

# LMO 関手を用いた不変量と写像類群への応用

野崎 雄太 (広大先進理工)\*

## 概要

本稿の目的は、曲面の写像類群の部分群である Torelli 群や Johnson 核さらにその3次元類似であるホモロジーシリンダーに関して、最近の研究を紹介することである。筆者は佐藤正寿氏 (東京電機大学) と鈴木正明氏 (明治大学) との共同研究 [37, 38] において、ホモロジーシリンダーのなすモノイド上に LMO 関手に由来する準同型を構成した。その準同型の性質と様々な応用についてまとめる。

## 1. 背景と動機

種数  $g$  で境界成分 1 個の向き付けられたコンパクト曲面を  $\Sigma_{g,1}$  で表し、 $\mathcal{M}_{g,1}$  をその写像類群  $\pi_0(\{f \in \text{Homeo}(\Sigma_{g,1}) \mid f|_{\partial\Sigma_{g,1}} = \text{id}\})$  とする。写像類群は 1 次ホモロジー群  $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$  に自然に作用し、Torelli 群と呼ばれる部分群  $\mathcal{I}_{g,1} = \text{Ker}(\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}(H))$  が定まる。Torelli 群は写像類群の研究において重要な役割を果たしており、本研究の主役の1つである。さて、群を調べる上でその Abel 化を求めることは基本的と言える。Torelli 群の Abel 化は Johnson [19] によって決定され、具体的には第 1 Johnson 準同型  $\tau_1: \mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \bigwedge^3 H$  と Birman-Craggs 準同型が鍵となった。ここで  $\mathcal{I}_{g,1}(1) = \mathcal{I}_{g,1}$ ,  $\mathcal{I}_{g,1}(n+1) = [\mathcal{I}_{g,1}(n), \mathcal{I}_{g,1}]$  によって定まる降中心列  $\mathcal{I}_{g,1}(1) \supset \mathcal{I}_{g,1}(2) \supset \dots$  を考え、Abel 群の直和  $\mathfrak{t}_{g,1}^{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1)$  を  $\mathcal{I}_{g,1}$  の線形化と見なす。最初の次数商  $\mathcal{I}_{g,1}(1)/\mathcal{I}_{g,1}(2)$  は Abel 化に他ならない。  $n \geq 2$  に対する次数商は、 $\mathfrak{t}_{g,1}^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$  の Lie 代数の構造などに着目して、たとえば森田 [31], Hain [15], 森田, 逆井, 鈴木 [33], Kupers, Randal-Williams [22] によって深く研究されている。一方、トーション部分群  $\text{tor } H_1(\mathcal{I}_{g,1}; \mathbb{Z})$  ( $g \geq 3$ ) の非自明性が Birman-Craggs 準同型で捉えられており、次の問題に興味を持たれていた。

**問題 1**  $n \geq 2$  において  $\text{tor}(\mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1))$  は非自明性か?

降中心列と並んで重要な位置付けにあるのが Johnson フィルトレーション  $J_1\mathcal{M}_{g,1} \supset J_2\mathcal{M}_{g,1} \supset \dots$  であり、基本群  $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1})$  のべき零商への作用を用いて  $J_n\mathcal{M}_{g,1} = \text{Ker}(\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}(\pi/\pi(n+1)))$  と定義される。定義から  $\mathcal{I}_{g,1} = J_1\mathcal{M}_{g,1}$  であり、一般に  $\mathcal{I}_{g,1}(n) \subset J_n\mathcal{M}_{g,1}$  が成り立つ。特に  $J_2\mathcal{M}_{g,1}$  は  $\mathcal{K}_{g,1} = \text{Ker } \tau_1$  と等しく、Johnson 核と呼ばれる。さらに分離曲線に沿った Dehn ツイストで生成される部分群に一致することが Johnson [18] によって示されており、興味深い部分群と言える。

さて、Torelli 群  $\mathcal{I}_{g,1}$  ( $g \geq 3$ ) の有限生成性が 1983 年に Johnson [17] によって示されたのに対し、 $\mathcal{K}_{g,1}$  の有限生成性は長らく未解決であった。有限生成であるためには、少なくとも  $H_1(\mathcal{K}_{g,1}; \mathbb{Q})$  が有限次元である必要がある。Dimca, Papadima [9] は閉曲面  $\Sigma_g$  ( $g \geq 4$ ) の場合に  $H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Q})$  の有限次元性を示した。その後 Church, Ershov,

本研究は科研費 (課題番号 20K14317) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 57K20, 57K16, Secondary 57K31.

キーワード: Torelli group, Johnson kernel, homology cylinder, clasper, LMO functor.

\* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山1-3-1 広島大学大学院先進理工系科学研究科  
e-mail: nozakiy@hiroshima-u.ac.jp

Putman [4] は,  $\mathcal{K}_g$  及び  $\mathcal{K}_{g,1}$  ( $g \geq 4$ ) が実際に有限生成であることを証明した. 一方 Dimca, Hain, Papadima [8] は, [9] の考察を押し進め,  $H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Q})$  の構造を詳細に調べた. そして森田, 逆井, 鈴木 [33] は [8] を用いて,  $H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Q})$  ( $g \geq 6$ ) を明示的に与えた. 具体的には, Casson 不変量と森田準同型 (Johnson 準同型の精密化) が有理 Abel 化を与えている. すると [33] で指摘されているように, 次が重要な問題となる.

**問題 2** Abel 化  $H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z})$  にトーションが存在するか?

筆者は [37] で問題 1, 2 に取り組み, 以下の結果を得た.

**定理 3** ([37])  $n = 3, 5, g \gg 1$  のとき  $\text{tor}(\mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1))$  は非自明である.

**定理 4** ([37])  $g \geq 6$  のとき  $H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z})$  にトーションが存在する.

主張そのものは2次元トポロジーに関するものだが, 証明の鍵は3次元トポロジーにある. 具体的にはホモロジーシリンダー, クラスパー手術, Jacobi 図, LMO 関手などを用いる. その詳細は次節以降で述べることにし, ここでは全体像を説明する.

