

# ウェルデッド絡み目のミルナー不変量

和田 康載 (大阪大学・日本学術振興会特別研究員PD)\*

## 1. はじめに

1950年代に Milnor [10, 11] は  $\bar{\mu}$  不変量と呼ばれる3次元球面内の絡み目の不変量を定義した. 順序付けられた有向  $n$  成分絡み目  $L$  に対し, 集合  $\{1, \dots, n\}$  の元を項にもつ数列  $I$  に対応してミルナー数と呼ばれる整数  $\mu_L(I)$  が定まる. ミルナー数  $\mu_L(I)$  のある剰余類  $\bar{\mu}_L(I)$  をとることにより,  $L$  の不変量が得られる. この剰余類が  $\bar{\mu}$  不変量である. 数列  $I$  の項に重複がない場合,  $\bar{\mu}_L(I)$  はリンクホモトピー不変量であることが知られている [11]. ここで, リンクホモトピーとは自己交差交換によって生成される同値関係のことである [10]. 1990年に, Habegger-Lin [5] は絡み目のミルナー数を3次元球体内のストリング絡み目の不変量に拡張した. この整数値不変量をストリング絡み目の  $\mu$  不変量という.

1990年代の後半, 絡み目の一般化にあたる概念として, ウェルデッド絡み目が定義された [4]. ウェルデッド絡み目と同様に, ウェルデッドストリング絡み目も定義される. 2010年に Dye-Kauffman [3] は数列の項に重複がない場合に絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量をウェルデッド絡み目へ拡張したが, 2013年に Kotorii [6] はこの拡張が正しくないことを指摘した. ([1]も参照されたい.) そして, Turaev [14] のナワード理論を用いた組合せ論的な手法で,  $\bar{\mu}$  不変量のウェルデッド絡み目への拡張を与え直した. またウェルデッドストリング絡み目に対して, 2011年に Kravchenko-Polyak [7] は, ガウス関式を用いた組合せ論的な手法で, 数列の項に重複がない場合にストリング絡み目の  $\mu$  不変量を拡張した. Kotorii や Kravchenko-Polyak によるミルナー不変量の拡張は数列の項に重複がない場合, すなわち, リンクホモトピー不変量の場合に限られている.

2017年に Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1] は4次元球体内のリボン2次元ストリング絡み目に  $\mu$  不変量を定義した. さらにチューブ写像を組み合わせて, 任意の数列に対するストリング絡み目の  $\mu$  不変量をウェルデッドストリング絡み目へ拡張した. ここで, チューブ写像とはウェルデッドストリング絡み目をリボン2次元ストリング絡み目に対応させる写像のことである (cf. [13, 15]). Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1] と類似のトポロジカルな手法で, 2020年に Chrisman [2] は任意の数列に対する絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量をウェルデッド絡み目へ拡張することに成功した. [1, 2] でウェルデッド (ストリング) 絡み目に対しミルナー不変量が完全な形で定義されたが, その手法はトポロジカルなものである. ウェルデッド (ストリング) 絡み目は, 仮想関式により定義される組合せ論的な対象であるため, それらのミルナー不変量の定義やその不変性の証明を組合せ論的な手法で与えることは重要な課題であると考えられる.

Milnor は [11] で関式を用いた絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量を計算する方法を与えた. Milnor の計算方法は仮想絡み目関式に対しても適用できる. 上記の Chrisman [2] の結果より, Milnor の計算方法から得られる値はウェルデッド絡み目の不変量であり, 理論的にはその値の不変性を仮想絡み目関式のみを用いて証明することが可能である. そのような組合せ論的な証明を実際に与えることができたので, 本講演ではその証明の概略を紹介

本研究は科研費 (課題番号: JP19J00006) の助成を受けたものである.

\* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻  
e-mail: ko-wada@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

する。また、ウェルデッド絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量は数列の項に重複がない場合に自己仮想化同値の不変量であること、我々の証明は上記の Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1] の結果の別証明を含むことも紹介する。本講演の内容は、宮澤治子氏（津田塾大学）、安原晃氏（早稲田大学）との共同研究 [12] に基づく。

## 2. ウェルデッド絡み目のミルナー不変量

本節では、Milnor [11] の図式を用いた絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量の計算方法を基にした、ウェルデッド絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量の定義を紹介する。

まずウェルデッド絡み目を定義する。平面にはめ込まれた  $n$  個の円周であり、多重点が横断的な2重点のみであるものを  $n$  成分仮想絡み目図式という。その2重点は、図1に示された実交差と呼ばれるものと、仮想交差と呼ばれるものの二種類がある。

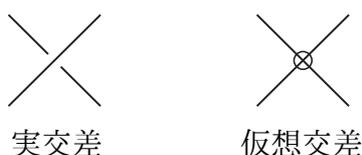


図 1: 仮想絡み目図式の二種類の交差

二つの仮想絡み目図式が同値であるとは、それらがウェルデッドライデマイスター移動と呼ばれる図2に示された八種類の局所変形 R1-R3, V1-V4, OC の有限列によって互に移り合うときをいう。  $n$  成分仮想絡み目図式と同値類を  $n$  成分ウェルデッド絡み目という。なお以下では、仮想絡み目図式およびウェルデッド絡み目の各成分は、向きと順序が指定されていると仮定する。

