

# 層の圏上のパーシステンス的距離と シンプレクティック幾何における分離エネルギー

池 祐一 (東京大学 情報理工学系研究科)\*

## 1. 序論

柏原と Schapira によって創始された超局所層理論は層係数のモース理論ともいえるもので、多様体上の層を局所的にだけでなく余接束内で局所的 (超局所的) に調べることで層の詳しい解析を可能にする。この理論は偏微分方程式の研究に端を発し、 $D$  加群理論や特異点論などに応用されてきた。近年, Nadler–Zaslow [NZ09] と Tamarkin [Tam18] の先駆的な仕事をはじめとして、超局所層理論をシンプレクティック幾何に応用する研究が盛んに行われている。本講演では話を余接束に限って、Tamarkin 流のシンプレクティック幾何への層理論的アプローチ・講演者と浅野知紘氏との共同研究 [AI20a] で得られたハミルトニアンによる分離エネルギーの層理論的下限を与える手法について説明する予定である。

## 2. 超局所層理論におけるマイクロ台

この節では柏原と Schapira により創始された超局所層理論について解説する。超局所層理論において最も重要な概念の一つは「層に関する臨界点」を記述するマイクロ台というものである。ここでは基本的な文献 [KS90] に従ってマイクロ台の定義と基本性質を説明する。

まず層に関する記号を準備する。本稿では以下  $\mathbf{k}$  を体とする。位相空間  $X$  に対して、 $\mathbf{k}_X$  で茎が  $\mathbf{k}$  の定数層をあらわし、 $\text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  で  $X$  上の  $\mathbf{k}$  ベクトル空間の層 ( $\mathbf{k}_X$  加群) のなすアーベル圏をあらわす。超局所層理論では導来圏で物事を考える方が適しており、ここでもその考えに従い  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) := \mathbf{D}^b(\text{Mod}(\mathbf{k}_X))$  で  $X$  上の  $\mathbf{k}$  ベクトル空間の層の有界導来圏をあらわす。適切な条件のもとで、導来圏の間の函手である Grothendieck の六演算  $\otimes, R\mathcal{H}om, f^{-1}, Rf_*, Rf_!, f^!$  ( $f: X \rightarrow Y$  は連続写像) が定まる。

六演算には入らないが重要な演算である相対コホモロジーについて少し説明する。これは制限射が単射・全射・同形であるかを調べるための重要な概念である。 $Z$  を  $X$  の閉部分集合、 $F \in \text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  とする。  $X$  の開部分集合  $V$  に対して

$$\begin{aligned} \Gamma_{Z \cap V}(V; F) &:= \text{Ker}(\Gamma(V; F) \rightarrow \Gamma(V \setminus Z; F)) \\ &= \{s \in \Gamma(V; F) \mid \text{supp}(s) \subset Z \cap V\} \end{aligned}$$

と定める。すると、対応  $V \mapsto \Gamma_{Z \cap V}(V; F)$  は層を定めることが確かめられ、これを  $\Gamma_Z(F) \in \text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  とあらわす。函手  $\Gamma_Z(*): \text{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathbf{k}_X)$  は左完全函手となるので、その右導来函手  $R\Gamma_Z(*): \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  が定まる。その大域切断を  $R\Gamma_Z(X; F) := R\Gamma(X; R\Gamma_Z(F))$  と書き、 $j \in \mathbb{Z}$  に対して  $H_Z^j(X; F) := H^j R\Gamma_Z(X; F)$  と

本研究は科研費 (課題番号:15J07993) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 37J11, 53D35, 55N31, 35A27

キーワード: 超局所層理論, 分離エネルギー, 層量子化

\* 〒113-8654 東京都文京区本郷7-3-1 東京大学 大学院情報理工学系研究科

e-mail: ike@mist.i.u-tokyo.ac.jp, yuichi.ike.1990@gmail.com

において  $Z$  に台を持つ  $j$  次相対コホモロジーと呼ぶ.  $U := X \setminus Z$  とすると, 完全三角

$$R\Gamma_Z(X; F) \rightarrow R\Gamma(X; F) \rightarrow R\Gamma(U; F) \xrightarrow{+1}$$

が得られる. コホモロジーを取れば次の長完全列が得られる:

$$\cdots \rightarrow H_Z^j(X; F) \rightarrow H^j(X; F) \rightarrow H^j(U; F) \rightarrow H_Z^{j+1}(X; F) \rightarrow \cdots$$

上の完全三角あるいは長完全列から,  $R\Gamma_Z(X; F)$  は  $U = X \setminus Z$  上の切断の空間と  $X$  全体上の切断の空間のずれをあらわすことが分かる. 特に  $R\Gamma_Z(X; F) \simeq 0$  であれば制限射について同形  $R\Gamma(X; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U; F)$  が成り立つ. トポロジーでは  $H_Z^j(X; F)$  は  $H^j(X, X \setminus Z; F)$  と書かれることが多い.

