トーラス束の変形量子化と格子版Atiyah-Singer指数定理

山下真由子　(京都大学数理解析研究所)*

1. 概要

本講演では, Atiyah-Singerの指数定理の「格子版」([14], [13]) を紹介する. この研究は素粒子物理学の格子ゲージ理論と呼ばれる分野の問題から着想を得たものである. 応用として, 格子ゲージ理論における「Wilson-Dirac作用素の指数の収束問題」を取り上げる.

2. 背景：格子ゲージ理論からのモチベーション

格子ゲージ理論においては, 興味のある多様体を格子つまり有限個の点で近似し, 多様体上の作用素を扱う代わりに格子上の作用素の解析に置き換えて計算をする, ということが行われる. 格子上のどのような作用素のどのような情報を考えたら元の多様体の興味のある情報を正しく復元するのか, という問題については, 物理学で経験的に知られているが数学的に十分解明されていない側面がたくさんあり, 数学の立場からもに非常に面白いテーマであると思われる. 本講演で取り上げるのは, 多様体上の楕円型微分作用素のFredholm指数をどうやって格子上の作用素の情報から復元するか？という問題である.

閉多様体M上の楕円型作用素Dに対してそのFredholm指数$\mathrm{Ind}(D)$が

$$\mathrm{Ind}(D) := \dim\ker D - \dim\mathrm{coker} D$$

と定義される. 楕円型作用素は幾何学において様々な場面で現れ, そのFredholm指数が重要な役割を果たしてきたのは言うまでもない. 場の理論においても, スピン多様体上のDirac作用素の指数は理論の「アノマリー」に関連するなど重要な量である.

では, 多様体Mを有限個の点で近似したときに, どのようにFredholm指数を復元するか考えてみよう. 以下ではMをn次元トーラス$M := T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$とし, 各自然数$k$に対して$M$の格子近似$B_k := (\frac{1}{k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n \subset M$を考える. M上にベクトル束S_+とS_-が与えられ, 楕円型作用素$D\colon C^\infty(M;S_+) \to C^\infty(M;S_-)$が与えられたとする. このFredholm指数$\mathrm{Ind}(D)$を$\{B_k\}_k$上の作用素の情報から復元したい. ここで第一の問題が現れる.

問 1. Dの「離散近似」として, $\{B_k\}_k$上でどのような作用素の族$\{D^k\}_k$を考えるべきか？

微分作用素を近似するのだから, 自然に差分作用素に置き換えて近似すればよいように思われる. しかし実は, 後述するように, このようなナイーブな近似ではうまくいかない.

問1が解けたとしよう. 第二の問題は以下である.

本研究は科研費(課題番号:20K14307)の助成を受けたものである。
* 〒606-8317 京都府京都市左京区北白川追分町　京都大学数理解析研究所
e-mail: mayuko@kurims.kyoto-u.ac.jp
web: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mayuko/index.html

問 2. 族 $\{D^k\}_k$ に対するどのような不変量を考えれば, 連続極限 $k\to\infty$ で *Fredholm* 指数 $\mathrm{Ind}(D)$ を復元するか？

これも非自明な問題である. 有限次元 Hilbert 空間の間の線形作用素の Fredholm 指数は Hilbert 空間の次元のみで決まってしまうため, D^k たちの Fredholm 指数そのものを使ってはいけないことがわかる.

問 1 と問 2 に対しては, 格子ゲージ理論でよく知られた解がある ([8], [7]). 問 1 の解は **Wilson-Dirac 作用素**と呼ばれる作用素 D^k_{DW}(定義 25) を用いることである. ここで D^k_{DW} は以下のような形をしている.

$$D^k_{DW} = D^k_{\mathrm{naive}} + \gamma W^k\colon l^2(B_k;(S_+\oplus S_-)|_{B_k}) \to l^2(B_k;(S_+\oplus S_-)|_{B_k}).$$

ここで D^k_{naive} は元の D の微分を差分で置き換えたナイーブな近似でできる作用素である. 一方, γW^k は「Wilson 項」と呼ばれる有限次元近似特有の項である. そして問 2 の解は, Wilson-Dirac 作用素にさらに「質量項」$mk\gamma$ を加えた作用素 $D^k_{DW}+mk\gamma$ の**正の固有空間の次元** $\mathrm{rank}(E_{>0}(D^k_{DW}+mk\gamma))$ を考えればよい, というものである. つまり, 格子ゲージ理論でよく知られた事実は以下のものである.

事実 3 (Adams [1] 2001, Y [13] 2020, Kubota [9] 2020, Fukaya-Furuta-Matsuo-Onogi-Yamaguchi-Y (in preperation))**.** $0<m<2$ なる実数 m に対して, 以下が成立する.

$$\mathrm{Ind}(D) = \lim_{k\to\infty}\left\{\mathrm{rank}(E_{>0}(D^k_{DW}+mk\gamma)) - \dim l^2(B_k;(S_+\oplus S_-)|_{B_k})\right\}. \tag{4}$$

この事実自体には, すでに Adams([1]) による数学的に厳密な証明が知られている. 彼の証明は, 熱核の収束を局所的な計算により示すものである.