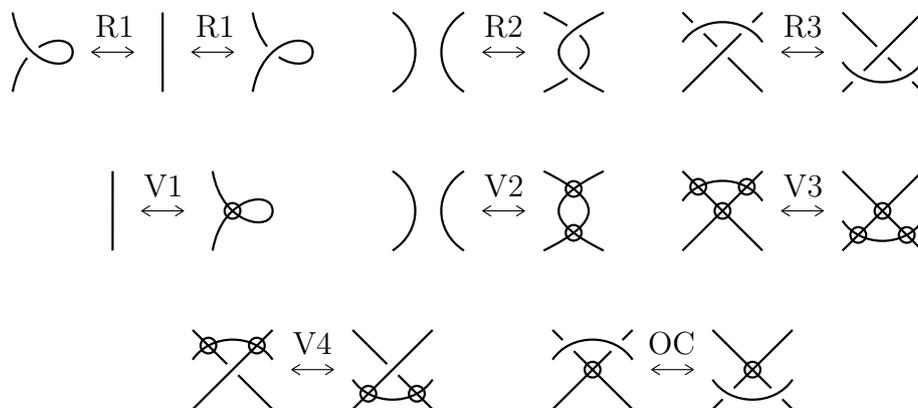


図 2: ウェルデッドライデマイスター移動

$D$  を  $n$  成分仮想絡み目図式とする。各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し、 $D$  の第  $i$  成分上に1点  $p_i$  を選び固定する。各点  $p_i$  を第  $i$  成分の基点といい、 $n$  個の基点の組  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  を  $D$  の基点システムと呼ぶ。また、基点システム  $\mathbf{p}$  を伴った図式  $D$  を  $(D, \mathbf{p})$  で表す。 $D$  の実上交差と  $n$  個の基点  $p_1, \dots, p_n$  により  $D$  は有限個の連結成分に分割されるが、その各連結成分を  $(D, \mathbf{p})$  のアークと呼ぶ。 ( $(D, \mathbf{p})$  のアークには実上交差や仮想交差が含まれてもよい。)

基点  $p_i$  から第  $i$  成分の向きに沿って一周し、通過した順に  $(D, \mathbf{p})$  の各アークにラベル  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im_i+1}$  を付ける (図3参照)。ここで、 $m_i + 1$  は  $(D, \mathbf{p})$  の第  $i$  成分のアー

クの総数である．また  $u_{ij} \in \{a_{kl}\}$  を  $a_{ij}$  と  $a_{ij+1}$  を区分するアークとし，  $\varepsilon_{ij} \in \{1, -1\}$  を  $a_{ij}, a_{ij+1}, u_{ij}$  からなる交差の符号とする．

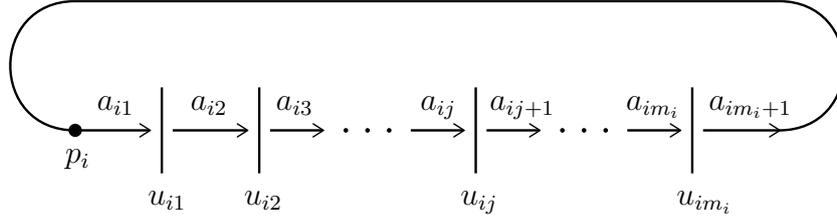


図 3:  $(D, \mathbf{p})$  の第  $i$  成分の概略図

$A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  を階数  $n$  の自由群とし，  $\bar{A}$  を  $(D, \mathbf{p})$  のアーク全体の集合  $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i + 1\}$  で生成される自由群とする．また，語  $u_{i1}^{\varepsilon_{i1}} u_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \cdots u_{ij}^{\varepsilon_{ij}} \in \bar{A}$  ( $1 \leq j \leq m_i$ ) を  $v_{ij}$  で表す．自然数  $q$  に対し，  $(D, \mathbf{p})$  に付随した準同型写像  $\eta_q = \eta_q(D, \mathbf{p}) : \bar{A} \rightarrow A$  を次で定義する．

$$\begin{aligned} \eta_1(a_{ij}) &= \alpha_i, \\ \eta_{q+1}(a_{i1}) &= \alpha_i, \quad \eta_{q+1}(a_{ij}) = \eta_q(v_{ij-1}^{-1}) \alpha_i \eta_q(v_{ij-1}) \quad (2 \leq j \leq m_i + 1). \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  を整数係数の  $X_1, \dots, X_n$  を非可換な変数とする形式的ベキ級数環とする．マグナス展開とは次で定義される準同型写像  $E : A \rightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  のことをいう．

$$E(\alpha_i) = 1 + X_i, \quad E(\alpha_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \cdots \quad (1 \leq i \leq n).$$

