

A geometric description of the Reidemeister-Turaev torsion of 3-manifolds

清水 達郎 (大阪市立大学数学研究所/京都大学数理解析研究所)

1 主結果の概要

本稿では、向きづけられた閉3次元多様体の Reidemeister-Turaev torsion と Chern-Simons 摂動論に由来するある不変量間の関係式を紹介する。この式は両者が定数倍を除き等価な情報をもつことを示唆する。この式は Lecsoy による Betti 数 1 の 3 次元多様体に対する公式 ([12]) の拡張および精密化と位置づけることができる。

M を向きづけられた閉3次元多様体とし、 $H = H_1(M; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ とおく。 H の群演算は積で表すことにする。 H の \mathbb{R} 上の群環 $\mathbb{R}H$ の商体を $Q(H)$ と書く。 H の元の H への積作用は自然に $Q(H)$ への作用を誘導する。これを

$$\rho_0 : H \rightarrow \text{Aut } Q(H) = Q(H)^\times$$

と書くことにする。なお、続く2章で $Q(H)$ や ρ_0 を基底を用いて具体的に表示する。 ρ_0 (あるいは基本群のアーベル化との合成)

$$(\pi_1(M) \rightarrow) H \xrightarrow{\rho_0} Q(H)^\times$$

は M の上の局所系を定める。この局所系も同じ記号 ρ_0 で書くことにする。以降 ρ_0 が非輪状であることを仮定する：

$$H_i(M; \rho_0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

e を M の Euler 構造とする (Euler 構造に関しては2章を参照) と、Reidemeister-Turaev torsion

$$\text{Tor}(M, e) \in Q(H)^\times$$

が定義される(3章)。Reidemeister-Turaev torsion は M の ρ_0 係数チェイン複体の境界準同型が持つ代数的情報 (本質的には行列式) を用いて定義される。

他方 M と e から幾何学的な構成を経て別の不変量

$$d(M, e) \in H \otimes Q(H)$$

が定義される(4章)。主結果はこの $\text{Tor}(M, e)$ と $d(M, e)$ が定数の情報を除いて等価であることを主張する。

定理. 写像 $D : Q(H)^\times \rightarrow H \otimes Q(H)$ があって以下が成り立つ.

$$D(\text{Tor}(M, e)) = d(M, e).$$

定理中の D は対数微分を用いて定義される写像であり, 定数分の情報が失われている (詳細は5章). $d(M, e)$ は Chern-Simons 摂動論に深く関わる不変量であり, 大雑把に言えば, M と M の直積多様体 $M \times M$ 内での対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$ の自己絡み数 (self-linking number) として定義される. 自己絡み数を定義するには framing が必要だが, その役割は Euler 構造 e が果たす.

注意 1.1. Lescop は [12] において $\text{rk}H = 1$ の場合に $d(M, e_0)$ を計算し, 定理の式を得ている. ここで e_0 はある対称性を満たす特別な Euler 構造を選んでいる (2.2 章参照). 上の定理は Lescop の結果を $\text{rk}H \geq 2$ の場合に拡張すると同時に Euler 構造による精密化を与えるものになっている.

2 設定の詳細

2.1 多様体と表現 (局所系) について

M を向きづけられた閉3次元多様体, π_1 をその基本群, $H = H_1(M; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ をその1次元ホモロジー群のねじれがない部分とする. 本稿ではホモロジー群の演算 (群としての演算) は積で書くことにする. H の基底 $\{t_1, \dots, t_k\} \subset H$ を一つ固定しておく:

$$H = \{t_1^{n_1} \cdots t_k^{n_k} \mid n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

H の群環を

$$\mathbb{R}H = \left\{ \sum_{n_1, \dots, n_k} a_{n_1, \dots, n_k} t_1^{n_1} \cdots t_k^{n_k} \right\},$$

その商体を

$$Q(H) = \{f/g \mid f, g \in \mathbb{R}H, g \neq 0\}$$

とする. 表現 $\rho_0 : (\pi_1 \rightarrow)H \rightarrow Q(H)^\times$ が定める M の上の局所系も ρ_0 で書き, この局所系係数のホモロジー群

$$H_*(M; \rho_0)$$

がすべて消えている (つまり ρ_0 が非輪状である) ことを仮定する.

