# 印付単体的集合のループ空間

堀内遼

## 1 はじめに

位相空間という概念を推し進めていって得られた現在の数学における到達点は少なくとも 2 つあるだろう。1 つは貼り合せや被覆といったものに重きをおくトポスという対象である。もう 1 つは、これは一般の位相空間というよりユークリッド空間というアイディアの発展系と言うべきかもしれないが、空間には点・辺・面... などの次元づけられた構成物があり、それが重要であるとするホモトピー仮説である。この講演は後者に関するものである。*1

$(\infty, 0)$-圏と呼ばれる組合せ的対象を調べる事と位相空間をホモトピー群を通して調べる事は等価である、というのがホモトピー仮説の内容であった。そしてその組合せ的対象のモデルとして Kan 複体を採れば、この仮説は定理と言える。これがここ数十年間でのホモトピー論・高次元圏論における 1 つの最も大きな結果だと言えるだろう。ホモトピー仮説自体は 20 世紀後半には Grothendieck たちにより考えられていたようだが (例えば [4] に Quillen への手紙がある)、その定式化ないし解決には Joyal と Lurie の貢献が大きい ([7] や [10] など)。

もちろん他の高次元圏もこれまでに研究されてきており、例えば $\omega$-圏を単体的手法を用いて調べるために stratified simplicial set*2という概念が導入されている*3。次節で定義を与えるが、これはいくらかの単体が指定された単体的集合である。[18] において Verity は、特別なクラスの stratified simplicial set が Kan 複体と $\omega$-圏の共通の一般化であることを示した。そして現在では、stratified simplicial set を使って $(\infty, n)$-圏のモデルが構

*1 もちろん他にも色々な概念がある。例えば位相空間は距離空間の一般化であるが、非対称距離空間も距離空間のまた別の一般化である。

*2 simplicial set with marking とか marked simplicial set とか simplicial set with hollowness とも呼ばれる。この講演では印付単体的集合と呼ぶ事にしたい。

*3 [15] や [17] による $\omega$-圏に関するある予想を解くために [19] で導入されたようである。

成できるという事が専門家の間では認められているようである ([12])。

すなわち Verity らの一連の仕事により、$(\infty, n)$-圏の単体的なモデルが手に入ったという格好になっている。一方で、代数的位相幾何学においてよく知られているように、$(\infty, 0)$-圏のモデルである Kan 複体に対しては単体的ホモトピー論と呼ばれる幾何学がある。そこで我々は、単体的ホモトピー論の諸々の幾何学的構成が stratified simplicial set による $(\infty, n)$-圏の単体的なモデルに対してまでどれくらい持ち上がるのかを調べてみたい。

ひとまずの試みとして、単体的ホモトピー群やループ空間などの単体的ホモトピー論における基本的な構成が stratified simplicial set の枠組みにまで素直に持ち上がることがチェックできたので、そのことを報告する。

## 2 単体的集合の印付け

まずは単体的集合の定義を思い出しておく。

**定義 2.1.** $\Delta$ と書いて、有限全順序集合 $[n] := \{0 < 1 < \cdots < n\} (n \in \mathbb{N})$ を対象とし、順序を保つ写像を射とする圏を表すものとする。集合の圏 Set に値を持つ $\Delta$ 上の前層のことを単体的集合という。単体的集合の間の射は前層の間の自然変換である。

単体的集合のなす圏には $(\infty, 1)$-圏のモデル構造が入ることが知られていて、さらにそのある局所化として $(\infty, 0)$-圏のモデル構造が入ることも知られている ([7])。そしてそれが位相空間の伝統的なホモトピー論に一致するというのは古典的な事実である ([16])。従って、$n \geq 2$ に対して $(\infty, n)$-圏はどうなっているのかということが自然と問題になるだろう。[*4]