**注意 2.1** ([8])  $A_q$  を  $A$  の降中心列の第  $q$  番目の部分群とする．任意の  $x \in A_q$  に対し，  $E(x) = 1 + (q$  次以上の項) が成り立つ．

各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し，  $(D, \mathbf{p})$  の第  $i$  成分の自己交差の符号和を  $w_i$  とし，語  $a_{i1}^{-w_i} v_{im_i} \in \bar{A}$  を  $l_i$  で表す．この語  $l_i$  を  $(D, \mathbf{p})$  の第  $i$  番標準ロンジチュードと呼ぶ．

**定義 2.2** 集合  $\{1, \dots, n\}$  の元を項とする数列  $j_1 \dots j_s i$  ( $1 \leq s < q$ ) に対する  $(D, \mathbf{p})$  のミルナー数とは，  $\eta_q(l_i)$  のマグナス展開  $E(\eta_q(l_i))$  における  $X_{j_1} \cdots X_{j_s}$  の係数のことであり，  $\mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q)}(j_1 \dots j_s i)$  で表す．

**注意 2.3**  $1 \leq s < q$  に対し，  $\mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q)}(j_1 \dots j_s i) = \mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q+1)}(j_1 \dots j_s i)$  が成り立つ．

注意 2.3 より，  $q$  が十分大きければ  $\mu_{(D, \mathbf{p})}^{(q)}(j_1 \dots j_s i)$  を，  $(q)$  を省略して  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(j_1 \dots j_s i)$  と表して差し支えない．  $q$  は任意に大きくとれるため，今後  $q$  は十分大きい自然数であると仮定する．

二つの基点付き仮想絡み目図式が基点付き同値であるとは，それらが基点を含まないウエルデッドライデマイスター移動と図 4 の局所変形の有限列で互いに移り合うときをいう．

**注意 2.4** 図 5 の二種類の局所変形は基点付き同値において使用が許されない．

次のように基点付き仮想絡み目図式のミルナー数は基点付き同値の不変量である．

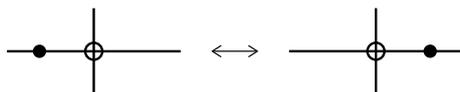


図 4: 基点が仮想交差を通過する局所変形

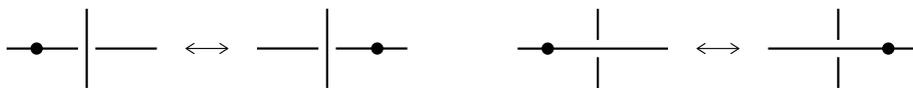


図 5: 基点付き同値において使用できない二種類の局所変形

**定理 2.5** ([12, Theorem 3.1]) 二つの基点付き仮想絡み目図式  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  が基点付き同値であるならば, 任意の数列  $I$  に対し  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I)$  が成り立つ.

$(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  の第  $i$  番標準ロンジチュードを各々  $l_i$  と  $l'_i$  で表す. 定理 2.5 を示すためには,  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  が 1 回の基点を含まないウエルデッドライデマイスター移動または図 4 の局所変形で移り合うときを考え,  $\eta_q(D, \mathbf{p})(l_i)$  と  $\eta_q(D', \mathbf{p}')(l'_i)$  の差を観察すればよい. その差について次が分かる.

**命題 2.6**  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  を基点付き仮想絡み目図式とし,  $l_i$  と  $l'_i$  をその第  $i$  番標準ロンジチュードとする.  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  が基点付き同値であるならば,  $\eta_q(D, \mathbf{p})(l_i) \equiv \eta_q(D', \mathbf{p}')(l'_i) \pmod{A_q}$  が成り立つ.

命題 2.6 は認めて定理 2.5 を証明する.

**定理 2.5 の証明** 注意 2.1 と命題 2.6 を組み合わせると,

$$E(\eta_q(D, \mathbf{p})(l_i)) - E(\eta_q(D', \mathbf{p}')(l'_i)) = (q \text{ 次以上の項})$$

を得る. よって定義より, 任意の数列  $j_1 \dots j_s i$  ( $s < q$ ) に対し,  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(j_1 \dots j_s i) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (j_1 \dots j_s i)$  が成り立つ.  $\square$

基点付き仮想絡み目図式  $(D, \mathbf{p})$  のミルナー数  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(i_1 \dots i_r)$  は基点システム  $\mathbf{p}$  の選び方に依存し, 一般にウエルデッド絡み目の不変量ではない. そこで, 非負整数  $\Delta_{(D, \mathbf{p})}(i_1 \dots i_r)$  を

$$\gcd \left\{ \mu_{(D, \mathbf{p})}(j_1 \dots j_s) \mid \begin{array}{l} j_1 \dots j_s \ (2 \leq s < r) \text{ は } i_1 \dots i_r \text{ から一つ以上の項} \\ \text{を取り除き残りを巡回置換させて得られる数列} \end{array} \right\}$$

で定義する. ただし,  $\Delta_{(D, \mathbf{p})}(i_1 i_2) = 0$  と定める. このとき次が成り立つ.

**定理 2.7** ([12, Theorem 5.2]) 二つの仮想絡み目図式  $D$  と  $D'$  が同値であるならば,  $D$  と  $D'$  各々の任意の基点システム  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p}'$  に対し次が成り立つ.