2.2 Euler 構造について

M 上の非零ベクトル場 X, X' がホモログスであるとは, M から1点を除いた多様体 $M \setminus \{pt\}$ への制限 $X|_{M \setminus \{pt\}}, X'|_{M \setminus \{pt\}}$ がホモトピックであるときをいう (別の言い方をすれば2スケルトンへの制限がホモトピックということ). M 上の非零ベクトル場

のホモロガスによる同値類を **Euler 構造** という。Euler 構造にはいくつかの同値な言い換えが存在し、特に spin^c 構造との関係は Reidemeister torsion と Seiberg-Witten 不変量との関係を考察するうえで重要である。ここでは、後で必要となる Morse 関数を使った言い換えを紹介する。

Morse 関数を用いた Euler 構造の言い換え

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を M の上の Morse 関数とする。 M に Riemann 計量をひとつ固定し、勾配ベクトル場 $\text{grad}f$ を取る。 $\text{grad}f$ には有限個の零点 (Morse 特異点) があるが、それを

$$\text{Crit}(f) = (\text{grad}f)^{-1}(0) = \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$$

とする。ここで特異点 p_1, \dots, p_k の Morse 指数は偶数であり、特異点 q_1, \dots, q_k のそれは奇数であるとする。 M 内に埋め込まれた可縮なコンパクト向きづけられた 1 次元多様体 e_f であって、

$$\partial e_f = \sum_i p_i - \sum_i q_i$$

となるものとする。 $\text{grad}f$ の零点を e_f の近傍で非零ベクトル場に置き換えることで、 M の非零ベクトル場を得ることができる。その一つを $\text{grad}f/e_f$ と書くことにする。置き換えの方法に ambiguity があるので $\text{grad}f/e_f$ は一意ではないが、代表する Euler 構造は一意に定まる。障害理論を用いてさらに考察すると、 $\partial e'_f = \sum_i p_i - \sum_i q_i$ を e_f の別の選択とすると、 e_f と e'_f の差が定める 1 サイクル $[e_f - e'_f] \in H_1(M; \mathbb{Z})$ が 0 であることと、 $\text{grad}f/e_f$, $\text{grad}f/e'_f$ が代表する Euler 構造が一致することが同値であることが分かる。¹

対称性を持つ Euler 構造

M 上のベクトル場 X に対し各点で一斉に -1 倍をして得られるベクトル場を $-X$ と書くことにする。 M が向きづけられた 3 次元多様体であることから、 X_0 と $-X_0$ がホモロガスであるような非零ベクトル場 X_0 が存在することがわかる。注意 1.1 においてはこの X_0 が代表する Euler 構造 (の 1 つを) e_0 と書いた。

3 Reidemeister-Turaev torsion $\text{Tor}(M, e)$

この章では Reidemeister-Turaev torsion の 1 つの定義 (Morse 関数を用いたもの) の概略を述べる。より詳しくは例えば [14] を参照。まずは非輪状チェイン複体に対する Reidemeister torsion の定義を述べる。

$$C_* = (C_*, \partial) = \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

¹このことから特に Euler 構造全体の集合 $\text{Eul}(M)$ は $H_1(M; \mathbb{Z})$ を随伴ベクトル空間とする affine 空間の構造を持つことも分かる。