まずホモロジーシリンダーとは曲面  $\Sigma_{g,1}$  の間の良いコボルディズムであり, それらの全体  $\mathcal{IC}_{g,1}$  はモノイドをなす. ここでクラスパー手術を用いて, ホモロジーシリンダーの間に  $Y_n$  同値という関係を導入する.  $Y_n$  同値から部分モノイドの列  $\mathcal{IC}_{g,1} = Y_1\mathcal{IC}_{g,1} \supset Y_2\mathcal{IC}_{g,1} \supset \dots$  が定まり, これらは Torelli 群と相性が良い. 具体的にはモノイド準同型  $\mathfrak{c}: \mathcal{I}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{IC}_{g,1}$  が存在し,  $\mathfrak{c}(\mathcal{I}_{g,1}(n)) \subset Y_n\mathcal{IC}_{g,1}$  を満たす. そして Abel 群の準同型

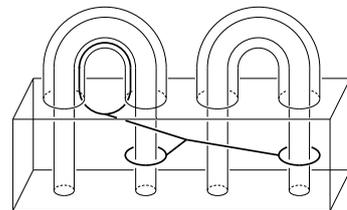


図 1:  $\Sigma_{2,1} \times [-1, 1]$  内のクラスパー.

$$\text{Gr } \mathfrak{c}: \mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1) \rightarrow Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$$

が誘導され, 2次元と3次元が関連付けられる. 群  $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$  の研究において決定的な役割を果たすのが LMO 関手  $\tilde{Z}$  であり, いわゆる TQFT に近いものである. 実際に必要となるのは  $\tilde{Z}$  が誘導する準同型  $\log \tilde{Z}^Y: \mathcal{IC}_{g,1} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^c \otimes \mathbb{Q}$  である. ここに  $\widehat{\mathcal{A}}^c$  は Jacobi 図と呼ばれる 1,3 価 グラフの形式的級数からなる  $\mathbb{Z}$  加群である. 特に 3 価頂点が  $n$  個である Jacobi 図を取り出すことで, 同型  $(Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}$  が誘導される.

本研究では  $\log \tilde{Z}^Y: \mathcal{IC}_{g,1} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^c \otimes \mathbb{Q}$  の  $n+1$  次を取り出すことで, 準同型

$$\bar{z}_{n+1}: Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を定義した<sup>1</sup>. これがタイトルにある「LMO 関手を用いた不変量」である. すると  $\bar{z}_2$  は Birman-Craggs 準同型と等価であることが分かり, 特に Abel 化  $\mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{I}_{g,1}(2)$  のトーションを捉えている. このことから,  $\bar{z}_{n+1}$  は  $\text{Gr } \mathfrak{c}$  を経由して  $\text{tor}(\mathcal{I}_{g,1}(n)/\mathcal{I}_{g,1}(n+1))$  の情報を持っているだろうと期待される. これを実際に証明することで定理 3 を得る. また定理 4 を示すには  $\mathcal{K}_g \supset \mathcal{I}_g(2)$  に着目して議論する.

以上が証明の土台である. 第 2 節で各用語を定義し, 3.3 節で定理 4 の証明の概略を述べる. さらにこのような研究を通して, Torelli 群や Johnson 核だけでなく, むし

<sup>1</sup>安直に  $Y_n\mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  とすると well-defined でない.

ろホモロジーシリンダーに関する群  $Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$  や一般に  $Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) の構造について様々な結果が得られた. これらの Abel 群は完全列

$$0 \rightarrow Y_{n+k-1} \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k} \rightarrow Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k} \rightarrow Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+k-1} \rightarrow 0$$

によって互いに関連している. まず  $Y_n \mathcal{IC}_{g,1}/Y_{n+1}$  に関しては, Massuyeau, Meilhan [27, 28] が  $n = 1, 2$  の場合を完全に決定した. 本研究では  $\bar{z}_{n+1}$  を用いることで,  $n = 3, 4$  の場合を決定し, さらに  $Y_3 \mathcal{IC}_{g,1}/Y_5$  の構造も解明した. その応用として,  $Y_{n+1}$  同値と  $n$  次有限型不変量に関する Goussarov-葉廣予想を  $n = 3, 4$  の場合に解決した ([37, 38]).

またホモロジー同境界群  $\mathcal{IH}_{g,1} = \mathcal{IC}_{g,1}/\sim_H$  についても, 興味深い結果を得ている. ここに  $\sim_H$  は 4 次元多様体を経由して定義されるある同値関係である (第 5 節).  $\mathcal{IH}_{0,1}$  は「向き付けられた整ホモロジー 3 球面のなすホモロジー同境界群」と同型であり,  $g \geq 1$  では非可換である.  $\mathcal{IH}_{g,1}$  は Levine [25, 26] や Conant, Schneiderman, Teichner [7] によって深く研究されており, Abel 群  $Y_n \mathcal{IH}_{g,1}/Y_{n+1}$  と Jacobi 図の関係もかなり分かっている. 本研究では  $Y_3 \mathcal{IC}_{g,1}/Y_5$  の構造と比較することで  $Y_3 \mathcal{IH}_{g,1}/Y_5$  を決定した. 2 つの完全列からなる可換図式にまとめると

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_4 \mathcal{IC}_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 \mathcal{IC}_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 \mathcal{IC}_{g,1}/Y_4 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_4 \mathcal{IH}_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 \mathcal{IH}_{g,1}/Y_5 & \longrightarrow & Y_3 \mathcal{IH}_{g,1}/Y_4 \longrightarrow 0 \end{array}$$

となり, 右端の 2 つにトーションが存在するのに対し, 左と中央の 4 つは自由 Abel 群である ([37, 38]). これらの詳細は第 4, 5 節で述べる.

## 2. 用語の準備

第 1 節に現れた用語の定義を順に説明する. これらは量子トポロジーの文脈で大きく発展してきたものであり, 大槻 [39, 42] を参照するとよい. 以下, 誤解の恐れがないときには種数  $g$  を省略する.

