第68回トポロジーシンポジウム（2021年8月：オンライン開催）

Bott多様体のコホモロジー剛性問題

石田 裕昭　(鹿児島大学)*

概　要

この講演では, Bott 多様体のコホモロジー剛性問題および強コホモロジー剛性問題について概説する. また 8 次元 Bott 多様体の強コホモロジー剛性について, 講演者の得た進展を報告する.

1. 序

1.1. Bott tower と Bott 多様体

まずこの講演の主役である Bott 多様体を導入する. 高さ n の **Bott tower** とは, $\mathbb{C}P^1$-束の列

$$B_\bullet : B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{\text{a point}\}$$

であって, 各ファイブレーション $B_j \to B_{j-1}$ が次のように順に構成されるものである: B_j は B_{j-1} 上の複素直線束 ξ_j, ξ'_j の Whitney 和 $\xi_j \oplus \xi'_j$ の射影化 $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$. Bott tower に現れる B_j 達を **Bott 多様体**という. Bott 多様体 B_n は実 $2n$ 次元の閉多様体多様体であり, 直線束 ξ_j, ξ'_j たちの選び方に依存する.

例 1. B_0 は 1 点で, B_0 上のベクトル束は直積束である. したがって B_1 は複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ に他ならない. B_2 は **Hirzebruch 曲面**と呼ばれ, 位相型は 2 つある. しかしながら $n \geq 3$ に対して B_n の位相型は加算無限個ある.

以下では, 直線束, ベクトル束といえば全て複素直線束, 複素ベクトル束を意味することとする. Bott 多様体の位相型あるいは微分位相型を分類することが問題である.

1.2. コホモロジー剛性問題 (cohomological rigidity problem) と強コホモロジー剛性問題 (strong cohomological rigidity problem)

コホモロジーは位相空間のホモトピー不変量であるが, 完全ではない. しかしながら特別な族に制限すれば完全不変量となりうる. 典型的な例として, 閉曲面はコホモロジーによって分類することができる. **コホモロジー剛性問題**とは, 与えられた多様体の族に対して, 次に述べるコホモロジー剛性が成り立つかどうかを問うものである:

定義 2. 可微分多様体の族 $\mathcal{M}$ が**コホモロジー剛性** (**cohomological rigid**) であるとは, 次を満たすことをいう: $M, N \in \mathcal{M}$ のコホモロジー環 $H^*(M)$ と $H^*(N)$ が同型ならば, M と N は微分同相である.

この講演ではコホモロジーは全て整係数のものを考えるが, 異なる係数をとれば別の問題になる. また, 微分同相ではなく同相やホモトピー同値を考えることもできる.

定義 3. 可微分多様体の族 $\mathcal{M}$ が**強コホモロジー剛性** (**strong cohomological rigid**) であるとは, 次を満たすことをいう: $M, N \in \mathcal{M}$ のコホモロジー環の間の任意の同型 $\varphi\colon H^*(N) \to H^*(M)$ に対し, 微分同相写像 $f\colon M \to N$ で $f^* = \varphi$ を満たすものが存在する.

*〒890-0065 鹿児島市郡元 1 丁目 21 番地 鹿児島大学理学部理学科数理情報科学プログラム
e-mail: ishida@sci.kagoshima-u.ac.jp

強コホモロジー剛性は明らかにコホモロジー剛性を導く. また, 強コホモロジー剛性である必要十分条件は, コホモロジー剛性かつ, 任意の $M \in \mathcal{M}$ とコホモロジー環の自己同型 $\varphi\colon H^*(M) \to H^*(M)$ に対して自己微分同相 $f\colon M \to M$ で $f^* = \varphi$ を満たすものが存在することである. これに注意すれば, 例えば向き付け可能な閉曲面のなす族は強コホモロジー剛性であることがわかる.

Bott 多様体に関しては, これまでのところコホモロジー剛性の反例は知られておらず, 以下に記載するようにいくつかの肯定的な結果が知られている.

1.3. いくつかの知られている結果

ここではBott 多様体のコホモロジー剛性問題に関して, 本講演と関連の深いものを, 議論の概略と共に簡潔に紹介する. 先行研究を全て網羅しているわけではないことを断っておく.