- (i) 任意の数列  $I$  に対し,  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) \equiv \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I) \pmod{\Delta_{(D, \mathbf{p})}(I)}$  である.
- (ii) 任意の数列  $I$  に対し,  $\Delta_{(D, \mathbf{p})}(I) = \Delta_{(D', \mathbf{p}')} (I)$  である.

定理 2.7 により次の定義は well-defined である.

**定義 2.8**  $L$  を  $n$  成分ウェルデッド絡み目とする. 集合  $\{1, \dots, n\}$  の元を項とする数列  $I$  に対する  $L$  の  $\bar{\mu}$  不変量とは, 剰余類  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) \pmod{\Delta_{(D, \mathbf{p})}(I)}$  のことであり,  $\bar{\mu}_L(I)$  で表す. ここで,  $D$  は  $L$  の図式であり,  $\mathbf{p}$  は  $D$  の基点システムである.

**注意 2.9** 定義 2.8 のウェルデッド絡み目  $L$  の  $\bar{\mu}$  不変量は, Chrisman [2] が定義した  $\bar{\mu}$  不変量と同値なものである. とくに,  $L$  が 3 次元球面内の絡み目の場合は Milnor [11] のオリジナルの  $\bar{\mu}$  不変量と一致する.

### 3. 定理 2.7 の証明の概略

本節では定理 2.7 の証明の概略を述べる. まず,  $n$  成分仮想絡み目図式  $D$  を固定し,  $D$  の基点システムを取り替えた際の  $\eta_q(l_i)$  の変化を考察することから始める.

$D$  の実下交差により分割された  $D$  の各連結成分を  $D$  のアークという. ( $D$  のアークには実上交差や仮想交差が含まれてもよい. また,  $D$  のアークと  $(D, \mathbf{p})$  のアークの定義は異なることに注意されたい.) 各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し, 第  $i$  成分のアークを一つ選び固定し, そのアークにラベル  $a_{i1}$  を付ける.  $a_{i1}$  とラベル付けられたアークから向きに沿って第  $i$  成分を一周し, 通過した順に残りのアークにラベル  $a_{i2}, \dots, a_{im_i}$  を付ける. ここで,  $m_i$  は  $D$  の第  $i$  成分のアークの総数である. 以後,  $D$  のアークのラベル  $a_{i1}, \dots, a_{im_i}$  は固定して考える.

今,  $D$  に対し基点システム  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  を与える. 各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し, 基点  $p_i$  を含むアークの添字の第 2 番目の整数を  $\mathbf{p}(i)$  で表す. 例えば,  $p_i$  が  $a_{ij}$  上にあるならば,  $\mathbf{p}(i) = j$  である. ここで,  $D$  のアークのラベルから  $(D, \mathbf{p})$  のアークのラベルを定める.  $(D, \mathbf{p})$  において,  $p_i$  を含む  $D$  のアーク  $a_{i\mathbf{p}(i)}$  は  $p_i$  により二つに分割されるので, それらには図 6 のように  $b_i^{\mathbf{p}}$  と  $a_{i\mathbf{p}(i)}$  とラベルを付ける. その他の  $(D, \mathbf{p})$  のアークには,  $D$  の対応するアークのラベルを付ける.

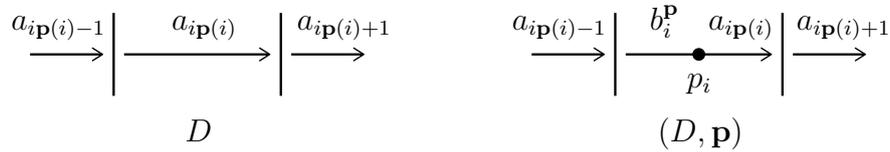


図 6:  $D$  のアークのラベルと  $(D, \mathbf{p})$  のアークのラベルの対応

以上の設定の下で, 前節で定義した  $(D, \mathbf{p})$  に付随した準同型写像  $\eta_q(D, \mathbf{p})$  は次のように記述される. 簡単のため  $\eta_q(D, \mathbf{p})$  を  $\eta_q^{\mathbf{p}}$  で表す.  $\eta_q^{\mathbf{p}}$  の定義域は  $\{a_{ij}\} \cup \{b_i^{\mathbf{p}}\}$  で生成される自由群  $\bar{A}$  であり, 値域  $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  への対応は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \eta_1^{\mathbf{p}}(a_{ij}) &= \alpha_i, \quad \eta_1^{\mathbf{p}}(b_i^{\mathbf{p}}) = \alpha_i, \\ \eta_{q+1}^{\mathbf{p}}(a_{i\mathbf{p}(i)}) &= \alpha_i, \quad \eta_{q+1}^{\mathbf{p}}(a_{ij}) = \eta_q^{\mathbf{p}}((v_{ij-1}^{\mathbf{p}})^{-1})\alpha_i\eta_q^{\mathbf{p}}(v_{ij-1}^{\mathbf{p}}) \quad (j \neq \mathbf{p}(i)), \\ \eta_{q+1}^{\mathbf{p}}(b_i^{\mathbf{p}}) &= \eta_q^{\mathbf{p}}((v_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\mathbf{p}})^{-1})\alpha_i\eta_q^{\mathbf{p}}(v_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

