

Signatures of Lefschetz fibrations and symplectic geography

浜田 法行 (University of Massachusetts Amherst/北海道大学情報科学研究所 CCB)*

1. 概要

本稿では、筆者と R. İnanç Baykur 氏 (UMass Amherst) との共同研究 [BH20] を解説する。ただし、同時期に開催される研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」のために執筆した予稿と内容が大幅に重複することをあらかじめ断っておく。以下、多様体や写像は滑らかなものと仮定する。

Lefschetz ペンシルおよび Lefschetz ファイブレーションはもともと射影代数多様体のトポロジーを調べるために導入された、複素版モース理論とも言えるものであった。しかしその概念は可微分トポロジーのカテゴリーに自然に拡張することができる。特に4次元の場合、モノドロミーを通してファイバー曲面の写像類群における組合せ的な議論に落とし込めることから、4次元閉多様体を比較的簡単に構成することができ、非常に有用である。さらに1990年代後半になると、実は Lefschetz ペンシルおよびファイブレーションはシンプレクティック構造と対応することが明らかにされ、それ以来、シンプレクティック4次元多様体を研究する手段として大きく発展を続けている。

こういった背景から、過去30年ほどの間に多種多様な Lefschetz ファイブレーションの具体例が構成されてきた。ここでオイラー標数と並ぶ4次元多様体の基本的位相不変量である「符号数」に注目する。興味深いことに、これまで知られている Lefschetz ファイブレーション (の全空間) はすべて負の符号数を持つ。組合せ的手法でも、素朴な方法では非負の符号数は実現できそうにない。そこでこのことは一般に成り立つのではないかと予想されていた。

予想 1.1 球面上の Lefschetz ファイブレーションは常に負の符号数を持つ。

対照的に、非負の符号数を持つ Lefschetz ペンシルは (理論的には) いくらでも存在する。とくに符号数0の Lefschetz ペンシルを調べている中で、ふとしたことから符号数0の Lefschetz ファイブレーションを構成することに成功した。つまり上記の予想の最初の反例を見つけたのであるが、これをきっかけにより強い以下の定理を示すことができた。

定理 1.1 任意の整数 $\sigma \in \mathbb{Z}$ に対し、球面上の種数9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 σ を持つものが存在する。

すなわち、実際には Lefschetz ファイブレーションの符号数に制約はまったく存在しないということがわかった。

これらの発見の契機となった符号数0の Lefschetz ファイブレーションについては、さらにシンプレクティック4次元多様体の geography への応用がある。シンプレクティック geography 問題とは、複素曲面の geography 問題のアナロジーで、極小シンプレク

キーワード: Lefschetz fibration, Lefschetz pencil, 写像類群, 符号数

* Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts Amherst, Lederle Graduate Research Tower, 710 N. Pleasant Street, Amherst, MA 01003-9305
e-mail: hamada@math.umass.edu

ティック4次元多様体の正則オイラー標数 χ_h とチャーン数 c_1^2 の組 (χ_h, c_1^2) の取り得る値を決定することを問うものである. 符号数 σ とオイラー標数 e について, $\chi_h = \frac{\sigma+e}{4}$, $c_1^2 = 3\sigma + 2e$ という関係があるので, geography は (σ, e) の範囲を決定する問題とも言い換えられる. ここでは, 単連結スピンプレクティク4次元多様体の geography を考える. 我々は以下のような結果を得, 新しい (σ, e) を実現した.

定理 1.2 任意の奇数 $m \geq 23$ に対し, $\#_m(S^2 \times S^2)$ に同相だが微分同相でないシンプレクティック4次元多様体が存在する.

ここで, 対応する geography は $(\sigma, e) = (0, 2m + 2)$ である. これまでに知られている最良の結果が $m = 175$ なので, 大きく改良できた.

記号: 本稿では次の記号を使う.

- Σ_g^k : 境界成分を k 個持つ種数 g の有向コンパクト曲面. また $\Sigma_g = \Sigma_g^0$.
- $\text{Mod}(\Sigma_g^k)$: Σ_g^k の (境界成分を pointwise に固定した) 写像類群.
- $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$: Σ_g^k の異なる境界成分 (もしくは境界成分に平行な単純閉曲線).

2. 基礎理論

2.1. Lefschetz ファイブレーションとペンシルの定義

まず, 今回の主役となる Lefschetz ファイブレーションを定義する.