単体的集合の単体を適切に "印付ける" 事でそれらの高次元圏が単体的手法を用いて調べられる事が知られている。

**定義 2.2** ([19])**.** 対 $(X, \mathrm{m}\, X)$ が印付単体的集合 *(stratified simplicial set)* であるとは

- $X$ は単体的集合
- $\mathrm{m}\, X$ は $\bigcup_{n \geq 1} X_n$ の部分集合であり、任意の退化単体を含むもの

となっている事である。$\mathrm{m}\, X$ の元を $X$ の印付けられた単体と呼ぶ。

[*4] directed algebraic topology(例えば [3] など) と $(\infty, 1)$-圏との関係を問うのも自然であると思う。

印付けられた単体は、適切な意味で “可逆” な単体と見なすことができる。例えば退化した単体というのは同型射のような働きをするので印付けておく必要がある。

また、任意の単体的集合 $X$ に対して 2 つの極端な印付単体的集合が得られることが定義よりわかる。1 つはできるだけ多く印付けた $(X, \bigcup_{n\geq 1} X_n)$ であり、もう 1 つはできるだけ少なく印付けた $(X, \mathrm{d}\, X)$ である。ここで $\mathrm{d}\, X$ は $X$ の退化単体のなす集合である。以下、特に断りがなければ単体的集合 $X$ に対してそれに対応する印付単体的集合を $(X, \mathrm{d}\, X)$ とする。一般に、$(X, \mathrm{m}\, X)$ を $X$ と略記することも多い。印付単体的集合の射とは、単体的集合の射であって印付けられた単体を印付けられた単体に写すものとする。

[18] などに従って基本的な印付単体的集合の用語を思い出しておく。擬圏 (quasicategory) や Kan 複体を定義するには、プレーンな horn inclusions だけ考えれば十分だったが、より高次の圏のためにはそれに色々な印付けを施したものが必要となる。

**定義 2.3** ([18], [14]). $n \geq 1$、$k \in [n]$ として、以下の印付単体的集合を定義する。

- $\Delta[n]_t := (\Delta[n], \mathrm{d}\,\Delta[n] \cup \{\mathrm{Id}_{[n]}\})$
- $\Delta^k[n] := (\Delta[n], \mathrm{d}\,\Delta[n] \cup \{\alpha \in \Delta[n] | \{k-1, k, k+1\} \cap [n] \subset \mathrm{Im}(\alpha)\})$
- $\Lambda^k[n]$ とは、その台単体的集合が $\Delta[n]$ の $k$-次ホーンであって、$\Delta^k[n]$ から誘導される印付が定まっている印付単体的集合[*5]
- $\Delta^k[n]'' := (\Delta[n], \mathrm{d}\,\Delta[n] \cup \{\alpha \in \Delta[n] | \{k-1, k, k+1\} \cap [n] \subset \mathrm{Im}(\alpha)\} \cup \Delta[n][n-1])$
  つまり $\Delta^k[n]$ の全ての $n-1$-単体をさらに印付けて得られるものである。同様に、$\Lambda^k[n]'$ を $\Lambda^k[n]$ の全ての $n-1$-単体をさらに印付けて得られる印付単体的集合とする。
- $\Delta^k[n]' := \Delta^k[n] \cup \Lambda^k[n]'$
- $\Delta[3]_{eq} := (\Delta[3], \bigcup_{n\geq 1} \Delta[3][n] \setminus \{[01], [23]\})$
  ここで、[01] と [23] はそれぞれ、$\Delta[3][1]$ の元であって像が $\{0, 1\}$ と $\{2, 3\}$ であるものである。
- $\Delta[3]^\sharp := (\Delta[3], \bigcup_{n\geq 1} \Delta[3][n])$

高次圏の同型射だけでなく、同値射もうまく扱うためには saturated condition と呼ばれるものを導入する必要がある ([14])。そのために印付単体的集合の結 (join) という概念を導入する。これは有限全順序集合の “足し算” から自然に定まるものであり、位相空間

[*5] $\{\delta^i : [n-1] \to [n] | i \in [n] \setminus \{k\}\}$ で生成される $\Delta[n]$ の部分単体的集合の標準的な記法 $\Lambda^k[n]$ と被っているが、$(\Lambda^k[n], \mathrm{d}\,\Lambda^k[n])$ とは別物である