本講演で問題にしたいのは以下の第三の問である.

問 5. 事実 *3* に対して, トポロジカルな証明を与えることはできないか？

このようなことを期待する理由は以下の通りである. (4) の左辺に現れる連続極限での Frednolm 指数は, Atiyah-Singer の指数定理により K 理論的な情報で表すことができる.

事実 6 (Atiyah-Singer の指数定理, Atiyah-Singer [5] 1968)**.** 閉多様体 M 上の楕円型擬微分作用素 D に対して, その *Fredholm* 指数 $\mathrm{Ind}(D)$ は以下を満たす.

$$\mathrm{Ind}(D) = \pi_![\sigma(D)].$$

ここで $[\sigma(D)]\in K^0(T^*M)$ は D の主シンボルの定める K 理論の元, $\pi_!\colon K^0(T^*M)\to K^0(pt)=\mathbb{Z}$ は T^*M の自然な *spin*^{c} 構造から定まる K 理論の *push-forward* 写像である.

したがって, (4) の右辺に対しても, 対応するトポロジカルな公式があることが期待される. つまり, このような細かくなっていく格子の上で定まっている作用素の族のスペクトルの振る舞いに対する, 「格子版」Atiyah-Singer 指数定理を定式化して, それを使って事実 4 を理解したい, というのが本研究のモチベーションであり, 本講演のテーマである.

3. 主定理：格子版 Atiyah-Singer 指数定理

この節では, 主結果である格子版 Atiyah-Singer 指数定理について説明する．これは, 多様体 M が格子の列 $\{B_k\}_k$ で近似されている状況で, 格子上に定まった自己共役作用素の列 $\{D_k\}_k$ に対して, その正の固有空間の次元の $k \to \infty$ における挙動を, その「シンボル」の K 理論的情報を用いて記述するものである．定理を記述するためには, まず格子版の「微分作用素とシンボルの対応」を作る必要がある．これを小節 3.2 で行う．それを用いて小節 3.3 において主定理を述べる．小節 3.4 で説明するように, 証明には symplectic 多様体の変形量子化の理論を用いる．

3.1. 設定

まず主定理の設定を述べる．「格子近似」を持つ多様体のクラスとして, **整 affine 多様体**を考える．

定義 7. n 次元多様体 M の**整 affine 構造**とは, M の局所座標系であって, 座標変換が $GL(n;\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の元で与えられるものである．整 affine 構造の入った多様体 M を**整 affine 多様体**と呼ぶ．

整 affine 多様体には, 局所的には「格子点集合」が平行移動の差を除いて定まる．この格子点集合を大域的に定義するための補助データとして, 余接トーラス束の前量子化を考える． 整 affine 構造から, 接束 $TM \to M$ の格子部分束 $\Lambda \to M$, つまり各ファイバー Λ_x $(x \in M)$ が T_xM の $\mathbb{Z}^n$ に同型な部分群であるファイバー束が定まる．$\Lambda^* \subset T^*M$ を Λ に双対な部分束とする．T^*M の標準的な symplectic 構造から, 余接トーラス束 $X := T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ にも symplectic 構造 ω が誘導される．$\mu\colon X \to M$ は非特異な Lagrange トーラス束である．X 上に, $U(1)$ 接続付きの hermitian 直線束 (L, ∇) であって $\nabla^2 = -\sqrt{-1}\omega$ を満たすものを固定する (これを**前量子化束**と呼ぶ)．前量子化束が存在することは前量子化条件 $[\omega] \in 2\pi H^1(X;\mathbb{Z})$ と同値である．

この設定のもと, M の標準的な「格子点近似」が以下で定義される．

定義 8 (Bohr-Sommerfeld 点)**.** 正整数 k に対して, $b \in M$ が**レベル k の Bohr-Sommerfeld 点**であるとは, (L^k, ∇^k) を b 上のファイバー $X_b := \mu^{-1}(b)$ に制限したとき, 自明接続付きの自明束 $(\underline{\mathbb{C}}, d)$ と同型であることとする．B_k をレベル k の Bohr-Sommerfeld 点全体の集合とする．

B_k は B の離散部分集合をなし, 実際上で「局所的に定まる」と書いた $1/k$-格子点集合が大域的に貼りあったものになっている．

例 9. $M = \mathbb{R}^n$ とし, 標準的な整 affine 構造を入れる． このとき余接トーラス束は $(X, \omega) = (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n, {}^t dx \wedge d\theta)$ となる．この場合前量子化束として $(L, \nabla^L) = (\underline{\mathbb{C}}, d - \sqrt{-1}{}^t x d\theta))$ が取れる．するとレベル k の Bohr-Sommerfeld 点の集合は $B_k = \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$ となり, 実際 $1/k$-格子点集合と一致している．Arnold-Liouville の定理 ([3]) により, 非特異な Lagrange トーラス束とその上の前量子化束は, 局所的には上のものと同型である．