定義 2.1 向き付けられた閉4次元多様体 X^4 から有向曲面 Σ への写像 $f: X^4 \rightarrow \Sigma$ が **Lefschetz ファイブレーション** であるとは, 各臨界点 $p \in X$ と特異値 $q = f(p) \in \Sigma$ の周りで, それぞれ向きと適合する局所複素座標系 (z_1, z_2) と w が存在し, $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ と表示されるときをいう. さらに, 各特異ファイバー (すなわち特異値の逆像) には, (1) 臨界点はただ1つだけ含まれること, (2) 自己交差数が -1 の球面を含まないこと (相対極小性), を通常仮定する. 付け加えてここでは, 臨界点が少なくとも1つ存在することを仮定する (非自明な Lefschetz ファイブレーションともよばれる). 一般ファイバー (すなわち正則値の逆像) は有向閉曲面になり, その種数を Lefschetz ファイブレーションの種数とよぶ.

注意 2.1 我々の興味の中心は $\Sigma = S^2$, すなわち球面上の Lefschetz ファイブレーションであるが, geography への応用において $\Sigma = T^2$ の場合も扱う.

一般ファイバー $F = f^{-1}(q_0)$ を一つ固定すると, それぞれの特異ファイバー $F_i = f^{-1}(q_i)$ に応じて消滅サイクルとよばれる F 上の単純閉曲線 c_i が定まり, 特異ファイバー F_i は一般ファイバー F から消滅サイクル c_i を縮めて一点につぶすことにより得られる. また F_i のまわりの局所モノドロミーは c_i に沿った右手デーンツイスト t_{c_i} となる.

次に定義する Lefschetz ペンシルは Lefschetz ファイブレーションの生みの親であるが, 今回は補助的な役割を担う.

定義 2.2 向き付けられた閉4次元多様体 X^4 とその空でない有限部分集合 $B \subset X$ について, 写像 $f: X^4 \setminus B \rightarrow S^2$ が **Lefschetz ペンシル** であるとは, Lefschetz ファイブレーションと同じタイプの臨界点を持ち, さらに各 $b \in B$ の周りで, 向きと適合する局所複素座標系 (z_1, z_2) と向きを保つ微分同相 $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ を用い f と射影化 $(z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ を同一視できるときをいう. このとき, B の各点を

base point とよぶ. また正則値の逆像の閉包を一般ファイバーとよぶが, それは有向閉曲面になり, その種数を Lefschetz ペンシルの種数とよぶ. 写像 f は有理型写像の記号を借りて, $f: X \dashrightarrow S^2$ と書くこともある.

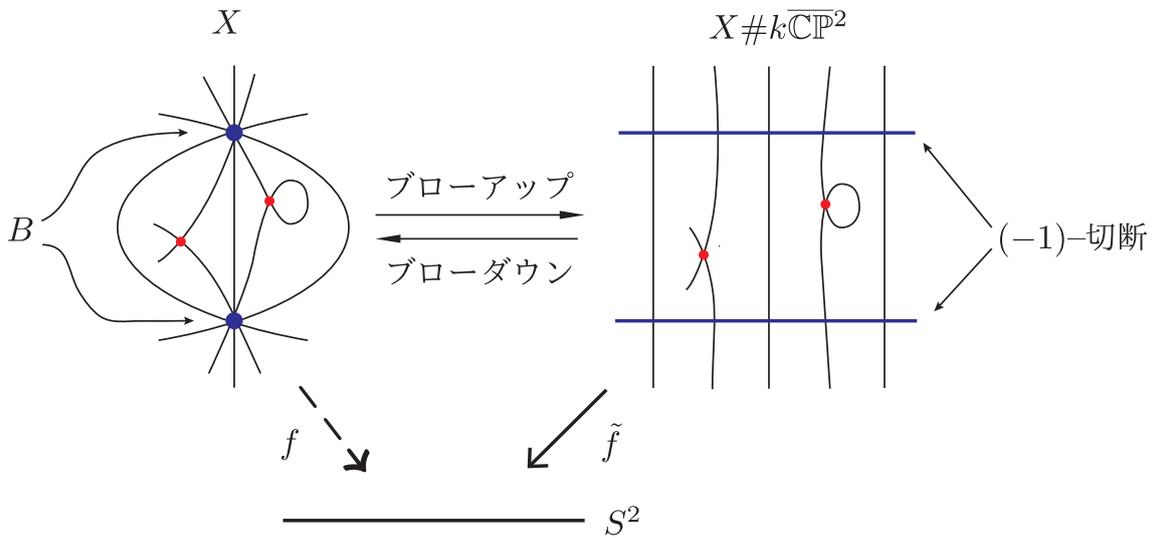


図 1: Lefschetz ペンシルと Lefschetz ファイブレーションの概念図. ここで曲面は次元を落として曲線で表現している.

