

双曲結び目・絡み目のねじれ Alexander 多項式

森藤 孝之 (慶大経済)*

概 要

ねじれ Alexander 多項式は群とその表現の組に対して定まる不変量であり, Alexander 多項式の自然な一般化になっている. Dunfield, Friedl, Jackson は計算機を用いた膨大な数値計算に基づいて, 双曲結び目のホロノミー表現に付随したねじれ Alexander 多項式が結び目のファイバー性と種数を決定すると予想している. 本稿ではこの予想に関する最近の結果を概観し, 双曲絡み目に対する一般化された予想についても述べる.

1. はじめに

ねじれ Alexander 多項式は, 3次元球面 S^3 内の結び目については X.-S. Lin [29] により, 一般の有限表示群については和田 [43] により導入された. これは群とその表現の組に対して定まる不変量であり, 古典的な Alexander 多項式の1つの自然な一般化になっている. 特に, 和田は11交点を持つ樹下-寺阪結び目と Conway 結び目 (これらは自明な Alexander 多項式を持つミュータントな結び目の例である) を, 有限体上の表現に付随したねじれ Alexander 多項式を用いて区別している.

Alexander 多項式が持つ性質の多くはねじれ Alexander 多項式についても拡張され, より強い制約条件をしばしば与える. 特に, 結び目のファイバー性の判定および種数の決定に関する問題は多くの研究者によって調べられ [4, 8, 17, 25], 最終的には Friedl, Vidussi [12, 13, 14] により, 既約3次元多様体のファイバー性と Thurston ノルムが (閉グラフ多様体の場合は [10]), ねじれ Alexander 多項式で決定されることが示された. 彼らはさらに非ファイバーの場合には, ねじれ Alexander 多項式が零となるような表現が存在することを示しており, 帰結として4次元シンプレクティック多様体に関する Taubes 予想を肯定的に解決している.

Dunfield, Friedl, Jackson [7] は, 双曲結び目のホロノミー表現に付随したねじれ Alexander 多項式の研究を行い, 計算機の援用による大規模な数値計算に基づいて, いくつかの興味深い予想を挙げている. 本稿では, そのなかの1つである双曲結び目のファイバー性と種数の決定に関する予想 [7, Conjecture 1.4] について, これまでに得られている結果を概観し, 双曲絡み目に対する一般化された予想 [34] についても述べる.

ねじれ Alexander 多項式の応用は多岐に渡っており, 本稿で扱う内容はそのごく一部に過ぎない. 最近では, $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体の ideal point 上でのねじれ Alexander 多項式の挙動に関する Dunfield, Friedl, Jackson の別の予想 [7, Conjecture 8.1] の部分的解決 [28] や, ねじれ Alexander 多項式と双曲体積 [3, 15], グラフの行列重み付きゼータ関数 [16] との関係性も明らかにされている. また, 2次元結び目への応用 [21] や, カンドルコサイクル不変量の観点からの理解 [20] も進んでおり, 本分野は現在も進展中である. その他の話題や関連する文献については [11, 32] を参照して欲しい.

本研究は科研費 (課題番号:17K05261) の助成を受けたものである. なお, 本稿は日本数学会 2020 年度秋季総合分科会特別講演の抽象トに加筆したものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 57M05, 57M25

* 〒 223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1 慶應義塾大学経済学部

e-mail: morifuji@z8.keio.jp

なお、本稿で紹介する研究成果は、主に Anh T. Tran 氏 (University of Texas at Dallas) との共同研究 [33, 34, 35] に基づくものである。

2. ねじれ Alexander 多項式

2.1. 準備

まず、本稿で必要となる用語を準備する。

3次元球面 S^3 に埋め込まれた互いに交わらない向きと順序の付いた円周 L_i の和集合 $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ のことを μ -成分絡み目という。結び目とは、1-成分絡み目のことである。絡み目 L の開管状近傍を $N(L)$ とする。外部空間 $E(L) = S^3 \setminus N(L)$ の基本群を L の絡み目群 ($\mu = 1$ のときは結び目群) といい $G(L) = \pi_1(E(L))$ で表す。以下では特に断らない限り、 L は non-split (L が分離している正則表示を持たない) と仮定する。

