

空間曲線の 2 種類の縮閉線、伸開線及び関連する線織面

本多 俊一 (公立千歳科学技術大学)*

1. はじめに

はじめに、平面曲線の縮閉線と伸開線について復習する。縮閉線はその曲線の曲率円の中心の軌跡として得られる曲線であり、伸開線はその曲線に巻きつけられた糸をたゆまないようにほぐしてゆくときの端点の軌跡として得られる曲線である。縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作はある種の逆操作である。縮閉線と伸開線は波の生成、光の波動性や振り子の等時性などの研究に利用されてきた曲線であり、自然に特異点を持つことが知られている (図 1, 2)。

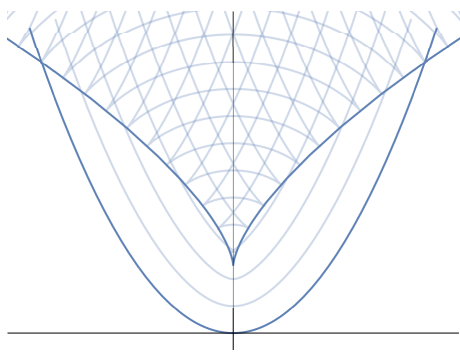


図 1: 放物線と縮閉線

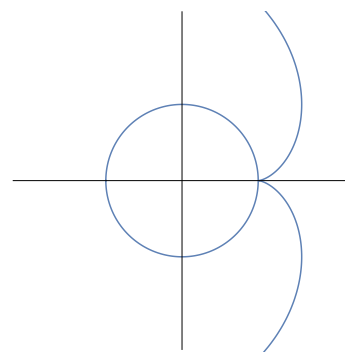


図 2: 円と伸開線

したがって、縮閉線と伸開線は正則性を仮定した従来の曲線論では取り扱うことが出来ない対象であるため、波面などの特異点を持つ曲線の微分幾何学的研究の理論を適用する必要がある。ここで、波面とは法線ベクトルが付随した平面曲線である。例えば、参考文献 [4] において、縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作が Legendre 曲線 (波面と法線ベクトルの組) の曲率の微分と積分に対応することが報告されている。

本稿では、空間曲線の縮閉線、伸開線および関連する線織面について調査した結果の概要を報告する。また、縮閉線は接触球に由来する縮閉線と接触円に由来する縮閉線の両方を取り扱う。空間曲線の縮閉線と伸開線は自然に特異点を持つので、特異点を持つ空間曲線の微分幾何学的研究の理論を適用する必要がある。ここでは参考文献 [9] における枠付き曲線の理論を適用する。第 2 節において、枠付き曲線の縮閉線と伸開線を考える上で必要な枠付き曲線、(一般化された) Frenet フレーム、Bishop フレーム、線織面および可展面の概念を紹介する。第 3 節では焦点曲面と接触球に由来する縮閉線、第 4 節では平行曲線と法線曲面、第 5 節では接触円に由来する縮閉線と伸開線を紹介する。第 6 節では上記各オブジェクトの関係を紹介する。接触円に由来する縮閉線をとる操作と伸開線をとる操作はある種の逆操作であり、特異点型の対応が観察出来る。また、縮閉線と伸開線の法線曲面の関係についても考察する。

本稿の内容は高橋雅朋氏 (室蘭工大) との共同研究 [10, 11, 12] と参考文献 [7, 8] に基づく。

* 〒 066-8655 北海道千歳市美々 758 番地 65 公立千歳科学技術大学 理工学部
e-mail: s-honda@photon.chitose.ac.jp

2. 準備

\mathbb{R}^3 を 3 次元 Euclid 空間とする. \mathbb{R}^3 における内積は $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, \mathbb{R}^3 の標準内積 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を用いる. \mathbf{x} のノルム $\|\mathbf{x}\|$ と \mathbf{x} と \mathbf{y} のベクトル積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ を

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. ここで, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は \mathbb{R}^3 の標準基底である. また, $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$, $\Delta = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^2 \times S^2 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$ とする.

2.1. 枠付き曲線と枠付け可能曲線

本節では, 枠付き曲線の理論の概要を紹介する. 枠付き曲線は空間曲線とフレームの組で, 退化点 (i.e. $\dot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$) や特異点 (i.e. $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$) を許容する. 詳細は参考文献 [9] と [5] を参照のこと. ここで, $\dot{\gamma}(t) = (d\gamma/dt)(t)$, $\ddot{\gamma}(t) = (d^2\gamma/dt^2)(t)$ である.

