/(a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, b_1, b_2)^3 + I,$$

ここで I は

$$b_1b_2, \quad {b_2}^2, \quad a_2^1b_2, \quad a_2^2b_2, \quad a_1^1b_2+a_2^1b_1, \quad a_1^2b_2+a_2^2b_1, \quad a_1^1a_2^2+a_1^2a_2^1,$$

で生成されるイデアルであり, 生成元の次元は

$$|a_i^j| = \begin{cases} 2i+1 & (G=SU(3)) \\ 4i-1 & (G=Sp(2)) \\ 8i-5 & (G=G_2), \end{cases}$$

$$|b_i| = \begin{cases} 2i & (G=SU(3)) \\ 4i-2 & (G=Sp(2)) \\ 8i-6 & (G=G_2) \end{cases}$$

である.

ここで, $G=\mathrm{SU}(3), \mathrm{Sp}(2)$ の場合は Section 4.2 で定めた生成元と同じものである. この定理からこれら 3 つの空間のコホモロジーは次数を無視するとすべて同型である. $m=1$ の場合,$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ は Lie 群 G と一致するため, そのコホモロジー環は次数を無視すれば同じ環構造であることは分かる. この定理はその一般化の可能性を示唆している.

6. 今後の課題

この章では私たちの結果から出てきた課題について述べる. まず Section 3 で Poincaré 多項式について私たちは古典群の場合にのみ組み合わせ論を用いた整理を行った. そこで次の問題が考えられる.

Question 6.1. G が例外群の場合, Poincaré 多項式を組み合わせ論を用いて整理できるのか？

私たちは Theorem3.3 で G が単純な場合に $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)$ の Poincaré 多項式の最高次を求めた. これは G の次元とランクのみに依存する綺麗な形で表されている. しかしこの公式はすべての単純 Lie 群に対して個別に計算を行った結果であるため次の疑問が浮かぶ.

Question 6.2. Theorem3.3 の公式に位相幾何学的な解釈はあるのか？

Section5 の最後に述べたように, Theorem5.1 はより一般の定理の存在を示唆している. それは以下のようなものである.

Question 6.3. G が単純な場合, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の $\mathbb{F}$-係数コホモロジーの次数を無視した環構造は G の rank のみに依存するのか？そしてその環構造はどのように表されるのか?

最後に本研究の内容はすべて Baird によって導入された定理 2.1 を用いて行った. そのため本研究ではホモロジーの torsion などの情報を調べることはできていない. 次のような問題が考えられる.

Question 6.4. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモロジーは p-torsion を持つか？

この問題は $G = \mathrm{SU}(n)$ の場合やその他いくつかの場合で私たちが解決した [10]. その際には $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ をホモトピー余極限で分解するという手法を新たに導入した. この手法は Baird の手法に比べて多くの情報を調べることができるという点で優れているが, 複雑ではある. この手法を用いた研究も今後進めていきたいと考えている.

References

[1] A. Adem, A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen and S. Gitler, On decomposing suspensions of simplicial spaces. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **15** (2009), no. 1, 91–102.

[2] A. Adem, J.M. Gómez and S. Gritschacher, On the second homotopy group of spaces of commuting elements in Lie groups, arXiv:2009.09045.

[3] T.J. Baird, Cohomology of the space of commuting n-tuples in a compact Lie group, Alg. Geom. Topol. **7** (2007), 737-754.

[4] T. Baird, L.C. Jeffrey and P. Selick, The space of commuting n-tuples in SU(2), Illinois J. Math. **55**, no. 3, (2011), 805-813.

[5] M.C. Crabb, Spaces of commuting elements in SU(2), Proc. Edinburgh Math. Soc. **54** (2011), 67-75.

[6] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Graduate texts in Math. **205**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] J.M. Gómez, A. Pettet and J. Souto, On the fundamental group of $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, Math. Z. **271** (2012), 33-44.

[8] V.G. Kac and A.V. Smilga, Vacuum structure in supersymmetric Yang-Mills theories with any gauge group, The many faces of the superworld, World Sci. Publ. River Edge, NJ, (1999) 185-234.

[9] D. Kishimoto, M. Takeda, Spaces of commuting elements in the classical groups. Adv. Math. **386** (2021).

[10] D. Kishimoto, M. Takeda, Torsion in the space of commuting elements in a Lie group arXiv:2103.11662

[11] D.A. Ramras and M. Stafa, Hilbert-Poincaré series for spaces of commuting elements in Lie groups, Math. Z. **292** (2019), 591-610.

[12] D.A. Ramras and M. Stafa, Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups, accepted by Int. Math. Res. Not.

[13] E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, Nuclear Phys. B **202** (1982), 253-316.

[14] E. Witten, Toroidal compactification without vector structure, J. High Energy Phys. Paper 6 (1998).

〒 606-8502　京都市左京区北白川追分町　京都大学　大学院理学研究科

Email address: takeda.masahiro.87u@st.kyoto-u.ac.jp