### 2.1. ホモロジーシリンダー

向き付けられたコンパクト 3 次元多様体  $M$  と向きを保つ同相写像  $m: \partial(\Sigma_{g,1} \times [-1, 1]) \rightarrow \partial M$  の組  $(M, m)$  をコボルディズムと呼ぶことにする. ただし  $(M, m)$  と  $(M', m')$  に対して, 同相写像  $f: M \rightarrow M'$  が存在して  $f \circ m = m'$  を満たすとき, それらを同一視する. コボルディズム  $(M, m)$  が  $\Sigma_{g,1}$  上のホモロジーシリンダーであるとは, 各曲面  $\Sigma_{g,1} \times \{\pm 1\}$  への制限  $m_{\pm}$  が同型写像  $(m_{\pm})_*: H_*(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{Z})$  を誘導し, かつそれらが一致することとする.  $\Sigma_{g,1}$  上のホモロジーシリンダーの集合  $\mathcal{IC} = \mathcal{IC}_{g,1}$  には  $M \circ M' = (M \cup_{m_+ = m'_-} M', m_- \cup m'_+)$  により積が定まり, モノイドとなる. たとえば  $M = \Sigma_{g,1} \times [-1, 1]$  とし,  $m_+ = f \in \mathcal{I}$ ,  $m_- = \text{id}_{\Sigma_{g,1}}$  なる  $m$  を考えると,  $(M, m)$  はホモロジーシリンダーである. この構成によりモノイド準同型  $c: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IC}$  が定義され, 単射であることが知られている.

### 2.2. クラスパー

Goussarov [11] と葉廣 [12] により創始されたクラスパー手術は,  $\mathcal{IC}$  の研究において欠かせない道具である<sup>2</sup>. まずグラフクラスパーとは, 3 次元多様体に埋め込まれた曲面

<sup>2</sup>最近では渡邊 [48] によって, 4 次元多様体へ拡張そして応用されている.

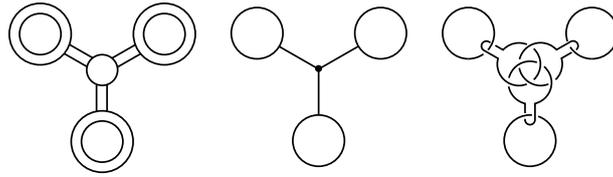


図 2: グラフクラスパーの例, その略記法, そこから得られる枠付き絡み目.

であって, いくつかの円板とバンドとアニュラスへの分解が指定されているものである (図 2 左). 詳細は [12], [39] を参照してほしい. また一般向けの記事として葉廣 [13] もある. さて, 各円板を Borromean 環に置き換えることで, 枠付き絡み目  $L_G$  が得られる (図 2 右). そして  $L_G$  に沿った Dehn 手術を施して得られる多様体を  $M_G$  と書く.

$G$  を構成する円板の個数を次数と呼ぶ.  $M, M' \in \mathcal{IC}$  が  $Y_n$  同値であるとは, 次数  $n$  のグラフクラスパー  $G_1, \dots, G_r$  が存在し,  $M_{G_1 \sqcup \dots \sqcup G_r} = M'$  を満たすことである<sup>3</sup>. そして  $Y_n \mathcal{IC} = \{M \in \mathcal{IC} \mid M \text{ は } \mathfrak{c}(\text{id}) \text{ に } Y_n \text{ 同値}\}$  と置くと, 部分モノイドの列  $\mathcal{IC} = Y_1 \mathcal{IC} \supset Y_2 \mathcal{IC} \supset \dots$  が定まり, これを  $Y$  フィルトレーションと呼ぶ.  $Y_{n+k}$  同値による商  $Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+k}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) は有限生成 Abel 群になることが知られており,  $k = 1$  の場合がよく調べられてきた.

### 2.3. Jacobi 図

$Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$  を組合せ的に記述する道具として Jacobi 図を導入する. **Jacobi 図** とは 1, 3 価グラフであって, 各 1 価頂点にラベル  $1^+, \dots, g^+, 1^-, \dots, g^-$  のいずれかが与えられており, 3 価頂点には巡回順序が指定されているものである. 本稿では巡回順序は常に反時計回りとして省略し, グラフは破線で描く. また  $a_1, \dots, a_n \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\}$  に対して次の記号を用いる:

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{array}{c} a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{n-1} \\ | \ \vdots \ | \\ \hline a_1 \ \dots \ a_n \end{array}, \quad O(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \vdots \\ a_n \end{array}$$

3 価頂点を  $n$  個持つ連結な Jacobi 図で生成される自由  $\mathbb{Z}$  加群を AS, IHX, self-loop 関係式で割ったものを  $\mathcal{A}_n^c$  と書く.  $\mathcal{A}_n^c$  は 1 次 Betti 数により自然に直和分解  $\mathcal{A}_n^c = \bigoplus_{l \geq 0} \mathcal{A}_{n,l}^c$  する. たとえば  $\mathcal{A}_2^c = \mathcal{A}_{2,0}^c \oplus \mathcal{A}_{2,1}^c$  は  $\{T(a_1, a_2, a_3, a_4)\}$ 's,  $\{O(b_1, b_2)\}$ 's で生成される.

### 2.4. 手術写像

Jacobi 図  $J \in \mathcal{A}_n^c$  から  $\mathfrak{c}(\text{id})$  内の  $n$  次のグラフクラスパーが構成でき, ホモロジーシリンダーの同値類  $\mathfrak{s}_n(J) \in Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$  が定まる. たとえば図 1 は  $J = T(1^-, 1^+, 2^-)$  の場合である. こうして手術写像  $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$  が定まり,  $n \geq 2$  で全射準同型であることが知られている. したがって  $\mathcal{A}_n^c$  と  $\text{Ker } \mathfrak{s}_n$  を通して  $Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1}$  を理解することが可能となる.

### 2.5. LMO 関手

**LMO 関手**  $\tilde{Z}$  は「ある種のコボルディズムを射とする圏」から「ある種の Jacobi 図の級数を射とする圏」への関手であり, Cheptea, 葉廣, Massuyeau [2] により導入された. 本研究ではその性質や具体的な計算を多く用いているが, ここでは  $Y_n$  同値や手術写像との

<sup>3</sup>同様に, ホークラスパーを用いて絡み目の間の  $C_{n+1}$  同値が定義される.

関係をまとめるにとどめる. 準同型  $\log \tilde{Z}^Y: \mathcal{IC} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^c \otimes \mathbb{Q}$  は  $\log \tilde{Z}_{\geq 1}^Y(Y_n \mathcal{IC}) \subset \widehat{\mathcal{A}}_{\geq n}^c \otimes \mathbb{Q}$  を満たし, したがって準同型  $Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}$ ,  $[M] \mapsto (\log \tilde{Z}^Y(M))_n$  を誘導する. そして  $(\log \tilde{Z}^Y(\mathfrak{s}_n(J)))_n = \pm J \in \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Q}$  が成り立つ ([2]).