Lefschetz ペンシルの各 base point でブローアップすることで, 自然に Lefschetz ファイブレーション $\tilde{f}: X \# k\overline{\mathbb{C}P}^2 \rightarrow S^2$ を得ることができる ($k = |B|$). 図 1 に概念図を示してある. このとき, ブローアップに伴う例外球面 s_j は Lefschetz ファイブレーションの切断となり, 当然その自己交差数は -1 となる ((-1) -切断とよぶ). 逆に, Lefschetz ファイブレーションが (-1) -切断を持つと, ブローダウンすることにより, Lefschetz ペンシルを得ることができる. しかしながら, 一般には Lefschetz ファイブレーションは Lefschetz ペンシルに由来するとは限らない ((-1) -切断を持つとは限らない) ことにも注意する.

2.2. モノドロミー分解

Lefschetz ファイブレーションの特異ファイバーの局所モノドロミーは消滅サイクルに沿ったデーンツイスト t_{c_i} であることは述べた. さらにグローバルモノドロミーを考えることにより, モノドロミー分解とよばれる次の形の関係式がえられる:

$$t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_n} = 1. \quad (1)$$

ここで, c_i は各特異ファイバーに対応する消滅サイクル, n は特異ファイバーの本数であり, この式は一般ファイバー $F \cong \Sigma_g$ の写像類群 $\text{Mod}(\Sigma_g)$ において成り立つ関係式である. 逆にこの形の関係式があれば, それをモノドロミー分解として持つ Lefschetz ファイブレーションを構成することができる. モノドロミー分解は Lefschetz ファイブレーションの設計図であり, 理論的にはすべての情報を持っている.

Lefschetz ファイブレーションが (-1) -切断を持つ場合, その情報もモノドロミー分解に組み込むことができる. したがって, Lefschetz ペンシルもモノドロミー分解を通じて理解することが可能である. 一般ファイバーから (-1) -切断の近傍を取り除くと,

境界付き曲面 Σ_g^k が得られる. ここで k は考えている (-1) -切断の個数である. すると消滅サイクルはこの Σ_g^k に描かれるが, それらを \tilde{c}_i とする. 境界を円盤で埋めなおすと \tilde{c}_i はもとの消滅サイクル c_i に戻る (アイソトピック) ことに注意する. このとき, モノドロミー分解は

$$t_{\tilde{c}_1} t_{\tilde{c}_2} \cdots t_{\tilde{c}_n} = t_{\delta_1} t_{\delta_2} \cdots t_{\delta_k} \quad (2)$$

という形の $\text{Mod}(\Sigma_g^k)$ における関係式にリフトする. ここで δ_j は境界成分に平行な曲線である. 逆にこの形の関係式から (-1) -切断を構成することもできる.

要約すると, (1) 型の関係式とそれに対応する Lefschetz ファイブレーションは同一視され, (2) 型の関係式とそれに対応する Lefschetz ペンシルは同一視される. しかし, (1) と (2) を区別する短い呼び方がないので, 本稿では (1) 型の関係式を **LF 型関係式**, (2) 型の関係式を **LP 型関係式** と一時的に呼ぶことにする.

我々の目標はあくまで Lefschetz ファイブレーション, つまり LF 型関係式の構成であるが, そのビルディングブロックとしては LP 型関係式を多用することになる.

2.3. シンプレクティック多様体との対応

ここで Lefschetz ペンシルと Lefschetz ファイブレーションが精力的に研究される契機となったシンプレクティック多様体との関係を述べておく.

定理 2.1 (Donaldson, Gompf) 任意のシンプレクティック 4次元閉多様体 X に対して, 全空間が X であるような Lefschetz ペンシルが存在する. 逆に, Lefschetz ペンシルおよび (非自明な) Lefschetz ファイブレーションの全空間にはシンプレクティック構造が入る.

2.4. 符号数の計算

4次元多様体の符号数とはその 2次元コホモロジー群上の交差形式の符号数のことである. Lefschetz ファイブレーションの符号数とはその全空間の符号数を意味する.

Lefschetz ファイブレーションの符号数を計算する方法はいくつか知られているが, 組合せ的観点から扱いやすいのは遠藤久顕氏と永見誠二氏による写像類群の関係子の符号数の理論である [EN05]. ここでは紙数の都合と解説が煩雑になることを避けるため正確な定式化はしないが, おおまかに言って次のようなものである.