$M = T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ に標準的な整 affine 構造が入っている場合は, 上の $\mathbb{R}^n$ の場合の構成を $\mathbb{Z}^n$ 作用

$$(x, \theta, v) \mapsto (x + m, \theta, e^{\sqrt{-1}\langle m, \theta\rangle} v)$$

で割ったものが余接トーラス束と前量子化束を与え, レベル k の Bohr-Sommerfeld 点の集合は $B_k = (\frac{1}{k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n \subset (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ である．

3.2. 格子版「微分作用素とシンボルの対応」

主定理を述べるために, 私が [14] で構成した, 格子版「微分作用素とシンボルの対応」について説明する. M を整 affine 多様体とし, $\mu\colon X = T^*M/(2\pi\Lambda^*) \to M$ を余接トーラス束とする. 前小節のように, 前量子化束 (L, ∇) が与えられているとし, レベル k の Bohr-Sommerfeld 点集合を $B_k \subset M$ とおく.

これから構成したいのは, 線形写像の列 $\{\phi^k\}_k$,

$$\phi^k\colon C_c^\infty(X) \to \mathbb{B}(l^2(B_k)), \tag{10}$$

である. ここで Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は有界線形作用素の空間を表す. したがって, 余接トーラス束上の関数 $f \in C_c^\infty(X)$ に対して格子上の作用素の列 $\{\phi^k(f)\}_k$ が対応することになるが, この f が「格子版のシンボル」であり, $\{\phi^k(f)\}_k$ はその「作用素による実現」とみなすべきものである. 通常の多様体上の微分作用素からシンボルを与える写像とは向きが逆になっていることに注意されたい.

ここで, 構成のモチベーションを説明するために, 通常の多様体上のシンボル写像について復習する. 多様体 M 上の微分作用素 D に対して, 主シンボル $\sigma(D) \in C^\infty(T^*M)$ が余接束上の関数として定義されるのであった. 局所的には,

$$D = \sum_I a_I(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^I \quad \mapsto \quad \sigma(D) = \sum_{I\colon \text{top degree}} a_I(x)\xi^I$$

なる対応である. 今回重要なのは, これが T^*M の「ファイバー方向のフーリエ変換」で与えられているということである. この類似を考え, 格子 B_k 上の作用素と余接トーラス束 $X = T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ 上の関数とが, 「ファイバー方向のフーリエ展開」によって対応する, というのが構成のアイデアである. まず局所的なモデルとして, $M = \mathbb{R}^n$ に標準的な整 affine 構造を入れた場合に以下のように定義する.

定義 11 ($M = \mathbb{R}^n$ の場合の定義)**.** $M = \mathbb{R}^n$ とし, 余接トーラス束を $X = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ とおく. $C_b^\infty(X)$ で, C^∞-ノルムが一様に有界である関数のなす線形空間をあらわす. 正整数 k に対して, 線形写像

$$\phi^k\colon C_b^\infty(X) \to \mathbb{B}(l^2(B_k))$$

を以下で定義する. $f \in C_b^\infty(X)$ が与えられたとき, $f(x,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f_m(x) e^{\sqrt{-1}\langle m,\theta\rangle}$ とフーリエ展開したうえで, $\phi^k(f)$ の「行列要素」が

$$\langle \psi_b, \phi^k(f)\psi_c\rangle = f_{k(b-c)}\left((b+c)/2\right) \tag{12}$$

であるように定める. ここで, $b, c \in B_k$ であり, $\psi_b \in l^2(B_k)$ は $\psi_b(b) = 1$, $\psi_b(c) = 0$ $(c \neq b)$ なる元とする.

次に簡単な例を見てみる.

例 13. $f(x,\theta) = f_0(x)$ の場合, つまり f がファイバー方向に定数である場合, $\phi^k(f)$ は f_0 による掛け算作用素である.

例 14. ある $m \in \mathbb{Z}^n$ に対して $f(x,\theta) = e^{\sqrt{-1}\langle m,\theta\rangle}$ という形をしているとき, $\phi^k(f)$ は「(m/k)-シフト作用素」である. つまり, $g \in l^2(B_k)$ に対して,

$$\left(\phi^k(e^{\sqrt{-1}\langle m,\theta\rangle})g\right)(x) = g(x - m/k).$$

例 15 (差分作用素のシンボル). この構成の利点のひとつは, 多様体の格子近似で自然に現れる「差分作用素」のシンボルが簡単に書けることである. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, i 方向の前向き差分作用素 $\nabla_i^k \in \mathbb{B}(l^2(B_k))$ を,

$$\left(\nabla_i^k g\right)(x) := \frac{g(x + e_i/k) - g(x)}{1/k}$$

と定める. ここで $e_i \in \mathbb{R}^n$ は i 方向の単位ベクトルである. このとき,

$$k\phi^k\left(e^{-\sqrt{-1}\theta_i} - 1\right) = \nabla_i^k$$

であることが簡単にわかる. つまり関数 $e^{-\sqrt{-1}\theta_i} - 1 \in C_b^\infty(X)$ は作用素の列 $\{k^{-1}\nabla_i^k\}_k$ のシンボルである.