ここで,

$$v_{ij}^{\mathbf{p}} = \begin{cases} u_{i\mathbf{p}(i)}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)}} u_{i\mathbf{p}(i)+1}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)+1}} \cdots u_{ij}^{\varepsilon_{ij}} & (\mathbf{p}(i) \leq j \leq m_i), \\ u_{i\mathbf{p}(i)}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)}} u_{i\mathbf{p}(i)+1}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)+1}} \cdots u_{im_i}^{\varepsilon_{im_i}} u_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \cdots u_{ij}^{\varepsilon_{ij}} & (1 \leq j \leq \mathbf{p}(i) - 1) \end{cases}$$

であり,  $v_{i0}^{\mathbf{p}} = v_{im_i}^{\mathbf{p}}$  と定める. さらに,  $(D, \mathbf{p})$  の第  $i$  番標準ロンジチュード  $l_i^{\mathbf{p}}$  は

$$l_i^{\mathbf{p}} = a_{i\mathbf{p}(i)}^{-w_i} v_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\mathbf{p}}$$

で与えられる。

$D$ の実下交差と実上交差により分割された  $D$ の各連結成分を  $D$ のセミアークという。  
( $D$ のセミアークには仮想交差が含まれてもよい。)  $D$ の基点システム全体の集合を  $\mathcal{P}$ とし、各  $p_i$  が第  $i$ 成分の向きに沿って実下交差から始まるセミアーク上にある基点システム  $(p_1, \dots, p_n)$  全体の集合を  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$  とする。また、 $\mathcal{P}_0$  の元であり各  $p_i$  が  $a_{i1}$  上にある基点システム  $(p_1, \dots, p_n)$  を  $\mathbf{p}_*$  で表す。以下では、簡単のため  $(D, \mathbf{p}_*)$  に付随した準同型写像  $\eta_q^{\mathbf{p}_*}$  と第  $i$ 番標準ロンジチュード  $l_i^{\mathbf{p}_*}$  を各々  $\eta_q$  と  $l_i$  で表す。

基点システム  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  に対し語  $\lambda_i^{\mathbf{p}} \in \bar{A}$  を

$$\lambda_i^{\mathbf{p}} = \begin{cases} u_{i1}^{\varepsilon_{i1}} u_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \cdots u_{i\mathbf{p}(i)-1}^{\varepsilon_{i\mathbf{p}(i)-1}} & (\mathbf{p}(i) \neq 1), \\ 1 & (\mathbf{p}(i) = 1) \end{cases}$$

で定め、準同型写像  $\phi_q^{\mathbf{p}} : A \rightarrow A$  を

$$\begin{aligned} \phi_1^{\mathbf{p}}(\alpha_i) &= \alpha_i, \\ \phi_q^{\mathbf{p}}(\alpha_i) &= \eta_{q-1}^{\mathbf{p}}(\lambda_i^{\mathbf{p}}) \alpha_i \eta_{q-1}^{\mathbf{p}}((\lambda_i^{\mathbf{p}})^{-1}) \quad (q \geq 2). \end{aligned}$$

で定義する。 $M_q^{\mathbf{p}}$  を  $A$  における  $\{\phi_q^{\mathbf{p}}([\alpha_i, \eta_q(l_i)]) \mid 1 \leq i \leq n\}$  の正規閉包とし、 $M_q = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_0} M_q^{\mathbf{p}}$  とおく。このとき、 $D$ の基点システムを  $\mathbf{p}_*$  から  $\mathbf{p}$  に取り替えた際の  $\eta_q(l_i)$  と  $\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})$  の差が次のように記述される。

**定理 3.1** ([12, Theorem 4.8])  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  を任意の基点システムとし、 $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}_0$  を  $\mathbf{p}_0(k) = \mathbf{p}(k)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) をみたす基点システムとする。各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し、 $\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}}) \equiv \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q((\lambda_i^{\mathbf{p}_0})^{-1} l_i \lambda_i^{\mathbf{p}_0})) \pmod{A_q M_q}$  が成り立つ。

定理 3.1 の証明は割愛する。

ここで、 $\mu_{\mathbf{p}}(I) = \mu_{(D, \mathbf{p})}(I)$ ,  $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta_{(D, \mathbf{p})}(I)$  とおく。とくに、 $\mu(I) = \mu_{(D, \mathbf{p}_*)}(I)$ ,  $\Delta(I) = \Delta_{(D, \mathbf{p}_*)}(I)$  とおく。そして、 $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  の両側イデアル  $\mathcal{D}_i$  を

$$\left\{ \sum \nu(j_1 \dots j_s) X_{j_1} \cdots X_{j_s} \mid \begin{array}{l} \nu(j_1 \dots j_s) \equiv 0 \pmod{\Delta(j_1 \dots j_s i)} \quad (s < q), \\ \nu(j_1 \dots j_s) \in \mathbb{Z} \quad (s \geq q). \end{array} \right\}$$

で定める。定義より、 $\mathcal{D}_i$  の元は

$$\sum_{s < q} (\Delta(j_1 \dots j_s i) \text{ の倍数}) X_{j_1} \cdots X_{j_s} + (q \text{ 次以上の項})$$

