第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

Extension problem of quasi-morphisms and commuting symlectomorphisms

川﨑 盛通　(青山学院大学理工学部数理サイエンス学科(旧物理・数理学科))*

令和三年八月二十七日

1. シンプレクティック幾何における変換群

まずはシンプレクティック幾何の基本事項と, シンプレクティック多様体の自然な変換群であるハミルトン微分同相群とシンプレクティック微分同相群について説明する. なお, 本章は二年前の筆者のトポロジーシンポジウムの要項と重複する説明も多く, 詳しい方は本章を飛ばして読むと良い(逆に詳しく知りたい方は[Ban97, PR14]など参照). 本稿では多様体は全て連結で境界のない滑らかなものを考えるとする.

定義 1.1. M を $2n$ 次元多様体とする. M 上の二次微分形式 ω がシンプレクティック形式であるとは, ω が閉形式, つまり $d\omega = 0$ であって, 任意の $x \in M$ について $(\omega^n)_x \neq 0$ となることである. 偶数次元多様体 M とその上のシンプレクティック形式 ω の組 (M, ω) を **シンプレクティック多様体**という.

シンプレクティック幾何学の歴史的起源は解析力学にあり, 余接束には自然なシンプレクティック形式が入り, その上のハミルトン力学系 (後述) が解析力学におけるハミルトン力学系と対応する.

さて, シンプレクティック多様体の自然な変換群についてであるが, まず定義から思いつくのはシンプレクティック構造を保つような微分同相写像の成す群である. すなわち, 多様体 M の微分同相群を $\mathrm{Diff}(M)$ として, シンプレクティック多様体 (M, ω) の**シンプレクティック微分同相群** $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ を以下のように定義する.

$$\mathrm{Symp}(M, \omega) = \{\psi \in \mathrm{Diff}(M) \,|\, \psi^*\omega = \omega\}.$$

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし, その上の C^∞ 級ベクトル場の成す集合を $\mathcal{X}(M)$ とする. M 上の函数 $H \colon M \to \mathbb{R}$ について, その**ハミルトン・ベクトル場** X_H を

$$\text{任意の } V \in \mathcal{X}(M) \text{ について, } \omega(X_H, V) = -dH(V)$$

によって定義する (ω は非退化二次形式なので, このような X_H は一意に定まる).

円周 S^1 を $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ によって定める. また, 本稿では時間依存しコンパクト台をもつハミルトン函数を考える. つまり本稿において, **シンプレクティック多様体** (M, ω) **上のハミルトン函数とは, 滑らかな函数** $H \colon [0, 1] \times M \to \mathbb{R}$ **であって, その台が** $[0, 1] \times M$ **内のコンパクト部分集合となるものを指す**. また, ハミルトン函数 $H \colon [0, 1] \times M \to \mathbb{R}$ について, その時間パラメータ t を固定したものを H_t で定める. つまり $H_t \colon M \to \mathbb{R}$ を $H_t(x) = H(t, x)$ によって定義する.

本稿は木村満晃氏 (京都大学), 松下尚弘氏 (琉球大学), 丸山修平氏 (名古屋大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究 [KKMM21, KKM+21] に基づくもので, 科研費 (課題番号:18J00765, 21K13790, 21J11199, 19K14536 と 17H04822) の助成を受けたものである.
キーワード：擬準同型, ハミルトン微分同相群, カラビ擬準同型
* 〒 252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1, 青山学院大学数理サイエンス学科
e-mail: kawasaki@math.aoyama.ac.jp

ハミルトン函数$H\colon [0,1]\times M \to \mathbb{R}$について, そのハミルトン・イソトピー$\{\phi_H^t\}_{t\in[0,1]}$を時間変化するベクトル場$\{X_{(H_t)}\}_t$による積分として定義する. つまり, 微分方程式$\phi_H^0 = \mathrm{id}$, $\frac{d\phi_H^t}{dt} = X_{(H_t)}$の解として定義する. 更に, ϕ_H^1をϕ_Hと略記し, これをH**により生成されたハミルトン微分同相写像**と呼び, ハミルトン函数から生成される微分同相写像を**ハミルトン微分同相写像**と呼ぶ.

シンプレクティック多様体(M,ω)についてハミルトンの成す集合を**ハミルトン微分同相群**と呼び, $\mathrm{Ham}(M,\omega)$と表記する. これは名前の通り写像の合成について群を成す. (ただし, 「ハミルトン函数で生成される」という形での定義のため, 実際に群を成すことを証明するのは少し非自明である.)

任意のハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保存し, 更にいえばハミルトン微分同相群はシンプレクティック微分同相群の正規部分群である.

ハミルトン微分同相群$\mathrm{Ham}(M,\omega)$を「リー群」とみなす場合, その「リー環」である$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}(M,\omega))$はハミルトン・ベクトル場の成す線形空間となる. ハミルトン・ベクトル場がハミルトン函数の微分のみで決まることを考えると, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}(M,\omega))$は$C^\infty(M)/\mathbb{R}$と同一視でき, 特にハミルトン微分同相群は「無限次元リー群」である.