定義 2.1 (枠付き曲線, 枠付け可能曲線) (1) 写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が枠付き曲線であるとは, 任意の $t \in I$ に対して, $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0$ と $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0$ が成り立つことである. (2) 曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ が枠付け可能曲線であるとは, ある写像 $(\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \Delta$ が存在して, (γ, ν_1, ν_2) が枠付き曲線であることである.

注意 2.2 枠付け可能曲線 $\gamma(t)$ に対して, $(\nu_1(t), \nu_2(t)) \in \Delta$ の取り方には回転と鏡映の自由度がある.

枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) に対して, $\mu(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t)$ とすれば, $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \mu(t)\}$ は \mathbb{R}^3 の正規直交基底である.

命題 2.3 (Frenet-Serret 型の公式, [9]) 枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) に対して, 以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l(t) & m(t) \\ -l(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

ただし,

$$l(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), \quad m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \mu(t), \quad n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \mu(t), \quad \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t)$$

である. このとき, 写像 $(l, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ を枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) の曲率と呼ぶ.

定義 2.4 (枠付き曲線の合同) 2 つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ が合同であるとは, ある回転 $A \in SO(3)$ とある平行移動 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ が存在して, 任意の $t \in I$ に対して,

$$\tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + \mathbf{a}, \quad \tilde{\nu}_1(t) = A(\nu_1(t)), \quad \tilde{\nu}_2(t) = A(\nu_2(t))$$

が成り立つことである.

枠付き曲線の曲率は枠付き曲線の微分幾何学的不変量である. 実際, 以下の枠付き曲線の存在定理と一意性定理が成り立つ (定理 2.5, 2.6).

定理 2.5 (枠付き曲線の存在定理, [9]) 写像 $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ に対して, 枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ で (ℓ, m, n, α) が曲率であるものが存在する.

定理 2.6 (枠付き曲線の一意性定理, [9]) 2つの枠付き曲線 (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき, (γ, ν_1, ν_2) と $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$ は合同である.

注意 2.7 枠付き曲線の曲率はパラメータの取り方に依存する. 一方, 枠付き曲線の曲率から写像 (γ, ν_1, ν_2) を復元することができる.

2.2. Frenet フレームと Bishop フレーム

本節では, 枠付き曲線の縮閉線を考える上で重要な役割を担う枠付き曲線の Frenet フレームと Bishop フレームを紹介する. Frenet フレームの詳細は参考文献 [8, 10], Bishop フレームの詳細は参考文献 [1, 11] を参照のこと.

2.2.1. Frenet フレーム

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ (i.e. $\mu(t) \neq \mathbf{0}$) とする. フレーム $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ を

$$\mathbf{t}(t) = \mu(t), \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$$

で定義する. フレーム $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ を枠付け可能曲線 $\gamma(t)$ の (一般化された) **Frenet フレーム**と呼ぶ. このとき, $(\gamma, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ は枠付き曲線であり, 以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}}(t) \\ \dot{\mathbf{n}}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mathbf{t}(t).$$

ここで, $\kappa(t)$ と $\tau(t)$ は

$$\kappa(t) = \|\dot{\mathbf{t}}(t)\|, \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{t}(t), \dot{\mathbf{t}}(t), \ddot{\mathbf{t}}(t))}{\|\dot{\mathbf{t}}(t)\|^2}$$

である. $\kappa(t)$ を枠付け可能曲線 $\gamma(t)$ の **曲率**, $\tau(t)$ を **捩率**と呼ぶ. 枠付き曲線 $(\gamma, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ の曲率は $(\tau(t), -\kappa(t), 0, \alpha(t))$ である. Frenet フレームは第 3 節 (焦点曲面と接触球に由来する縮閉線) で利用する.