- すべてのデーントツイストを生成系とする写像類群の群表示において, 任意の関係子には符号数とよばれる整数が割り当てられる.
- 任意の関係子は, ランタン関係子と 2-チェイン関係子とよばれる原始的な関係子から生成される.
- ランタン関係子の符号数は $+1$, 2-チェイン関係子の符号数は -7 である.
- 任意の関係子の符号数は, それを生成するために使われるランタン関係子と 2-チェイン関係子の符号数の代数的な和である.
- Lefschetz ファイブレーションおよびペンシルの符号数はそのモノドロミー分解の符号数に一致する.

今回最重要となる符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの構成には符号数 0 の関係式しか使わないので, そこでの計算は自明である.

2.5. ファイバー和とモノドロミーの置き換え

Lefschetz ファイブレーションの基本的な構成法として2つの方法を紹介する.

定義 2.3 同じ種数の2つの Lefschetz ファイブレーション f_1, f_2 について, それらに対応する LF 型関係式を $P_1 = 1, P_2 = 1$ とする. このとき, それらを並べると $P_1 P_2 = 1$ という新しい LF 型関係式が得られる. この新しい Lefschetz ファイブレーションを f_1 と f_2 のファイバー和とよぶ. 幾何的には, f_1, f_2 それぞれの一般ファイバーの近傍を取り除いて, お互いに貼りなおすという操作に対応する.

定義 2.4 ある Lefschetz ファイブレーションが $PQR = 1$ という形の LF 型関係式を持つとする. ここで P, Q, R はそれぞれ右手デーンツイストの積である. さらに別の右手デーンツイストの積 W について, 関係式 $Q = W$ が成り立つとする. このとき, $PWR = 1$ という新しい LF 型関係式が得られる. この操作をモノドロミーの置き換えとよぶ.

置き換えに用いられる関係式はほとんどの場合, LP 型関係式である.

今回の結果以前に知られていた Lefschetz ファイブレーションの例はすべて負の符号数を持っている. 符号数はファイバー和に関して加法的なので, それらの例をいくらファイバー和しても非負の符号数は得られない. またモノドロミーの置き換えに関しては, 符号数を大きくする置き換えはかなり特殊な消滅サイクルの配置を必要とするものしか知られていない. したがって, これらの素朴な方法で非負の符号数を実現するのはほぼ絶望的である.

3. 主結果

ここで我々の主結果を (多少簡略化した形で) 述べる. 概要で述べたように, 最初に構成した符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションがすべてのきっかけであり, 最も重要である.

定理 3.1 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 0 を持つものが存在する.

符号数 0 が実現できると, ファイバー和やモノドロミーの置き換え (substitution) といった素朴な操作により, 他の任意の符号数も容易に実現できる.

定理 3.2 任意の整数 $\sigma \in \mathbb{Z}$ に対し, 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで符号数 σ を持つものが存在する.

この符号数の実現問題のバリエーションとして, スピン Lefschetz ファイブレーションの符号数を考えることも自然である. スピン 4 次元多様体の場合, 符号数は 16 で割り切れきるという基本的な制約がある (ロホリンの定理). スピン Lefschetz ファイブレーションは消滅サイクルに制限を加えるが, 幸運にも, 我々の構成した符号数 0 Lefschetz ファイブレーションはその条件を満たしていた. さらに符号数を上げ下げする操作もうまくいき, 結局この実現問題も以下のように解決した.

定理 3.3 任意の 16 の倍数 $\sigma \in 16\mathbb{Z}$ に対し, 球面上の種数 9 Lefschetz ファイブレーションで全空間がスピンかつ符号数 σ を持つものが存在する.

すなわち, スピン Lefschetz ファイブレーションの符号数にはロホリンの定理以外に制約は存在しない.

ここにあげた定理で示した例はすべて単連結，極小なものとして実現でき，また被覆空間をとることによりファイバーの種数も任意に高くすることができる．さらに，ファイバー和をとることで底空間も任意の有向曲面にすることができる．

概要で述べたように次のような geography 問題への応用もある．

定理 3.4 任意の奇数 $m \geq 23$ に対し， $\#_m(S^2 \times S^2)$ に同相だが微分同相でないシンプレクティック4次元多様体が存在する．

これらは符号数 0 のスピン Lefschetz ファイブレーションを利用して作られる．

4. Breeding

Breeding とは，低い種数の LP 型関係式を高い種数の写像類群に複数埋め込み，その際現れる負のデーントツイストを正のデーントツイストでキャンセルし，新しい LP 型関係式もしくは LF 型関係式を得る手法である．

正負のデーントツイストのキャンセルングペアをうまく作らないといけないので難しく，工夫や経験が必要なテクニックである．ただ今回の結果のように，うまくいくとファイバー和やモノドロミーの置き換えといった従来の手法の限界を超えることも可能である．