2. 主結果

少し唐突ではあるが, 「シンプレクティック微分同相群はどのくらい可換な元の組を持っているか」という問題を考える. 一般には自由群のように可換な元の組のほとんどないような群もあるが, シンプレクティック微分同相群の場合は以下のように多くの可換なシンプレクティック微分同相写像がある.

(i) $2n$次元のシンプレクティック・トーリック多様体には自然にn次元トーラスによるハミルトン作用 : $\mathbb{T}^n \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$がある. もちろんトーラスは可換群であるので, この作用から可換な元の組をとることができる.

(ii) 互いに交わらない開集合U_1, U_2をとる. 開集合U_1, U_2をそれぞれ台に持つようなシンプレクティック微分同相写像ϕ_1, ϕ_2を考えると, これらは可換となる. ここで, 微分同相写像ϕの台とは, 集合$\{x\in M\,;\,\phi(x)\neq x\}$の閉包として定義される.

(iii) $\mathcal{L}_X\omega = 0$を満たすようなベクトル場Xにより生成されるフロー$\{\phi_X^t\}_{t\in\mathbb{R}}$を考える. このとき, 各$\phi_X^t$はシンプレクティック微分同相写像で, 任意の$s, t\in\mathbb{R}$について$\phi_X^s$と$\phi_X^t$は可換.

さて, このように見ると, 可換なシンプレクティック微分同相写像の組は無数に存在するように思えるが, **可換になるための必要条件**は何か存在するのであろうか. シンプレクティック多様体が曲面の場合のこの問題への一つの答えが本稿の主結果であるが, それを記述するためにフラックス準同型を導入する. シンプレクティック微分同相群の単位元成分を$\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$とおく.

定義 2.1 ([Ban78])**.** 種数lが2以上の連結有向閉曲面Sとその上の面積形式ωを考える. フラックス準同型$\mathrm{Flux}_\omega\colon \mathrm{Symp}_0(S,\omega)\to H_c^1(S;\mathbb{R})$を

$$\mathrm{Flux}_\omega(h) = \int_0^1 [\iota_{X_t}\omega]dt.$$

ここで, $\{\psi^t\}_{t\in[0,1]}$ は $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ の中のイソトピーで, $\psi^0=1$, $\phi^1=h$ を満たすもの. このとき, $\mathrm{Flux}_\omega(h)$ の値は $\{\psi^t\}_{t\in[0,1]}$ の選び方に依存せず, $\mathrm{Flux}_\omega\colon \mathrm{Symp}_0(S,\omega)\to H^1_c(S;\mathbb{R})$ は *well-defined* な準同型となる.

本稿で解説する主定理は以下である.

定理 2.2 ([KKMM21])**.** 種数 l が2以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ の元の組 $(h_1,\ldots,h_n)$ であって任意の i,j に対して $h_ih_j=h_jh_i$ を満たすものに対して, 以下が成立する.

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle \mathrm{Flux}(h_1),\ldots,\mathrm{Flux}(h_n)\rangle_{\mathbb{R}}\leq l.$$

この定理によれば, 可換なシンプレクティック微分同相写像の組があれば, そのフラックス準同型の像には上のような制限が付くことになる. この定理を群作用の言葉で言い換えたのが以下である.

定理 2.3 ([KKMM21])**.** 種数 l が2以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, 任意の準同型 $A\colon\mathbb{Z}^n\to\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle \mathrm{Im}(\mathrm{Flux}_\omega\circ A)\rangle_{\mathbb{R}}\leq l.$$

更に二個の可換なシンプレクティック微分同相群について以下の予想を提唱する.

予想 2.4 ([KKMM21])**.** 種数 l が2以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, 条件 $h_1h_2=h_2h_1$ を満たす任意の $h_1,h_2\in\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に対して, 以下が成立する.

$$\mathrm{Flux}_\omega(h_1)\smile\mathrm{Flux}_\omega(h_2)=0.$$

この予想の状況証拠として以下の定理を示した.

定理 2.5 ([KKMM21])**.** 種数 l が2以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. このとき, 条件 $h_1h_2=h_2h_1$, $\mathrm{Flux}_\omega(h_1)\in\mathrm{Sp}(2l,\mathbb{Z})\cdot W_\beta$ を満たす任意の $h_1,h_2\in\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に対して, 以下が成立する.

$$\mathrm{Flux}_\omega(h_1)\smile\mathrm{Flux}_\omega(h_2)=0.$$

定理2.5は定理2.2の「兄弟」ともいえる定理であるが, これより本稿においては定理2.2に絞って解説する.

3. カラビ準同型, カラビ擬準同型

定理2.2, 2.5を証明する上で肝となる道具が **Pyのカラビ擬準同型** [Py06] である. これを説明するために, まずは「擬準同型」とは何であるかを説明する.