本稿では必要ないが, 関連する話題をここにまとめておく. まず絡み目の有限型不変量 (Vassiliev 不変量) に対して, それらを統合する普遍有限型不変量として Kontsevich 不変量 [21] がある. そして閉 3 次元多様体に対する類似として Le, 村上, 大槻 [24] によって導入されたのが LMO 不変量である<sup>4</sup>. 大雑把に言うと, 3次元多様体を枠付き絡み目  $L$  に沿った Dehn 手術で表し,  $L$  の Kontsevich 不変量を巧みに平均化することで  $L$  の選び方に依存しない量を取り出している. LMO 不変量は村上, 大槻 [35] により TQFT の枠組みで捉えられ, Cheptea, Le [3] の研究を経て, LMO 関手 ([2]) に至った. なお LMO 不変量には Bar-Natan, Garoufalidis, Rozansky, D. Thurston [1] によって導入された Aarhus 積分を用いた定式化もあり, LMO 関手は Aarhus 積分に基づいて構成されている.

その後, 様々な拡張や関連研究が行われている. たとえば大槻 [40, 41], Katsir [20], 野崎 [36], 望月 [30], Vera [46, 47], Moussard [34], 伊藤 [16], Massuyeau, Moussard [29], 葉廣, Massuyeau [14] などがある.

### 3. 不変量 $\bar{z}_{n+1}$ に関する諸結果と応用

#### 3.1. $\bar{z}_{n+1}$ の定義と $\delta$ による計算公式

LMO 関手  $\tilde{Z}$  から誘導されるモノイド準同型  $\log \tilde{Z}^Y: \mathcal{IC} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^c$  を思い出しておく.

**定義 5** 準同型  $\bar{z}_{n+1}: Y_n \mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  を  $\bar{z}_{n+1}([M]) = (\log \tilde{Z}^Y(M))_{n+1}$  で定める<sup>5</sup>.

$\bar{z}_{n+1}$  が well-defined であることは, [2] の結果から従う. さて, 不変量が手に入るとまずは非自明性が気になる. これについては 3.1 節で定理 10 として述べるが, そのためにも計算法を確立する必要がある. LMO 関手は Kontsevich 不変量から構成されており,  $\bar{z}_{n+1}$  の計算も容易ではない. 論文 [37] の主定理は,  $\bar{z}_{n+1}$  の計算を「Jacobi 図に対する操作  $\delta$ 」に帰着する次の結果である.

**定理 6** ([37]) 以下は Abel 群の可換図式である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n^c & \xrightarrow{\mathfrak{s}} & Y_n \mathcal{C}/Y_{n+1} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \bar{z}_{n+1} \\ \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \frac{1}{2}} & \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

つまり  $[M] = \mathfrak{s}(J)$  のとき  $\bar{z}_{n+1}([M]) = \frac{1}{2}\delta(J)$  であり, 以下で与える写像  $\delta$  によって計算できる.

**定義 7** 準同型  $\delta: \mathcal{A}_n^c \rightarrow \mathcal{A}_n^c \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を  $\delta(J) = \sum_{v \in U(J)} \delta_v(J) + \sum_{\substack{v \neq w \in U(J) \\ \ell(v) = \ell(w)}} \delta_{vw}(J)$  で定める<sup>6</sup>. ここに  $U(J)$  は  $J$  の 1 価頂点の集合,  $\ell(v) \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\}$  は  $v$  のラベル,  $\delta_v$

<sup>4</sup>過去の講演集に栗屋 [23] がある. また KKT 不変量 (たとえば清水 [44] を参照) も同様の性質を持っている.

<sup>5</sup>LMO 関手はシンプレクティック基底と結合子の取り方に依存する.  $\bar{z}_{n+1}$  も基底に依存するが, 結合子には依存しない.

<sup>6</sup>“ $\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ”を付けることで well-defined になっている.

と  $\delta_{vw}$  は以下で定める (ただし  $(j^\pm)^* = j^\mp$  とする.):

$$\delta_v \left( \ell(v) \text{ --- } \bigcirc \right) = \ell(v) \text{ --- } \bigcirc + \ell(v)^* \text{ --- } \bigcirc,$$

$$\delta_{vw} \left( \begin{array}{c} \ell(v) \text{ ---} \\ \ell(w) \text{ ---} \end{array} \bigcirc \right) = \ell(v) \text{ --- } \bigcirc.$$

**例 8**  $J = T(1^+, 1^+, 2^-)$  とすると  $\delta(J)$  は 7 項からなり, AS, IHX 関係式で整理すると  $\delta(J) = T(2^-, 1^+, 1^+, 2^-) + O(1^+, 2^-)$  となる. したがって定理 6 より,  $\bar{z}_2(\mathfrak{s}(J)) = \frac{1}{2}T(2^-, 1^+, 1^+, 2^-) + \frac{1}{2}O(1^+, 2^-)$  と計算できる. 特に  $\mathfrak{s}(J) \neq 0$  を得る<sup>7</sup>.

ここで定理 6 にたどり着いた経緯と証明の流れを述べる. 共同研究において LMO 関手の低次の項を計算するコンピュータプログラムを作成し, 複数の具体例を観察する中で上記の  $\delta$  が共通して現れることに気付いた. 示すべき等式が分かれば (大変ではあるが) その証明は人の手でできる. 具体的には,  $\mathfrak{s}(J)$  を基本的なコボルディズムに分解し, 各々に対する LMO 関手の値を関手性に基づいて組み上げればよい. これは [2] で用いられている計算法の精密化に当たる.

### 3.2. $\bar{z}_{n+1}$ の性質

Jacobi 図の 1 次 Betti 数  $l$  ごとに準同型  $\bar{z}_{n+1,l}: Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \xrightarrow{\bar{z}_{n+1}} \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1,l}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  が定まる. いろいろな組  $(n+1, l)$  に対して  $\delta$  (及び Lie 代数から構成される重み系) を用いて非自明性が確認でき, たとえば次が分かる.