定義 11 は一見 $\mathbb{R}^n$ の座標の取り方に依存しているように見えるが, 実は $\mathbb{R}^n$ の整 affine 構造のみによって定まっている. 実際, 格子点を固定する整 affine 変換 $x \mapsto Ax + b$, $(A, b) \in GL(n, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$ によって余接トーラス束の座標は $(x, \theta) \mapsto (Ax + b, {}^tA^{-1}\theta)$ と変換されることに注意すると, $f \in C_c^\infty(X)$ を与えたとき, $b, c \in B_k$ に対して (12) の右辺の値はこの座標変換で不変である. この座標不変性と, 各 f に対して $\phi^k(f)$ は $k \to \infty$ で局所化していくこととを合わせると, 定義 11 の局所的な構成を「貼り合わせる」ことによって, 任意の (余接トーラス束上の前量子化束つきの) 整 affine 多様体 M に対して格子版「微分作用素とシンボルの対応」(10) が構成できる.

3.3. 主定理

小節 3.2 で構成した「格子版シンボル」を用いて, 「格子版 Atiyah-Singer 指数定理」を述べる. 前小節 3.2 の設定に加えて, この小節では M が閉であることを仮定する. 線形写像 (10) は自然に行列値関数に対しても拡張され, 格子上の自明なベクトル束上の作用素が与えられる [1]:

$$\phi^k \colon M_N(C^\infty(X)) \to \mathbb{B}(l^2(B_k) \otimes \mathbb{C}^N).$$

また, 以下では Hilbert 空間上の自己共役作用素 D に対して, $E_{\geq 0}(D)$ により区間 $(0, \infty]$ に対応するスペクトル射影 (正の固有空間への射影) をあらわす.

定理 16 (格子版 Atiyah-Singer 指数定理, [13]). N を任意の自然数とする. $f \in M_N(C^\infty(X))$ を可逆かつ自己共役な行列値関数とし, $\{\phi^k(f)\}_k$ を対応する格子上の作用素の族 $\phi^k(f) \in \mathbb{B}(l^2(B_k) \otimes \mathbb{C}^N)$ とすると, 十分大きな k に対して以下が成立する.

$$\operatorname{rank}\left(E_{>0}(\phi^k(f))\right) = \pi_!\left([f] \otimes [L]^k\right). \tag{17}$$

ここで $[L] \in K^0(X)$ は前量子化束のクラス, $\pi_! \colon K^0(X) \to K^0(pt) = \mathbb{Z}$ は X の自然な *spin*^{c} 構造から定まる K 理論の *push-forward* 写像である. また, $[f] \in K^0(X)$ は f の正の固有束 *(*$x \in X$ に対して $f(x)$ の正の固有空間を対応させることによりできる X 上のベクトル束*)* のクラスである.

---

[1] 一般のベクトル束上の作用素を扱いたいときは, 自明束に埋め込めばよいので, この場合を考えれば十分である.

右辺をコホモロジーによる表式に書き直せば, (17) は以下と同値である.

$$\mathrm{rank}\left(E_{>0}(\phi^k(f))\right) = (2\pi\sqrt{-1})^{-\dim M}\int_X ch(f)td(\omega)e^{\sqrt{-1}k\omega} \tag{18}$$

例 19. 一番簡単な例として, $f = 1 \in C^\infty(X)$ の場合を見てみる. この場合 $\phi^k(1) = \mathrm{id}_{l^2(B_k)}$ であるから, (17) の左辺は $\dim l^2(B_k) = \sharp B_k$, つまりレベル k の Bohr-Sommerfeld 点の個数となる. 一方, 右辺 $\pi_!([L]^k)$ は L^k で捻った X 上の spin^c-Dirac 作用素の指数 $\mathrm{Ind}(D_{S\otimes L^k})$ であり, コホモロジーによる表示を用いれば $(2\pi)^{-n}\int_X td(\omega)e^{k\omega}$ となる. したがって定理 16 は, 十分 k が大きいとき,

$$\sharp B_k = \mathrm{Ind}(D_{S\otimes L^k}) \tag{20}$$

が成立するという主張になる. 実際, 例えば $M = T^n$ の場合には, 両辺は k^n であり任意の k で等式が成立する. 実は一般に等式 (20) は任意の k で成立する ([2]).

3.4. 証明について：変形量子化の理論の応用

定理 16 の証明には, symplectic 多様体の**変形量子化**の理論を用いる. 変形量子化という数学的に歴史ある研究対象が, この一見関係のない問題に応用できたというのが本研究の面白く新しい部分である.

symplectic 多様体 (X, ω) が与えられたとき, 関数環 $C^\infty(X)$ には Poisson 括弧積 $\{\cdot,\cdot\}$ が, $f, g \in C^\infty(X)$ に対して

$$\{f, g\} := \omega(H_f, H_g)$$

で定まる. ここで H_f, H_g はそれぞれ f, g の Hamiltonian ベクトル場 ($\omega(H_f, \cdot) = df$ で定まるベクトル場) をあらわす.