の結の類似でもある。

**定義 2.4.** 圏 $\Delta$ に空な順序集合 $[-1] = \emptyset$ を始対象として添加して得られる圏を $\Delta_+$ と書くことにする。Set に値を持つ $\Delta_+$ 上の前層のことを添加単体的集合 *(augmented simplicial set)* という。

$\Delta_+$ の 2 つの射 $\theta : [n] \to [m]$ と $\theta' : [n'] \to [m']$ に対し、それらを単に並べる事で $\Delta_+$ の射 $\theta \star \theta' : [n + n' + 1] \to [m + m' + 1]$

$$\theta \star \theta'(i) = \begin{cases} \theta(i) & 0 \leq i \leq n \\ \theta'(i - n - 1) + m + 1 & n + 1 \leq i \leq n + n' + 1 \end{cases}$$

を得る。これは $\Delta_+$ にモノイダル構造を誘導する。$[-1]$ が単位対象となる。

そしてこのモノイダル構造の Day convolution により、添加単体的集合のなす圏にもモノイダル構造が誘導され、その積を再び $\star$ で表す事にする。

単体的集合 $X$ に対して、$X_{-1} = *$ とおくことでこのモノイダル構造をさらに単体的集合のなす圏にも誘導できる。（昔からよく知られている構成であるが、例えば [1] や [8] にまとまった記述がある。）具体的には、単体的集合 $X$ と $Y$ に対してその結 $X \star Y$ の $n$-単体のなす集合は

$$(X \star Y)_n = \bigcup_{\substack{k,l \geq -1 \\ k+l=n-1}} X_k \times Y_l$$

となっている。

[18] に従って、印付単体的集合 $(X, \mathrm{m}\,X)$ と $(Y, \mathrm{m}\,Y)$ に対してもその結を、台単体的集合は直上で定めた $X \star Y$ であり、

$$x \star y \in \mathrm{m}(X \star Y) \Leftrightarrow x \in \mathrm{m}\,X \text{ または } y \in \mathrm{m}\,Y$$

で得られる印付単体的集合として定める。

これを使って本講演の主な研究対象である ($n$-trivial) saturated weak complicial set が定義できる。

**定義 2.5** ([18], [14], [12])**.** $X$ を印付単体的集合、$[n] \in \Delta$、$k \in [n]$、$[l] \in \Delta_+$ とする。

1. $\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta^k[n]$ と $\Delta^k[n]' \hookrightarrow \Delta^k[n]''$ に右持ち上げ性質を持つとき、$X$ は *weak complicial set* という[*6]

[*6] weak を付けずに complicial set と呼ぶ文献もあるが、別のものを complicial set と呼ぶ文献もある。なお、complicial という単語は composition と simplicial から作った造語らしい。

*2.* $X$ が *weak complicial set* であって、さらに $\Delta[l] \star \Delta[3]_{eq} \hookrightarrow \Delta[l] \star \Delta[3]^{\sharp}$ に右持ち上げ性質を持つとき、$X$ は *saturated weak complicial set* という

*3.* 任意の $m > n$ に対し $\Delta[m] \hookrightarrow \Delta[m]_t$ に右持ち上げ性質を持つとき、$X$ は *$n$-trivial* という

これらの概念のためのホモトピー論も存在する。

**定理 2.6** ([18], [14], [12])**.** 印付単体的集合のなす圏 msSet にはそれぞれ、*weak complicial set*、*saturated weak complicial set*、*$n$-trivial saturated weak complicial set* がちょうどファイブラント対象であるようなモデル構造が入る。[*7]

この講演では、saturated weak complicial set をファイブラント対象とするモデル構造を $(\infty, \infty)$-圏のモデル構造と呼び[*8]、$n$-trivial saturated weak complicial set をファイブラント対象とするモデル構造を $(\infty, n)$-圏のモデル構造と呼ぶ事にしたい。実は、擬圏と Kan 複体はそれぞれ 1-trivial saturated weak complicial set と 0-trivial saturated weak complicial set と同一視できる ([14])。特に、Kan 複体はその 0-単体以外の全ての単体を印付ける事により 0-trivial saturated weak complicial set となる。