以降最後まで連結な境界のない  $C^\infty$  級多様体上の層を考える. 多様体  $X$  に対して,  $\pi: T^*X \rightarrow X$  で  $X$  の余接束をあらわし,  $0_X$  でそのゼロ切断をあらわす. また,  $X$  の閉部分多様体  $M$  に対して,  $X$  内の  $M$  に対する余法束を  $T_M^*X$  であらわす.

以下この節の最後まで  $X$  を多様体とする. 層のマイクロ台とは大雑把に言えば層のコホモロジーを同形に拡張できない余方向をあらわす余接束の部分集合である. まず, マイクロ台の定義を与え, その後で定義が直感的に何を言っているのかを説明する.

**定義 2.1.**  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  の マイクロ台 (microsupport)  $\text{SS}(F) \subset T^*X$  を次で定義する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{点 } p \in T^*X \text{ が } p \notin \text{SS}(F) \text{ であるとは, } p \text{ の } T^*X \text{ 内での開近傍 } U \text{ が存在して,} \\ \text{任意の } x_0 \in X \text{ と任意の } C^\infty \text{ 級関数 } \varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ で } d\varphi(x_0) \in U \text{ を満たすもの} \\ \text{に対して } R\Gamma_{\{\varphi \geq \varphi(x_0)\}}(F)_{x_0} \simeq 0 \text{ となることをいう.} \end{array} \right.$$

余方向だけを考えているので  $\text{SS}(F)$  は  $T^*X$  の錐状 ( $\mathbb{R}_{>0}$  の作用で不変な) 閉部分集合となる.

上のマイクロ台の定義の気持ちを直感的に説明しよう.  $p \in T^*X \setminus 0_X$  として  $p \notin \text{SS}(F)$  の条件を考える. 定義の「 $U$  が存在して」という部分は  $d\varphi(x_0)$  が十分  $p$  に近いというだけのことだからここでは無視して,  $x_0 \in X$  と  $C^\infty$  級関数  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x_0 := \pi(p)$  かつ  $\varphi(x_0) = 0, d\varphi(x_0) = p$  を満たすように取る. このとき,  $\{\varphi = 0\}$  は  $x_0$  の近傍で滑らかな超曲面となり, 領域  $\{\varphi < 0\}$  は境界  $\{\varphi = 0\}$  の点  $x_0$  において外向き法線ベクトル  $p = d\varphi(x_0)$  を持つ (図 2.1 を参照).  $R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{x_0} \simeq 0$  という条件はコホモロジーを取って考えれば, 任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\varinjlim_{x_0 \in V} H_{\{\varphi \geq 0\}}^j(V; F) \simeq 0$$

であることと同値である. ここで  $V$  は  $X$  内の  $x_0$  の開近傍をわたる. 相対コホモロジーの長完全列を考えれば, これは任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対して制限写像

$$\varinjlim_{x_0 \in V} H^j(V \cup \{\varphi < 0\}; F) \rightarrow \varinjlim_{x_0 \in V} H^j(\{\varphi < 0\}; F)$$

(切除により同値だが局所的に書けば制限写像  $\varinjlim H^j(V; F) \rightarrow \varinjlim H^j(V \cap \{\varphi < 0\}; F)$ ) が同形であることと同値である. 状況は以下の図 2.1 を参照せよ. つまり, この条件は

領域  $\{\varphi < 0\}$  における任意のコホモロジー類が一意的に  $p$  の方向に拡張できることを述べている. 実際 [KS90] では, マイクロ台は「コホモロジーが伝播しない余方向の集合」と表現されている.

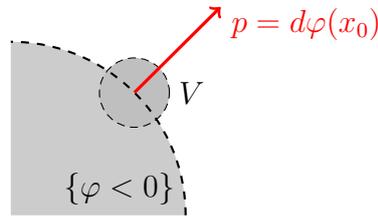


図 2.1:  $p \in T^*X$ , 領域  $\{\varphi < 0\}$  および  $V$  の状況

**例 2.2.** (i) 0 でない局所定数層  $F$  に対して  $SS(F) = 0_X$  である. 逆に  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  が  $SS(F) \subset 0_X$  を満たすならば, 任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対して  $H^j(F)$  は局所定数層である.

(ii) 閉区間  $[0, 1]$  上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層のゼロ拡張で定義される  $\mathbb{R}$  上の層  $\mathbf{k}_{[0,1]} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}})$  を考えよう. この層のマイクロ台は以下の図 2.2 のようになる.

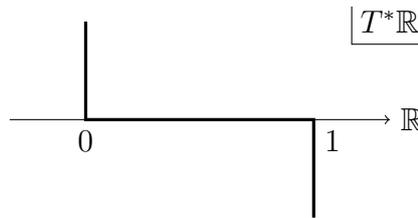


図 2.2:  $SS(\mathbf{k}_{[0,1]})$

$(0; 1) \in T^*\mathbb{R}$  がマイクロ台に入り,  $(0; -1) \in T^*\mathbb{R}$  が入らない理由を説明する. まず  $(0; 1)$  について判断するには, マイクロ台の定義から  $(-\infty, 0)$  と十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対する  $(-\infty, \varepsilon)$  上の切断を比べればよい. ここで

$$R\Gamma((-\infty, 0); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq 0, \quad R\Gamma((-\infty, \varepsilon); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}$$

である. したがって, 0 においては正の方向にコホモロジーが同形に拡張できないので  $(0; 1)$  はマイクロ台  $SS(\mathbf{k}_{[0,1]})$  に入ることが分かる.  $(0; -1)$  についても同様に考えればよいが, 今度は十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して

$$R\Gamma((0, +\infty); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}, \quad R\Gamma((-\varepsilon, +\infty); \mathbf{k}_{[0,1]}) \simeq \mathbf{k}$$

である. ゆえに, 0 において負の方向にはコホモロジーは同形にのびるので,  $(0; -1)$  はマイクロ台  $SS(\mathbf{k}_{[0,1]})$  に入らない.