5. 符号数0の Lefschetz ペンシル

目的の符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの構成のための，ビルディングブロックとして使われる Lefschetz ペンシル (LP 型関係式) を2つ紹介する．

1つ目は，松本幸夫氏によって構成されたある種数 2 Lefschetz ファイブレーションがよく知られているが，その LF 型関係式のリフトとしての LP 型関係式である [Ha16, BH20]．図 2 にその消滅サイクルを描いてあり，モノドロミー分解は

$${}^t B_0 {}^t B_1 {}^t B_2 {}^t C {}^t C' {}^t B_2' {}^t B_1' {}^t B_0' = {}^t \delta_1 {}^t \delta_2 {}^t \delta_3 {}^t \delta_4 \quad (3)$$

で与えられる．ペンシルの base locus は4点あり，全空間は $T^2 \times S^2$ である．したがって，符号数は 0 であり，スピンでもある．構成では，6-holed torus 関係式とよばれる種数 1 の LP 関係式に2つのランタン関係式を breeding する．

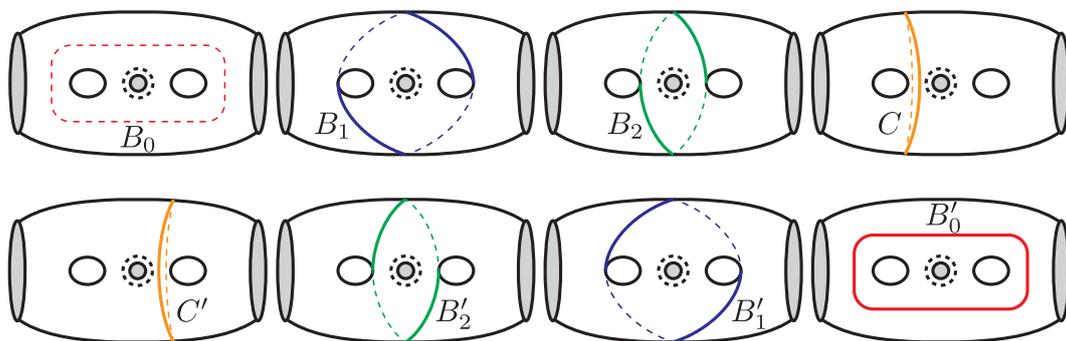


図 2: 種数 2 Lefschetz ペンシルの消滅サイクル．ここで曲面は Σ_2^4 で，境界成分4つのうち3つは灰色で埋められた曲線で表わされ，もう1つは曲面の中央裏側に位置し点線で表されている．

2つ目は，上の LP 関係式 (3) のコピーを2つ用意し，それらを分離曲線 C, C' がキャンセルされるように breeding することによって得られる種数 3 のペンシルであ

る [Ba15, HH18, BH20]. 消滅サイクルは図 3 に描かれ, モノドロミー分解は

$$t_a t_{a'} t_x t_b t_{b'} t_y t_c t_{c'} t_z t_d t_{d'} t_w = t_{\delta_1} t_{\delta_2} t_{\delta_3} t_{\delta_4}. \quad (4)$$

で与えられる. これは Smith によって構成された 4次元トーラス T^4 上の正則 Lefschetz ペンシルに同型であることがわかっている. よって, 符号数は 0 であり, スピンである. このペンシル, 特にそのモノドロミー分解 (4) が特別なのは, 12本ある消滅サイクル

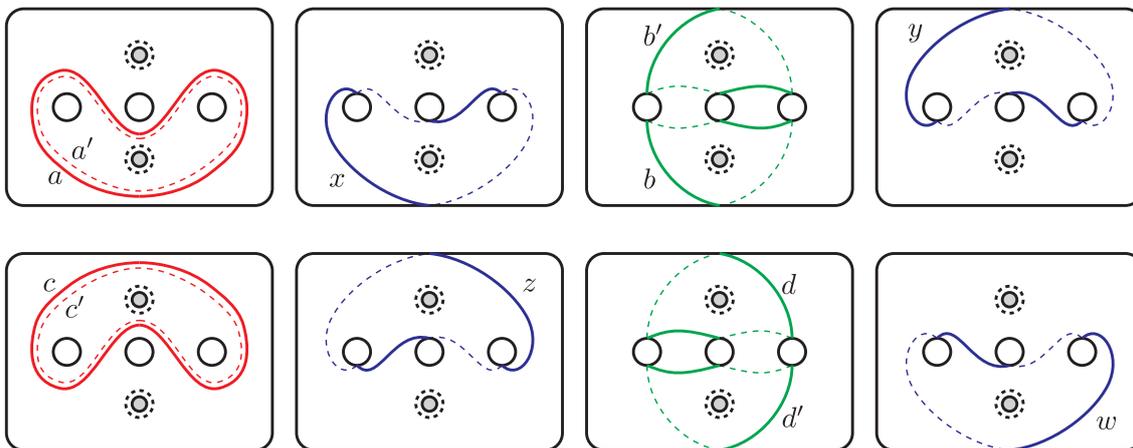


図 3: 種数 3 Lefschetz ペンシルの消滅サイクル. 曲面は Σ_3^4 .