向きの付いた絡み目 L の Seifert 曲面 Σ とは、 S^3 に埋め込まれた向き付けられたコンパクト曲面で Σ のすべての連結成分が境界を持ち、 $\partial\Sigma = L$ かつ L の向きが Σ から誘導される向きと一致するものである。絡み目 L は $E(L)$ が Seifert 曲面の $E(L)$ への制限をファイバーとする円周上の曲面束の構造を持つとき、ファイバー絡み目という。絡み目 L の種数 $g(L)$ とは、 L の Seifert 曲面の種数の最小値のことである。また、 $E(L)$ の内部が有限体積完備双曲構造を持つとき、 L を双曲絡み目という。

向き付けられた連結コンパクト3次元多様体を M とする。 $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の任意の元は M 内に固有に埋め込まれた (連結とは限らない) 向き付け可能コンパクト曲面 Σ により実現できる。 Σ から S^2 および D^2 成分を除いて得られる曲面を Σ_0 とするとき、 $\chi_-(\Sigma) = |\chi(\Sigma_0)|$ とおく。このとき $\psi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ の Thurston ノルム $\|\psi\|_T$ が、 ψ の Poincaré 双対であるような曲面 Σ についての $\chi_-(\Sigma)$ の最小値として定まる [42]。

縫い目付き多様体 (M, R_\pm, γ) とは、向き付けられたコンパクト3次元多様体 M で、2つの部分曲面 $R_\pm \subset \partial M$ の共通の境界 γ に沿った ∂M の分割を持つものである。

2.2. $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体

次に、 $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体の基本事項を復習する (詳しくは [6, 18] を参照のこと)。

有限生成群 Γ に対して、 \mathbb{C} 上のアフィン代数多様体 $R(\Gamma) = \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$ を $SL(2, \mathbb{C})$ -表現多様体という。表現 $\rho \in R(\Gamma)$ の指標 $\chi_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(\gamma) = \text{tr } \rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) 全体の集合を $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体と呼び $X(\Gamma)$ で表す。また、 $t : R(\Gamma) \rightarrow X(\Gamma)$ を $t(\rho) = \chi_\rho$ で定める。 $R(\Gamma)$ には共役によって $SL(2, \mathbb{C})$ が作用するが、 $X(\Gamma)$ には t が正則写像となるような \mathbb{C} 上のアフィン代数多様体の構造が入り、幾何学的不変式論商 $R(\Gamma) // SL(2, \mathbb{C})$ を実現することが知られている。実際、値写像 $I_\gamma : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ を $I_\gamma(\chi_\rho) = \text{tr } \rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) によって定めると、群 Γ の任意の生成系 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ に対して $\{I_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}}\}_{\substack{1 \leq k \leq 3 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l}}$ が $X(\Gamma)$ のアフィン座標を与える。

既約な $SL(2, \mathbb{C})$ -表現の指標全体からなる部分集合の、 $X(\Gamma)$ の中での Zariski 閉包を $X_{\text{irr}}(\Gamma)$ で表す。

M を有限体積の完備双曲的3次元多様体とする。このとき、 M は離散忠実表現 $\bar{\rho}_0 : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ を持ち、 $\mathbb{H}^3 / \text{Im } \bar{\rho}_0 \cong M$ が成り立つ。この表現 $\bar{\rho}_0$ は M のホロノミー表現と呼ばれ、共役を除いて一意的に定まる。Thurston の結果により、 $\bar{\rho}_0$ は $SL(2, \mathbb{C})$ への離散忠実表現にリフトする。

絡み目群 $G(L) = \pi_1(E(L))$ に対して、簡単のため $R(L) = R(G(L))$, $X(L) = X(G(L))$, $X_{\text{irr}}(L) = X_{\text{irr}}(G(L))$ で表す。双曲結び目 K のホロノミー表現 $\bar{\rho}_0 : G(K) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$

のリフト ρ_0 に対して, χ_{ρ_0} を含む $X_{\text{irr}}(K)$ の既約成分 C_0 (canonical component) は曲線になることが知られている.