(iii) (ii) の一般化として次を示すことができる.  $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数として, 任意の  $x \in \psi^{-1}(0)$  に対して  $d\psi(x) \neq 0$  であると仮定する.  $X$  の開部分集合  $U$  と閉部分集合  $Z$  を  $U := \{x \in X \mid \psi(x) > 0\}$ ,  $Z := \{x \in X \mid \psi(x) \geq 0\}$  で定める. すると,  $U$  および  $Z$  上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層の  $X$  へのゼロ拡張  $\mathbf{k}_U$  および  $\mathbf{k}_Z$  について

$$\begin{aligned} SS(\mathbf{k}_U) &= 0_X|_U \cup \{(x; c d\psi(x)) \mid \psi(x) = 0, c \leq 0\}, \\ SS(\mathbf{k}_Z) &= 0_X|_Z \cup \{(x; c d\psi(x)) \mid \psi(x) = 0, c \geq 0\} \end{aligned}$$

となる。つまり境界が滑らかな開部分集合上の定数層のゼロ拡張のマイクロ台は境界では外向きに、閉部分集合上の定数層のゼロ拡張のマイクロ台は境界では内向きに現れる。

(iv)  $M$  を  $X$  の閉部分多様体とする。このとき、 $SS(\mathbf{k}_M) = T_M^*X$  である。これは大雑把には  $M$  から法方向に動くときだけコホモロジーが変化することを言っている。

上でマイクロ台は「層に関する臨界点」を記述すると述べたが、それを明らかにするのが次の定理である。 $F$  が定数層  $\mathbf{k}_X$  の場合は、例 2.2(i) と合わせて「臨界値を越えなければ劣位集合のコホモロジーは同形である」という古典的なモース理論のコホモロジーに関する主張に対応する。

**定理 2.3** (超局所的モースの補題).  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数、 $a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  とする。さらに  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$  とし、次を仮定する：

- (1)  $\varphi$  は  $\text{Supp}(F)$  上固有である。
- (2) 任意の  $x \in \varphi^{-1}([a, b])$  に対して、 $d\varphi(x) \notin SS(F)$  である。

このとき、制限射  $R\Gamma(\varphi^{-1}((-\infty, b)); F) \rightarrow R\Gamma(\varphi^{-1}((-\infty, a)); F)$  は同形である。

ここでは詳しくは述べないが、Grothendieck の六演算を施した後の層のマイクロ台は演算を施す前の層たちのマイクロ台を使って評価することが可能である。

### 3. シンプレクティック幾何への層理論的アプローチ

この節では Tamarkin [Tam18] に端を発するシンプレクティック幾何への超局所層理論的アプローチの基礎について説明する。Tamarkin 圏とそこでの分離定理により余接束の二つのコンパクト部分集合が交わることを層理論的に示すことができる。さらに、Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] によるハミルトンアイソトピーの層量子化を用いることで余接束へのハミルトニアン作用を Tamarkin 圏に持ち上げられることも説明する。

以下最後まで  $M$  を (コンパクトとは限らない) 連結な境界のない多様体とする。

#### 3.1. Tamarkin の分離定理 ([Tam18, GS14])

Tamarkin は層の導来圏から Tamarkin 圏  $\mathcal{D}(M)$  を構成し、そこでの射の空間を用いて  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合が交わることを示せる分離定理を得た。基本的なアイデアは、 $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対してマイクロ台が  $A$  に含まれる  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_M)$  の部分圏  $\mathbf{D}_A^b(\mathbf{k}_M)$  を考え、二つのコンパクト部分集合  $A, B$  に対して射の空間  $\text{Hom}(\mathbf{D}_A^b(\mathbf{k}_M), \mathbf{D}_B^b(\mathbf{k}_M))$  を見ることで共通部分  $A \cap B$  を調べるというものである。しかし、層のマイクロ台は常に錐状であるから、一般の錐状ではないコンパクト集合に対してはこの単純なアイデアは上手く働かない。そこで Tamarkin が用いたトリックは底空間に 1 変数を付け足しコンパクト部分集合を錐状化して  $M \times \mathbb{R}_t$  上の層を考えるといるものである。 $(x; \xi)$  で  $T^*M$  の斉次局所座標をあらわし、 $(t; \tau)$  で  $T^*\mathbb{R}$  の標準的な斉次座標をあらわす。そして  $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対しては、その錐  $c(A) := \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0, (x; \xi/\tau) \in A\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  にマイクロ台が含まれる  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t})$  の部分圏を考えるのである。すると、 $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  の中の  $\Omega_+ := \{\tau > 0\}$  だけでマイクロ台を考える必要があるため、次のように部分圏  $\{F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}) \mid SS(F) \subset \{\tau \leq 0\}\}$  で割った商圏 (超局所化圏) を用いる。