2.2.2. 回転されたフレームと Bishop フレーム

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, $(\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) \in \Delta$ を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}$$

で定義する. ここで, $\theta(t)$ は滑らかな関数である. フレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \mu(t)\}$ を枠付け可能曲線 $\gamma(t)$ の $\theta(t)$ による **回転されたフレーム**と呼ぶ. このとき, $(\gamma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ は枠付き曲線であり, 以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\ell}(t) & \bar{m}(t) \\ -\bar{\ell}(t) & 0 & \bar{n}(t) \\ -\bar{m}(t) & -\bar{n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\mu(t).$$

ここで, $\bar{\ell}(t) = \ell(t) - \dot{\theta}(t)$, $\bar{m}(t) = m(t) \cos \theta(t) - n(t) \sin \theta(t)$, $\bar{n}(t) = m(t) \sin \theta(t) + n(t) \cos \theta(t)$ である. 特に, $\theta(t)$ が条件 $\dot{\theta}(t) = \ell(t)$ (i.e. $\bar{\ell}(t) = 0$) を満たすとき, フレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を枠付け可能曲線 $\gamma(t)$ の $\theta(t)$ による **Bishop フレーム** と呼ぶ. このとき, $\mathbf{v}(t)$ と $\mathbf{w}(t)$ を **Bishop ベクトル** と呼ぶ. Bishop フレームの取り方は $\gamma(t)$ に対して一意ではなく, 積分定数の自由度がある. 回転されたフレームは第 4 節 (平行曲線と法線曲面), Bishop フレームは第 5 節 (接触円に由来する縮閉線と伸開線) で利用する.

2.3. 線織面と可展面

本節では, 線織面と可展面の概要を復習する. 詳細は参考文献 [16] を参照のこと.

定義 2.8 (線織面, 可展面) 空間曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ と零でないベクトル $\boldsymbol{\xi} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して, 曲面 $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \boldsymbol{\xi}(t)$ で定義する. $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ を **線織面**, $\boldsymbol{\xi}(t)$ を **導線**, 固定した各 t_0 に対して得られる直線 $\gamma(t_0) + \lambda \boldsymbol{\xi}(t_0)$ を **母線** と呼ぶ. ガウス曲率が恒等的に零であるような線織面 $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ を **可展面** と呼ぶ.

線織面 $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ が可展面であることの必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して,

$$\det \left(\dot{\gamma}(t), \boldsymbol{\xi}(t), \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \right) = 0$$

が成り立つことである. $\boldsymbol{\xi}(t)$ を正規化し, $\tilde{\boldsymbol{\xi}} : I \rightarrow S^2$ を $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) / \|\boldsymbol{\xi}(t)\|$ で定義する. 任意の $t \in I$ に対して, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{0}$ であるとき, $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ は (一般化された) **柱面** であるという. また, 任意の $t \in I$ に対して, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) \neq \mathbf{0}$ であるとき, $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ は **非柱面的** であるという. $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ が非柱面的であるとき,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \gamma(t) - \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)}{\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}(t)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$$

で表示される曲線を **縮括線** と呼ぶ. $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ の特異点の像は縮括線上に現れることが知られている. 縮括線が定点であるとき, $F_{(\gamma, \boldsymbol{\xi})}(t, \lambda)$ は (一般化された) **錐面** であるという. 可展面は柱面, 錐面と接線曲面に分類されることが知られている.

3. 焦点曲面と接触球に由来する縮閉線

本節では, 枠付き曲線の焦点曲面と接触球に由来する縮閉線を紹介する. 詳細は参考文献 [8, 10] を参照のこと.

3.1. 焦点曲面

枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ (i.e. $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \mathbf{0}$) とし, 第 2.2.1 節における Frenet フレーム $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ を考える. 枠付き曲線の焦点曲面を以下で定義する.

定義 3.1 (焦点曲面) 曲面 $FD_\gamma : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$FD_\gamma(t, \lambda) = \gamma(t) + \frac{\alpha(t)}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t) + \lambda \mathbf{b}(t)$$

で定義する. 曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ を $\gamma(t)$ の **焦点曲面** と呼ぶ.

焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ は可展面かつ波面である。焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の可展面の型の特徴付けは以下の通りである。

定理 3.2 ([8]) (1) 焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ が柱面であるための必要十分条件は、任意の $t \in I$ に対して、 $\tau(t) = 0$ が成り立つことである。(2) 任意の $t \in I$ に対して、 $\tau(t) \neq 0$ とする。焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ が錐面であるための必要十分条件は、任意の $t \in I$ に対して、 $\sigma(t) = 0$ が成り立つことである。ここで、 $\sigma(t)$ は

$$\sigma(t) = \frac{\alpha(t)\tau(t)}{\kappa(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha(t)\dot{\kappa}(t) - \dot{\alpha}(t)\kappa(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)} \right)$$