- Hirzebruch 曲面, すなわち実4次元の Bott 多様体はコホモロジー剛性である. γ を $\mathbb{C}P^1$ 上の tautological 直線束とし, 整数 a に対して Σ_a を $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{\otimes a})$ と定める. [Hir1951] において Σ_a と Σ_b が (微分) 同相であることと, a, b の偶奇が等しいことが同値であることを示されている. 一方で, $H^*(\Sigma_a)$ と $H^*(\Sigma_b)$ のコホモロジー環が同型になることと, a, b の偶奇が等しいことが同値であることは, 簡単な計算によって示すことができる.

- 6次元Bott 多様体はコホモロジー剛性である. [CMS2010] では6次元Bott 多様体 B_3, B_3' のコホモロジーの間の環同型は第一 Pontrjagin 類と第二 Stiefel-Whitney 類を保つことを示し, [Jup1973] を用いて示された.

- Bott 多様体 B_n のうち, $\mathbb{Q}$-係数コホモロジー環 $H^*(B_n, \mathbb{Q})$ が $H^*((\mathbb{C}P^1)^n, \mathbb{Q})$ と同型となるものを $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体と呼ぶ. [CM2012] では, 後で述べる階数2の分解可能ベクトル束の分解と, 注意深い考察によって, $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体は強コホモロジー剛性であることが示されている.

- さらに [Cho2015] では, $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体の強コホモロジー剛性を用いて, 「6次元Bott 多様体は強コホモロジー剛性であること」「8次元Bott 多様体はコホモロジー剛性であること」が示されている.

- [CMM2015] では, コホモロジー環の生成元を上手くとることによって, 純粋な代数的手法でBott 多様体のコホモロジー環の間の任意の同型はそれぞれのPontrjagin 類を保つことが示されている. また同時に環同型の構造を調べることによって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-trivial Bott 多様体は強コホモロジー剛性であることが示されている. ここでBott 多様体 B_n が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-trivial であるとは, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-係数コホモロジー環 $H^*(B_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が $H^*((\mathbb{C}P^1)^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型となることを言う.

2. 準備

2.1. Bott 多様体の整係数コホモロジー環

Bott tower

$$B_\bullet : B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{\text{a point}\}$$

について, 各 B_j は B_{j-1} 上の複素直線束 ξ_j, ξ'_j の Whitney 和 $\xi_j \oplus \xi'_j$ の射影化 $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$ であり, また直線束は第一 Chern 類によって分類される. ここでは Bott 多様体のコホモロジー環は ξ_j, ξ'_j たちの第一 Chern 類によって帰納的に記述できることを説明する.

まず初めに, ベクトル束の射影化について注意しておく. ベクトル束 ξ に対して, その射影化を $P(\xi)$ で表す. 多様体 B を底空間とする階数 n のベクトル束 V と直線束 L に対して, テンソル積 $L \otimes V$ は V と階数の等しいベクトル束である. これらの射影化 $P(V)$ と $P(L \otimes V)$ は共に B 上の $\mathbb{C}P^{n-1}$-束であるが, これらの間には自然な同型がある. 各点 $x \in B$ に対し, V_x, L_x をそれぞれ V, L のファイバーとし, L_x の 0 でない元 ℓ を用いて同型 $V_x \to L_x \otimes V_x$ を $v \mapsto \ell \otimes v$ によって定めれば, これは射影空間の微分同相 $P(V_x) \to P(L_x \otimes V_x)$ を誘導し, この微分同相は ℓ の取り方に依存しない.

Bott tower において, 各 B_j は B_{j-1} 上の複素直線束 ξ_j, ξ'_j の Whitney 和 $\xi_j \oplus \xi'_j$ の射影化 $P(\xi_j \oplus \xi'_j)$ であった. 上の注意から, ξ_j のテンソル積に関する逆元をテンソルすることによって, 1つ目の直線束は自明束 $\underline{\mathbb{C}}$ であると仮定しても一般性を失わない. 以下, ξ_j は B_{j-1} 上の直線束で $B_j = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j)$ とする. γ_j を $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j)$ の tautological 直線束, すなわち底空間を B_j, 全空間を

$$\gamma_j = \{(\ell, v) \in P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j) \times (\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_j) \mid \ell \ni v\}$$