**命題 9** ([38])  $n \geq 0$  のとき,  $\bar{z}_{2n+2,n}$  は非自明である.

$l = 0, 1$  のときには, さらに精密な結果が得られる.

**定理 10** ([37])  $1 \leq n \leq g$  のとき, 準同型  $\bar{z}_{2n,l}: Y_{2n-1} \mathcal{IC} / Y_{2n} \rightarrow \mathcal{A}_{2n,l}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  の

$$\text{tor}(Y_{2n-1} \mathcal{IC} / Y_{2n}) \cap \text{Im}(\mathcal{I}(2n-1) / \mathcal{I}(2n) \xrightarrow{\text{Gr}^c} Y_{2n-1} \mathcal{IC} / Y_{2n})$$

への制限は非自明である. 特に森田準同型 (Johnson 準同型の精密化) を経由しない.

定理 4 を証明する際に使う次の性質も紹介しておく.

**定理 11** ([37])  $\bar{z}_{n+1}: Y_n \mathcal{IC} / Y_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  は  $Y_{[n/2]+1} \mathcal{C} / Y_{n+1}$  上に拡張する.

次に定義域側の Betti 数に制限を付けると, その核は「2重化」 $\Delta_{n,l}: \mathcal{A}_{n,l}^c \rightarrow \mathcal{A}_{2n+1,2l}^c$  の像と関係することが分かる.

**定理 12** ([37])  $r \geq 0$  に対して,

- (1)  $\text{Ker}(\bar{z}_{2n+2} \circ \mathfrak{s}: \text{tor } \mathcal{A}_{2n+1,2l}^c \rightarrow \mathcal{A}_{2n+2}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \supset \text{Im } \Delta_{n,l}.$
- (2)  $\text{Ker}(\bar{z}_{2n+2} \circ \mathfrak{s}: \text{tor } \mathcal{A}_{2n+1,0}^c \rightarrow \mathcal{A}_{2n+2}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Im } \Delta_{n,0}.$

<sup>7</sup> AS 関係式により  $2\mathfrak{s}(J) = 0$  だから, その非自明性を捉えるのは一般に難しい.

証明では, Conant, Schneiderman, Teichner [5, 6, 7] による高次 Sato-Levine 不変量などの先行研究を援用している.

ここで第 1 節で述べた Johnson フィルトレーション  $J_n\mathcal{M}$  への応用に言及する. 以下数行は  $g \gg 1$  とする. さて,  $\mathcal{I}(n) \subset J_n\mathcal{M}$  により自然な準同型  $(\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow (J_n\mathcal{M}/J_{n+1}\mathcal{M}) \otimes \mathbb{Q}$  があり, 両者の比較に関心が寄せられている. まずこの写像は全射であることが知られている ([15]). Hain [15] は  $n = 2$  のとき核が  $\mathbb{Q}$  であることを示し, 一方  $n = 3$  では単射であることが森田 [32] により示された<sup>8</sup>. さらに森田, 逆井, 鈴木 [33] は  $n = 4, 5, 6$  での単射性を示し,  $n \geq 7$  でも単射だろうと予想している<sup>9</sup>. 一方, 定理 10 の系として, “ $\otimes \mathbb{Q}$ ” がない場合には単射性が成り立たないことが分かる.

**系 13 ([37])**  $1 \leq n \leq g$  のとき,  $\mathcal{I}(2n-1)/\mathcal{I}(2n) \rightarrow J_{2n-1}\mathcal{M}/J_{2n}\mathcal{M}$  は単射でない.

ただし  $n = 1$  の場合は Johnson [19] による.

### 3.3. 定理 4 「 $\text{tor } H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z}) \neq 0$ 」の証明の概略

証明の大部分は  $\mathcal{K}_{g,1}$  に対しても有効だが, 最後に「 $H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Q})$  が Casson 不変量と森田準同型で捉えられること ([33])」を用いる都合で閉曲面に限定する. まず  $\tilde{z}_{n+1}$  の閉曲面版  $\hat{z}_{n+1}: Y_n\mathcal{IC}_g/Y_{n+1} \rightarrow (\mathcal{A}_{n+1}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim$  が定義され, 定理 6 などの類似が証明できる. さて次の可換図式に着目する:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_g & \xrightarrow{\zeta := (\log \tilde{Z}^Y \circ \iota)_4} & (\mathcal{A}_4^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{I}_g(2) & \xrightarrow{\text{Gr c}} \mathcal{I}_g(2)/\mathcal{I}_g(4) \xrightarrow{\text{Gr c}} Y_2\mathcal{IC}_g/Y_4 & \xrightarrow{\text{定理 11}} (\mathcal{A}_4^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim \\
 & & \uparrow \hat{z}_4 \\
 & & Y_3\mathcal{IC}_g/Y_4 \xrightarrow{\hat{z}_4} (\mathcal{A}_4^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\sim
 \end{array}$$

上段の  $\zeta$  は Abel 商を与えているから,  $\zeta(f) \neq 0$  なる  $f \in \mathcal{K}_g$  を見つければ,  $[f] \neq 0 \in H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z})$  が言える. さらに  $[f]$  が Casson 不変量と森田準同型の核に入ることを示せば, [33] より  $[f]$  がトーション元であることが従う. 実際, 上の可換図式において,  $\mathfrak{s}(T(a, b, c, b, a)) \in Y_3\mathcal{IC}_g/Y_4$  に対応する  $f \in \mathcal{I}_g(2)$  を見つけることができる. そして定理 6 を用いて  $\zeta(f) \neq 0$  を示し, Jacobi 図  $T(a, b, c, b, a) \in \mathcal{A}_{3,0}^c$  の位数が 2 であることから Casson 不変量と森田準同型の核に入ることも分かる<sup>10</sup>.

## 4. 群 $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$ の構造とその応用

前節では写像類群の部分群への応用を述べた. 本節では  $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+k}$  の構造に目を向ける. これは Goussarov-葉廣予想 (4.3 節) やホモロジーコボルディズム群 (5 節) との関係からも重要な対象である.

<sup>8</sup>  $\Sigma_{g,1}$  の場合と  $\Sigma_g$  の場合で, 単射性に差はない ([33]).

<sup>9</sup> 最近アナウンスされた Kupers, Randal-Williams [22] の結果は, 予想を支持するものである. さらに  $\text{Gr c} \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}}$  が単射か否かという問題とも関連している.