を任意の非輪状複体とする．各 C_n は体 F 上の有限次元線形空間とする．このとき，degree を 1 つ上げる準同型

$$g = (g_n : C_{n-1} \rightarrow C_n)_n$$

で，すべての n に対して

$$\partial_{n+1} \circ g_{n+1} + (-1)^n g_n \circ \partial_n = \text{id}_{C_n}$$

を満たすものが取れる． $C_{\text{even}} = \bigoplus_{n:\text{even}} C_n$, $C_{\text{odd}} = \bigoplus_{n:\text{odd}} C_n$ とおくととき，

$$\partial + g (= (\bigoplus_{n:\text{even}} \partial_n) \oplus (\bigoplus_{n:\text{odd}} g_n)) : C_{\text{even}} \rightarrow C_{\text{odd}}$$

は線形同型写像となる． $C_{\text{even}} \oplus C_{\text{odd}}$ の基底 \mathbf{c} を 1 つ決めることで $\partial + g$ の行列式を取ることができる．これが Reidemeister torsion の定義である：

$$\text{tor}(C_*, \mathbf{c}) \in F^\times.$$

なお， $\text{tor}(C_*, \mathbf{c})$ は g の取り方には依らない．

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数とする． M に Morse-Smale 条件を満たす Riemann 計量を一つ取る．局所系 ρ_0 を係数とする Morse-Smale 複体 $(C_*^f(M, \rho_0), \partial_*^f)$ を考える．各 $C_n^f(M, \rho_0)$ は Morse 指数 n の特異点に対応する $Q(H)$ をあつめた $Q(H)$ 上の線形空間である． $(C_*^f(M, \rho_0), \partial_*^f)$ のホモロジーは M の ρ_0 係数ホモロジーと一致するから非輪状である．

M の Euler 構造 e を 1 つ固定する． e を代表する 1 次元多様体 e_f を一つ取る．各 Morse 特異点 $p \in \text{Crit}(f)$ に対して $Q(H)_p$ の²0 でない元 $c_f(p)$ を一つずつ取ったコレクションは $C_*^f(M, \rho_0)$ の基底 \mathbf{c}_f を与える．このように作った基底であって以下の条件を満たすものをとる：特異点 p, q が e_f の連結成分 γ で結ばれているのなら， $\gamma_* c_f(p) = c_f(q)$ ．以上の準備の下，**Reidemeister-Turaev torsion** $\text{Tor}(M, e)$ が以下で定義される．

$$\text{Tor}(M, e) = \text{tor}(C_*^f(M, \rho_0), \mathbf{c}_f) \in Q(H)^\times.$$

基底 \mathbf{c}_f の選び方には ambiguity があるが，計算結果には影響しない．

4 不変量 $d(M, e)$

M と Euler 構造 e に対して不変量

$$d(M, e) \in H \otimes Q(H)$$

の定義を紹介する (不変量の構成はチェインの交差を用いた単純なものですが，チェインの係数が局所系であるため表記が重くなっています．必要に応じて係数を読み

²局所系 ρ_0 は M 上の平坦 $Q(H)$ 束を与えるが，その p におけるファイバーを $Q(H)_p$ と書くことにする．

飛ばしてください). 詳細は [13],[4] 等を参照のこと. この不変量は Chern-Simons 摂動論と深く関わっているが, そのことに関しては後の 6 章において言及する.

表現 ρ_0 とその双対表現 ρ_0^* の外部テンソル積は 6 次元多様体 $M \times M$ の上の非輪状な局所系 $\rho \boxtimes \rho^*$ を定める. $\rho_0 \boxtimes \rho_0^*$ の対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$ への制限 $\rho_0 \boxtimes \rho_0^*|_{\Delta} = \rho_0 \otimes \rho_0^*$ には恒等写像 $\text{id} \in \text{Hom}(Q(H), Q(H)) = Q(H) \otimes Q(H)^*$ が定める切断 $\mathbf{1}$ が存在する. $\mathbb{R} \ni 1 \mapsto \mathbf{1} \in \rho_0 \otimes \rho_0^*$ によって,

$$H_3(\Delta; \mathbb{R}) \subset H_3(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) = H_3(\Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*|_{\Delta})$$