この翻訳に則って、Kan 複体に対する色々な幾何学的構成を ($n$-trivial saturated) weak complicial set にまで適用していきたいというのがこの講演の研究の動機である。[*9]

# 3 主結果

## 3.1 単体的ホモトピー群の拡張

Kan 複体に対するホモトピー群の構成はいくつか知られているが、この節では Kan による組合せ論的構成が weak complicial set の枠組みにまで自然に持ち上がり、モノイドに値を持つ不変量が構成できる事を確認する。印付単体的集合のカルテジアン積を $\circledast$ で表す事にする。

**定義 3.1** ([18])**.** $f, g : A \to X$ を印付単体的集合の射とする。この時、$f \sim g$ とは以下の

---

*7 ここで挙げられているどのモデル構造においても、任意の対象がコファイブラントである

*8 これは標準的な言葉遣いではないかもしれない。詳しくは [12] 参照のこと。

*9 例えば Verity は [19] で “It is sometimes instructive to think of $\omega$-categories as being *oriented combinatorial CW-complexes* or *globular spaces* and ...” と述べている。

図式を可換にする射 $H$ が存在することをいう 。

$$\begin{tikzcd}
A \circledast \Delta[0] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "1_A \times \delta^1"'] & A \arrow[dr, "f"] & \\
A \circledast \Delta[1]_t \arrow[rr, "H"] & & X \\
A \circledast \Delta[0] \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, "1_A \times \delta^0"] & A \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

この $H$ はホモトピーと呼ばれるものだが、我々の目的は単体的ホモトピー群の類似物の構成なので、同様にして相対ホモトピーの概念も用意しておく。

**定義 3.2.** $f, g : A \to X$ を印付単体的集合の射とし、$B \subset A$ とする。さらに $f|_B = g|_B$ とする。$f \sim_B g$ とは $f \sim g$ であって以下の可換図式があることをいう。

$$\begin{tikzcd}
A \circledast \Delta[1]_t \arrow[r, "H"] & X \\
B \circledast \Delta[1]_t \arrow[r] \arrow[u, hook] & B \arrow[u, "f|_B = g|_B"']
\end{tikzcd}$$

ここで $H$ は $f \sim g$ を与える射である。

Verity の定理 ([18, Theorem 75]) と Kan 複体に対する古典的な議論 ([9] や [2] や [11] など) を使って以下を得る。[*10]

**補題 3.3.** 任意の *weak complicial set* $X$ に対して、上で定義した二項関係は同値関係である。

$X$ を weak complicial set とし、$x \in X$ をその 0-単体とし、$n \geq 1$ を自然数とする。$\tau_n(X, x)$ を以下の図式を可換にするような $n$-単体 $\alpha$ たちの $\sim_{\partial\Delta[n]}$ による同値類のなす集合とする。

$$\begin{tikzcd}
\Delta[n] \arrow[r, "\alpha"] & X \\
\partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Delta[0] \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

[*10] ここには saturated condition は必要ない

Kan 複体の単体的ホモトピー群の群構造 ([9] や [2] や [11] など) を思い出して以下の対応を考える。

境界が $x$ になっている 2 つの $n$-単体 $\alpha$ と $\beta$ に対して、$(x, x, ..., x, \alpha, \text{-}, \beta) : \Lambda^n[n+1] \to X$ を考える。つまり 0 番目から $n-2$ 番目までの $n$ 単体は一点 $x$ に潰れていて、$n-1$ 番目が $\alpha$ で $n+1$ 番目が $\beta$ になっているようなホーンを考える。$n$ 番目の面は与えられていない。任意の退化単体が印付けられていて、$X$ が今 weak complicial set であることから、これは $\theta : \Delta^n[n+1] \to X$ に延びる。そして $n$-単体 $d_n(\theta)$ を得る。

次の命題は、weak complicial set の右持ち上げ性質を用いて、Kan 複体に対する単体的ホモトピー群のものと同様な議論で証明される。

**命題 3.4** ([5])**.** $[\alpha]$ と $[\beta]$ の積を $[\alpha][\beta] := [d_n(\theta)]$、$[x]$ を単位元として $\tau_n(X, x)$ はモノイドとなる。