<sup>10</sup> 特に  $f \in J_4\mathcal{M} \setminus [K, K]$  であり, 最近 Faes [10] によって類似の内容が考察されている.

4.1. 群  $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$  の構造と手術写像  $\mathfrak{s}_n: \mathcal{A}_n^c \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$  の核

まず  $n = 1, 2$  のときは Massuyeau, Meilhan [27, 28] によって決定されているから, 以下  $n \geq 3$  とする. 基本となるのは完全列

$$0 \rightarrow \text{Ker } \mathfrak{s}_n \rightarrow \mathcal{A}_n^c \xrightarrow{\mathfrak{s}} Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow 0$$

である. 小さい  $n$  に対して加群  $\mathcal{A}_n^c$  の構造はよく分かっているから,  $\text{Ker } \mathfrak{s}_n$  を調べることが重要となる.  $\text{Ker } \mathfrak{s}_n \subset \text{Ker}(\bar{z}_{n+1} \circ \mathfrak{s}_n)$  だから, 定理 12 が核の候補を与えている. 特に  $n = 3$  の場合には次の定理が得られ,  $Y_3\mathcal{C}/Y_4$  の構造が決定される.

**定理 14 ([37])**  $0 \rightarrow (\wedge^3 H \oplus \wedge^2 H) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{A}_3^c \xrightarrow{\mathfrak{s}} Y_3\mathcal{C}/Y_4 \rightarrow 0$  は完全列である. ここに  $j$  は以下で定める準同型である:

$$j(a \wedge b \wedge c) = T(a, b, c, b, a) + T(b, c, a, c, b) + T(c, a, b, a, c) = \Delta_{1,0}(T(a, b, c)), \quad (1)$$

$$j(a \wedge b) = O(a, b, a) + O(b, a, b). \quad (2)$$

(1) の拡張として  $\Delta_{n,0}(T(a_1, a_2, \dots, a_{n+2})) \in \text{Ker } \mathfrak{s}_{2n+1,0}$  を期待しており, これは第 5 節の  $\mathcal{IH}$  の観点からも重要な問題である.  $n = 2$  までは確認できたが,  $n \geq 3$  は懸案となっている. さて [38] では (2) の拡張に取り組み,  $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,1}$  に関する結果を得た. まず  $n$  が偶数のとき,  $\text{Ker } \mathfrak{s}_{n,1} = \{0\}$  が分かる. そこで以下  $n = 2m - 1$  ( $m \geq 2$ ) とする. また対称な 2 ループ Jacobi 図

$$\left( \begin{array}{l} a_i, b_i, c_i \in \{1^\pm, \dots, g^\pm\}, \\ a_i = a_{p-i+1}, b_i = b_{q-i+1}, c_i = c_{r-i+1}, \\ p, q, r \geq 1, p + q + r + 2 = 2m - 1 \end{array} \right)$$

で生成される部分加群を  $\langle \Theta_{2m-1}^{\geq 1,s} \rangle \subset \mathcal{A}_{2m-1}^c$  と書き, 商写像  $\pi: Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \rightarrow (Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m})/\mathfrak{s}(\langle \Theta_{2m-1}^{\geq 1,s} \rangle)$  を考える. このとき, 次が成り立つ.

**定理 15 ([38])** 核  $\text{Ker}(\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1,1})$  は階数  $\frac{1}{2}((2g)^m - (2g)^{\lfloor m/2 \rfloor})$  の自由  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  加群であり,  $O(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \dots, a_1) + O(a_m, \dots, a_2, a_1, a_2, \dots, a_m)$  で生成される.

証明の鍵は  $\bar{z}_{2m,l}: Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \rightarrow \mathcal{A}_{2m,l}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  であり,  $\text{Ker}(\pi \circ \mathfrak{s}_{2m-1,1})$  の上からの評価を導く. その際に  $\mathcal{A}_{2m,2}^c$  の構造を知る必要があり, 「1つの 3 価頂点を円周に膨らませる」準同型  $\text{bu}: \mathcal{A}_{n,l}^c \rightarrow \mathcal{A}_{n+2,l+1}^c$  を用いて次の結果を得た.

**定理 16 ([38])**  $n \geq 3$  のとき,  $\text{bu}$  は同型  $\text{bu}: \mathcal{A}_{n-2,1}^c \rightarrow \mathcal{A}_{n,2}^c / \langle \Theta_n^{\geq 1} \rangle$  を誘導する.

ここで  $\langle \Theta_n^{\geq 1} \rangle \subset \mathcal{A}_{n,2}^c$  は  $\langle \Theta_{2m-1}^{\geq 1,s} \rangle$  の定義において対称とは限らないものも含めて得られる部分加群である. 一方, 下からの評価のために手術写像の精密化  $\tilde{\mathfrak{s}}: \tilde{\mathcal{A}}_n^c \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$  を導入し, クラスパー手術の間の関係を導いた.

#### 4.2. $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$ への応用

$n \geq 2$  のとき  $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$  だけでなく  $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2}$  も Abel 群となり, 完全列

$$0 \rightarrow Y_{n+1}\mathcal{IC}/Y_{n+2} \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+2} \rightarrow Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow 0$$

を介して  $Y_{n+1}\mathcal{IC}/Y_{n+2}$  と  $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$  を関連付けている. 手術写像の精密化  $\bar{s}$  に関する結果を組み合わせることで, 次を得る.

**定理 17** ([38]) Abel 群  $Y_3\mathcal{IC}/Y_5$  はトーシオンを持たない.

一方  $\text{tor}(Y_3\mathcal{IC}/Y_4) \neq \{0\}$  ([37]) だから, 特に上記の完全列は分裂しない ( $n = 3$ ).

#### 4.3. Goussarov-葉廣予想

Abel 群への写像  $f: \mathcal{IC} \rightarrow A$  がグラフクラスパーによる手術 (もしくは  $\mathcal{I}$  の元による手術) に関して良く振る舞うとき,  $f$  を有限型不変量と呼ぶ.  $M, M' \in \mathcal{IC}$  が  $Y_{n+1}$  同値のとき,  $n$  次有限型不変量  $f$  に対して  $f(M) = f(M')$  であることが知られている. 逆に任意の  $n$  次有限型不変量によって区別できないとき, それらは  $Y_{n+1}$  同値だろうというのが Goussarov-葉廣予想であり,  $n = 1, 2$  の場合は正しい ([28]). そして  $Y_3\mathcal{IC}/Y_4$  と  $Y_4\mathcal{IC}/Y_5$  に関する前述の研究の応用として, 次が得られる.