定義 3.1. 群 G 上の実数値函数 $\mu\colon G\to\mathbb{R}$ に対して障害 *(detect)* $D(\mu)$ を以下で定義する.

$$D(\mu)=\sup_{x,y\in G}|\mu(x)+\mu(y)-\mu(xy)|.$$

障害 $D(\mu)$ が有限, つまり $D(\mu)<\infty$ となるとき, μ は**擬準同型**であるという. 擬準同型 μ が任意の $x\in G$, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して $\mu(x^n)=n\mu(x)$ を満たすとき, μ は**同次擬準同型**であるという. 群 N に対して G 上の同次擬準同型の成す空間を $\mathrm{Q}(G)$ と書く *(*定義よりこの空間は実線形空間となる*)*.

注意 3.2. $D(\mu)=0$ のとき, μ は準同型であり, これが「擬準同型」と呼称する由来である.

有界函数は定義より明らかに擬準同型である. また, 群 G について G 上の擬準同型の成す実線形空間を $\overline{\mathrm{Q}}(G)$, G 上の有界函数の成す実線形空間を $B(G)$ とすると,

$$\overline{\mathrm{Q}}(G)/B(G)\cong \mathrm{Q}(G)$$

が成立する. これが同次擬準同型を考える動機の一つである.

例 3.3. 同次擬準同型の最も古典的な例はポアンカレの回転数で, これは円周の向きを保つ同相群 $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}^+(S^1)$ の上で定義される同次擬準同型である.

また, 幾何学的群論で盛んに研究されているグロモフ双曲群も *(非初等的な場合には)* 非自明な同次擬準同型を許容する *[EF97].* 一方で, 次元が *2,4* でない閉多様体の微分同相群が非自明な同次擬準同型を持たないことも *[Tsu12]* によって知られている[1].

「擬準同型」の次は「カラビ擬準同型」なる概念について説明するが, その前に「カラビ準同型」について説明する.

シンプレクティック多様体 (M,ω) が**完全**であるとは, シンプレクティック形式 ω が完全形式であることである. $2n$ 次元の完全シンプレクティック多様体 (M,ω) 上のカラビ準同型 $\mathrm{Cal}\colon \mathrm{Ham}(M,\omega)\to\mathbb{R}$ を以下の式で定義する.

$$\mathrm{Cal}_M(\phi)=\int_0^1\int_M F_t\omega^n\,dt.$$

ここで, $F\colon[0,1]\times M\to\mathbb{R}$ は $\varphi_F=\phi$ となるコンパクト台ハミルトン函数である. 値 $\mathrm{Cal}_M(\phi)$ はハミルトン函数 F の選び方に依存せず, したがってカラビ準同型 $\mathrm{Cal}\colon \mathrm{Ham}(M,\omega)\to\mathbb{R}$ は well-defined な準同型である. (詳しくは [Cal70, Ban97] など参照)

閉シンプレクティック多様体は完全シンプレクティック多様体とはならないことが知られている. そこで自然な問題として「閉シンプレクティック多様体上でカラビ準同型のような概念を考えられるか」という問いが発生する.[2]

しかし, そこで問題になるのはバンヤガの以下の有名な結果 ([Ban78]) である.

定理 3.4 ([Ban78])**.** 閉シンプレクティック多様体 (M,ω) のハミルトン微分同相群 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ は単純群である.

この定理により, 閉シンプレクティック多様体の場合には $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 上にカラビ準同型どころか準同型も存在し得ないことも分かる. そこで,「準同型」の部分を上述の「擬準同型」に緩めてカラビ準同型の類似を考えたのが, Entov と Polterovich [EP03] である. カラビ擬準同型の導入のために以下の概念を導入する.

定義 3.5. 同次擬準同型 $\mu\colon \mathrm{Ham}(M,\omega)\to\mathbb{R}$ を考える. 空でない M の開集合 U が μ **についてカラビ性を満たす**とは, $[0,1]\times U$ にコンパクト台をもつ任意のハミルトン函数

[1] 次元が 2,4 のときに微分同相群が非自明な同次擬準同型を許容するかは長く未解決であったが, 2 次元の場合は [BHW19] が (高種数の場合に) 同次擬準同型を許容することを示した.4 次元の場合は未だに未解決である

[2] カラビ準同型の定義式 $\mathrm{Cal}_M(\phi)=\int_0^1\int_M F_t\omega^n\,dt$ をそのまま閉シンプレクティック多様体の場合に適用してカラビ準同型を定義しようとすると well-defined 性が破綻する. なぜならば, $\varphi_F=\phi$ となるコンパクト台ハミルトン函数 F をとったとき, それに非零定数 C を加えた $F+C$ も $\varphi_{F+C}=\phi$ を満たしているが, $\int_0^1\int_M(F_t+C)\omega^n\,dt=\int_0^1\int_M F_t\omega^n\,dt+\int_0^1\int_M C\omega^n\neq\int_0^1\int_M F_t\omega^n\,dt$ となってしまうからである.

$F\colon [0,1]\times U \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\mu(\varphi_F) = \int_0^1 \int_M F_t \omega^n \, dt.$$

となることである.

定義 3.6. X, Y をシンプレクティック多様体 (M,ω) の部分集合とする. X が Y **から *displaceable*** であるとは, ある $f \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ が存在して, $f(X) \cap \bar{Y} = \emptyset$ となることである. ここで, $\bar{Y}$ は Y の閉包である. 単に X が ***displaceable*** といった場合には, X が X 自身から *displeceable* であることを指す.