である。

第 3.2 節において、焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の締括線として接触球に由来する縮閉線を定義する。 (t_0, λ_0) が焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の特異点であることの必要十分条件は、

$$\frac{\alpha(t_0)\dot{\kappa}(t_0) - \dot{\alpha}(t_0)\kappa(t_0)}{\kappa^2(t_0)} + \lambda_0\tau(t_0) = 0$$

が成り立つことである。

3.2. 接触球に由来する縮閉線

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して、 $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ (i.e. $\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \neq \mathbf{0}$) とし、第 2.2.1 節における Frenet フレーム $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ を考える。また、任意の $t \in I$ に対して、 $\tau(t) \neq 0$ が成り立つとする。枠付き曲線の接触球に由来する縮閉線を以下で定義する。

定義 3.3 (接触球に由来する縮閉線) 曲線 $SE_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$SE_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{\alpha(t)}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t) - \frac{\alpha(t)\dot{\kappa}(t) - \dot{\alpha}(t)\kappa(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}\mathbf{b}(t)$$

で定義する。曲線 $SE_\gamma(t)$ を $\gamma(t)$ の接触球に由来する縮閉線と呼ぶ。

接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ は接触球の中心の軌跡や焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の締括線として得られる曲線であり、枠付け可能曲線である。焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ と接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ の特異点型には以下の関係がある。

定理 3.4 ([10]) (t_0, λ_0) を焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の特異点とする。(1) 焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の特異点 (t_0, λ_0) がカस्प辺であることの必要十分条件は、 t_0 が接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ の正則点であることである。(2) 焦点曲面 $FD_\gamma(t, \lambda)$ の特異点 (t_0, λ_0) がツバメの尾であることの必要十分条件は、接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ の特異点 t_0 が $3/2$ カस्पであることである。

※ここで、カस्प辺は $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ 、ツバメの尾は $(u, v) \mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ 、 $3/2$ カस्पは $t \mapsto (t^2, t^3, 0)$ にそれぞれ A 同値な写像である。

接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ と中心が $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ で半径が $r \in \mathbb{R}$ の球 $S^2(\mathbf{c}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r\}$ には以下の関係がある。

命題 3.5 ([10]) 接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ が定点ならば, ある定点 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ とある非負定数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して, $\gamma(t) \in S^2(\mathbf{c}, r)$ が成り立つ.

命題 3.6 ([10]) 枠付け可能曲線 $\gamma(t)$ の正則点が I 上で稠密であるとする. このとき, 接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ が定点であることの必要十分条件は, ある定点 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ とある正定数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して, $\gamma(t) \in S^2(\mathbf{c}, r)$ が成り立つことである.

その他, 縮閉線の接触, 高次の縮閉線および縮閉線と元の曲線が合同になる条件などは参考文献 [8, 10] を参照のこと.

4. 平行曲線と法線曲面

本節では, 枠付き曲線の平行曲線と法線曲面を紹介する. 詳細は参考文献 [12] と [11] を参照のこと.

4.1. 平行曲線

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, 第 2.2.2 節における回転されたフレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える. 枠付き曲線の平行曲線を以下で定義する.

定義 4.1 (平行曲線) 零でない定数 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, 曲線 $P_\gamma[\mathbf{v}] : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$P_\gamma[\mathbf{v}](t) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$$

で定義する. 曲線 $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$ を $\gamma(t)$ の $\mathbf{v}(t)$ 方向の**平行曲線**と呼ぶ.

$\dot{P}_\gamma[\mathbf{v}](t) = \lambda \bar{\ell}(t) \mathbf{w}(t) + \{\alpha(t) + \lambda \bar{m}(t)\} \boldsymbol{\mu}(t)$ であるから, $\mathbf{v}(t)$ は $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$ の法線ベクトルの 1 つである. また, t_0 が $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$ の特異点であることの必要十分条件は, $\bar{\ell}(t_0) = 0$ と $\alpha(t_0) + \lambda \bar{m}(t_0) = 0$ が成り立つことである. 一般に $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$ は枠付け可能曲線であるとは限らない. 実際, 以下の必要十分条件が存在する.