のうち 8本までが 4つの bounding pair をなすということである. その 4つの bounding pair は, (a, a') , (b, b') , (c, c') , そして (d, d') である. それぞれ曲面 Σ_3^4 を 2つの Σ_1^4 に分ける. この bounding pair を多く持つということが, breeding を行う自由度を上げ, 最終的に符号数 0 Lefschetz ファイブレーションの構成を可能にした.

6. 符号数 0 の Lefschetz ファイブレーション

目的の符号数 0 の LF 型関係式を作るには, 種数 9 閉曲面 Σ_9 に種数 3 LP 型関係式 (4) を 6つ埋め込んで breeding を行い, LF 型関係式を構成する. その breeding の過程では, 72個の正のデーツイストおよび 24個の負のデーツイストが現れるが, それらをすべてキャンセルするように正負のデーツイストを配置することが肝要であり, 技術的にもっとも難しい部分であった. 残りの 48個の正のデーツイストが最終的な LF 型関係式を与える. 図 4に得られた消滅サイクルを描いた. モノドロミー分解は

$$t_{w_3} t_{a_3} t_{a'_3} t_{x_3} t_{b_3} t_{b'_3} t_{y_3} t_{c_3} t_{c'_3} t_{z_3} t_{x_1} t_{x_2} t_{w_4} t_{a_4} t_{a'_4} t_{x_4} t_{b_4} t_{b'_4} t_{y_4} t_{c_4} t_{c'_4} t_{z_4} t_{y_1} t_{y_2} \\ \cdot t_{w_5} t_{a_5} t_{a'_5} t_{x_5} t_{b_5} t_{b'_5} t_{y_5} t_{c_5} t_{c'_5} t_{z_5} t_{z_2} t_{z_1} t_{w_6} t_{a_6} t_{a'_6} t_{x_6} t_{b_6} t_{b'_6} t_{y_6} t_{c_6} t_{c'_6} t_{z_6} t_{w_1} t_{w_2} = 1$$

となる. 用いた種数 3 LP 型関係式 (4) の符号数は 0 なので, 得られる Lefschetz ファイブレーションの符号数は 0 であると結論できる.

7. 任意の符号数を持つ Lefschetz ファイブレーション

符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションの存在が一旦示されれば, 任意符号数はファイバー和とランタン関係式によるモノドロミーの置き換えにより実現できる. 符号数 0 を持つ種数 9 の LF 型関係式を $t_x P = 1$ とする. ここで x は (非分離型の) 消滅サ