定義 3.7. 同次擬準同型 $\mu\colon \mathrm{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ がカラビ擬準同型であるとは, M の任意の *displaceable* な開部分集合が μ についてカラビ性を満たすことである.

注意 3.8. さて, カラビ擬準同型の研究されてきた歴史的背景についてだが, 定義 *3.7* に *displaceability* が出てくるように, *displaceability* の判定問題が背景にある.

例えば, 閉シンプレクティック多様体上の任意の可積分系[3] は *displaceable* でないファイバーを持つことが知られているが, これは *[EP06]* の有名な結果で, 証明にはカラビ擬準同型の一般化であるカラビ部分擬準同型を用いる[4].

この *[EP06]* の結果の特殊な場合として, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内のクリフォード・トーラス

$$\{[z_0;\ldots;z_n] \in \mathbb{C}P^n\,;\, |z_0|^2 = |z_1|^2 = \cdots = |z_n|^2\}$$

が *displaceable* でないことも知られている *[BEP04]* [5].

Entov と Polterovich の [EP03] に始まる一連の研究 (サーベイとしては [Ent14, PR14] を薦める) では, ハミルトン・フレアー理論を用いて構成したカラビ擬準同型を用いていた. 一方で, 種数 2 以上の閉リーマン面の場合にフレアー理論を用いないカラビ擬準同型の構成を考えたのが Py[Py06] である. 彼の構成を一言で述べるのはなかなか難しいが, 「種数 2 以上の閉リーマンの普遍被覆はポアンカレ円盤で, その境界は円周なので, その円周を用いて (円周の同相群の普遍被覆の上の擬準同型である) 回転数の構成のアナロジーを行う」というのが大雑把なアイディアである.

種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω に対し, Py の構成したカラビ擬準同型を μ_P とかくものとする. 定理 2.2, 2.5 を証明する上で眄となる定理が以下である.

定理 3.9 (Py のカラビ擬準同型の拡張不能性)**.** $\hat{\mu}|_{\mathrm{Ham}(S,\omega)} = \mu_P$. 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S とその上の面積形式 ω を考える. 曲面 S のコホモロジー群 $H^1(S;\mathbb{R})$ の部分線形空間 V の次元が l より大きいとすると, $\mathrm{Flux}_\omega^{-1}(V)$ 上の同次擬準同型 $\hat{\mu}$ であって, $\hat{\mu}|_{\mathrm{Ham}(S,\omega)} = \mu_P$ となるものは存在**しない**.

4. 擬準同型の拡張定理

定理 2.2, 2.5 の証明には擬準同型のある種の拡張定理を用いるが,

---

[3] 可積分系ということで思い出したが, 可積分系研究者の Anna Kiesenhofer さんが東京五輪自転車競技女子ロードレースで金メダルを受賞されたことをお祝い申し上げる.

[4] この結果の一般化としては筆者らの論文 [KR19] も参照 (我田引水)

[5] $\mathbb{C}P^n$ のシンプレクティック形式としてはフビニ・スタディ形式を考えている.

命題 4.1 (Proposition 6.4 of [KKMM20])**.** 群の完全列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{q} Q \to 1$$

を考える. 準同型 $q\colon G \to G/N$ が実質的切断 *(virtual section)* を持つ, つまり群 Q の有限位数部分群 Λ であって群準同型 $s_1\colon \Lambda \to G$ で任意の $x \in \Lambda$ に対して $Q \circ s_1(x) = x$ となるものがあると仮定する. このとき, 写像 $i^*\colon \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)^G$ は全射.

注意 4.2. 命題 *4.1* の Λ が自明群, つまり Q が有限群の場合は石田智彦氏の結果である *([Ish14]).* 命題 *4.1* の証明自体も石田氏の手法の一般化であり, 今回の主定理の証明で重要な定理 *4.3* の証明も同様に石田氏のアイディアが鍵となる.

この定理の「一様格子版」が以下の定理であり, これが定理 2.2, 2.5 の証明のもう一つの眶となる.

定理 4.3 (一様格子に対する拡張定理)**.** G を位相群, N を G の部分位相群, そして Q を局所コンパクトな位相群とする. 群の完全列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{q} Q \to 1$$

を考える. 群 Q の離散部分群 Λ であって群準同型 $s_1\colon \Lambda \to G$ で任意の $x \in \Lambda$ に対して $q \circ s_1(x) = x$ となるものを考える. 更に, 作用 $\Lambda \curvearrowright Q$ の相対コンパクトな狭義基本領域 B で以下を満たすものが存在すると仮定する.

(∗) 写像 $q|_{q^{-1}(\overline{B})}\colon q^{-1}(\overline{B}) \to \overline{B}$ の連続な切断 (準同型であることは仮定しない) $\bar{s}_2\colon \overline{B} \to G$ が存在する.