とみなす. 基本ホモロジー類 $[\Delta] \in H_3(\Delta; \mathbb{R}) \subset H_3(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*)$ は $H_3(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$ の 3 次元元ホモロジー類を与える:

$$[\Delta] \in H_3(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*).$$

$\rho \boxtimes \rho^*$ は非輪状であるから, $[\Delta] = 0$ である. よって 4 チェイン $\Sigma \in C_4(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$ であって,

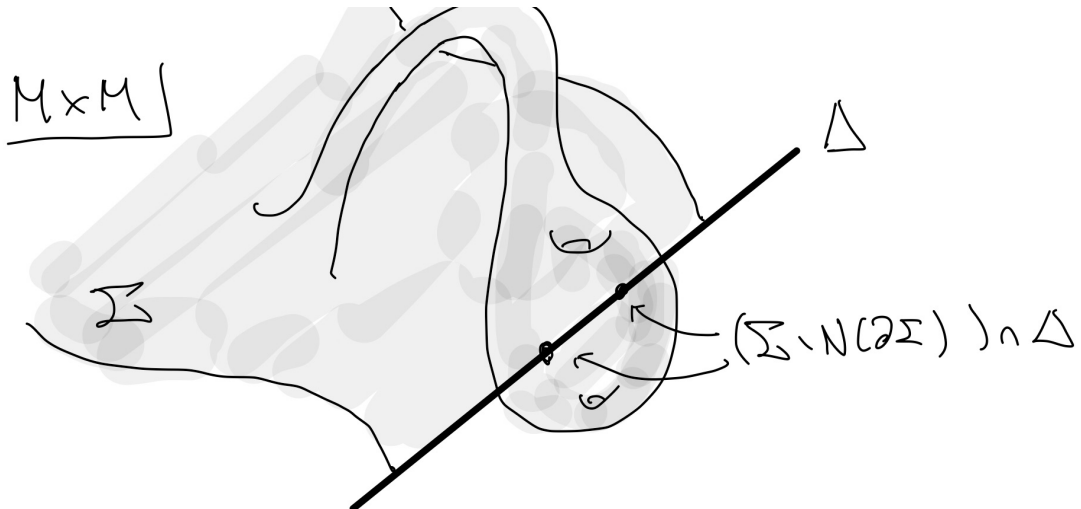
$$\partial \Sigma = \Delta$$

となるものが取れる. Σ はいわば Δ の (局所係数の) Seifert 膜である. このままでは自由度が高すぎるので, さらに Σ に「境界条件」を課すことで, Σ から M の不変量を取り出す. 「境界条件」は Σ の境界の近傍 $N(\partial \Sigma)$ への制限である. v_e を Euler 構造 e を代表する M の non-vanishing vector field とする. このとき, 「境界条件」は以下で記述される.

$$N(\partial \Sigma) = \{(x, tv_e(x)) \mid x \in M, 0 \leq t < \varepsilon\}.$$

そのころは, $\partial \Sigma$ 付近は Euler 構造を代表するベクトル場の方向に Δ を”流す”ということである. 4-chain $\Sigma \setminus N(\partial \Sigma) \in C_4(M \times M; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$ と 3-chain $\Delta \in C_3(M \times M; \mathbb{R})$ の交差 $(\Sigma \setminus N(\partial \Sigma)) \cap \Delta$ は $C_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*)$ のサイクルを与える. ところで $\rho_0 \otimes \rho_0^*$ は Δ 上自明であるから, $H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \cong H_1(\Delta; \mathbb{R}) \otimes Q(H) = H \otimes Q(H)$ である. ホモロジー群の計算から次の補題が従う.

補題 4.1. $[(\Sigma \setminus N(\partial \Sigma)) \cap \Delta] \in H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \cong H \otimes Q(H)$ は Σ のとり方によらない M, e の位相不変量である.