という形で表される。よって  $\eta_q(l_i)$  と  $\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})$  が同じ剰余類  $\mu(j_1 \dots j_s i) \pmod{\Delta(j_1 \dots j_s i)}$  を与えることをいうには、 $E(\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})) - E(\eta_q(l_i)) \in \mathcal{D}_i$  を証明すればよい。そこで次の補題を用意する。

**補題 3.2** ([12, Lemma 5.7]) 語  $x, y \in A$  と基点システム  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  に対し、任意の  $i \in \{1, \dots, n\}$  で次が成り立つ。

(i)  $E(x^{-1} \eta_q(l_i) x) - E(\eta_q(l_i)) \in \mathcal{D}_i$  である。

(ii)  $E(\phi_q^{\mathbf{p}}(\eta_q(l_i))) - E(\eta_q(l_i)) \in \mathcal{D}_i$  である。

(iii) もし  $x \equiv y \pmod{A_q M_q}$  であるならば、 $E(x) - E(y) \in \mathcal{D}_i$  である。

補題3.2を認め、定理3.1と組み合わせることで次を証明する.

**命題 3.3** ([12, Proposition 5.8]) 任意の基点システム  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  に対し、次が成り立つ.

(i) 任意の数列  $I$  に対し、 $\mu_{\mathbf{p}}(I) \equiv \mu(I) \pmod{\Delta(I)}$  である.

(ii) 任意の数列  $I$  に対し、 $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta(I)$  である.

**証明** (i)  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}_0$  を各  $k \in \{1, \dots, n\}$  に対し  $\mathbf{p}_0(k) = \mathbf{p}(k)$  をみたす基点システムとする. 定理3.1から、

$$\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}}) \equiv \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q((\lambda_i^{\mathbf{p}_0})^{-1} l_i \lambda_i^{\mathbf{p}_0})) \pmod{A_q M_q}$$

を得る.  $x = \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(\lambda_i^{\mathbf{p}_0})) \in A$  とおくと、補題3.2より次が成り立つ.

$$\begin{aligned} E(\eta_q^{\mathbf{p}}(l_i^{\mathbf{p}})) - E(\eta_q(l_i)) &\equiv E(x^{-1} \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(l_i)) x) - E(\eta_q(l_i)) \pmod{\mathcal{D}_i} \\ &\equiv E(x^{-1} \phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(l_i)) x) - E(x^{-1} \eta_q(l_i) x) \pmod{\mathcal{D}_i} \\ &= E(x^{-1}) (E(\phi_q^{\mathbf{p}_0}(\eta_q(l_i))) - E(\eta_q(l_i))) E(x) \\ &\equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_i}. \end{aligned}$$

よって任意の数列  $j_1 \dots j_{s_i}$  に対し、 $\mu_{\mathbf{p}}(j_1 \dots j_{s_i}) - \mu(j_1 \dots j_{s_i}) \equiv 0 \pmod{\Delta(j_1 \dots j_{s_i})}$  である.

(ii) 数列  $I$  の長さ  $k$  に関する帰納法で示す.  $k = 2$  のとき、定義より  $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta(I) = 0$  である.  $k \geq 2$  と仮定する.  $\mathcal{J}_1(I)$  を  $I$  からただ一つ項を取り除き残りを巡回置換させて得られる数列全体の集合とする. また、 $\mathcal{J}_{\geq 1}(I)$  を  $I$  から一つ以上の項を取り除き残りを巡回置換させて得られる数列全体の集合とする. 帰納法の仮定より、任意の数列  $J \in \mathcal{J}_1(I)$  に対し  $\Delta_{\mathbf{p}}(J) = \Delta(J)$  である. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{p}}(I) &= \gcd \{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \mid J \in \mathcal{J}_{\geq 1}(I) \} \\ &= \gcd \left( \bigcup_{J \in \mathcal{J}_1(I)} (\{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \} \cup \{ \mu_{\mathbf{p}}(J') \mid J' \in \mathcal{J}_{\geq 1}(J) \}) \right) \\ &= \gcd \left( \bigcup_{J \in \mathcal{J}_1(I)} (\{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \} \cup \{ \Delta_{\mathbf{p}}(J) \}) \right) \\ &= \gcd \left( \bigcup_{J \in \mathcal{J}_1(I)} (\{ \mu_{\mathbf{p}}(J) \} \cup \{ \Delta(J) \}) \right). \end{aligned}$$

そして、(i) より  $\mu_{\mathbf{p}}(J) \equiv \mu(J) \pmod{\Delta(J)}$  であるため、 $\Delta_{\mathbf{p}}(I) = \Delta(I)$  が成り立つ.  $\square$

**定理 2.7 の証明**  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  は基点を含まないウェルデッドライデマイスター移動、図4の局所変形、および図5の二種類の局所変形の有限列で互いに移り合うため、定理2.7は定理2.5と命題3.3から従う.  $\square$