このとき, 任意の G 不変な連続擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ に対して, G 上の同次擬準同型 $\hat{\mu}\colon G \to \mathbb{R}$ であって, $\hat{\mu}|_N = \mu$ となるものが存在する.

5. 定理 2.2 の証明

本章では, 定理 3.9, 4.3 を用いて定理 2.2 を証明する.

ここで注意すべきは, 定理 4.3 において, 拡張される擬準同型の連続性を仮定していたことである. したがって, Py のカラビ擬準同型 μ_P が連続となるように $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ の位相を選ぶ必要があるが, 筆者らにはどのような位相を選べば良いのか分からなかった. そこで, Py のカラビ擬準同型 μ_P を連続にするように「改造」する. このための用いるのが Brandenbursky の構成したカラビ擬準同型である.

Brandenbursky [Bra15] は曲面組紐群上の擬準同型を用いることで, $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ 上にカラビ擬準同型 $\mu_B\colon \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$ を構成した. これは元々石田 [Ish14] が S が円盤の場合に行った議論を種数 2 以上の有向閉曲面の場合に一般化したものである.

定理 5.1 ([EPP12])**.** 組 (S,ω) を閉曲面 S にシンプレクティック形式 (面積形式) ω の付随したものとする. 函数 $\mu_1, \mu_2\colon \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ 上のカラビ擬準同型であるとする. このとき, μ_1 と μ_2 の差 $\mu_1 - \mu_2\colon \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathbb{R}$ は C^0 位相について連続な函数となる.

練習問題 5.2. 任意のシンプレクティック多様体 (M,ω) とその上のカラビ擬準同型 $\mu\colon \mathrm{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ について, μ は C^0 位相について連続とはなりえないことを示せ.

この定理を用いて μ_P を連続な擬準同型 $\mu_P - \mu_B$ に置き換えて定理 4.3 を適用するわけであるが, 定理 2.2 を用いたい都合上, $\mu_P - \mu_B$ の拡張可能性が改めて問題になる. ところがなんと, Brandenbursky のカラビ擬準同型 μ_B は $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ 上の同次擬準同型の $\mathrm{Ham}(S,\omega)$ への制限として構成されており, μ_B は自明に $\mathrm{Symp}_0(S,\omega)$ に拡張可能である. したがって, $\mu_P - \mu_B$ の拡張可能性の問題は μ_P のそれと全く等価なのである.

定理 2.2 の証明. 背理法で証明するので, $\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_n) \rangle_{\mathbb{R}} > l$ と仮定する. ここで, $h_1, \ldots, h_n$ を適当に並び替えることにより, $\mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1})$ が一次独立であると仮定する. ここで,

$$V = \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}},$$
$$\Lambda = \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

とおくと, Λ は V の一様格子である.

更に, 完全列

$$1 \to \mathrm{Ham}(S,\omega) \to \mathrm{Flux}^{-1}(V) \xrightarrow{q} V \to 1$$

一様格子 Λ から $\mathrm{Flux}^{-1}(V)$ への写像 $s_1 \colon \Lambda \to \mathrm{Flux}^{-1}(V)$ を

$$s_1\left(a_1 \mathrm{Flux}(h_1) + \cdots + a_{l+1} \mathrm{Flux}(h_{l+1})\right) = h_1^{a_1} \circ \cdots \circ h_{l+1}^{a_{l+1}}$$

とおくと, $h_i h_j = h_j h_i$ より s_1 は準同型である.

よって, 定理 4.3 より, $\mu_P - \mu_B$ は $\mathrm{Flux}^{-1}(V)$ へ拡張可能である.

ここで, $\mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1})$ は一次独立なので,

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}} > l$$

となり, この拡張可能性は定理 3.9 と矛盾する. したがって,

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \mathrm{Flux}(h_1), \ldots, \mathrm{Flux}(h_{l+1}) \rangle_{\mathbb{R}} \leq l.$$

□

6. 定理 3.9 の証明

定理 3.9 を証明する上で肝となるのは次の補題である.

補題 6.1 ([KK19, Lemma 4.8]). *群 G と, その正規部分群 N の上の同次擬準同型 $\mu \colon N \to \mathbb{R}$ を考える. 以下の条件を満たす $f, g \in G$ の存在を仮定する.*

- $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$,
- $[f,g] \in N$,
- $\mu([f,g]) \neq 0$.

*このとき, G 上の同次擬準同型 $\hat{\mu}$ であって $\hat{\mu}|_G = \mu$ となるものは存在**しない**.*

これは以下の補題からただちに従う.

補題 6.2. 同次擬準同型 $\hat{\mu}\colon G \to \mathbb{R}$ を考える. さらに, $f, g \in G$ で $f(gf^{-1}g^{-1}) = (gf^{-1}g^{-1})f$ を満たすものを考える. このとき,

$$\hat{\mu}([f, g]) = 0.$$

練習問題 6.3. 補題 *6.2* を示せ.