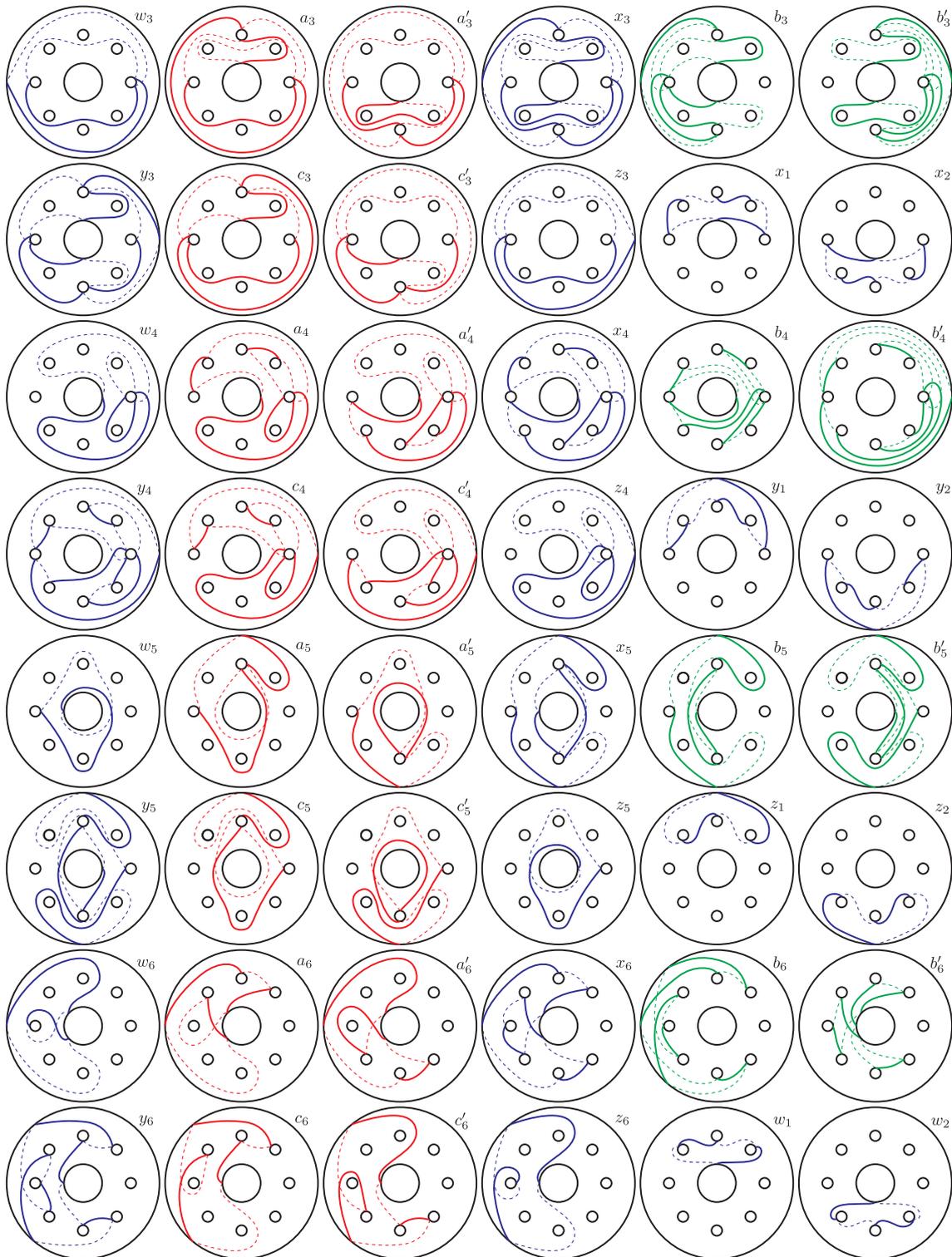


図 4: 符号数 0 を持つ Lefschetz ファイブレーションの消滅サイクル.

イクルの一つで P はモノドロミー分解の残りである．ランタン関係式は $\text{Mod}(\Sigma_9)$ に次の形で埋め込むことができる：

$$t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4} = t_a t_b t_c. \quad (5)$$

ここで、 $d_1, d_2, d_3, d_4, a, b, c$ は Σ_9 内のある特別な配置をした非分離曲線である．さて、消滅サイクル x はある微分同相 $\phi: \Sigma_9 \rightarrow \Sigma_9$ により d_1 に写すことができる．このとき、LF 型関係式 $t_x P = 1$ に一齐に ϕ で共役をとると、 $t_{d_1} P_1 = 1$ という形の LF 型関係式が得られる．これは幾何的には、一般ファイバーの Σ_9 への同一視写像の取り換えにすぎず、Lefschetz ファイブレーションとしては全く同じものである．同様のやりかたで、 $t_{d_2} P_2 = 1, t_{d_3} P_3 = 1, t_{d_4} P_4 = 1$ という LF 型関係式が得られる．これらのファイバー和をとると

$$t_{d_1}t_{d_2}t_{d_3}t_{d_4}P_4P_3P_2P_1 = 1$$

という LF 型関係式を得る．この時点ではまだ符号数は 0 であるが、ここでランタン関係式 (5) でモノドロミーの置き換えを行うと、

$$t_a t_b t_c P_4 P_3 P_2 P_1 = 1$$

となり、符号数が 1 だけ上がる．したがって、出来上がった Lefschetz ファイブレーションの符号数は 1 となる．同様のアイデアで、 $t_x P = 1$ のファイバー和により $t_a t_b t_c$ という積を作り、ランタン関係式を逆の方向に置き換えれば、符号数 -1 の Lefschetz ファイブレーションも作れる．符号数 $1, -1$ を実現したので、これらのファイバー和をとれば任意の符号数も実現できる．

8. スピン構造

スピン Lefschetz ファイブレーションに関しては、Stipsicz による特徴づけが基本的である．ただし、Lefschetz ファイブレーション $f: X \rightarrow S^2$ に対し、その一般ファイバー F が原始的である、すなわちある $S \in H_2(X; \mathbb{Z})$ が存在して $F \cdot S = 1$ となる、ことを仮定する必要がある．このような S を F の双対という．