命題 4.2 ([11, 12]) ある単位ベクトル $\mathbf{n} : I \rightarrow S^2$ が存在して, $(P_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{v}, \mathbf{n})$ が枠付き曲線であることの必要十分条件は, ある関数 $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $t \in I$ と零でない定数 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\lambda \bar{\ell}(t) \cos \varphi(t) - \{\alpha(t) + \lambda \bar{m}(t)\} \sin \varphi(t) = 0$$

が成り立つことである.

注意 4.3 命題 4.2 より, Bishop フレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して, $(P_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{v}, \mathbf{w})$ は枠付き曲線である.

4.2. 法線曲面

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, 第 2.2.2 節における回転されたフレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える. 枠付き曲線の法線曲面を以下で定義する.

定義 4.4 (法線曲面) 曲面 $NS_\gamma[\mathbf{v}] : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$$

で定義する. 曲面 $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ を $\gamma(t)$ の $\mathbf{v}(t)$ 方向の**法線曲面**と呼ぶ.

$NS_\gamma[\mathbf{v}]_t(t, \lambda) \times NS_\gamma[\mathbf{v}]_\lambda(t, \lambda) = \{\alpha(t) + \lambda\bar{m}(t)\}\mathbf{w}(t) - \lambda\bar{\ell}(t)\boldsymbol{\mu}(t)$ であるから, $\mathbf{v}(t)$ は $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ の接線ベクトルの 1 つである. また, (t_0, λ_0) が $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ の特異点であることの必要十分条件は, $\alpha(t_0) + \lambda_0\bar{m}(t_0) = 0$ と $\lambda_0\bar{\ell}(t_0) = 0$ が成り立つことである. 一般に $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ は枠付け可能曲面であるとは限らない. 実際, 以下の必要十分条件が存在する. 枠付き曲面と枠付け可能曲面の詳細については参考文献 [6] を参照のこと.

命題 4.5 ([12]) ある単位ベクトル $\mathbf{n} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$ が存在して, $(NS_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{n}, \mathbf{v}) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ が枠付き曲面であることの必要十分条件は, ある関数 $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $(t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$ に対して,

$$\lambda\bar{\ell}(t) \cos \varphi(t, \lambda) - \{\alpha(t) + \lambda\bar{m}(t)\} \sin \varphi(t, \lambda) = 0$$

が成り立つことである.

注意 4.6 命題 4.5 より, Bishop フレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して, $(NS_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{w}, \mathbf{v})$ は枠付き曲面である. このとき, $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ は可展面である.

法線曲面 $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ の特異点型 (交叉帽子, カस्प辺, ツバメの尾, カस्प状交叉帽子) の特徴付けは参考文献 [12] を参照のこと. 特異点型の特徴付けは参考文献 [3, 17, 19] における判定法を適用した.

5. 接触円に由来する縮閉線と伸開線

本節では, 枠付き曲線の接触円に由来する縮閉線と伸開線を紹介する. 詳細は参考文献 [12] を参照のこと.

5.1. 接触円に由来する縮閉線

枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, 第 2.2.2 節における Bishop フレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ を考える. また, 任意の $t \in I$ に対して, $\bar{m}(t) \neq 0$ が成り立つとする. 枠付き曲線の接触円に由来する縮閉線を以下で定義する.

定義 5.1 曲線 $CE_\gamma[\mathbf{v}] : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$CE_\gamma[\mathbf{v}](t) = \gamma(t) - \frac{\alpha(t)}{\bar{m}(t)}\mathbf{v}(t)$$

で定義する. 曲線 $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$ を $\gamma(t)$ の $\mathbf{v}(t)$ 方向の接触円に由来する縮閉線と呼ぶ.

接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$ は $\mathbf{v}(t)$ 方向の接触円の中心の軌跡や法線曲面 $NS_\gamma[\mathbf{v}](t, \lambda)$ の縮括線として得られる曲線であり, 枠付け可能曲線である.

注意 5.2 $(CE_\gamma[\mathbf{v}], \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$ は枠付き曲線である. ただし, $\{\mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \mathbf{v}(t)\}$ は接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$ の Bishop フレームではない.

平行曲線 $P_\gamma[\mathbf{v}](t)$ の $\mathbf{v}(t)$ 方向の接触円に由来する縮閉線とオリジナル曲線 $\gamma(t)$ の $\mathbf{v}(t)$ 方向の接触円に由来する縮閉線は一致する (命題 5.3).

命題 5.3 ([12]) $CE_{P_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}](t) = CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$.