**定義 3.1.**  $\Omega_+ := \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  とする. **Tamarkin 圏**  $\mathcal{D}(M)$  を

$$\mathcal{D}(M) := \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}; \Omega_+) = \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}) / \{F \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t}) \mid \text{SS}(F) \subset \{\tau \leq 0\}\}$$

で定める.  $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対して,  $\mathcal{D}(M)$  の充満部分圏  $\mathcal{D}_A(M)$  を

$$\mathcal{D}_A(M) := \{F \in \mathcal{D}(M) \mid \text{SS}(F) \cap \Omega_+ \subset c(A) := \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0, (x; \xi/\tau) \in A\}\}$$

で定める.

上では  $\mathcal{D}(M)$  を導来圏の商圏として定義したが, 商圏のままでは扱いが困難になる問題がある. そこで Tamarkin [Tam18] はある射影子を用いて  $\mathcal{D}(M)$  を  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t})$  の充満部分圏と同一視して議論を行った. このテクニックにより  $\mathcal{D}(M)$  とそこでの射の空間の扱いがはるかに簡単になるが, ここでは詳しく説明しない. この類の射影子の一般論は [GS14] も参照せよ.

$\mathcal{D}(M)$  の射の集合を用いて Tamarkin の分離定理の弱い形は次のように述べられる.

**命題 3.2** (Tamarkin の分離定理 (弱い形)).  $A, B$  を  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合とし,  $A \cap B = \emptyset$  と仮定する. このとき, 任意の  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  に対して,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \simeq 0$  が成り立つ.

この命題から,  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  であって  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \neq 0$  であるものを見つければ  $A \cap B \neq \emptyset$  であることが分かる. 実は上の分離定理は以下で説明する強い形の分離定理から従う. 超局所層理論では全ての対象を一旦は層として扱って, それらのマイクロ台を調べることで様々な同形を導くという手法がよく用いられる. ここでも射の集合  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G)$  を回復する層を用いて分離定理を示す. 実際, Tamarkin 圏  $\mathcal{D}(M)$  は内部 Hom 関手  $\text{Hom}^*: \mathcal{D}(M)^{\text{op}} \times \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  を持ち, それが

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \simeq H^0 R\Gamma_{[0, +\infty)}(\mathbb{R}_t; Rq_* \text{Hom}^*(F, G))$$

と射の集合を回復することが示せる. ここで  $q: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$  は  $\mathbb{R}_t$  への射影である. 重要なことは,  $\text{Hom}^*(F, G)$  は具体的に Grothendieck の六演算を用いて構成されるため, そのマイクロ台は  $F$  と  $G$  のマイクロ台で評価が可能であるということである. この内部 Hom 関手を用いて Tamarkin の分離定理の強い形は次のように述べられる.

**定理 3.3** (Tamarkin の分離定理 (強い形)).  $A, B$  を  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合とし,  $A \cap B = \emptyset$  と仮定する. このとき, 任意の  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  に対して  $Rq_* \text{Hom}^*(F, G) \simeq 0$  が成り立つ.

証明の概略. 一般に  $A$  と  $B$  の共通部分の仮定なしに, 任意の  $F, G \in \mathcal{D}(M)$  に対して  $R\Gamma(\mathbb{R}; Rq_* \text{Hom}^*(F, G)) \simeq 0$  となることが示せる. さらに, 仮定  $A \cap B = \emptyset$  と層の演算に関するマイクロ台の評価を用いると

$$\text{SS}(Rq_* \text{Hom}^*(F, G)) \subset 0_{\mathbb{R}_t}$$

となることがチェックできる. ゆえに, 例 2.2(i) で説明したことと  $\mathbb{R}_t$  が可縮であることから,  $Rq_* \text{Hom}^*(F, G)$  のコホモロジー層は  $\mathbb{R}_t$  上定数である. これら二つを合わせると  $Rq_* \text{Hom}^*(F, G) \simeq 0$  が得られる.  $\square$

### 3.2. ハミルトンアイソトピーの層量子化 ([GKS12])

ここでは Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] によるハミルトンアイソトピーの層量子化について解説する. 大雑把にはハミルトンアイソトピーのラグランジュグラフにマイクロ台が一致する層のことを層量子化と呼び, 彼らの論文では存在と一意性が証明されている. 前小節で述べたようにマイクロ台は錐状なので, ここでもハミルトンアイソトピーのグラフを錐状化して考える必要がある. 以下でこのテクニックについてもう少し詳しく説明する.