定理 8.1 (Stipsicz [St01]) 種数 g Lefschetz ファイブレーション $f: X \rightarrow S^2$ のモノドロミー分解を $t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_n} = 1$ とする．一般ファイバー F は原始的であり、双対 S を持つと仮定する．このとき、 X がスピン構造を許容することと、

1. 交差形式に関するある二次形式 $q: H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ が存在し $q(c_i) = 1$ がすべての消滅サイクル c_i について成り立ち、
2. S の自己交差数が偶数である、

こととは同値である．

我々の符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションについては、図 4にあるの消滅サイクルに対して定理の条件を満たす二次形式が存在することが確かめられる．さらに、一般ファイバーが原始的であること、双対の自己交差数が偶数であることも最終的に確かめられたが、(切断を作れなかったことにより) 技術的に努力を要した部分である．

他の符号数 (16 の倍数) については、ファイバー和と 5-チェーン関係式とよばれる LP 型関係式によるモノドロミーの置き換えをスピン構造を壊さないような形で施し、

まず符号数 16 を実現する. 負の符号数を持つスピン Lefschetz ファイブレーションは既知のものがあリ, それと今作った符号数 16 のもののファイバー和をとれば, 任意の 16 の倍数もスピン Lefschetz ファイブレーションの符号数として実現できる.

9. シンプレクティック geography

前節で述べたように, 我々の構成した符号数 0 の Lefschetz ファイブレーションはスピンである. しかしながら, 単連結ではない. そこで, このファイブレーションを $\sigma = 0$, スピン, シンプレクティックという条件を保ったまま改変して, 単連結な多様体を作りたい. その際トポロジーが小さくなる (オイラー標数が小さくなる) とおよい. これがうまくいくと, $\#_m(S^2 \times S^2)$ に同相なシンプレクティック多様体ができる. ここで, $\#_m(S^2 \times S^2)$ にはシンプレクティック構造は入らないので, この新しい多様体とは微分同相ではない. この方針で最も効果的だったのが, 次のような操作である.

まず符号数 0 の種数 9 スピン Lefschetz ファイブレーションの底空間は S^2 であるが, 直積 $T^2 \times \Sigma_g$ をファイバー和することにより, T^2 上のファイブレーションに拡張する. これによってオイラー標数は増えてしまうが, 互いに交わらない Lagrangian トーラスを大量に見つけられるという利点がある. これらの Lagrangian トーラスについて Luttinger 手術というシンプレクティック構造を壊さない手術を行うのであるが, このとき元のファイブレーションの基本群の生成元がすべて消えるように Lagrangian トーラスを選ぶことができる. 同時に, 交差形式を偶形式のままに保つことができる. こうしてできた単連結シンプレクティック多様体は $\sigma = 0$, $e = 48$ (=消滅サイクルの個数) を持ち, 交差形式は偶形式である. 単連結 4次元多様体については, スピンであることと偶交差形式をもつことは同値であるため, 上のようにして作った多様体はスピンであることがわかる. 結果として, $\#_{23}(S^2 \times S^2)$ と同相になる.

注意 9.1 上で行った Luttinger 手術はファイブレーションの構造を壊してしまうため, 最終的にできあがった多様体は Lefschetz ファイブレーションの構造を持っているとは限らない. ファイブレーションを壊さない形で $\#_m(S^2 \times S^2)$ を作ることもできるが, そうすると m を小さくすることは難しい.

参考文献

- [Ba15] R. I. Baykur, *Small symplectic Calabi-Yau surfaces and exotic 4-manifolds*, preprint; earlier version is available at arXiv:1511.05951 (2015).
- [BH20] R. I. Baykur, N. Hamada, *Lefschetz fibrations with arbitrary signature*, preprint; available at arXiv:2010.11916 (2020).
- [EN05] H. Endo, S. Nagami, *Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations*, Trans. Am. Math. Soc. 357 (8), 3179-3199 (2005).
- [Ha16] N. Hamada, *Sections of the Matsumoto-Cadavid-Korkmaz Lefschetz fibration*, preprint; available at arXiv:1610.08458 (2016).
- [HH18] N. Hamada, K. Hayano, *Topology of holomorphic Lefschetz pencils on the four-torus*, Algebr. Geom. Topol. 18, no. 3, 1515-1572 (2018).
- [St01] A. Stipsicz, *Spin structures on Lefschetz fibrations*, Bull. London Math. Soc. 33, no. 4, 466-472 (2001).