2.3. Riley 多項式

一般に結び目 K のメリディアン m_K に対して, $\text{tr } \rho(m_K) = 2$ を満たす非可換表現 $\rho : G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ をパラボリック表現という. 2橋結び目 $K = S(p, q)$ (p, q は互いに素な奇数で $p > 0, -p < q < p$ を満たす) の結び目群は, 表示 $G(K) = \langle x, y \mid xw = wy \rangle$, $w = \prod_{i=1}^{(p-1)/2} y^{\epsilon_{2i-1}} x^{\epsilon_{2i}}$, $\epsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{|q|}{p} i \rfloor}$ を持つ. 対応 $\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$, $u \neq 0$ がパラボリック表現 $\rho : G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ となるのは, $\rho(w) = (w_{ij})$ に対して $w_{11} = 0$ となることが必要十分である [40]. $\phi_{S(p,q)}(u) = w_{11} \in \mathbb{Z}[u]$ を $S(p, q)$ の Riley 多項式という. Riley 多項式 $\phi_{S(p,q)}(u)$ は 2橋結び目を (おおよそ) 分類することが知られている. この事実は Riley 多項式の可除性と結び目群の間の全射準同型の存在に関する考察から従う [26].

2.4. 和田のねじれ Alexander 多項式

ねじれ Alexander 多項式の定義にはいくつか流儀 [22, 29, 43] があるが, 本稿では和田の定義 [43] に従うことにする. 和田のねじれ Alexander 多項式は絡み目群についても自然に定義され, 計算の簡便さの観点からも重要な役割を担っている. 絡み目 ($\mu \geq 2$) のねじれ Alexander 多項式は多変数多項式として定義されるが, ここでは 1 変数に簡約化された多項式を考えることにする. なお, ねじれ Alexander 多項式の基本的事項については [24] を参照のこと.

$L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ を 3次元球面 S^3 内の絡み目とし, $G(L)$ の不足数 1 の表示 (例えば Wirtinger 表示) を固定する: $G(L) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$. また, $G(L)$ の可換化準同型を $\alpha_L : G(L) \rightarrow H_1(E(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu = \langle t_1, \dots, t_\mu \mid [t_i, t_j] = 1 \rangle$ で表す. 各 t_i を $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ の生成元 t に対応させる全射準同型 $\tau : H_1(E(L); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ に対し, 合成写像 $\tau \circ \alpha_L : G(L) \rightarrow \mathbb{Z}$ を簡単に α で表すと, $\alpha \in \text{Hom}(G(L), \mathbb{Z}) = H^1(E(L); \mathbb{Z})$ である.

本稿では双曲絡み目群のホロノミー表現のリフトを念頭に, 主に $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -表現 $\rho : G(L) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ を考えるが, 以下の構成は一般の線型表現についても同様に成り立つ. ρ と α は自然に群環上の環準同型 $\tilde{\rho}, \tilde{\alpha}$ を誘導し, それらのテンソル表現 $\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\rho}$ は環準同型 $\mathbb{Z}[G(L)] \rightarrow M(2, \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ を定める. 階数 s の自由群を $F_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ とし, $G(L)$ の表示から定まる全射準同型との合成を $\Phi : \mathbb{Z}[F_s] \rightarrow \mathbb{Z}[G(L)] \xrightarrow{\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\rho}} M(2, \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ で表す. $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \Phi\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)$ で定まる $(s-1) \times s$ 行列とする. ただし, $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}[F_s] \rightarrow \mathbb{Z}[F_s]$ は自由微分を表す. A から第 j 列を取り除いて得られる行列を $A_j \in M(s-1, M(2, \mathbb{C}[t^{\pm 1}]))$ とし, これを $M(2(s-1), \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ の元と見なす.

定義 2.1 ([43]) 絡み目 L の表現 $\rho \in R(L)$ に付随したねじれ Alexander 多項式 $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ を

$$\Delta_{L,\rho}^\alpha(t) = \frac{\det A_j}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

で定義する. これは t^k ($k \in \mathbb{Z}$) による積を法として well-defined である.