定義 4.2.

$$d(M, e) = [(\Sigma \setminus N(\partial\Sigma)) \cap \Delta] \in H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \cong H \otimes Q(H).$$

注意 4.3. (1) 4-chain Σ は Chern-Simons 摂動論における propagator (の Poincaré 双対) の一つである. 詳細は 6 章を参照のこと.

(2) $d(M, e)$ の定義は次のように記述することもできる (本質的に上で紹介した定義と同じである). まず, Δ の $M \times M$ における十分小さい管状近傍 $N(\Delta)$ をとっておく. $\rho_0 \boxtimes \rho_0^*|_{N(\Delta)}$ は $\rho_0 \otimes \rho_0^*$ と同一視できる. Thom 同型

$$H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \rightarrow H_4(N(\Delta), \partial N(\Delta), \rho_0 \otimes \rho_0^*)$$

と切除同型

$$H_4(N(\Delta), \partial N(\Delta), \rho_0 \otimes \rho_0^*) \rightarrow H_4(M \times M, M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*),$$

さらに $(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$ の対のホモロジー完全列の中の連結準同型 (ρ_0 が非輪状であることからこれは同型であることがわかる)

$$H_4(M \times M, M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*) \xrightarrow{\partial_*} H_3(M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$$

の合成

$$\Phi : H_1(\Delta; \rho_0 \otimes \rho_0^*) \rightarrow H_3(M \times M \setminus \Delta; \rho_0 \boxtimes \rho_0^*)$$

は同型である. Δ を Euler 構造を定めるベクトル場 v_e によって摂動し, $M \times M \setminus \Delta$ 内に押しこんで得られる 3 次元多様体を $v_e(\Delta)$ とする. 以上の準備の元,

$$d(M, e) = \Phi^{-1}([v_e(\Delta)])$$

が従う.

5 定理

写像 $D : Q(H)^\times \rightarrow H \otimes Q(H)$ を,

$$D(f) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i \otimes \left(t_i \frac{\partial}{\partial t_i} \log \right) \right\} (f) = \sum_{i=1}^k t_i \otimes \frac{1}{f} \left(t_i \frac{\partial}{\partial t_i} (f) \right)$$

で定める. ここで $t_1, \dots, t_k \in H$ は H の \mathbb{R} 上の基底であった. D は基底にはよらないことが確かめられる.

例 5.1. $D(1 + t_1^3 + t_1^2 t_2^6) = \frac{1}{1+t_1^3+t_1^2 t_2^6} (t_1 \otimes 3t_1^2 + t_1 \otimes 2t_1^2 t_2^6 + t_2 \otimes 6t_1^2 t_2^5)$

以上の設定のもと、次の式が成り立つ。

定理 (再掲).

$$D(\text{Tor}(M, e)) = d(M, e).$$

例 5.2. $M = S^1 \times S^2$ とする. $H = H_1(S^1 \times S^2; \mathbb{R})$ の生成元を一つとり, t とする: $H = \langle t \rangle$. このとき, 適当な Euler 構造 e に対し,

$$\text{Tor}(S^1 \times S^2, e) = \frac{1}{(t-1)^2} \in Q(H)$$

であることが知られている. したがって定理を適用すると,

$$d(S^1 \times S^2, e) = D\left(\frac{1}{(t-1)^2}\right) = t \otimes \frac{-2t}{t-1} \in H \otimes Q(H)$$

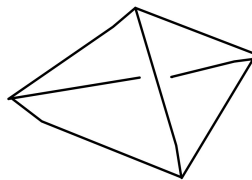
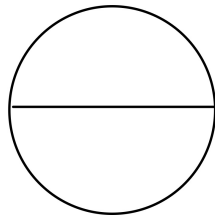
が従う.

6 不変量 $d(M, e)$ の背景 : Chern-Simons 摂動論

不変量 $d(M, e)$ の背景にある Chern-Simons 摂動論について簡単に述べる.