補題 6.1 の条件を満たす $f, g \in \mathrm{Flux}^{-1}(V)$ を実際に構成して μ_P が $\mathrm{Flux}^{-1}(V)$ へ拡張不能なのを示すのが, 定理 3.9 の証明である. ただし, その構成は図を大量に用いるので, 紙面に限りのある本稿で解説するのは適当でないと思われる. 実際のトポロジーシンポジウムでの講演を聞いていただくか, もしくは原論文を実際に読まれることを薦める. 原論文の第 3 章の図だけを眺めるだけでも構成の雰囲気は伝わるものかと思う.

7. 拡張不能擬準同型の成す空間について

本章では [KKM+21] の研究について解説するが, 簡単のために非常に限定的な場合に絞って紹介する.

Py のカラビ擬準同型の拡張不能性が問題になったわけだが, より一般の問題として, 群とその正規部分群の組 (G, N) に対して,

- N 上の同次擬準同型で G へ (同次擬準同型として) 拡張不能なものが存在するか.
- 拡張不能なものが存在するとしたらどのくらい存在するか.

という問題が考えられるであろう. この問題にアプローチしたのが [KKM+21] である.

正規部分群 N から G への包含写像を $i\colon N \to G$ とした場合に, これは線形空間の間の準同型 $i^*\colon \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)$ を誘導する. そこで, 「拡張不能な擬準同型がどのくらい存在するか」を測る量として線形空間 $\mathrm{Q}(N)/i^*\mathrm{Q}(G)$ の次元が一つ適当であろう. しかしながら, 拡張不能性には以下のような自明な障害が存在する. 群 G の正規部分群 N 上の同次擬準同型 μ が **G–不変**であるとは, 任意の $x \in N$, $g \in G$ について $\mu(g^{-1}xg) = \mu(x)$ となることである.

命題 7.1. 群 G 上の任意の同次擬準同型は G–不変である.

練習問題 7.2. 命題 *7.1* を示せ.

この命題 7.1 より明らかに $i^*\mathrm{Q}(G) \subset \mathrm{Q}(N)^G$ であるので, $\mathrm{Q}(N)^G/i^*\mathrm{Q}(G)$ を「拡張不能な擬準同型の成す空間」として考えることとしよう.

以下, 群 G に対して, その交換子群 $[G, G]$ を G', そのアーベル化 $G/[G, G]$ を G^{ab} とかく. 交換子群 G' から G への包含写像を $i\colon G' \to G$, G から G^{ab} への商写像を $q\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ とかく. また, 本章では**コホモロジー群は全て実係数とする**.

定理 7.3.

$$\dim \mathrm{Q}(G')^G/i^*\mathrm{Q}(G) \le \dim \mathrm{H}^2(G^{\mathrm{ab}})$$

更に, もしも G がグロモフ双曲的であれば, このとき,

$$\dim \mathrm{Q}(G')^G/i^*\mathrm{Q}(G) = \dim \mathrm{H}^2(G^{\mathrm{ab}}).$$

例 7.4. 種数lが2以上の連結有向閉曲面Sを考える. 群GをSの基本群$\pi_1(S)$とする.
　このとき, Gは双曲群となるのが知られており, 定理 *7.3* より

$$\dim \mathrm{Q}(G')^G/i^*\mathrm{Q}(G) = \dim \mathrm{H}^2(G^{\mathrm{ab}}) = l(2l-1).$$

となることが分かる. これまで説明してきた事項からただちに分かる結果ではないが, *[KKM+21]* では更に

$$\dim\left(\mathrm{Q}(G')^G\middle/(\mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G))\right) = 1$$

も証明している.

定理 7.5. 以下の同型

$$\mathrm{Q}(G')^G/\left(\mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G)\right) \cong \mathrm{Im}(q^*) \cap \mathrm{Im}(c_G),$$

が存在する. ここで, $c_G\colon \mathrm{H}^2_b(G)$[6] $\to \mathrm{H}^2(G)$は比較写像である. 特に,

$$\dim\left(\mathrm{Q}(G')^G\middle/(\mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G))\right) \leq \dim \mathrm{H}^2(G).$$

例 7.6. 群Gが自由群や組紐群の場合, $\mathrm{H}^2(G) = 0$が知られており, 定理 *7.5* から

$$\mathrm{Q}(G')^G = \mathrm{H}^1(G')^G + i^*\mathrm{Q}(G)$$

となることが分かる.

注意 7.7. 定理 *7.3, 7.5* は原論文 *[KKM+21]* においてはより一般的な形で書かれている. 具体的には, 商G/Nが従順*(amenable)*であるような群Gとその正規部分群Nに対して, 定理 *7.3, 7.5* のG'をN, G^{ab}をG/Nに置き換えた主張が成立する.

8. 混合交換子長との比較問題

群G上の2つの非負値函数$\mu_1, \mu_2\colon G \to \mathbb{R}_{>0}$が**(双リプシッツ)同値**であるとは, ある定数$c > 0$が存在して任意の$g \in G$に対して$c^{-1} \cdot \mu_2(g) < \mu_1(g) < c \cdot \mu_2(g)$となることである.