**定理 18** ([37, 38])  $n = 3, 4$  のとき, Goussarov-葉廣予想は正しい.

### 5. ホモロジー同境界群

$M_1, M_2 \in \mathcal{C}$  がホモロジーコボルダント  $M_1 \sim_H M_2$  であるとは, 閉 3 次元多様体  $M_1 \cup_{\partial} M_2$  を境界に持つ滑らかな 4 次元多様体  $W$  が存在して, 包含写像の誘導する写像  $H_*(M_j; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(W; \mathbb{Z})$  が同型となることを言う. このとき  $\mathcal{IH} = \mathcal{IC}/\sim_H$  をホモロジーコボルディズム群と呼ぶ<sup>11</sup>. そして自然な射影  $q: \mathcal{IC} \rightarrow \mathcal{IH}$  から準同型  $\text{Gr } q: Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1} \rightarrow Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1}$  が定まる.

#### 5.1. 高次 Sato-Levine 不変量

$L_n$  を  $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$  上の自由 Lie 代数とし,  $D_n = \text{Ker}(H \otimes L_{n+1} \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} L_{n+2})$  と置く. このとき第  $n$  Johnson 準同型は  $\tau_n: Y_n\mathcal{IH}/Y_{n+1} \rightarrow D_n$  を誘導する. そして次の命題は 0 ループ部分  $\bar{z}_{2m,0}$  をある準同型  $\kappa$  と関連付けている.

**命題 19** ([37])  $m \geq 1$  のとき, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\tau_{2m-1}: Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \rightarrow D_{2m-1}) & \xrightarrow{\text{incl}} & Y_{2m-1}\mathcal{IC}/Y_{2m} \xrightarrow{\bar{z}_{2m,0}} \mathcal{A}_{2m,0}^c \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow \text{Gr } q & & \uparrow \nu \\ \text{Ker}(\tau_{2m-1}: Y_{2m-1}\mathcal{IH}/Y_{2m} \rightarrow D_{2m-1}) & \xrightarrow{\kappa} & L_{m+1} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{array}$$

ここで  $\nu, \kappa$  は Conant, Schneiderman, Teichner [5, 6, 7] が導入した準同型で, 特に  $\kappa$  は本質的に高次 Sato-Levine 不変量である. 一方, 1 ループ以上の部分がどのような情報を捉えているかについては今後の課題である. 最後に定理 17 の類似を紹介する.

**定理 20** ([38]) Abel 群  $Y_3\mathcal{IH}/Y_5$  はトーシオンを持たない.

なお  $\mathcal{IC}$  の場合と同様に  $\text{tor}(Y_3\mathcal{IH}/Y_4) \neq \{0\}$  ([37]) だから, やはりトーシオンの有無に関して対照的な結果となっている.

<sup>11</sup> 過去の講演集に逆井 [43] や谷口 [45] がある.

## 6. 今後の課題

第1節で述べた  $\text{tor}(\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1))$  や  $\text{tor} H_1(\mathcal{K}_g; \mathbb{Z})$  を完全決定することが大事な課題である。本研究では3次元トポロジーを利用するという戦略をとったが、曲面の研究のみで別証明を与えることも興味深い<sup>12</sup>。また現時点では偶数位数のトーション元が存在することしか分かっておらず、たとえば  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を直和因子に持つか否か、奇数位数のトーション元があるか否かなどは定かでない。

一方、3次元トポロジーの観点からは  $Y_n \mathcal{I} \mathcal{C} / Y_{n+k}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を決定することが大きな目標となる。具体的には「いつトーションが存在し、どれくらい豊富にあるか」などに興味がある。関連する群として  $Y_n \mathcal{I} \mathcal{H} / Y_{n+k}$  も重要であり、Conant, Scheiderman, Teichner の仕事と合わせることでさらなる広がりが期待できる。

また  $\bar{z}_{n+1,1}$  を研究する中で、Reidemeister トーションとの繋がりを見出しており、これに関しては [37, 38] に引き続く共同研究として論文を執筆中である。

**謝辞.** 佐藤正寿氏と鈴木正明氏には原稿に目を通していただきました。日頃の共同研究のことも含め、この場を借りて感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] Dror Bar-Natan, Stavros Garoufalidis, Lev Rozansky, and Dylan P. Thurston. The Århus integral of rational homology 3-spheres. III. Relation with the Le-Murakami-Ohtsuki invariant. *Selecta Math. (N.S.)*, Vol. 10, No. 3, pp. 305–324, 2004.
- [2] Dorin Cheptea, Kazuo Habiro, and Gwénaél Massuyeau. A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms. *Geom. Topol.*, Vol. 12, No. 2, pp. 1091–1170, 2008.
- [3] Dorin Cheptea and Thang T. Q. Le. A TQFT associated to the LMO invariant of three-dimensional manifolds. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 272, No. 3, pp. 601–634, 2007.
- [4] Thomas Church, Mikhail Ershov, and Andrew Putman. On finite generation of the Johnson filtrations. arXiv:1711.04779, 11 2017.
- [5] James Conant, Rob Schneiderman, and Peter Teichner. Tree homology and a conjecture of Levine. *Geom. Topol.*, Vol. 16, No. 1, pp. 555–600, 2012.
- [6] James Conant, Rob Schneiderman, and Peter Teichner. Whitney tower concordance of classical links. *Geom. Topol.*, Vol. 16, No. 3, pp. 1419–1479, 2012.
- [7] James Conant, Robert Schneiderman, and Peter Teichner. Geometric filtrations of string links and homology cylinders. *Quantum Topol.*, Vol. 7, No. 2, pp. 281–328, 2016.
- [8] Alexandru Dimca, Richard Hain, and Stefan Papadima. The abelianization of the Johnson kernel. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, Vol. 16, No. 4, pp. 805–822, 2014.
- [9] Alexandru Dimca and Stefan Papadima. Arithmetic group symmetry and finiteness properties of Torelli groups. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 177, No. 2, pp. 395–423, 2013.
- [10] Quentin Faes. Triviality of the  $J_4$ -equivalence among homology 3-spheres. arXiv:2105.14253, 2021.
- [11] Mikhail Goussarov. Finite type invariants and  $n$ -equivalence of 3-manifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 329, No. 6, pp. 517–522, 1999.
- [12] Kazuo Habiro. Claspers and finite type invariants of links. *Geom. Topol.*, Vol. 4, pp. 1–83, 2000.
- [13] 葉廣和夫. 日本の現代数学—新しい展開をめざして, 結び目の同値関係とクラスパーについて, pp. 175–196. 数学書房, 2010.