今回 (X, ω) の変形量子化とよぶのは, 一般に結合的な代数の族 $\{\mathcal{A}_\hbar\}_\hbar$(formal な族も許す) と, 線形写像 $\mathrm{Op}_\hbar\colon C^\infty(X) \to \mathcal{A}_\hbar$ の組であって, 次の条件

$$\mathrm{Op}_\hbar(f)\mathrm{Op}_\hbar(g) = \mathrm{Op}_\hbar(fg) + O(\hbar),$$
$$[\mathrm{Op}_\hbar(f), \mathrm{Op}_\hbar(g)] = \hbar\mathrm{Op}_\hbar(\{f, g\}) + O(\hbar^2),$$

を満たすものである. 具体的には, 以下の 2 種類の変形量子化を考える.

- **formal な変形量子化**.

  $C^\infty(X)[[\hbar]]$ の結合的な積構造 $\star$ であって, 1 が単位元であり,

  $$f \star g = fg + O(\hbar),$$
  $$f \star g - g \star f = \hbar\{f, g\} + O(\hbar^2),$$

  を満たすものを **formal な変形量子化**とよぶ. これは $\{\mathcal{A}_\hbar\}_\hbar = (C^\infty(X)[[\hbar]], \star)$, $\mathrm{Op}_\hbar(f) = f$ としたものに対応する.

- **strict な変形量子化**.

  Hilbert 空間の列 $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^\infty$ と随伴を保つ線形写像の列 $Q^k\colon C_c^\infty(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_k)$ の組であって,

  $$\|Q^k(f)\| \to \|f\|_{C^0},$$
  $$\left\|[Q^k(f), Q^k(g)] + \frac{\sqrt{-1}}{k}Q^k(\{f, g\})\right\| = O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

を満たすものを **strict な変形量子化**とよぶ. これは上の定義で $\hbar = -\sqrt{-1}/k$ とし, $\mathcal{A}_{-\sqrt{-1}/k} = \mathbb{B}(\mathcal{H}_k)$, $\mathrm{Op}_{-\sqrt{-1}/k} = Q^k$ としたものに対応する.

実は, 小節3.2で構成した格子版「微分作用素とシンボルの対応」(10) は, 余接トーラス束 X の strict な変形量子化になっている.

命題 21. *Hilbert*空間の列 $\{l^2(B_k)\}_k$ と式 (10) の線形写像 $\phi^k\colon C_c^\infty(X) \to \mathbb{B}(l^2(B_k))$ の組は, (X,ω) の *strict* な変形量子化を与える.

一方多くの場合, 変形量子化というと formal な変形量子化のことを指し, こちらの方が主に研究されてきた. 特に, formal な変形量子化に対しては, Atiyah-Singer の指数定理の「代数版」である, Nest-Tsygan による「代数的指数定理」が知られている.

事実 22 (代数的指数定理, Nest-Tsygan [11] 1995)**.** 閉 *symplectic* 多様体 (X,ω) の *formal* な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]],\star)$ が与えられたとする. $\star$ に関するべき等元 $e \in M_N(C^\infty(X))[[\hbar]]$ が与えられたとき, $e = e_0 + O(\hbar)$ とあらわすと, 以下が成立する.

$$\tau(e) = \int_X ch(e_0)td(\omega)e^{-c_1(\omega)/2}e^{\theta/\hbar}.$$

ここで $\tau\colon C^\infty(X)[[\hbar]] \to \mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$ は標準的なトレース汎関数 $(\tau(f\star g) = \tau(g\star f)$ を満たす $\mathbb{C}[[\hbar]]$-線形写像であり, 標準的な選び方が存在する$)$ である. また, $ch(e_0) \in \Omega^{\mathrm{even}}(X)$ は $M_N(C^\infty(X))$ のべき等元 e_0 の *Chern* 指標, $\theta \in H^2(X;\mathbb{C}[[\hbar]])$ は変形量子化 $\star$ の定める特性類 *([11]* 参照*)* である.

定理16 (あるいはコホモロジーによる公式 (18)) と事実22はとても似た構造をしている. というのも, 両者ともに symplectic 多様体の変形量子化を与えた上で, 変形された代数 $\{\mathcal{A}_\hbar\}_\hbar$ におけるべき等元のトレース (左辺) を, 対応する可換代数 $C^\infty(X)$ の元 (シンボル) のコホモロジー類により表す (右辺) 公式とみることができるからである. ここで, 定理16の左辺は作用素のトレース (代数 $\mathbb{B}(l^2(B_k))$ のトレース汎関数) を用いて

$$\mathrm{rank}\left(E_{>0}(\phi^k(f))\right) = \mathrm{Trace}(E_{>0}(\phi^k(f)))$$

と表示できることを用いた. そこで, 格子版 Atiyah-Singer 指数定理 (定理16) を代数的指数定理 (事実22) の「strict 版」とみなして, strict な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$ を formal な変形量子化と「対応づける」ことで, 代数的指数定理を応用しよう, というのが証明のアイデアである.