とする直線束とする. $B_j \to B_{j-1}$ は $\mathbb{C}P^1$-束であり, また $\mathbb{C}P^1$ のコホモロジーは tautological 直線束の第一 Chern 類によって生成される. このことと Leray-Hirsch の定理 ([Hat2002] など) によって, B_j の整係数コホモロジー $H^*(B_j)$ は, $H^*(B_{j-1})$-加群として 1 と γ_j の第一 Chern 類 $x_j := c_1(\gamma_j) \in B_j$ によって生成されることがわかる. $H^*(B_{j-1})$-代数としての構造を理解するには, $x_j^2 \in H^4(B_j)$ さえ理解できれば十分である. ベクトル束 $\mathbb{C} \oplus \xi_j$ の $\pi_j\colon B_j \to B_{j-1}$ による引き戻し $\pi_j^*(\mathbb{C} \oplus \xi_j)$ にエルミート計量を一つ取り, 部分束 γ_j の直交補空間束を $\gamma_j^\perp$ とする. このとき $\pi_j^*(\mathbb{C} \oplus \xi_j) = \gamma_j \oplus \gamma_j^\perp$ であるから, 両辺の全 Chern 類を比較すれば $x_j(-x_j + \pi_j^* c_1(\xi_j)) = 0$ を得る. 従って $H^*(B_j)$ は $H^*(B_{j-1})$-代数として

$$H^*(B_j) \cong H^*(B_{j-1})[X]/(X^2 - c_1(\xi_j)X)$$

となる.

以上のことから, B_n の整係数コホモロジー環は次のように記述される. $X_j := \pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(x_j) \in H^2(B_n)$ とすれば, $X_1, \ldots, X_n$ は $H^2(B_n)$ の $\mathbb{Z}$-基底となり, $H^*(B_n)$ を $\mathbb{Z}$-代数として生成する. また $c_1(\xi_j) \in H^2(B_{j-1})$ より, $\pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_j^*(c_1(\xi_j))$ は $X_1, \ldots, X_{j-1}$ の一次結合 $\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i$ で表され, $X_j^2 = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i X_j$ となる. 従って対角成分が 0, 各成分が整数の n 次の上三角行列 (a_{ij}) を用いて

$$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(X_j^2 - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} X_i X_j \mid j = 1, \ldots, n), \quad \deg X_j = 2$$

と表示できる.

2.2. Bott 多様体に対応する上三角行列

前節で説明したことの逆を辿っていけば, 上三角行列から Bott tower を定めることができる. 対角成分が 0, 各成分が整数の n 次の上三角行列 (a_{ij}) に対して, Bott tower

$$B_\bullet : B_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 = \{\text{a point}\}$$

が次のように定まる: B_0 は 1 点, B_1 は複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ で, $x_1^{(1)} \in H^2(B_1)$ は B_1 の tautological 直線束の第一 Chern 類とする. B_1 上の直線束 ξ_2 を $c_1(\xi_2) = a_{12}x_1^{(1)}$ となるものとし, $B_2 = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_2)$ とする. $x_2^{(2)}$ を B_2 の tautological 直線束の第一 Chern 類とする. 射影 $\pi_2\colon B_2 \to B_1$ を用いて $x_1^{(2)} = \pi_2^* x_1^{(1)}$ とし, B_2 上の直線束 ξ_3 を $c_1(\xi_3) = a_{13}x_1^{(2)} + a_{23}x_2^{(2)}$ となるものとし, $B_3 = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_3)$ とする. この操作を繰り返すことによって, Bott tower で

$$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/(X_j^2 - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_iX_j \mid j = 1, \dots, n), \quad \deg X_j = 2$$

となるものが (微分同相を除いて) 一意的に構成される.

2.3. Bott 多様体上の階数 2 の分解可能ベクトル束の分類

Bott 多様体のコホモロジー剛性問題にあたって, 次の命題は有用である:

命題 4 ([Ish2012])**.** Bott 多様体 B_n 上の階数 2 の分解可能なベクトル束 V_1, V_2 について, V_1 と V_2 がベクトル束として同型なのは, V_1 と V_2 の全 Chern 類 $c(V_1)$ と $c(V_2)$ が等しいときかつその時に限る.