## 4. 自己仮想化

自己仮想化とは、図7に示された自己交差を仮想交差に置き換える局所変形である。基点付き仮想絡み目図式のミルナー数と自己仮想化との関係について次が分かる。

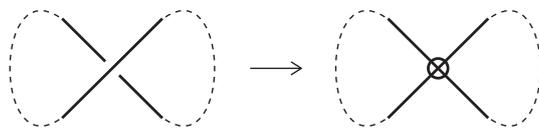


図 7: 自己仮想化

**定理 4.1** ([12, Theorem 6.7]) 二つの基点付き仮想絡み目図式  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  が一回の自己仮想化で移り合うならば、項に重複のない任意の数列  $I$  に対し  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I)$  が成り立つ。

二つのウェルデッド絡み目が自己仮想化同値であるとは、それらの図式がウェルデッドライデマイスター移動と自己仮想化の有限列で互いに移り合うときをいう。定理 2.5, 2.7, および 4.1 を組み合わせることで次が得られる。

**定理 4.2** ([12, Theorem 6.1]) 二つのウェルデッド絡み目  $L$  と  $L'$  が自己仮想化同値であるならば、項に重複のない任意の数列  $I$  に対し  $\bar{\mu}_L(I) = \bar{\mu}_{L'}(I)$  が成り立つ。

**注意 4.3** 自己交差交換はウェルデッドライデマイスター移動と自己仮想化の有限列で実現される (図8参照)。すなわち、二つのウェルデッド絡み目がリンクホモトピックであるならば、それらは自己仮想化同値である。したがって、定理 4.2 は絡み目の  $\bar{\mu}$  不変量のリンクホモトピー不変性に関する結果 [11, Theorem 8] の一般化となっている。

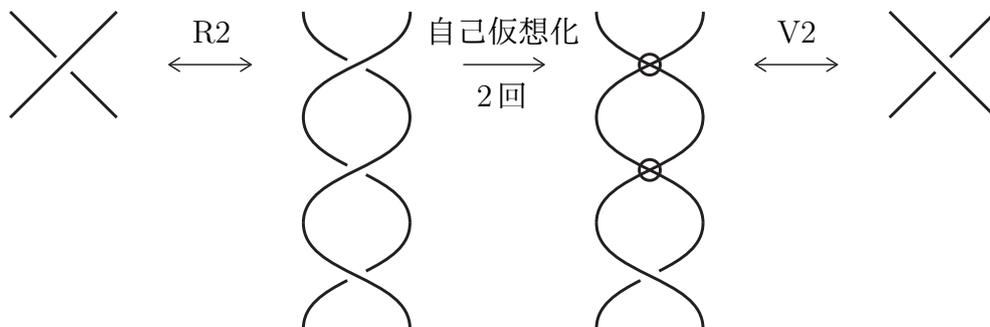


図 8: 自己交差交換の自己仮想化による実現

## 5. ウェルデッドストリング絡み目のミルナー不変量

単位区間  $[0,1]$  内に  $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$  をみたす  $n$  個の点  $x_1, \dots, x_n$  を選び固定する。また  $[0, 1]$  の  $n$  個のコピー  $[0, 1]_1, \dots, [0, 1]_n$  を考える。次の条件 (i) と (ii) をみたすはめ込み  $f : \bigsqcup_{i=1}^n [0, 1]_i \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  の像を  $n$  成分仮想ストリング絡み目図式という。

(i) 各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し、 $\partial f([0, 1]_i) = \{x_i\} \times [0, 1]$  である。

(ii)  $f$  の多重点は実交差と仮想交差の横断的な2重点のみである。

ウェルデッドライデマイスター移動によって生成される同値関係の下での  $n$  成分仮想ストリング絡み目図式  $S$  の同値類を  $n$  成分ウェルデッドストリング絡み目という。

$S$  を  $n$  成分仮想ストリング絡み目図式とする。  $[0, 1] \times [0, 1]$  を平面内に入れ、その外側で図9のように、各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対し二点  $(x_i, 0)$  と  $(x_i, 1)$  をつなぐと仮想絡み目図式が得られる。さらに  $(x_i, 0)$  を基点  $p_i$  と見なすことで、基点付き仮想絡み目図式が一意的に得られる。これを  $(D_S, \mathbf{p}_S)$  で表す。