実際, strict な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$ は以下の意味で formal な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]],\star_{MY})$ を誘導することが示される. ここで $\star_{MY}$ は Moyal-Weyl 積[2] である. Moyal-Weyl 積を

$$f \star_{MY} g = \sum_{j=0}^\infty \hbar^j \mathcal{C}_j(f,g).$$

とあらわすと, 以下が成立する.

[2] $(\mathbb{R}^{2n}, {}^t dx \wedge d\theta)$ に入る最も標準的な formal な変形量子化が Moyal-Weyl 積と呼ばれている ([12] などを参照). 今回 $X = T^*M/(2\pi\Lambda^*)$ には平坦な symplectic 接続が入るため, Moyal-Weyl 積を大域的に貼り合わせることができる. ここではこの formal な変形量子化を Moyal-Weyl 積と呼んでいる.

命題 23. 任意の $f,g\in C^\infty(X)$ と $l\in\mathbb{N}$ に対して, $k\to\infty$ において以下が成立する.

$$\left\|\phi^k(f)\phi^k(g)-\sum_{j=0}^{l}\left(\frac{-\sqrt{-1}}{k}\right)^j\phi^k\left(\mathcal{C}_j(f,g)\right)\right\|=O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right)$$

これがわかると, strict な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$ と formal な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]],\star_{MY})$ には以下の対応ができる.

strict な変形量子化 $\{\phi^k\}_k$	formal な変形量子化 $(C^\infty(X)[[\hbar]],\star_{MY})$
作用素の合成 $\phi^k(f)\phi^k(g)$	Moyal-Weyl 積 $f\star_{MY}g$
作用素のトレース Trace	トレース汎関数 τ

この対応を用いると, 定理 16 は代数的指数定理 (事実 22) を直接適用することで従う.

4. 格子ゲージ理論への応用

この節では, 節 2 で述べた格子ゲージ理論の問題に対して, 格子版 Atiyah-Singer 指数定理 (定理 16) を応用することでトポロジカルな解法を与える.

4.1. 設定

まず設定を述べる.

- n を偶数とし, $M=T^n=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ とする. M 上には標準的な計量と平行移動不変なスピン構造を入れる. $B_k=(\frac{1}{k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n\subset M$ をレベル k の格子点集合とする.
- $\mathbb{C}l_n$ を n 次複素クリフォード環とする. これは n 個の生成元 $\{c_i\}_{i=1}^n$ と関係式 $c_ic_j+c_jc_i=-2\delta_{ij}$ で $\mathbb{C}$ 上生成された環である. $c_i^*=-c_i$ によって $*$-代数構造を入れる. $\gamma:=c_1c_2\cdots c_n$ とおくと, $\gamma c_i+c_i\gamma=0$ が成立する.
- S を n 次スピノル空間, つまり $\mathbb{C}l_n$ の既約表現空間とする ([10] などを参照). これは γ の作用により $S=S_+\oplus S_-$ と $\mathbb{Z}_2$-次数付けられる. M 上のスピノル束は自明束 $\underline{S}=M\times S$ である.
- (E,∇^E) を M 上の接続付き hermitian ベクトル束とする.

ベクトル束 E で捻った M 上の Dirac 作用素の Fredholm 指数を離散近似から復元したい, というのが問題である. ここで, Dirac 作用素 (連続側の作用素) は以下で定義される.

定義 24. M 上の E で捻った **Dirac 作用素** $D\colon L^2(M;\underline{S}\otimes E)\to L^2(M;\underline{S}\otimes E)$ を以下で定義する.

$$D:=\sum_{i=1}^{n}c_i\nabla^{\underline{S}\otimes E}_{\partial_i}.$$

ここで $\nabla^{\underline{S}\otimes E}$ は ∇^E と $\underline{S}$ 上の自明接続のテンソル積で定まる接続である. これは γ による $\mathbb{Z}_2$ 次数付けに関して odd かつ自己共役な楕円型微分作用素である.

一方, 格子側の作用素としては, 以下のものを考える.

定義 25. 各正整数kに対して, $l^2(B_k;(\underline{S}\otimes E)|_{B_k})$上の作用素$\nabla_i^k, D^k_{\mathrm{naive}}, W^k$を以下で定義する.

- 各$1\le i\le n$に対して, i-方向の前向き差分作用素∇_i^kを例15と同様に定める. ただし今回は∇^Eによる平行移動を用いる必要がある.

- レベルkの**格子 Dirac 作用素** D^k_{naive}を以下で定める.

$$D^k_{\mathrm{naive}} := \sum_{i=1}^n c_i \frac{\nabla_i^k - (\nabla_i^k)^*}{2}.$$

  これは$\mathbb{Z}_2$次数付けに関して odd な作用素である.

- **Wilson 項** W^kを以下で定める.

$$W^k := \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i^k + (\nabla_i^k)^*}{2}.$$

  これは$\mathbb{Z}_2$次数付けに関して even な作用素である.