最初に固定した $G(L)$ の表示や A から取り除く列に依らずに $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ が定まることは, Alexander 多項式のときと同様に示すことができる. 定義から, ねじれ Alexander 多項式は有理関数として定まる. また, 結び目 ($\mu = 1$) のとき $\alpha_K = \alpha$ となるので, 簡単

のため α を省略して $\Delta_{K,\rho}(t)$ と記す. Milnor の結果の一般化として, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は $E(L)$ の Reidemeister トーションと等価であることが知られている [22, 23].

注意 2.2 (1) L が 2 成分以上の絡み目 [43], あるいは, $\mu = 1$ かつ $\rho \in R(K)$ が非可換表現 [25] ならば, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ が成り立つ.

(2) 表現 $\rho, \rho' \in R(L)$ が共役ならば $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t) = \Delta_{L,\rho'}^\alpha(t)$ が成り立つ. さらに, 指標 $\chi_\rho \in X(L)$ に対して $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は $\mathfrak{t}(\rho) = \chi_\rho$ となるような表現 ρ のとり方に依らずに定まり, 多項式の各係数は $X(L)$ 上の関数と見なせる [7]. この観点からのねじれ Alexander 多項式の研究については [7, 28, 32, 37] を参照のこと.

(3) L がトーラス絡み目の場合 $\dim X_{\text{irr}}(L) \geq 1$ となるが, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ の各係数は $X_{\text{irr}}(L)$ 上の局所定数関数になることが知られている [27].

(4) ねじれ Alexander 多項式は reciprocal, つまり $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t^{-1}) \doteq \Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ を満たす [19].

例 2.3 K を 3 次元球面 S^3 内の 8 の字結び目とする. これは結び目のテーブルで最初に現れる双曲結び目であり, 種数 1 のファイバー結び目である. 群 $G(K)$ は 2 橋結び目としての表示を持つ: $G(K) = \langle x, y \mid r = xwy^{-1}w^{-1}, w = [y, x^{-1}] \rangle$. また, パラボリック表現 $\rho: G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ を $\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$ で定める. ただし, $u \in \mathbb{C}$ は $1 + u + u^2 = 0$ を満たす. このとき, 表現 ρ に付随したねじれ Alexander 多項式は

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det \Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\det \Phi(y-1)} = \frac{t^{-2}(t-1)^2(t^2-4t+1)}{(t-1)^2} \doteq t^2 - 4t + 1$$

で与えられ, 2 次のモニック多項式になる.

多項式 $f(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ がモニックであるとは, $f(t)$ の最高次数の係数が ± 1 であるときをいう. 一般に絡み目 L に対して次が成り立つ.

定理 2.4 ([4, 8, 17]) 3 次元球面 S^3 内のファイバー絡み目 L と任意の表現 $\rho: G(L) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$ に対して, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は $\deg \Delta_{L,\rho}^\alpha(t) = n \|\alpha\|_T$ を満たすモニック多項式である.

注意 2.5 非自明な結び目 K に対して, $\|\alpha\|_T = 2g(K) - 1$ であることが知られている.

定理 2.6 ([8]) 表現 $\rho: G(L) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$ に対して $n \|\alpha\|_T \geq \deg \Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ が成り立つ.

Friedl, Vidussi [12, 13, 14] によって定理 2.4 の逆が成り立ち, さらに定理 2.6 の等号を実現するような表現 (有限群への表現) の存在が示されている. これらの結果により絡み目のファイバー性と Thurston ノルムは代数的に決まることになるが, 実際には有限群への表現をすべて考える必要があり, 実用面で効果的とは言い難い. 特に $n = 2$ の場合に同様のことが成り立つかは未解決問題である.

3. Dunfield-Friedl-Jackson 予想

本節では双曲結び目に対する Dunfield-Friedl-Jackson 予想について述べる. 現在, 予想をサポートする具体例が少しずつ積み上げられている状況であるが, 一般には未解決である.

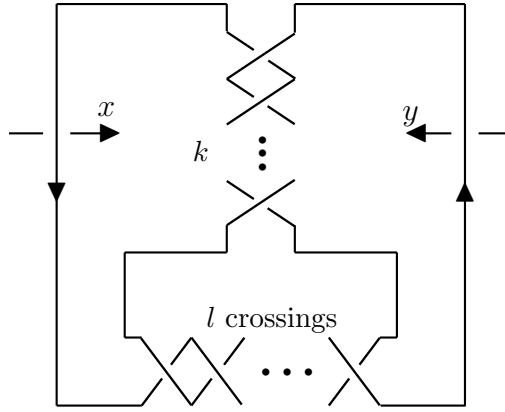


図 1: ダブルツイスト結び目 (絡み目) $J(k, l)$.