$X$ が Kan 複体の時、それに対応する 0-trivial weak complicial set を $\mathrm{th}_0(X)$ と書けば、構成から $\pi_n(X, x) \cong \tau_n(\mathrm{th}_0(X), x)$ がわかる。$n = 0$ の時でも同様に $\pi_n$ を $\tau_n$ に拡張できる。そしてこれらの構成は全て関手的なので、結局以下の図式が手に入った事になる。[*11]

$$
\begin{tikzcd}
(\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r, dashed, "\tau_n"] & \mathsf{Mon} \\
(\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[u, hook] & \mathsf{Grp} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r, dashed, "\tau_0"] & \mathsf{Set} \\
(\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[u, hook] & \mathsf{Set} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$

ここで $(\infty,\infty)$-$\mathsf{Cat}$ は saturated weak complicial set のなす圏、$(\infty,0)$-$\mathsf{Cat}$ は 0-trivial saturated weak complicial set あるいは Kan 複体のなす圏であり、$\mathsf{Mon}$ と $\mathsf{Grp}$ はそれぞれモノイドと群のなす圏である。

## 3.2　印付単体的集合のループ空間

次に、従来のホモトピー群とループ空間との関係 $\pi_{n+1} = \pi_n \circ \Omega$ が印付単体的集合の枠組みに持ち上がるかどうかを確かめたい。$\tau_*$ は、少なくとも形式的には、球面からの射で定義されているわけではないことに注意したい。これが持ち上がるかどうかを確認するためには、$\tau_*$ が weak complicial set に対してしか定義されていないことから、$X$ が weak

[*11] 0 でない $n$ に対して、$\mathsf{msSet}$ に入る $(\infty, n)$-圏のモデル構造の弱同値は $\tau_*$ の同型で与えられているわけではない。詳細は [18] や [12] 参照のこと。

complicial set ならそのループ空間もそうであるかどうかをまずは調べたい。そのためにはそもそも印付単体的集合のループ空間という概念を定義する必要があるので、[13] の懸垂の構成を参考にして約懸垂を定義してみる。

**定義 3.5** ([6])**.** $X$ を基点付印付単体的集合とする。$X$ の約懸垂 $\Sigma_+(X)$ を以下の押し出しで定める。

$$\begin{tikzcd} X \cup \langle *x \rangle \arrow[r] \arrow[d] & \Delta[0] \arrow[d] \\ \Delta[0] \star X \arrow[r] & \Sigma_+(X) \end{tikzcd}$$

ここで $\langle *x \rangle \subset \Delta[0] \star X$ は $\Delta[0]$ の基点と $X$ の基点 $x$ から生成される印付単体的集合である。そしてこの構成は、基点付印付単体的集合のなす圏 $\mathsf{msSet}_*$ 上の自己関手 $\Sigma_+ : \mathsf{msSet}_* \to \mathsf{msSet}_*$ となる。

この関手 $\Sigma_+$ には右随伴関手として、ループ空間関手 $\Omega : \mathsf{msSet}_* \to \mathsf{msSet}_*$ があるが、[13, Lemma 2.7] の類似により以下がわかる。これは $\Omega$ がループ空間を与える関手であるというからには成り立っていてほしい事実である。

**定理 3.6** ([6])**.** *$\Omega$ は基点付 $(\infty, n+1)$-圏のモデル構造から基点付 $(\infty, n)$-圏のモデル構造への右 Quillen 関手でもあり、基点付 $(\infty, \infty)$-圏のモデル構造から基点付 $(\infty, \infty)$-圏のモデル構造への右 Quillen 関手でもある。特に $X$ が基点付 ($n+1$-trivial) saturated weak complicial set ならば $\Omega(X)$ は基点付 ($n$-trivial) saturated weak complicial set である。*

**証明.** 定義 2.5 で挙げられている ($n$-trivial) saturated weak complicial set を定める acyclic cofibration を $\Sigma_+$ で写した時に、それが弱同値になっていることをチェックすれば良い。 □