$T^*M$  の斉次局所座標  $(x; \xi)$  を用いて, Liouville 1-形式  $\theta$  を  $\theta := \langle \xi, dx \rangle$  により定める.  $I$  を閉区間  $[0, 1]$  を含む  $\mathbb{R}$  の開区間とし座標を  $s$  であらわす.  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  を時間依存するコンパクト台のハミルトン関数とすると, 時間依存する  $T^*M$  上のハミルトンベクトル場  $X_{H_s}$  が  $d\theta(X_{H_s}, *) = -dH_s$  により定まる. このハミルトンベクトル場のフローを  $\phi^H = (\phi_s^H)_{s \in I}: T^*M \times I \rightarrow T^*M$  と書き,  $H$  が生成するハミルトンアイソトピーと呼ぶ.

ハミルトンアイソトピー  $\phi^H$  は以下のように  $\hat{\phi}: \Omega_+ \times I \rightarrow \Omega_+$  に斉次に持ち上げることができる. ここで  $\Omega_+ = \{\tau > 0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}_t)$  であったことを思い出そう. 関数  $\hat{H}: T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times I \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\hat{H}_s(x, t; \xi, \tau) := \tau \cdot H_s(x; \xi/\tau)$  により定める. すると  $\hat{H}$  は次数1の斉次関数, すなわち任意の  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $\hat{H}_s(x, t; c\xi, c\tau) = c \cdot \hat{H}_s(x, t; \xi, \tau)$  である.  $\hat{H}$  が生成するハミルトンアイソトピー  $\hat{\phi}: T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times I \rightarrow T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t})$  は次の図式を可換にする. ここで  $\rho: \Omega_+ \rightarrow T^*M, (x, t; \xi, \tau) \mapsto (x; \xi/\tau)$  である:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_+ \times I & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \Omega_+ \\ \rho \times \text{id}_I \downarrow & & \downarrow \rho \\ T^*M \times I & \xrightarrow{\phi^H} & T^*M. \end{array}$$

構成から  $\hat{\phi}$  は斉次ハミルトンアイソトピーである. すなわち任意の  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $\hat{\phi}_s(x, t; c\xi, c\tau) = c \cdot \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau)$  が成り立つ.

その斉次性により  $\hat{\phi}_s$  の  $T^*((M \times \mathbb{R}_t)^2)$  内のグラフは錐状ラグランジュ部分多様体となる. この錐状ラグランジュ部分多様体にマイクロ台が一致する  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2})$  の対象が存在するというのが Guillermou–Kashiwara–Schapira [GKS12] の主張である. 実は彼らはさらに強く, 時間  $s$  での切り口のマイクロ台が  $\hat{\phi}_s$  のグラフに一致するような族である  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  の対象を構成した. このように変形族として層が得られることが, 次節での応用に本質的に重要である. その族のマイクロ台を記述するために錐状ラグランジュ部分多様体  $\Lambda_{\hat{\phi}} \subset T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times T^*M \times (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}) \times T^*I$  を

$$\Lambda_{\hat{\phi}} := \left\{ \left( \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau), (x, t; -\xi, -\tau), (s; -\hat{H}_s \circ \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau)) \right) \left| \begin{array}{l} (x; \xi) \in T^*M, \\ (t; \tau) \in (T^*\mathbb{R}_t \setminus 0_{\mathbb{R}_t}), \\ s \in I \end{array} \right. \right\}$$

により定めよう. 錐状化の構成より

$$\hat{H}_s \circ \hat{\phi}_s(x, t; \xi, \tau) = \tau \cdot (H_s \circ \phi_s^H(x; \xi/\tau))$$

であることが確かめられる.

**定理 3.4.** 上の状況で  $K \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  が一意的に存在して次を満たす：

- (1) マイクロ台について  $\text{SS}(K) \subset \Lambda_{\hat{\phi}} \cup 0_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I}$  が成り立つ.
- (2) 時刻  $s = 0$  において同形  $K|_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times \{0\}} \simeq \mathbf{k}_{\Delta_{M \times \mathbb{R}_t}}$  が成り立つ. ここで右辺は  $(M \times \mathbb{R}_t)^2$  の対角集合上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層のゼロ拡張である.

上の対象  $K$  を斉次ハミルトンアイソトピー  $\hat{\phi}$  の層量子化 (sheaf quantization) と呼ぶ. 簡単のため以下では  $K$  を  $\phi^H$  に付随した層量子化とも呼ぶ.  $s \in I$  に対して  $K_s := K|_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times \{s\}} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2})$  と定める. すると,  $K_s$  を核とする積分変換は関手  $\Phi_s^H := K_s \circ (*): \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  を誘導する. さらに,  $K_s$  のマイクロ台は  $\hat{\phi}_s$  のグラフであることとマイクロ台の評価により,  $\Phi_1^H$  は  $T^*M$  のコンパクト部分集合  $A$  に対して関手  $\mathcal{D}_A(M) \rightarrow \mathcal{D}_{\phi_s^H(A)}(M)$  を誘導することも示せる. こうして  $T^*M$  へのハミルトニアン  $H$  の作用が Tamarkin 圏  $\mathcal{D}(M)$  へと持ち上げられた.