6.1 Chern-Simons 摂動論

Chern-Simons 量子場の理論の分配関数は, 3次元多様体の位相不変量であることが期待される. 分配関数そのものはいまの数学では扱えないが, その漸近展開である Chern-Simons 摂動論は数学であり, Kontsevich, Axelrod, Singer によって 1990 年代初頭に確立された ([11],[1]). Chern-Simons 摂動論は 3次元多様体 M とその上の非輪状な局所系の組に対する不変量を大量に作り出す. その構成は, 一言で言えば「propagator の持つ情報を配置空間積分を用いて取り出す」ものである. propagator (のホモロジカルな描写) は $M \times M$ 内の 4 チェインで, 課される条件 (境界条件, 対称性など) にいくつかのバリエーションがあるが, $d(M, e)$ の構成中に用いた Σ は propagator の一つとみることができる. 実際, Σ として, Bott と Cattaneo による Chern-Simons 摂動論 ([2],[3]) で用いられる propagator を取ることができる. この propagator をいくつも用意し, その様々なタイプの交差をカウントすることで propagator から M と局所系の情報を取り出すことができる. この「交差をカウントする」手法を配置空間積分という. 着目する交差のタイプによって配置空間積分は幾通りも考えられるが, 適切な交差のタイプたちを指定することで不変量が得られる. それら交差のタイプを指定するレシピをグラフとして図式化したものは Jacobi 図あるいは Feynman 図などと呼ばれている.



← Jacobi図の例

6.2 局所系が自明な場合の Chern-Simons 摂動論

M をホモロジー球面から 1 点穴を空けたものとして、局所系としては自明なものをとる。つまり通常の実係数ホモロジーを考える。Jacobi 図としては「 Θ 」の形のグラフをとってくる。 Θ が指示する配置空間積分は、 Δ 以外では横断的に交わる propagator³ を 3 つとってそれら 3 つが交わる点を数えよ (ただし Δ は交差から除外する)、というものでなる。propagator の境界条件で用いる非零ベクトル場の情報をうまく補正してやると、 M の不変量が得られ、それは Casson 不変量の定数倍に一致することが知られている。また、もっと複雑な Jacobi 図を持ってくることで有限型不変量とよばれるクラスに属する不変量がすべて得られることも知られている。

6.3 局所系が非自明な場合の Chern-Simons 摂動論

一方、局所系が非自明な場合の Chern-Simons 摂動論の性質はあまりわかっていない。局所系が非自明な場合と自明な場合とでは様相が異なる部分が散見されるが、 $d(M, e_0)$ はその差異の一つを定量化したものと捉えることができる。ここで e_0 は 2.2 章で導入した対称性をもつ Euler 構造である。局所系が自明なときには常に $d(M, e_0) = 0$ であることがわかる。 $d(M, e_0)$ は propagator と対角線 Δ の交差によって定義されていたので、 $d(M, e_0) = 0$ は代数的交差が 0 であるということである。さらに $d(M, e_0) = 0$ のときは propagator を Δ の付近で局所的に変形して、交差が (代数的にはなく) 本当に起きないように取れることが知られている。その結果、配置空間積分をするときに Δ 付近の処理が容易になるのである。局所系が非自明なときも、たとえば局所系が $SU(2)$ 束の平坦接続のホロノミー準同型から決まるような場合には必ず $d(M, e_0) = 0$ であることが示され、自明接続のときとほぼ同様にして Chern-Simons 摂動論を展開することができる ([13])。

Lescop は [12] において $\text{rk}H = 1$ である M と表現 $\rho_0 : H \rightarrow Q(H)$ に対する Chern-Simons 摂動論を展開している。この場合には $d(M, e_0)$ は一般に 0 ではなく、その考察が必要である。実際 Lescop は $d(M, e_0)$ を M の Alexander 多項式で表す公式を与えている。また、渡邊は [16] において $\text{rk}H = 1$ の場合の Chern-Simons 摂動論の Morse homotopy による表示を与えている。