5.2. 伸開線

枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ (i.e. $\dot{\mu}(t) \neq 0$) とする. 枠付き曲線の伸開線を以下で定義する.

定義 5.4 固定された $t_0 \in I$ に対して, 曲線 $I_\gamma[t_0] : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$I_\gamma[t_0](t) = \gamma(t) - \left(\int_{t_0}^t \alpha(t) dt \right) \mu(t)$$

で定義する. 曲線 $I_\gamma[t_0](t)$ を $\gamma(t)$ の t_0 に関する**伸開線**と呼ぶ.

伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ は正則空間曲線の伸開線の直接的な一般化である (cf. [2]).

注意 5.5 $(I_\gamma[t_0], \xi, \mu)$ は枠付き曲線である. ここで,

$$\xi(t) = \frac{n(t)\nu_1(t) - m(t)\nu_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}$$

である. $\{\xi(t), \mu(t), \xi(t) \times \mu(t)\}$ は伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の Bishop フレームである.

6. 各オブジェクトの関係

本節では, 接触円に由来する縮閉線と伸開線の関係, 接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係について紹介する. 詳細は参考文献 [12] を参照のこと.

命題 6.1 ([12]) 枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ と Bishop フレーム $\{v(t), w(t), \mu(t)\}$ に対して, $\bar{m}(t) \neq 0$ とする. このとき, $CE_{E_\gamma[v]}[t_0](t) = \gamma(t) - (\alpha(t_0)/\bar{m}(t_0))v(t)$ が成り立つ.

命題 6.2 ([12]) 枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ とする. このとき, $CE_{I_\gamma[t_0]}[-\mu](t) = \gamma(t)$ が成り立つ.

命題 6.1, 6.2 より, 然るべき設定の下では, 接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[v](t)$ をとる操作と伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ をとる操作がある種の逆操作であることが分かる. なお, 接触球に由来する縮閉線 $SE_\gamma(t)$ と伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の関係は得られない.

オリジナル曲線 $\gamma(t)$, 接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[v](t)$, 伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の特異点型の関係を考える.

定理 6.3 ([12]) 枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ と Bishop フレーム $\{v(t), w(t), \mu(t)\}$ に対して, $\bar{m}(t) \neq 0$ とする. (1) オリジナル曲線 $\gamma(t)$ の特異点 t_0 が 3/2 カस्पであることの必要十分条件は, t_0 が接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[v](t)$ の正則点であることである. (2) オリジナル曲線 $\gamma(t)$ の特異点 t_0 が 4/3 カस्पであることの必要十分条件は, 接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[v](t)$ の特異点 t_0 が 3/2 カस्पであることである.

※ここで, 4/3 カस्पは $t \mapsto (t^3, t^4, 0)$ に A 同値な写像である.

定理 6.4 ([12]) 枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して, $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ とする. また, t_1 が伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の特異点であるとする. (1) t_1 がオリジナル曲線 $\gamma(t)$ の正則点であることの必要十分条件は, 伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の特異点 t_1 が 3/2 カस्पであることである. (2) オリジナル曲線 $\gamma(t)$ の特異点 t_1 が 3/2 カस्पであることの必要十分条件は, 伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の特異点 t_1 が 4/3 カस्पであることである.

次に、接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係を考える．枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ と Bishop フレーム $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ に対して、 $\bar{m}(t) \neq 0$ とする．このとき、接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$ の $\mathbf{v}_{CE}(t)$ 方向の法線曲面は

$$NS_{CE_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}_{CE}](t, \lambda) = CE_\gamma[\mathbf{v}](t) + \lambda \mathbf{v}_{CE}(t)$$

である．ただし、 $\mathbf{v}_{CE}(t)$ は接触円に由来する縮閉線 $CE_\gamma[\mathbf{v}](t)$ の Bishop ベクトルである． $NS_{CE_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}_{CE}](t, \lambda)$ の特異点の像は締括線である 2 次の縮閉線 $CE_{CE_\gamma[\mathbf{v}]}[\mathbf{v}_{CE}](t)$ によってパラメータ付けされる．

一方、枠付き曲線 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ に対して、 $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ とする．このとき、伸開線 $I_\gamma[t_0](t)$ の $\mathbf{v}_I(t) = -\boldsymbol{\mu}(t)$ 方向の法線曲面は

$$NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda) = I_\gamma[t_0](t) - \lambda \boldsymbol{\mu}(t)$$