　群Gとその正規部分群Nを考える. 群Gの元xが(G, N)**-交換子**であるとは, ある$g \in G$と$a \in N$が存在して$x = [g, a] = gag^{-1}a^{-1}$とかけることである. 群$G$の部分群$[G, N]$を$(G, G)$-交換子によって生成された部分群として定義する. NはGの正規部分群だったので, $[G, N]$はNの正規部分群となる. $[G, N]$の元xに対して, (G, N)**-交換子長** $\mathrm{cl}_{G,N}(x)$を

$$\mathrm{cl}_{G,N}(y) := \min\{k \mid \exists x_1, \ldots, x_k \in N, \exists g_1, \ldots, g_k \in G \text{ such that } y = [g_1, x_1]\cdots[g_k, x_k]\}$$

によって定義する. また, Feketeの補題により, 以下の極限

$$\mathrm{scl}_{G,N}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_{G,N}(x^n)}{n}$$

が存在して, この$\mathrm{scl}_{G,N}(x)$をxの**安定** (G, N)**-交換子長**と呼称する.

　$N = G$となるとき, $\mathrm{scl}_{G,G} = \mathrm{scl}_{N,N}$のことを単に**安定交換子長**といい, これは古典的によく研究された概念である. 安定交換子長sclについての基本文献としては[Cal09][7]

[6] これは有界コホモロジーと呼ばれるもので, [KKM+21] において極めて重要な役割を果たすものであるが, 紙面の関係で説明を省略する. 詳しく知りたい方は例えば, [Fri17], [Cal09] など参照

[7] なんと『scl』が正式な書名である!

がある．安定交換子長の他の有名な研究としては [EK01], [BIP08], [Mim10], [Tsu12], [CMS14], [BBF16], [BHW19] など参照.

安定交換子長の一般化である安定 (G,N)-交換子長を提唱したのは筆者らの仕事([KK19]) で, その後も [KKMM20], [Kar21a],[Kar21b] による仕事もあるが, 本稿で紹介する [KKM+21] で示したのは以下である.

定理 8.1 ([KKM+21])**.** 群 G とその正規部分群 N が $\mathrm{Q}(N)^G = i^*\mathrm{Q}(G) + \mathrm{H}^1(N)^G$ を満たすとする. このとき,

(1) scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は $[G,N]$ 上で同値である.

(2) さらに, もし $N = [G,G]$ ならば, 任意の $x \in [G,N]$ に対して $\mathrm{scl}_G(x) = \mathrm{scl}_{G,N}(x)$ となる.

定理 8.1 と例 7.6 により, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値である例が構成できる. 更に [KKM+21] では G が自由群 F_n の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ で N が IA 自己同型群 IA_n の場合にも scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値なのを示している.

そこで興味深い問題として, **scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値でない例として何があるか**がある. まず定理 8.1 より $\mathrm{Q}(N)^G \neq i^*\mathrm{Q}(G) + \mathrm{H}^1(N)^G$ が必要条件であり, 既述のように我々はその例をいくつか得た. そのうちで scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値でないことを実際に示せるものはあるのだろうか. 実は, 現地点で知られている例は本質的には以下のみである.

例 8.2. 種数 l が 2 以上の連結有向閉曲面 S, その上の面積形式 ω と S のコホモロジー群 $H^1(S;\mathbb{R})$ の部分線形空間 V を考え, $G = \mathrm{Symp}_0(S,\omega)$, $N = \mathrm{Flux}_\omega^{-1}(V)$ とおく. もし V の次元が l より大きいとすると, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は同値ではない.

上の主張は定理 3.9 の Py のカラビ擬準同型の拡張不能性の証明を議論を用いて証明できるが, その際に重要なのは拡張不能擬準同型の具体的な形が分かっていることである.

[KKMM21] では条件 $\mathrm{Q}(N)^G \neq i^*\mathrm{Q}(G) + \mathrm{H}^1(N)^G$ を満たす (G,N) の例が例 7.4 など多数挙げられているが, **これらの群で scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が同値かどうかは一切分かっていない**. これらの群においては拡張不能擬準同型の具体的な形が分からないのが一つの大きな障害である.

練習問題解答

練習問題 *5.2* の解答. シンプレクティック多様体 M 上の一点 x とリーマン計量を固定する. 函数列 $\{F_n\colon M \to \mathbb{R}\}_{n=1,2,\ldots}$ を, 各 n に対して台が x を中心とする半径 $1/n$ の球体に含まれていて, かつ $\int_M F_n\omega^m = n$ (M の次元を $2m$ とする) となるものとする.