7 定理の証明の概略

7.1 証明のアイデア

M 上に Morse 関数を取る。 $\text{Tor}(M, e)$ は局所系係数の Morse-Smale 複体 $(C_*^f(M, \rho)_0, \partial)$ の Reidemeister torsion として表示できるのであった。もう少し詳しく見ると、 $\text{Tor}(M, e)$ は境界準同型 ∂ と準同型 g の情報から定まるのであった。Morse-Smale 複体における ∂ の Euler 構造による基底に関する表現行列の各要素は trajectory を局所系から定

³厳密には propagator は穴の付近でコントロールする必要がある。

まる重み付きでカウントすることで計算される。他方、以下に見るように、 $d(M, e)$ にも Morse 関数を用いた具体的な表示を与えることができ、trajectory と g と関係する情報を用いて表される。これら $\text{Tor}(M, e)$ と $d(M, e)$ の表示を比較するのが証明の大まかな流れである。

7.2 Morse homotopy を用いた $d(M, e)$ の表示

$d(M, e)$ を Morse 関数を用いて表示するためには propagator を Morse 関数によって表示すれば良い。そこで用いるのは Morse homotopy とよばれる手法である。ここで用いる Morse ホモトピーについて詳しくは [5],[15] を参照のこと。特に [5] の Introduction には以下の構成のアイデアが端的にまとめられている。 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数とする。 $\{\Phi_t^f : M \rightarrow M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を f の勾配ベクトル場 $\text{grad} f$ が生成する微分同相写像の 1 パラメータファミリーとする。 $M \times M$ の 4次元部分多様体

$$\Sigma^0(f) = \{(x, \Phi_t^f(x)) \mid x \in M, t \geq 0\}$$

をとる。これはいわば Δ を $\text{grad} f$ のフローで”流して”得られる 4次元多様体である。 $t=0$ のときに $\{(x, \Phi_0^f(x)) \mid x \in M\} = \Delta$ であるから、境界 $\partial \Sigma^0(f)$ は Δ をその一部に含む。実際には Morse 特異点に由来する別の境界やエンドが存在するが、それを安定多様体・不安定多様体を用いて適切に補正してやることで $\partial \Sigma(f) = \Delta$ となる 4 チェイン $\Sigma(f)$ を作ることができる。ここでは細部には触れないが、⁴式のみを書いておく：

$$\Sigma(f) = \{(x, \Phi_t^f(x)) \mid x \in M, t \geq 0\} + \sum_{p,q} g_{p,q}(\mathcal{A}_p \times \mathcal{D}_q).$$

$g_{p,q}$ は Morse 関数と局所系の情報から定まる $Q(H)_p \otimes Q(H)_q^*$ の元で、 $\text{Tor}(M, e)$ の定義 (3 章) のところで用いた $g : C_* \rightarrow C_{*+1}$ と深く関係している。 propagator の境界条件は非零ベクトル場で与えられていた。チェイン $\Sigma(f)$ の境界は勾配ベクトル場にコントロールされているが、勾配ベクトル場は一般に零点を持つ。そこで、同じ場所に逆符号の零点を持つベクトル場 $-\text{grad} f$ を用いて零点の寄与を相殺させる：

$$\Sigma(\pm f) = \frac{1}{2}(\Sigma(f) + \Sigma(-f)).$$

$\Sigma(\pm f)$ は実際に propagator になることが確かめられる。

さて $d(M, e) = [(\Sigma(\pm f) - N(\partial \Sigma(\pm f))) \cap \Delta]$ であった。 $(\mathcal{A}_p \times \mathcal{D}_q) \cap \Delta$ は p と q を結ぶ積分曲線 (trajectory) の和集合であることに注意すると、

$$d(M, e) = \sum_{\gamma: \text{trajectory}} [\gamma] \otimes \gamma_* \circ g_{p,q} \in H \otimes Q(H)$$