#### 4. 分離エネルギーの層理論的評価 ([AI20a])

前節で,  $T^*M$  のコンパクト部分集合が交わることを示せる分離定理と  $T^*M$  へのハミルトニアン  $H$  の作用を層の圏に持ち上げることができる層量子化について説明した. 二つのコンパクト部分集合が共通部分を持たなければ Tamarkin 圏における射の空間は 0 であり, 層量子化による積分変換で層をハミルトン変形することができる. そこでハミルトン変形する前の層と変形した後の層がどれくらい離れているかを層の世界で調べることができれば分離エネルギーを層理論的にはかることができると考えた. これを実行したのが浅野氏との共同研究 [AI20a] である.

まず分離エネルギーの定義を思い出そう. 前と同様に  $I$  を閉区間  $[0, 1]$  を含む  $\mathbb{R}$  の開区間とする. コンパクト台のハミルトン関数  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  の Hofer ノルム  $\|H\|$  を

$$\|H\| := \int_0^1 \left( \max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right) ds$$

で定める. さらに  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合  $A, B$  に対して

$$e(A, B) := \inf \{ \|H\| \mid H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R} \text{ はコンパクト台で } A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset \}$$

と定め,  $A$  と  $B$  の 分離エネルギー (displacement energy) と呼ぶ.  $e(A, B) = +\infty$  ならば任意の  $H$  に対して  $A \cap \phi_1^H(B) \neq \emptyset$ , すなわち  $A$  と  $B$  は分離不可能 (non-displaceable) であることに注意する.

エネルギー評価定理の主張を述べるために  $M \times \mathbb{R}_t$  上の平行移動が誘導する  $\mathcal{D}(M)$  における射について説明する.  $c \in \mathbb{R}$  に対して  $T_c: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M \times \mathbb{R}_t, (x, t) \mapsto (x, t + c)$  で  $\mathbb{R}_t$  方向への平行移動写像をあらわす. すると,  $F \in \mathcal{D}(M)$  と  $c \leq d$  に対して  $\mathcal{D}(M)$  における標準的な射  $\tau_{c,d}(F): T_{c*}F \rightarrow T_{d*}F$  が定まる.  $q: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$  で  $\mathbb{R}_t$  への射影をあらわすことを思い出すと,  $F, G \in \mathcal{D}(M)$  に対しては  $Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G) \in \mathcal{D}(\text{pt})$  とみなせるから,  $c \leq d$  に対して  $\mathcal{D}(\text{pt})$  における射

$$\tau_{c,d}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)): T_{c*}Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G) \rightarrow T_{d*}Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)$$

が定まる. これは  $\tau_{c,d}(G): T_{c*}G \rightarrow T_{d*}G$  から誘導された射と一致することが示せる. この  $\tau_{c,d}$  を用いると, エネルギー評価定理は次のように述べられる. 不等式中の二つ目の不等号は  $\mathcal{H}om^*$  が  $\mathcal{D}(M)$  における射の集合を回復することから従う.

**定理 4.1** (エネルギー評価定理 [AI20a]).  $A, B$  を  $T^*M$  の二つのコンパクト部分集合とする. このとき, 任意の  $F \in \mathcal{D}_A(M)$  と  $G \in \mathcal{D}_B(M)$  に対して, 不等式

$$e(A, B) \geq \inf \{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)) = 0\} \\ \geq \inf \{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{射 } \text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(M)}(F, T_{c*}G) \text{ は零射である}\}$$

が成り立つ.

特に, 任意の  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  に対して  $\tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)) \neq 0$  ならば  $A$  と  $B$  は分離不可能である. これがもともとの Tamarkin の分離不可能性定理 (Tamarkin [Tam18, Thm. 3.1]) の主張であり, 定理 4.1 はその定量的な拡張とみなすことができる.

**例 4.2.** 定理 4.1 を用いた分離エネルギー評価の例を一つ紹介しよう.  $M = \mathbb{R}^m$  として  $T^*\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$  を考える.  $(x; \xi)$  で  $T^*\mathbb{R}^m$  の大域的な斉次シンプレクティック座標をあらわす.  $S^m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1\}$  としてコンパクト完全ラグランジュはめ込み  $\iota: S^m \rightarrow T^*\mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto (x; yx)$  を考える. 定理 4.1 を用いて, このはめ込みの像  $\iota(S^m)$  の分離エネルギー  $e(\iota(S^m), \iota(S^m))$  の評価を与えよう.  $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := -\frac{1}{3}y^3$  と定めれば, これは  $\iota^*\theta = df$  を満たすことが分かる. この原始関数  $f$  を用いて  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t$  の局所閉部分集合  $Z$  を

$$Z := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t \mid \|x\| \leq 1, -\frac{1}{3}(1 - \|x\|^2)^{\frac{3}{2}} \leq t < \frac{1}{3}(1 - \|x\|^2)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

と定めて,  $F$  を  $Z$  上の茎が  $\mathbf{k}$  の定数層のゼロ拡張, すなわち  $F := \mathbf{k}_Z \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t})$  とする. すると, 例 2.2(iii) で見たマイクロ台の評価より,  $F$  は  $\mathcal{D}_{\iota(S^m)}(\mathbb{R}^m)$  の対象を定めることが分かる.  $m = 1$  の場合の状況は図 4.1 と 4.2 を参照せよ.