<sup>12</sup> 実際、曲面の研究の範疇で再証明する試みが海外の研究者によって行われている。

- [14] Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau. The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies. arXiv:1702.00830, 2017.
- [15] Richard Hain. Infinitesimal presentations of the Torelli groups. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 10, No. 3, pp. 597–651, 1997.
- [16] Tetsuya Ito. On LMO invariant constraints for cosmetic surgery and other surgery problems for knots in  $S^3$ . *Comm. Anal. Geom.*, Vol. 28, No. 2, pp. 321–349, 2020.
- [17] Dennis Johnson. The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for  $\mathcal{I}$ . *Ann. of Math. (2)*, Vol. 118, No. 3, pp. 423–442, 1983.
- [18] Dennis Johnson. The structure of the Torelli group. II. A characterization of the group generated by twists on bounding curves. *Topology*, Vol. 24, No. 2, pp. 113–126, 1985.
- [19] Dennis Johnson. The structure of the Torelli group. III. The abelianization of  $\mathcal{T}$ . *Topology*, Vol. 24, No. 2, pp. 127–144, 1985.
- [20] Ronen Katsir. Elliptic associators and the LMO functor. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 25, No. 1, pp. 1650002, 71, 2016.
- [21] Maxim Kontsevich. Vassiliev’s knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, Vol. 16 of *Adv. Soviet Math.*, pp. 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [22] Alexander Kupers and Oscar Randal-Williams. On the Torelli Lie algebra. arXiv:2106.16010, 2021.
- [23] 栗屋隆仁. On the LMO invariant. 第51回トポロジーシンポジウム講演集, 2004.
- [24] Thang T. Q. Le, Jun Murakami, and Tomotada Ohtsuki. On a universal perturbative invariant of 3-manifolds. *Topology*, Vol. 37, No. 3, pp. 539–574, 1998.
- [25] Jerome Levine. Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 1, pp. 243–270, 2001.
- [26] Jerome Levine. Addendum and correction to: “Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group” [*Algebr. Geom. Topol.* 1 (2001), 243–270; MR1823501 (2002m:57020)]. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 2, pp. 1197–1204, 2002.
- [27] Gwénaél Massuyeau and Jean-Baptiste Meilhan. Characterization of  $Y_2$ -equivalence for homology cylinders. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 12, No. 4, pp. 493–522, 2003.
- [28] Gwénaél Massuyeau and Jean-Baptiste Meilhan. Equivalence relations for homology cylinders and the core of the Casson invariant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 365, No. 10, pp. 5431–5502, 2013.
- [29] Gwénaél Massuyeau and Delphine Moussard. A splicing formula for the LMO invariant. *Canad. J. Math.*, to appear.
- [30] Atsushi Mochizuki. The Casson-Walker invariant of 3-manifolds with genus one open book decompositions. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 28, No. 6, pp. 1950018, 84, 2019.
- [31] Shigeyuki Morita. Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces. *Duke Math. J.*, Vol. 70, No. 3, pp. 699–726, 1993.
- [32] Shigeyuki Morita. Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect. In *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, Vol. 2 of *Geom. Topol. Monogr.*, pp. 349–406. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.
- [33] Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki. Torelli group, Johnson kernel, and invariants of homology spheres. *Quantum Topol.*, Vol. 11, No. 2, pp. 379–410, 2020.
- [34] Delphine Moussard. Splitting formulas for the rational lift of the Kontsevich integral. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 20, No. 1, pp. 303–342, 2020.
- [35] J. Murakami and T. Ohtsuki. Topological quantum field theory for the universal quantum invariant. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 188, No. 3, pp. 501–520, 1997.
- [36] Yuta Nozaki. An extension of the LMO functor. *Geom. Dedicata*, Vol. 185, pp. 271–306,

2016.

- [37] Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, and Masaaki Suzuki. Abelian quotients of the  $Y$ -filtration on the homology cylinders via the LMO functor. *Geom. Topol.*, to appear.
- [38] Yuta Nozaki, Masatoshi Sato, and Masaaki Suzuki. On the kernel of the surgery map restricted to the 1-loop part. arXiv:2103.07086, 2021.
- [39] Tomotada Ohtsuki. *Quantum invariants*, Vol. 29 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002. A study of knots, 3-manifolds, and their sets.
- [40] 大槻知忠. ベッチ数が1の3次元多様体に対するLMO不変量の精密化と摂動的不変量. 第55回トポロジーシンポジウム講演集, 2008.
- [41] Tomotada Ohtsuki. Perturbative invariants of 3-manifolds with the first Betti number 1. *Geom. Topol.*, Vol. 14, No. 4, pp. 1993–2045, 2010.
- [42] 大槻知忠. 結び目の不変量. 共立講座数学の輝き. 共立出版, 2015.
- [43] 逆井卓也. 曲面のホモロジー同境全体が作る群の構造について. 第52回トポロジーシンポジウム講演集, 2005.
- [44] 清水達郎. ホモロジー3球面の Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の別構成とその応用. 第61回トポロジーシンポジウム講演集, 2014.
- [45] 谷口正樹. 3次元ホモロジー球面のなすホモロジー同境群と Chern-Simons 汎関数. 第66回トポロジーシンポジウム講演集, 2019.
- [46] Anderson Vera. Alternative versions of the Johnson homomorphisms and the LMO functor. arXiv:1902.10012, 2019.
- [47] Anderson Vera. Johnson-Levine homomorphisms and the tree reduction of the LMO functor. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 170, No. 2, pp. 291–325, 2021.
- [48] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of  $\text{Diff}(S^4)$ . arXiv:1812.02448, 2018.