実際, Hirzebruch 曲面 Σ_a は次のように分類ができる. γ は $B_1 = \mathbb{C}P^1$ 上の tautological 直線束とする. $\Sigma_a = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{\otimes a})$ は, a が偶数 $2k$ のとき, $\gamma^{\otimes(-k)}$ をテンソルすれば $\Sigma_a = P(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k})$ を得る. 一方で $c(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k}) = c(\gamma^{\otimes(-k)})c(\gamma^{\otimes k}) = (1+x)(1-x) = 1$ より $\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes k}$ は自明である. したがって a が偶数の時, Σ_a は $(\mathbb{C}P^1)^2$ と微分同相である. a が奇数 $2k+1$ のときも同様に $\gamma^{\otimes(-k)}$ をテンソルすれば $\Sigma_a = P(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)})$ を得る. 一方で $c(\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)}) = 1 + x$ より $\gamma^{\otimes(-k)} \oplus \gamma^{\otimes(k+1)}$ は $\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma$ と同型である. したがって a が奇数のとき, Σ_a は $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma)$ と微分同相である. これが $(\mathbb{C}P^1)^2$ と同相でないことは, 整係数コホモロジー環の間に同型が存在しないことから導かれる.

Hirzebruch 曲面, すなわち 4 次元の Bott 多様体の場合ほど単純ではないが, $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体の場合でも同様の議論によって分類がなされる ([CM2012]). 実 $2n$ 次元の $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体は, n の分割の個数だけ位相型がある. Hirzebruch 曲面は $\mathbb{Q}$-trivial Bott 多様体である.

3. $\mathbb{C}P^1$-束の強コホモロジー剛性と Bott tower の強コホモロジー剛性

3.1. $\mathbb{C}P^1$-束の強コホモロジー剛性

Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ に対し, $\mathbb{C}P^1$-束 $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \to B_n$ の全空間 $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ はまた Bott 多様体である. また前述の通り $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi))$ は自然に $H^*(B_n)$-代数の構造をもち,

$$H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)) \cong H^*(B_n)[X]/(X^2 - c_1(\xi)X), \quad \deg X = 2$$

となる. ごく簡単な計算および命題 4 によって, 次がわかる:

命題 5. Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ, ξ' に対し, 次は同値:

1. $H^*(B_n)$-代数として $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)) \cong H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi'))$,
2. ある $a \in H^2(B_n)$ が存在して $1 + c_1(\xi) = (1+a)(1+a+c_1(\xi'))$.
3. ある直線束 L が存在して $\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi \cong L \otimes (\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')$,

4. B_n 上の $\mathbb{C}P^1$-束として $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \cong P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')$.

特に, B_n 上の分解可能な直線束の Whitney 和から定まる $\mathbb{C}P^1$-束は, 全空間のコホモロジーの $H^*(B_n)$-代数としての構造によって分類される. また次も簡単な計算によって示すことは容易い:

命題 6. Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ に対し, $H^*(B_n)$-代数としての $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi))$ の自己同型はちょうど2つある. 1つは恒等写像であり, もう1つは $X \mapsto -X + c_1(\xi)$ で定まるものである.

$X \mapsto -X + c_1(\xi)$ によって定まる自己同型が, $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ の $\mathbb{C}P^1$-束としての自己同型によって誘導されることをみる. ベクトル束 $\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi$ に Hermite 計量を1つ取って固定し, $f\colon P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \to P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ を $\ell \in P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ に対してその直交補空間 $\ell^\perp$ を対応させる微分同相とする. f は $\mathbb{C}P^1$-束の自己同型であり, さらに $f^*\gamma \cong \gamma^\perp$ を満たすことが示される. ここで, γ は $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ の tautological 直線束である. したがって f は $X \mapsto -X + c_1(\xi)$ で定まる自己同型を誘導する. 命題5と合わせれば, 次がわかる:

命題 7 ($\mathbb{C}P^1$-束の強コホモロジー剛性)**.** Bott 多様体 B_n 上の直線束 ξ, ξ' について, 任意の $H^*(B_n)$-代数としての同型 $\varphi\colon H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')) \to H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi))$ は, ある $\mathbb{C}P^1$-束の同型 $f\colon P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \to P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi')$ によって誘導される.

3.2. Bott tower の強コホモロジー剛性

高さ n の2つの Bott tower

$$B_\bullet\colon B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0$$

と

$$B'_\bullet\colon B'_n \xrightarrow{\pi'_n} B'_{n-1} \xrightarrow{\pi'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi'_2} B'_1 \xrightarrow{\pi'_1} B'_0$$

が同型であることを, 次で定める: 微分同相写像の系列 $f_\bullet = \{f_k\colon B_k \to B'_k\}_{k=0}^n$ が存在して, 図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
B_n & \xrightarrow{\pi_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi_2} & B_1 & \xrightarrow{\pi_1} & B_0 \\
\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\
B'_n & \xrightarrow{\pi'_n} & B'_{n-1} & \xrightarrow{\pi'_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi'_2} & B'_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & B'_0
\end{array}$$

が可換になる. Bott tower の同型類は, 次に導入するフィルター付き次数付き環によって分類される.