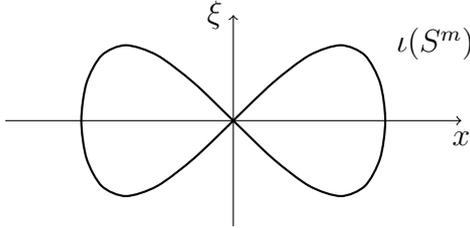


図 4.1:  $m = 1$  のときの  $\iota(S^m)$

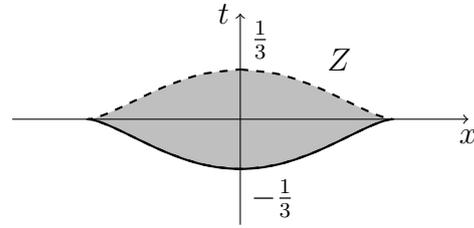


図 4.2:  $m = 1$  のときの  $Z$

この対象  $F$  に対して,  $Z$  を  $\mathbb{R}_t$  方向に平行移動して考えてみれば

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, T_{c*}F) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_t})}(F, T_{c*}F) \simeq \begin{cases} \mathbf{k} & (0 \leq c < \frac{2}{3}) \\ 0 & (c \geq \frac{2}{3}) \end{cases}$$

となることが分かる. さらに, この同形を通して  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}(F, T_{c*}F)$  から誘導される射は  $0 \leq c < 2/3$  に対して恒等写像である. ゆえに定理 4.1 より  $e(\iota(S^m), \iota(S^m)) \geq 2/3$  が得られる. これは Akaho [Aka15] でフレアー理論的に与えられている評価と同じである.

定理 4.1 は, もし  $A$  と  $B$  に付随する良い層が存在すれば  $A$  と  $B$  の分離エネルギーの評価が可能であるということだけを主張しており, そのような層の存在については何

も述べていない. [AI20a] に続く浅野氏との共同研究 [AI20b] では, 上の例 4.2 を一般化してある条件を満たすラグランジュはめ込みに対して良いエネルギー評価と交叉点の個数評価を与えるパラメータ付き Tamarkin 圏の対象が構成された.

以下で定理 4.1 の証明の概略を与える. 具体的には  $\mathcal{D}(M)$  に擬距離を導入して層のハミルトン変形がこの擬距離を Hofer ノルム以下だけ変化させることを示す.

**定義 4.3** ([AI20a]). (i)  $F, G \in \mathcal{D}(M)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  とする. このとき, 組  $(F, G)$  が  $(a, b)$ -interleaved であるとは, 射  $\alpha, \delta: F \rightarrow T_{a*}G$  と  $\beta, \gamma: G \rightarrow T_{b*}F$  が存在して次の条件を満たすことをいう:

$$(1) \text{ 合成射 } F \xrightarrow{\alpha} T_{a*}G \xrightarrow{T_{a*}\beta} T_{a+b*}F \text{ は } \tau_{0, a+b}(F): F \rightarrow T_{a+b*}F \text{ と等しい.}$$

$$(2) \text{ 合成射 } G \xrightarrow{\gamma} T_{b*}F \xrightarrow{T_{b*}\delta} T_{a+b*}G \text{ は } \tau_{0, a+b}(G): G \rightarrow T_{a+b*}G \text{ と等しい.}$$

(ii)  $F, G \in \mathcal{D}(M)$  に対して,  $d_{\mathcal{D}(M)}(F, G) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$  を

$$d_{\mathcal{D}(M)}(F, G) := \inf\{a + b \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{組}(F, G) \text{ は } (a, b)\text{-interleaved である}\}$$

により定義する. すると,  $d_{\mathcal{D}(M)}$  は  $\mathcal{D}(M)$  上の拡張擬距離を定めることが確認できる.

**注意 4.4.** Kashiwara–Schapira [KS18] はパーシステンス加群間のインターリービング距離と呼ばれる擬距離を層の導来圏上の擬距離として解釈した. これは上の定義で  $M = \text{pt}$  のときに  $a = b, \alpha = \delta, \beta = \gamma$  という条件を付けて  $\inf$  を取ったものに対応する. インターリービング距離と同じ定義を用いてしまうと, 分離する  $H$  の  $2 \int_0^1 \|H_s\|_{\infty} ds$  の  $\inf$  しか評価できなくなり, 定理 4.1 よりも弱い評価しか得られなくなってしまう.

$\mathcal{D}(M)$  の対象とそのハミルトン変形間の距離を考えると, 次の安定性定理が示せる.

**定理 4.5** (ハミルトン変形に関する安定性定理 [AI20a]).  $G \in \mathcal{D}(M)$  として,  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  をコンパクト台のハミルトン関数とする. このとき, 不等式  $d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \|H\|$  が成り立つ.