である． $NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda)$ の特異点の像は締括線であるオリジナル曲線 $\gamma(t)$ によってパラメータ付けされる． $NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](t, \lambda)$ は非柱面的な可展面であるから、 $NS_{I_\gamma[t_0]}[-\boldsymbol{\mu}](I \times \mathbb{R})$ がオリジナル曲線 $\gamma(t)$ の接線曲面 $\gamma(t) + \lambda \boldsymbol{\mu}(t)$ の像と一致する (cf. [16])．接線曲面の特異点は [13, 14, 15] などで詳しく調査されている．以上の性質をまとめると、以下のダイアグラムを得る (図 3)．ただし、点線矢印は特異点を始点とする伸開線を考えたときに成り立つ．

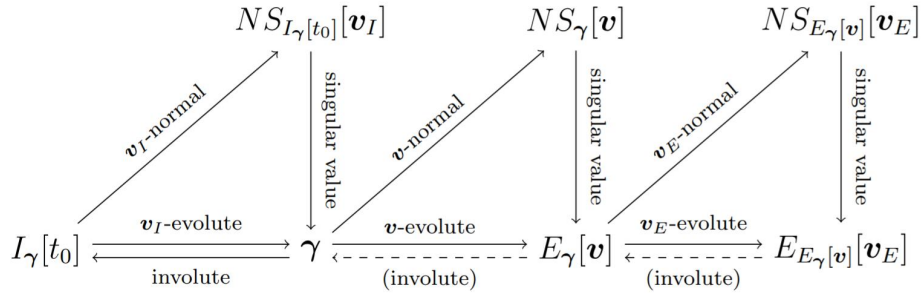


図 3: 接触円に由来する縮閉線と伸開線の法線曲面の関係

例 6.5 (球面ネフィロイド) 写像 $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : [0, 2\pi) \rightarrow S^2 \times \Delta$ を

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(\frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right), \\ \nu_1(t) &= \left(-\frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t, \cos^3 t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right), \\ \nu_2(t) &= \left(\frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, \sin^3 t, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right) \end{aligned}$$

で定義する． (γ, ν_1, ν_2) は枠付き曲線であり、オリジナルフレーム $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$ は Bishop フレームである．また、オリジナル曲線 $\gamma(t)$ の特異点 $t = 0$ と π は $3/2$ カस्पである．このとき、上記の各オブジェクトの表示式は以下の通りである：

- ν_1 方向の法線曲面： $NS_\gamma[\nu_1](t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda\nu_1(t)$
- ν_1 方向の接触円に由来する縮閉線： $E_\gamma[\nu_1](t) = \gamma(t) + \tan t\nu_1(t)$
- $t_0 = 0$ に関する伸開線： $I_\gamma[0](t) = \gamma(t) - \sqrt{3}(1 - \cos t)\mu(t)$

法線曲面の特異点型の判定法と定理 6.4 より、以下が成り立つ.

- $NS_\gamma[\nu_1](t, \lambda)$ の特異点 $(t, \lambda) = (0, 0)$ と $(\pi, 0)$ はカस्प状交叉帽子
- $NS_{I_\gamma[0]}[\mu](t, \lambda)$ の特異点 $(t, \lambda) = (0, 0)$ と $(\pi, 0)$ はツバメの尾
- $I_\gamma[0]$ の特異点 $t = 0$ は $4/3$ カस्प

上記の特異点および法線曲面, 接触円に由来する縮閉線と伸開線の関係は図 4 と図 5 で観察出来る.