高さ n の Bott tower

$$B_\bullet\colon B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0$$

に対して, フィルター付き次数付き環 $F_\bullet H^*(B_\bullet)$ を

- $i \geq n$ に対し, $F_i H^*(B_\bullet) := H^*(B_n)$,
- $0 \leq j \leq n-1$ に対し, $F_j H^*(B_\bullet) := \pi_n^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(H^*(B_j))$

と定める. 高さに関する帰納法と命題7によって, 次が示される ([Ish2012]):

定理 8 (Bott towerの強コホモロジー剛性)**.** $B_\bullet = (\{B_k\}_{k=0}^n, \{\pi_k\}_{k=0}^n)$, $B'_\bullet = (\{B'_k\}_{k=0}^n, \{\pi'_k\}_{k=0}^n)$は高さ$n$のBott tower, $\varphi_\bullet\colon F_\bullet H^*(B'_\bullet) \to F_\bullet H^*(B_\bullet)$はフィルトレーションを保つ次数付き環の同型とする． このとき, Bott tower の同型 $f_\bullet = \{f_k\colon B_k \to B'_k\}_{k=0}^n$ で各$k = 0, \dots, n$に対し$f_k^* = \varphi_k$を満たすものが存在する．

高さnのBott towerの一番上のBott多様体B_nの2次コホモロジー群には, (Bott towerの構成に用いた直線束の選び方に依存する)tautological直線束の第一Chern類から定まる特別な基底$X_1, \dots, X_n \in H^2(B_n)$があった. この生成元を用いれば, 定理**??**は次のように言い換えることができる:

系 9. B_n, B'_nはBott多様体とする. コホモロジー環の同型$\varphi\colon H^*(B'_n) \to H^*(B_n)$の先の生成元に関する表現行列が上三角行列ならば, φは微分同相$f\colon B_n \to B'_n$によって誘導される．

4. Hirzebruch曲面束の強コホモロジー剛性と8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性

前節では$\mathbb{C}P^1$-束について述べたが, 講演者は最近, Bott多様体上のHirzebruch曲面束に関して強コホモロジー剛性と, その応用を得た. ここではそれについて概略を述べる．

4.1. Hirzebruch曲面束の強コホモロジー剛性

B_nはBott多様体とし, B_n上の直線束ξ_{n+1}と, $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1})$上の直線束$\xi_{n+2}$をとる. このとき2つの射影

$$E = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+2}) \to P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1}) \to B$$

の合成$E \to B$はファイバーをHirzebruch曲面とするファイバー束であり, またE自身もBott多様体である. Eのコホモロジー環$H^*(E)$は自然に$H^*(B_n)$-代数の構造が入る.

定理 10. Bott多様体B_n上のHirzebruch曲面束$E \to B_n$, $E' \to B_n$と$H^*(B_n)$-代数としての同型$\widetilde{\varphi}\colon H^*(E') \to H^*(E)$に対し, B_n上の束の同型$\widetilde{f}\colon E \to E'$で$\widetilde{f}^* = \widetilde{\varphi}$を満たすものが存在する．

Hirzebruch曲面束の(弱い)コホモロジー剛性については, 命題4と代数的な計算のみ(ただし場合分けが煩雑ではあるが)で迫ることができる. 一方で“強い”コホモロジー剛性の証明は, $\mathbb{C}P^1$-束の場合と比べてずっと難しい. Hirzebruch曲面束$E \to B_n$のコホモロジーの$H^*(B_n)$-代数としての自己同型$\varphi\colon H^*(E) \to H^*(E)$が, $c_1(\xi_{n+1}) \in H^2(B_n)$と$c_1(\xi_{n+2}) \in H^2(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_1))$に与える代数的な制約を考察する. 具体的には, 次のような議論を行う: 射影の誘導する準同型は単射. $H^*(B_n) \subset H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1})) \subset H^*(E)$とみなす. $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}$をそれぞれ$P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+1})$, $E = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n+2})$のtautological直線束とする. x_{n+1}, x_{n+2}は$H^*(E)$の$H^*(B)$-代数としての生成元になる. ξ_{n+2}の第一Chern類は$a \in \mathbb{Z}$と$y \in H^2(B_n)$によって$c_1(\xi_{n+2}) = ax_{n+1} + y$と書ける. このとき$E \to B_n$のファイバーは$\Sigma_a$. $H^*(E)/H^{>0}(B_n) \cong H^*(\Sigma_a)$より, $H^*(B_n)$-代数としての同型$\widetilde{\varphi}\colon H^*(E) \to H^*(E)$は同型$\varphi\colon H^*(\Sigma_a) \to H^*(\Sigma_a)$を誘導する. 一方で, $H^*(\Sigma_a)$の任意の同型が$H^*(E)$の同型に持ち上がるかどうかはわからない. そこで,