⁴詳しくは例えば [15] を参照のこと。実際はコンパクト化や局所係数の考察が必要である。

であることがわかる．ここで $[\gamma]$ は γ を M の 1 チェインとみなしたものであり， $\gamma_* \in Q(H)_p^* \otimes Q(H)_q$ は γ に沿った局所系のねじれである． $\gamma_* \circ g_{p,q}$ は $Aut(Q(H)_q) \cong Q(H)^\times$ の元である．以上が $d(M, e)$ の Morse 関数を用いた表示である．

- 注意 7.1.** (1) Morse 関数を用いた Reidemeister torsion に対するアプローチとして Hutchings と Lee による仕事 ([7],[8],[9]) がある．Hutchings と Lee は S^1 値 Morse 関数の trajectory に着目し，閉軌道となる積分曲線の情報を特異点どうしを結ぶ trajectory の情報で補正することで Reidemeister-Turaev torsion が取り出せることを示した．ただし， $\mathbb{R} \subset S^1$ とみなして Hutchings-Lee の結果を \mathbb{R} 値の Morse 関数に適用すると自明な式となってしまう．しかし本稿の定理とは類似点が散見され，両者を含む自然な拡張が期待される．
- (2) 不変量 $d(M, e)$ は任意の (可換とは限らない) 非輪状表現に対して定義される．しかしその場合の $d(M, e)$ と Reidemeister torsion との関係は明らかになっていない．一方で，(1) で紹介した Hutchings-Lee の結果の非可換表現への拡張は合田，Pajitonov [6]，北山 [10] らによって調べられている．

References

- [1] S. Axelrod and I. M. Singer, Chern-Simons perturbation theory. In *Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, Vol. 1, 2 (New York, 1991), pages 3-45. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [2] R. Bott and A. S. Cattaneo, Integral invariants of 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 48(1):91-133, 1998.
- [3] R. Bott and A. S. Cattaneo, Integral invariants of 3-manifolds. II. *J. Differential Geom.*, 53(1):1-13, 1999.
- [4] A. S. Cattaneo and T. Shimizu, A note on the Θ -invariant of 3-manifolds, preprint, 2019. to appear in *Quantum Topology*
- [5] K. Fukaya, Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory. *Comm. Math. Phys.*, 181(1):37-90, 1996.
- [6] H. Goda and A. V. Pajitnov, Dynamics of gradient flows in the half-transversal Morse theory, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 85 (2009), no. 1, 6-10.
- [7] M. Hutchings, Reidemeister torsion in generalized Morse theory, *Forum Math.* 14 (2002) 209244.
- [8] M. Hutchings and Y. J. Lee, Circle-valued Morse theory, Reidemeister torsion, and Seiberg- Witten invariants of three manifolds, *Topology* 38 (1999) 861888.

- [9] M. Hutchings and Y. J. Lee, Circle-valued Morse theory and Reidemeister torsion, *Geom. Topol.* 3 (1999) 369396.
- [10] T. Kitayama, Non-commutative Reidemeister torsion and Morse-Novikov theory, *Proceedings of the American Mathematical Society* 138 (2010), 3345-3360.
- [11] M. Kontsevich, Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics*, Vol. II (Paris, 1992), volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97-121. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [12] C. Lescop, On the cube of the equivariant linking pairing for knots and 3-manifolds of rank one, arXiv:1008.5026, 2010.
- [13] T. Shimizu, Morse homotopy for the $SU(2)$ -Chern-Simons perturbation theory. RIMS preprint 1857, 2016.
- [14] V. Turaev, *Torsions of 3-dimensional manifolds*, Progress in Mathematics, 208, Birkhäuser Verlag, Basel (2002). MR1958479 (2003m:57028)
- [15] T. Watanabe, Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds I. Invariants of homology 3-spheres. *Asian J. Math.* 22 (2018), no. 1, 111-180.
- [16] T. Watanabe, Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds II, arXiv:1605.05620v4, 2016.