格子 Dirac 作用素と Wilson 項の和をとってできた作用素$D^k_{DW} := D^k_{\mathrm{naive}} + \gamma W^k$を**Wilson-Dirac 作用素**とよぶ. さらに, 正の定数$m>0$に対して「質量項」$mk\gamma$を加えた作用素$D^k_{DW}+mk\gamma$を**質量付き Wilson-Dirac 作用素**とよぶ. これは自己共役な作用素であるが, 連続の Dirac 作用素が$\mathbb{Z}_2$次数付けに関して odd であったのに対して, 質量付き Wilson-Dirac 作用素は格子特有の項である Wilson 項と質量項の影響で odd ではない. つまり, $\underline{S}\otimes E = (S_+\otimes E)\oplus(S_-\otimes E)$という分解に関してそれぞれの作用素は以下の形をしている.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_+ \\ D_- & 0 \end{pmatrix}, \quad D^k_{DW} + m\gamma = \begin{pmatrix} W^k_+ + mk & D^k_+ \\ D^k_- & -W^k_- - mk \end{pmatrix}.$$

質量付き Wilson-Dirac 作用素の正の固有空間の次元が連続の Dirac 作用素の Fredholm 指数を$k\to\infty$で復元する, という事実3に対して, 新しい証明を与えるのが目標である.

4.2. 証明の概略

事実3は, 連続側の解析的指数 (左辺) と格子側の解析的指数 (右辺) の一致, と見ることができる. そこで証明のアイデアは, 連続側には Atiyah-Singer の指数定理を, 格子側には格子版 Atiyah-Singer 指数定理を適用し, 両者の位相的指数つまりシンボルを比較することに帰着する, というものである. ここで鍵となるのが, 以下の可換図式である.

$$\begin{tikzcd} K^0(T^*M) \arrow[rr, "i_{T^*M!}"] \arrow[dr, "\pi_!"'] & & K^0(X) \arrow[dl, "\pi_!"] \\ & K^0(pt) & \end{tikzcd} \tag{26}$$

ここで, $i_{T^*M}\colon T^*M \hookrightarrow X = T^*M/(2\pi\Lambda^*)$は零切断$M\subset X$の近傍への開埋め込みである. (26) の可換性は, push-forward の関手性よりわかる. 左側の写像が連続側の指数写像, 右側の写像が格子側の指数写像であることより, 連続版と格子版のシンボルが$i_{T^*M!}\colon K^0(T^*M)\to K^0(X)$でどう関係するかを調べればよい. 具体的には証明は以下のステップからなる.

(1) 質量付き Wilson-Dirac 作用素に対応するシンボル $f_{DW}(m,E) \in M_N(C^\infty(X))$ を見つける.

(2) 次の等式を示す.

$$\begin{aligned} i_{T^*M!}([\sigma(D)]) &= [f_{DW}(m,E)] - [-\gamma] \otimes [E] \\ &= ([f_{DW}(m,E)] - [-\gamma] \otimes [E]) \otimes [L]^k \end{aligned} \tag{27}$$

(3) Atiyah-Singer 指数定理 (事実 6) と格子版 Atiyah-Singer 指数定理 (定理 16), さらに可換図式 (26) と式 (27) を組み合わせると, 事実 3 が従う.

各ステップについて, 簡単に説明する.

(1) について. まず E が自明束 $(E, \nabla^E) = (\underline{\mathbb{C}}, d)$ の場合を考える. $f_{DW}(m) \in C^\infty(X) \otimes \mathrm{End}(S)$ を以下で定義する.

$$f_{DW}(m) := \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\sqrt{-1} c_i \sin\theta_i + \gamma\left(\cos\theta_i - 1\right)\right\} + m\gamma. \tag{28}$$

例 15 と同様の計算により, 以下がわかる.

$$\phi^k\left(f_{DW}(m)\right) = k^{-1}(D^k_{DW} + mk\gamma).$$

したがって $f_{DW}(m)$ は質量付き Wilson-Dirac 作用素の k^{-1} 倍に対応するシンボルである. ここで, 定理 16 の条件であった, シンボルの可逆性を確かめる.

$$(f_{DW}(m))^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sin^2\theta_i + \left(\sum_{i=1}^{n} (\cos\theta_i - 1) + m \right)^2 \right\}$$

であることより, $m \notin \{0, 2, \cdots, 2n\}$ であれば $f_{DW}(m)$ は可逆であることがわかる.

ここで, Wilson 項や質量項を導入しなかった場合, つまりナイーブな格子 Dirac 作用素 D^k_{naive} を考えたならば, 対応するシンボルが $\theta_i \in \{0, \pi\}$ なる点で可逆でなくなってしまうため, 定理が適用できないことに注意する. これが, 問 1 において「ナイーブな近似ではうまくいかない」ことの理由と解釈できる.