このとき, ϕ_{F_n} はハミルトン微分同相写像の列は C^0 位相で恒等写像に収束する. 一方, μ はカラビ擬準同型なので十分大きい n に対して $\mu(\phi_{F_n}) = n$ となって, $\mu(\phi_{F_n}) = n$ は $n \to \infty$ で発散する. よって μ は C^0 位相について連続ではない. □

練習問題 *7.2* の解答. 任意の同次擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$, 任意の $f, g \in G$ について $\mu(gfg^{-1}) = \mu(f)$ を示す. こ

のとき, 任意の n について,

$$\begin{aligned}|\mu(g^{-1}fg)-\mu(f)| &= \frac{1}{n}\cdot|\mu(g^{-1}f^ng)-\mu(f^n)| \\ &\le \frac{1}{n}\cdot\Big(|\mu(g)+\mu(f^n)+\mu(g^{-1})-\mu(f^n)|+2D(\mu)\Big) \\ &\le \frac{1}{n}\cdot(|\mu(g)+n\mu(f)-\mu(g)-n\mu(f)|+2D(\mu)) \\ &= \frac{2}{n}D(\mu).\end{aligned}$$

上の n は任意だったので, $\mu(g^{-1}fg)=\mu(f)$ を得る. □

練習問題 *6.3* の解答. 条件 $f,g\in G$ で $f(gf^{-1}g^{-1})=(gf^{-1}g^{-1})f$ より, 任意の n について

$$[f,g]^n=\left(f(gf^{-1}g^{-1})\right)^n=f^n(gf^{-1}g^{-1})^n=f^ngf^{-n}g^{-1}=[f^n,g].$$

$\mu\colon G\to\mathbb{R}$ は同次擬準同型なので,

$$\begin{aligned}|\mu([f,g])| &= \frac{1}{n}\cdot|\mu([f^n,g])| \\ &\le \frac{1}{n}\cdot\Big(|\mu(g)+\mu(f^n)+\mu(g^{-1})+\mu(f^{-n})|+3D(\mu)\Big) \\ &\le \frac{1}{n}\cdot(|\mu(g)+n\mu(f)-\mu(g)-n\mu(f)|+3D(\mu)) \\ &= \frac{3}{n}D(\mu).\end{aligned}$$

上の n は任意だったので, $\mu([f,g])=0$ を得る. □

謝辞

まずは本稿執筆の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝いたします. この機会に共同研究者の皆様にも改めて感謝したく思います. 他にも本研究を支えてくださった数多くの方々に感謝いたします.

参考文献

[Ban78] Augustin Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), no. 2, 174–227.

[Ban97] ______, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, vol. 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[BBF16] Mladen Bestvina, Ken Bromberg, and Koji Fujiwara, *Stable commutator length on mapping class groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **66** (2016), no. 3, 871–898. MR 3494163

[BEP04] Paul Biran, Michael Entov, and Leonid Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 5, 793–802.

[BHW19] Jonathan Bowden, Sebastian Hensel, and Richard Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, preprint, arXiv:1909.07164 (2019).

[BIP08] Dmitri Burago, Sergei Ivanov, and Leonid Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Groups of diffeomorphisms, Adv. Stud. Pure Math., vol. 52, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, pp. 221–250.

[Bra15] Michael Brandenbursky, *Bi-invariant metrics and quasi-morphisms on groups of Hamiltonian diffeomorphisms of surfaces*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 9, 1550066, 29.

[Cal70] Eugenio Calabi, *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, Problems in analysis (Lectures at the Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), 1970, pp. 1–26.

[Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[CMS14] Danny Calegari, Naoyuki Monden, and Masatoshi Sato, *On stable commutator length in hyperelliptic mapping class groups*, Pacific J. Math. **272** (2014), no. 2, 323–351.

[EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289. MR 1452851

[EK01] H. Endo and D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 169–175.

[Ent14] Michael Entov, *Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 1147–1171.

[EP03] Michael Entov and Leonid Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 30, 1635–1676.

[EP06] ———, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 1, 75–99.

[EPP12] Michael Entov, Leonid Polterovich, and Pierre Py, *On continuity of quasimorphisms for symplectic maps*, Perspectives in analysis, geometry, and topology, Progr. Math., vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, With an appendix by Michael Khanevsky, pp. 169–197.

[Fri17] Roberto Frigerio, *Bounded cohomology of discrete groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 227, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[Ish14] Tomohiko Ishida, *Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk via braid groups*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **1** (2014), 43–51.

[Kar21a] Bastien Karlhofer, *Aut-invariant quasimorphisms on free products*, preprint, arXiv:2103.01354 (2021).

[Kar21b] ———, *Aut-invariant quasimorphisms on graph products of abelian groups*, preprint, arXiv:2107.12171 (2021).

[KK19] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura, *$\hat{G}$-invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, to appear in *Israel J. Math*, arXiv:1911.10855v2 (2019).

[KKM+21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, preprint, arXiv:2107.08571 (2021).

[KKMM20] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, preprint, arXiv:2007.02257 (2020).

[KKMM21] ———, *Commuting symplectomorphisms on a surface and the flux homomorphism*, preprint, arXiv:2102.12161 (2021).

[KR19] Morimichi Kawasaki and Orita Ryuma, *Existence of pseudo-heavy fibers of moment maps*, to appear in *Communications in Contemporary Mathematics*, arXiv:1901.09395 (2019).

[Mim10] Masato Mimura, *On quasi-homomorphisms and commutators in the special linear group over a Euclidean ring*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 18, 3519–3529.

[PR14] Leonid Polterovich and Daniel Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, CRM Monograph Series, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. MR 3241729

[Py06] Pierre Py, *Quasi-morphismes et invariant de Calabi*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 1, 177–195.

[Tsu12] Takashi Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 141–185.