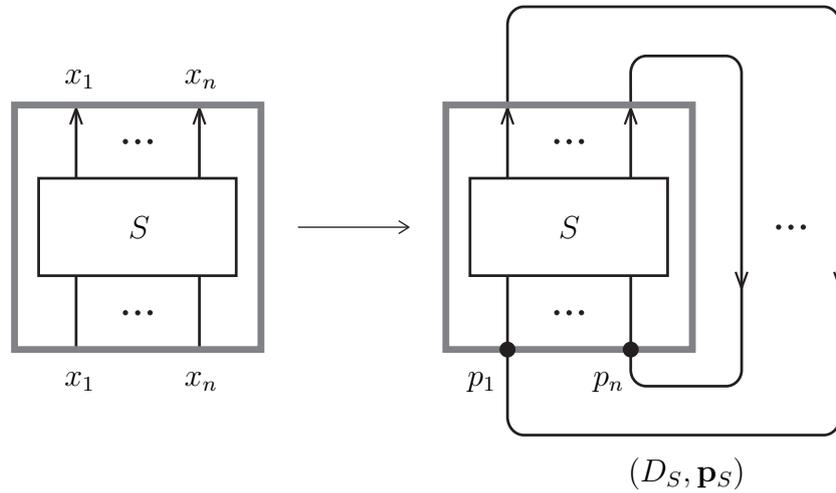


図 9: 仮想ストリング絡み目図式  $S$  から得られる基点付き仮想絡み目図式  $(D_S, \mathbf{p}_S)$

集合  $\{1, \dots, n\}$  の元を項とする数列  $I$  に対する  $S$  のミルナー数を  $\mu_{(D_S, \mathbf{p}_S)}(I)$  で定義し、 $\mu_S(I)$  と表す。二つの仮想ストリング絡み目図式  $S$  と  $S'$  が同値であるならば、明らかに  $(D_S, \mathbf{p}_S)$  と  $(D_{S'}, \mathbf{p}_{S'})$  は基点付き同値である。よって定理 2.5 より、ただちに次が得られる。

**系 5.1** ([12, Corollary 7.1]) 二つの仮想ストリング絡み目図式  $S$  と  $S'$  が同値であるならば、任意の数列  $I$  に対し  $\mu_S(I) = \mu_{S'}(I)$  が成り立つ。

この系は次の定義の well-defined 性を保証する。

**定義 5.2**  $\sigma$  を  $n$  成分ウェルデッドストリング絡み目とする。集合  $\{1, \dots, n\}$  の元を項とする数列  $I$  に対する  $\sigma$  の  $\mu$  不変量とは、ミルナー数  $\mu_S(I)$  のことであり、 $\mu_\sigma(I)$  で表す。ここで、 $S$  は  $\sigma$  の図式である。

**注意 5.3** 定義 5.2 のウェルデッドストリング絡み目の  $\mu$  不変量と、Audoux-Bellingeri-Meilhan-Wagner [1, Definition 5.3] がチューブ写像を用いて定義した  $\mu^w$  不変量は同値なものである。

さらに定理 4.1 から次が得られる。

**系 5.4** ([12, Corollary 7.2]) 二つのウェルデッドストリング絡み目  $\sigma$  と  $\sigma'$  が自己仮想化同値であるならば、項に重複のない任意の数列  $I$  に対し  $\mu_\sigma(I) = \mu_{\sigma'}(I)$  が成り立つ。

**注意 5.5** 系 5.4 の逆の主張も成り立つことが知られている [1, 9]。

最後に、基点付き仮想絡み目図式の基点付き自己仮想化同値による分類を与える。ここで、二つの基点付き仮想絡み目図式が基点付き自己仮想化同値であるとは、それら

が基点を含まないウェルデッドライデマイスター移動, 図4の局所変形, および自己仮想化の有限列で互いに移り合うときをいう. 定理2.5, 定理4.1, および注意5.5を組み合わせることによって次が得られる.

**定理 5.6** 二つの基点付き仮想絡み目図式  $(D, \mathbf{p})$  と  $(D', \mathbf{p}')$  が基点付き自己仮想化同値であるための必要十分条件は, 項に重複のない任意の数列  $I$  に対し  $\mu_{(D, \mathbf{p})}(I) = \mu_{(D', \mathbf{p}')} (I)$  が成り立つことである.

## 参考文献

- [1] B. Audoux, P. Bellingeri, J.-B. Meilhan, E. Wagner, *Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **17** (2017), no. 2, 713–761.
- [2] M. Chrisman, *Milnor’s concordance invariants for knots on surfaces*, preprint (2020), arXiv:2002.01505.
- [3] H. A. Dye, L. H. Kauffman, *Virtual homotopy*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 7, 935–960.
- [4] R. Fenn, R. Rimányi, C. Rourke, *The braid-permutation group*, Topology **36** (1997), no. 1, 123–135.
- [5] N. Habegger, X.-S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 389–419.
- [6] Y. Kotorii, *The Milnor  $\bar{\mu}$  invariants and nanophrases*, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), no. 2, 1250142, 28 pp.
- [7] O. Kravchenko, M. Polyak, *Diassociative algebras and Milnor’s invariants for tangles*, Lett. Math. Phys. **95** (2011), no. 3, 297–316.
- [8] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Second revised edition, Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [9] J.-B. Meilhan, A. Yasuhara, *Arrow calculus for welded and classical links*, Algebr. Geom. Topol. **19** (2019), no. 1, 397–456.
- [10] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.
- [11] J. Milnor, *Isotopy of links. Algebraic geometry and topology*, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [12] H. A. Miyazawa, K. Wada, A. Yasuhara, *Combinatorial approach to Milnor invariants of welded links*, to appear in Michigan Mathematical Journal, arXiv:2003.13273.
- [13] S. Satoh, *Virtual knot presentation of ribbon torus-knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), no. 4, 531–542.
- [14] V. Turaev, *Knots and words*, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 84098, 23 pp.
- [15] T. Yajima, *On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space*, J. Math. Osaka City Univ. **13** (1962), 63–71.