E が一般の場合, 同様にして $\left\{k^{-1}\left(D^k_{DW} + mk\gamma\right)\right\}_k$ に対応するシンボルのなす K 理論のクラスは $[f_{DW}(m)] \otimes [E] \in K^0(X)$ で与えられることがわかる.

(2) について. 鍵となるのは次の事実である. これが, 「連続版 Dirac 作用素のよい格子近似が Wilson-Dirac 作用素である」ことの理由と解釈できる.

補題 29. $0 < m < 2$ とする. 式 (28) で定義される $f_{DW}(m)$ を $C^\infty((\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n) \otimes \mathrm{End}(S)$ の元とみなしたとき, $K^0((\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n)$ において以下の等式が成立する.

$$i_{pt!}\left([1]\right) = [f_{DW}(m)] - [-\gamma].$$

ここで $i_{pt}\colon \{pt\} \hookrightarrow (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n$ は 1 点の埋め込みであり $[1] \in K^0(pt)$ は生成元をあらわす.

補題 29 を認めると, 等式 (27) は, $i_M\colon M \hookrightarrow T^*M$ を零切断への埋め込みとすると連続側の Dirac 作用素のシンボルのクラスが

$$[\sigma(D)] = i_{M!}([E])$$

で与えられていたこと, および零切断が X の Lagrange 部分多様体であるため前量子化束 L の制限が平坦束であること, より簡単に従う.

5. 未解決問題

本研究では, 閉である整 affine 多様体の格子近似上での指数定理という, 多様体の離散近似という観点からは最も基本的な状況を扱ったといえる. 関連して未解決である問題はたくさんあるが, 以下に 2 つの問題を挙げる.

問 30. 整 *affine* 多様体とは限らない多様体の離散近似に対しても, 「格子版シンボルと作用素の対応」を構成できないか？それを用いて同様の「格子版 *Atiyah-Singer* 指数定理」をより一般に確立できないか？

多様体の離散近似といった場合様々なクラスのものが考えられるが, 今回の手法と同様にトーラス束の変形量子化の理論を応用しようとするならば, 特異ファイバーを許す Lagrange トーラス束の底空間として現れるような, 特異性を許す整 affine 多様体を考えるのが自然である. このような対象にも理論を拡張できれば, 例えば $M = S^2$ の場合など, 扱える多様体が格段に増えて物理側からも数学側からも非常に面白いと思われる.

問 31. 境界つき多様体上の *Atiyah-Patodi-Singer* 指数定理 *([4])* に対しても, 同様の「格子版」ができないか？それを用いて, *Wilson-Dirac* 作用素の指数の収束問題の *APS* 版 *([6])* に対しても数学的証明を与えることはできないか？

境界つき多様体上の楕円型作用素に対する Atiyah-Patodi-Singer 指数は, 物理においても最近注目を集めている. 深谷-川井-松木-森-中山-大野木-山口 ([6]) は, 「ドメインウォール」を導入した Wilson-Dirac 作用素を考えることで, 事実 3 の APS 版が成立することを物理的議論により予想した. 本講演で紹介した格子版 Atiyah-Singer 指数定理の APS 版を構成することで, 彼らの予想に対して数学的証明を与えることはできないか？というのが問である.

参考文献

[1] David H. Adams. On the continuum limit of fermionic topological charge in lattice gauge theory. *J. Math. Phys.*, 42(12):5522–5533, 2001.

[2] Jørgen Ellegaard Andersen. Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations. *Communications in mathematical physics*, 183(2):401–421, 1997.

[3] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1989. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.

[4] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:43–69, 1975.

[5] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Ann. of Math.*, 87(2):484–530, 1968.

[6] Hidenori Fukaya, Naoki Kawai, Yoshiyuki Matsuki, Makito Mori, Katsumasa Nakayama, Tetsuya Onogi, and Satoshi Yamaguchi. The Atiyah-Patodi-Singer index on a lattice. *PTEP. Prog. Theor. Exp. Phys.*, (4), 2020.

[7] Peter Hasenfratz, Victor Laliena, and Ferenc Niedermayer. The Index theorem in QCD with a finite cutoff. *Phys.Lett.B.*, 427:125–131, 1998.

[8] S. Itoh, Y. Iwasaki, and T. Yoshie. The $u(1)$ problem and topological excitations on a lattice. *Phys.Rev.D.*, (36):527, 1987.

[9] Yosuke Kubota. The index theorem of lattice Wilson-Dirac operators via higher index theory. *preprint. arXiv:2009.03570.*

[10] Jr. Lawson, H. Blaine and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry.* Number 38 in Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[11] Ryszard Nest and Boris Tsygan. Algebraic index theorem. *Comm. Math. Phys.*, 172(2):223–262, 1995.

[12] Alan Weinstein. Deformation quantization. *Astérisque*, 227:389–409, 1995.

[13] Mayuko Yamashita. A lattice version of the atiyah-singer index theorem. *preprint. arXiv:2007.06239*, 2020.

[14] Mayuko Yamashita. A new construction of strict deformation quantization for Lagrangian fiber bundles. *preprint. arXiv:2003.06732*, 2020.