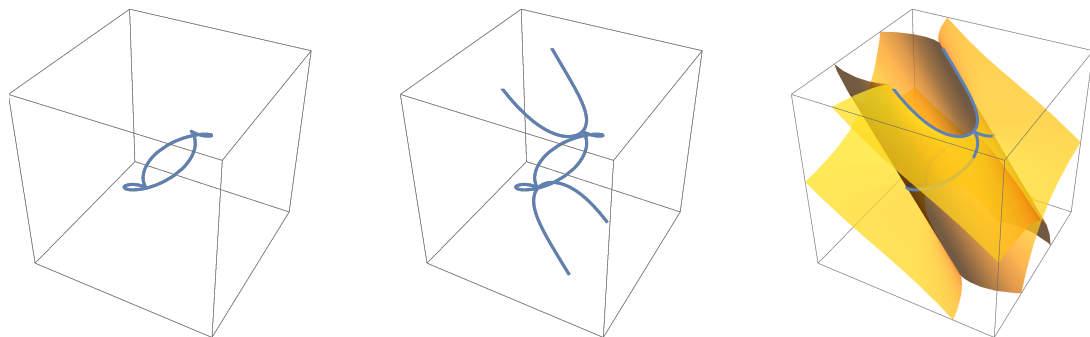


図 4: 左から順に γ , $(\gamma, E_\gamma[\nu_1])$, $(\gamma, E_\gamma[\nu_1], NS_\gamma[\nu_1])$

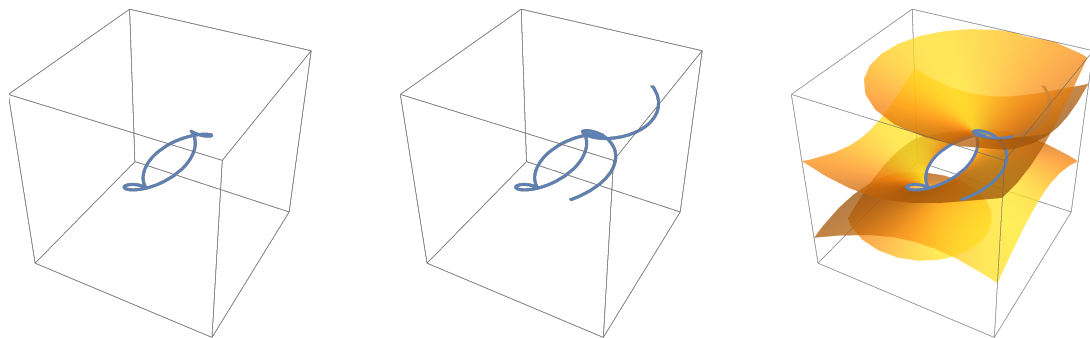


図 5: 左から順に γ , $(\gamma, I_\gamma[0])$, $(\gamma, I_\gamma[0], NS_{I_\gamma[0]}[\mu])$

参考文献

- [1] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 246–251.
- [2] D. Fuchs, Evolutes and involutes of spatial curves, Amer. Math. Monthly 120 (2013), no. 3, 217–231.
- [3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, Math. Z. 259 (2008), no. 4, 827–848.
- [4] T. Fukunaga and M. Takahashi, Involutes of fronts in the Euclidean plane, Beitr. Algebra Geom. 57 (2016), no. 3, 637–653.

- [5] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves, *J. Geom.* 108 (2017), no. 2, 763–774.
- [6] T. Fukunaga and M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, *Bull. Braz. Math. Soc.* 50 (2019), no. 1, 37–65.
- [7] S. Honda, Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices, *Adv. Stud. Pure Math.* 78 (2018), 273–292.
- [8] S. Honda, Flat surfaces associated with framed base curves, doctoral theses (2018).
- [9] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, *Adv. Geom.* 16 (2016), no. 3, 265–276.
- [10] S. Honda and M. Takahashi, Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 150 (2020), no. 1, 497–516.
- [11] S. Honda and M. Takahashi, Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space, *Turkish J. Math.* 44 (2020), no. 3, 883–899.
- [12] S. Honda and M. Takahashi, Circular evolutes and involutes of framed curves in the Euclidean space, preprint (2021), arXiv:2103.07041.
- [13] G. Ishikawa, Determinacy of the envelope of the osculating hyperplanes to a curve, *Bull. London Math. Soc.* 25 (1993), no. 6, 603–610.
- [14] G. Ishikawa, Developable of a curve and determinacy relative to osculation-Type, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 46 (1995), no. 184, 437–451.
- [15] G. Ishikawa, Topological classification of the tangent developables of space curves, *J. London Math. Soc. (2)* 62 (2000), no. 2, 583–598.
- [16] S. Izumiya and N. Takeuchi, Geometry of ruled surfaces. In *Applicable Mathematics in the Golden Age*, edited by Misra, J. C., pp. 305–338, Narosa Publishing House, 2003.
- [17] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* 221 (2005), no. 2, 303–351.
- [18] M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, *Contemp. Math.* 675 (2016), 337–355.
- [19] H. Whitney, The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space, *Ann. of Math.* (2) 45 (1944), 247–293.