これによってループ空間の構成が基点付 saturated weak complicial set にまで持ち上がった事になる。

$$\begin{tikzcd} (\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat}_* \arrow[r, dashed, "\Omega"] & (\infty,\infty)\text{-}\mathsf{Cat}_* \\ (\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat}_* \arrow[r, "\Omega"] \arrow[u, hook] & (\infty,0)\text{-}\mathsf{Cat}_* \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

さらに言えば、$X$ が基点付 saturated weak complicial set であればそのループ空間 $\Omega(X)$ の $\tau_n$ たちが意味を持つ概念となった。系として、本節の目的であった次の同型を得る。

系 **3.7** ([6]). 基点付 *saturated weak complicial set* $(X, x)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し以下のモノイドの同型がある

$$\tau_{n+1}(X, x) \cong \tau_n(\Omega(X), x)$$

**証明.** ジョインの定義より $\Delta[n+1] \cong \Delta[0] \star \Delta[n]$ が従い、約懸垂とループ空間の随伴性から全単射 $\tau_{n+1}(X, x) \cong \tau_n(\Omega(X), x)$ を得る。$\tau_m$ の積構造の定義より、これが求めるべきモノイド同型を与えることがわかる。 □

定理 3.6 と系 3.7 と Kan 複体の 2 次以上のホモトピー群が可換であるという古典的事実を使えば、自然数 $n \geq 0$ と $k \geq n+1$、基点付 $n$-trivial saturated weak complicial set $(X, x)$ に対して、$\tau_k(X, x)$ は群になり、$\tau_{k+1}(X, x)$ は可換群になってしまうということもわかる。[*12]

# 参考文献


[1] P. J. Ehlers and Tim Porter, Joins for (Augmented) Simplicial Sets, Jour. Pure Applied Algebra, 145 (2000) 37-44,

[2] Paul Goerss, Rick Jardine, Simplicial homotopy theory, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1996)

[3] Grandis, Marco Directed algebraic topology. Models of non-reversible worlds. New Mathematical Monographs, 13. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. x+434 pp.

[4] Alexander Grothendieck, Pursuing Stacks, 1983

[5] R. Horiuchi, On complicial homotopy monoids, arXiv:2006.05058

[6] R. Horiuchi, On loop spaces with marking, arXiv:2104.11860

[7] A. Joyal, The theory of quasi-categories, in preparation.

[8] A. Joyal, Quasi-categories and Kan complexes, J. Pure Appl. Algebra, 175 (2002), 207-222.

[9] Dan Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 67, No. 2 (Mar., 1958), pp. 282-312

[10] J. Lurie, Higher topos theory, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659


[*12] $\tau_k(X, x)$ が群になる事は構成からでもすぐにわかる。

[11] Peter May, Simplicial objects in algebraic topology, University of Chicago Press, 1967

[12] Viktoriya Ozornova and Martina Rovelli, Model structures for $(\infty, n)$-categories on (pre)stratified simplicial sets and prestratified simplicial spaces, Algebr. Geom. Topol. 20 (2020), no. 3, 1543-1600. MR 4105558

[13] Viktoriya Ozornova and Martina Rovelli, Fundamental pushouts of $n$-complicial sets, arXiv:2005.05844

[14] Riehl, Emily, Complicial sets, an overture. 2016 MATRIX annals, 49-76, MATRIX Book Ser., 1, Springer, Cham, 2018.

[15] J.E. Roberts, Complicial sets, handwritten manuscript, 1978.

[16] Dan Quillen, Homotopical Algebra, LNM 43, Springer, (1967)

[17] R.H. Street, The algebra of oriented simplexes, J. Pure Appl. Algebra 49 (1987) 283-335.

[18] D. Verity, Weak complicial sets. I. Basic homotopy theory, Adv. Math. 219 (2008), no. 4, 1081-1149,

[19] Dominic Verity, Complicial sets characterising the simplicial nerves of strict $\omega$-categories, Mem. Amer. Math. Soc. 193 (2008), no. 905, xvi+184. MR 2399898