証明の概略.  $K \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  をハミルトンアイソトピー  $\phi^H$  に付随した層量子化として,  $\mathcal{H} := K \circ G \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t \times I})$  を時間成分  $I$  が残った  $K$  を核とする  $G$  の積分変換とする. すると, 層量子化の性質と層の演算に関するマイクロ台の評価より  $\mathcal{H}$  は次の二つの条件を満たすことが分かる:

$$(1) \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{0\}} \simeq G, \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{1\}} \simeq \Phi_1^H(G),$$

$$(2) \text{SS}(\mathcal{H}) \subset T^*M \times \{(t, s; \tau, \sigma) \mid (-\max_p H_s(p)) \cdot \tau \leq \sigma \leq (-\min_p H_s(p)) \cdot \tau\}.$$

すなわち  $\mathcal{H}$  は  $G$  と  $\Phi_1^H(G)$  をつなぐ層の変形族であり, そのマイクロ台を含む錐状集合の開きはハミルトン関数で統制されている. ここで次の補題を準備する:

**補題 4.6.**  $\mathcal{H} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{M \times \mathbb{R}_t \times I})$  とし,  $s_1 < s_2$  を  $I$  内の二点とする. ある  $a, b, r \in \mathbb{R}_{>0}$  が存在して

$$\text{SS}(\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times (s_1 - r, s_2 + r)}) \subset T^*M \times \{(t, s; \tau, \sigma) \mid -a \cdot \tau \leq \sigma \leq b \cdot \tau\}$$

であると仮定する. このとき, 不等式

$$d_{\mathcal{D}(M)}(\mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{s_1\}}, \mathcal{H}|_{M \times \mathbb{R}_t \times \{s_2\}}) \leq (a + b)(s_2 - s_1)$$

が成り立つ.

この補題の証明は述べないが、感覚としてはマイクロ台は層の変化を記述する部分集合であり、 $T^*(\mathbb{R}_t \times I)$  成分の錐の開き方が  $I$  方向に変化させたときの  $\mathbb{R}_t$  方向のずれ方、すなわち  $d_{\mathcal{D}(M)}$  を統制していることから従う。

上の補題と条件 (1), (2) を使えば、任意の  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対して

$$d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \max_{s \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} \left( \max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right)$$

となり、 $n \rightarrow +\infty$  とすれば右辺は  $\|H\|$  に近づくから結論が得られる。この証明で見たように層量子化が時間パラメータ  $I$  を持つ族、すなわち  $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{(M \times \mathbb{R}_t)^2 \times I})$  の対象として得られていることが有効に働くのである。□

最後に定理 4.1 が定理 4.5 から従うことを説明しよう。

定理 4.5  $\Rightarrow$  定理 4.1 の証明. まず、擬距離の定義から

$$\inf\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau_{0,c}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G)) = 0\} = d_{\mathcal{D}(\text{pt})}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G), 0)$$

となることに注意する。ハミルトン関数  $H: T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$  が  $A \cap \phi_1^H(B) = \emptyset$  を満たすとする。すると、Tamarkin の分離定理から  $Rq_* \mathcal{H}om^*(F, \Phi_1^H(G)) \simeq 0$  である。ゆえに、 $Rq_*$  と  $\mathcal{H}om^*(F, *)$  により擬距離が大きくなることと安定性定理 (定理 4.5) より、不等式

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}(\text{pt})}(Rq_* \mathcal{H}om^*(F, G), 0) &\leq d_{\mathcal{D}(M)}(\mathcal{H}om^*(F, G), \mathcal{H}om^*(F, \Phi_1^H(G))) \\ &\leq d_{\mathcal{D}(M)}(G, \Phi_1^H(G)) \leq \|H\| \end{aligned}$$

が得られて、エネルギー評価定理が証明された。□

## 参考文献

- [AI20a] T. Asano and Y. Ike, Persistence-like distance on Tamarkin’s category and symplectic displacement energy, *J. Symplectic Geom.*, **18** (2020), no. 3, 613–649.
- [AI20b] T. Asano and Y. Ike, Sheaf quantization and intersection of rational lagrangian immersions, arXiv preprint, arXiv:2005.05088 [math.SG], 2020.
- [Aka15] M. Akaho, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions, arXiv preprint, arXiv:1505.06560 [math.SG], 2015.
- [GKS12] S. Guillermou, M. Kashiwara, and P. Schapira, Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems, *Duke Math. J.*, **161** (2012), no. 2, 201–245.
- [GS14] S. Guillermou and P. Schapira, Microlocal theory of sheaves and Tamarkin’s non displaceability theorem, In *Homological mirror symmetry and tropical geometry*, Vol. **15** of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.* 43–85, Springer, Cham, 2014.
- [KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Vol. **292** of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [KS18] M. Kashiwara and P. Schapira, Persistent homology and microlocal sheaf theory, *Journal of Applied and Computational Topology*, **2** (2018), no. 1–2, 83–113.
- [NZ09] D. Nadler and E. Zaslow, Constructible sheaves and the Fukaya category, *J. Amer. Math. Soc.*, **22** (2009), no. 1, 233–286.
- [Tam18] D. Tamarkin. Microlocal condition for non-displaceability. In M. Hitrik, D. Tamarkin, B. Tsygan, and S. Zelditch, editors, *Algebraic and Analytic Microlocal Analysis* 99–223, Cham, 2018. Springer International Publishing.