1. 同型$\varphi\colon H^*(\Sigma_a) \to H^*(\Sigma_a)$を1つ固定する. φは8個あり, それらについて場合分けを行う.

2. φ が $\widetilde{\varphi}\colon H^*(E) \to H^*(E)$ に持ち上がるための $c_1(\xi_{n+1})$ と $c_1(\xi_2) = ax_{n+1} + y$ に関する必要十分条件を得る．特に，φ の持ち上げ可能性が $E \to B_n$ の構造群にどのような制約を与えるかを調べる．

3. 得られた必要十分条件を使って，$\widetilde{f}^* = \widetilde{\varphi}$ を満たす $\widetilde{f}\colon E \to E$ を構成する．

命題7と定理10を用いれば，帰納的に次が証明できる：

系 11. B_n, B'_n はBott多様体とする．コホモロジー環の同型 $\varphi\colon H^*(B'_n) \to H^*(B_n)$ の先の生成元に関する表現行列が

$$\begin{pmatrix} A_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n_k} \end{pmatrix}, \quad A_{n_j} \text{ は } 1 \times 1 \text{ あるいは } 2 \times 2 \text{ の行列}$$

ならば，φ はある微分同相 $f\colon B_n \to B'_n$ によって誘導される．

4.2. 8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性

先述の通り，これまで8次元Bott多様体はコホモロジー剛性であることが知られていた([Cho2015])．系11のおかげで，8次元Bott多様体の強コホモロジー剛性を以下の順に示すことができる．

1. B_4 は8次元Bott多様体，$\varphi\colon H^*(B_4) \to H^*(B_4)$ は同型とする．8次元Bott多様体はコホモロジー剛性であるから，φ が微分同相 $f\colon B_4 \to B_4$ に誘導されることを示せば十分である．

2. B_4 が $\mathbb{Q}$-trivialならば[CM2012]による．B_4 は $\mathbb{Q}$-trivialでないと仮定してよい．

3. B_4 が $\mathbb{Q}$-trivialでないとき，Bott tower $B_4 \to B_3 \to B_2 \to B_1 \to B_0$ の最初のファイブレーション $B_4 \to B_3$ は，B_1 上の $\mathbb{C}P^1$-束の引き戻しでないと仮定して良い．

4. 上の仮定によって，φ の表現行列は

$$\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

となることがわかる．

5. φ の表現行列が前者のときは系11から φ は微分同相によって誘導されることがわかる．後者のときは，6次元Bott多様体の強コホモロジー剛性([Cho2015])と命題7から微分同相によって誘導されることがわかる．

参考文献

[Cho2015] S. Choi, *Classification of Bott manifolds up to dimension 8*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **58** (2015), no. 3, 653–659. MR3391366

[CM2012] S. Choi and M. Masuda, *Classification of $\mathbb{Q}$-trivial Bott manifolds*, J. Symplectic Geom. **10** (2012), no. 3, 447–461. MR2983437

[CMM2015] S. Choi, M. Masuda, and S. Murai, *Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), no. 2, 965–986. MR3342682

[CMS2010] S. Choi, M. Masuda, and D. Y. Suh, *Topological classification of generalized Bott towers*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 2, 1097–1112. MR2551516

[Hat2002] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354

[Hir1951] F. Hirzebruch, *Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **124** (1951), 77–86. MR45384

[Ish2012] H. Ishida, *Filtered cohomological rigidity of Bott towers*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 2, 515–522. MR2945760

[Jup1973] P. E. Jupp, *Classification of certain* 6*-manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973), 293–300. MR314074