Dunfield, Friedl, Jackson [7] は, ホロノミー表現 $\bar{\rho}_0 : G(K) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ のリフトのうち, $\mathrm{tr} \rho_0(m_K) = 2$ となるリフト $\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に付随したねじれ Alexander 多項式 $\Delta_{K, \rho_0}(t)$ を詳しく考察している¹. 彼らは $\Delta_{K, \rho_0}(t^{-1}) = \Delta_{K, \rho_0}(t)$ を満たすように正規化されたものを双曲的トーション多項式と呼び $\mathcal{T}_K(t)$ と記している. $\mathcal{T}_K(t)$ が持つ基本的性質として, $\mathcal{T}_K(t)$ は t に任意の 1 の冪根を代入しても non-zero であることが知られている. 特に $\mathcal{T}_K(t)$ は非自明である. また Menal-Ferrer, Porti [31] により, $\mathcal{T}_K(1)$ と $\mathcal{T}_K(-1)$ はミューテーション不変量であることも知られている ($\mathcal{T}_K(t)$ 自身はミューテーション不変とならないことに注意).

Dunfield, Friedl, Jackson は計算機の援用による大規模な数値計算に基づいて, 次を予想している.

予想 3.1 ([7]) 3次元球面 S^3 内の双曲結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) = 4g(K) - 2$ が成り立つ. さらに $\mathcal{T}_K(t)$ がモニック多項式ならば, K はファイバー結び目である.

上記予想は, 15 交点以下のすべての双曲結び目 (313, 209 個) に対して成り立つことが計算機を用いて確かめられている [7]. しかしながら, Alexander 多項式によって非ファイバー性と種数が捉えられるような結び目に対しても, 予想 3.1 は未解決である. その一方で, 1つの多項式の情報のみで結び目の幾何的性質が決定されるという意味において, 魅力的な予想となっている.

予想 3.1 が成り立つ双曲結び目の例として次が知られている. $J(k, l)$ を図 1 にあるような結び目 (絡み目) とする. $J(k, l)$ が結び目となるのは kl が偶数のときである. これをダブルツイスト結び目という.

定理 3.2 ([33]) 双曲的ダブルツイスト結び目 $K = J(k, 2n)$ に対して, $\deg \mathcal{T}_K(t) = 4g(K) - 2$ が成り立つ. さらに, $k = 2m + 1$, $k = 2$, または, $k = 2m$ かつ $|4mn - 1| \in \mathcal{P}_2 = \{p: \text{奇素数} \mid 2 \text{ は } (\mathbb{Z}/p)^* \text{ の生成元}\}$ に対して, $\mathcal{T}_K(t)$ がモニック多項式ならば, K はファイバー結び目である.

定理 3.2 は, 予想 3.1 を満たす双曲結び目の無限系列を与える最初の例になっている. 2橋結び目 $J(k, 2n)$ は交代結び目の一種なので, そのファイバー性と種数は Alexander 多項式で決定されるが, 同じことが双曲的トーション多項式でも成り立つという apriori な理由はいまのところ見つかっていない.

¹ $\mathrm{tr} \rho'_0(m_K) = -2$ となる $\bar{\rho}_0$ のもう 1 つのリフト ρ'_0 に対して, $\Delta_{K, \rho'_0}(t) = \Delta_{K, \rho_0}(-t)$ が成り立つ.

定理 3.2 の証明は ρ_0 を含む $G(K)$ のすべてのパラボリック表現に対して適用できる形でなされる．そこでは Riley 多項式 $\phi_{J(k,2n)}(u)$ が本質的な役割を果たす (\mathcal{P}_2 に関する条件は Riley 多項式 $\phi_{J(2m,2n)}(u)$ の既約性を保証するのに用いられる)．次節で一般化された Dunfield-Friedl-Jackson 予想に関する結果を述べる際に，証明のあらましをもう少し詳しく説明する．

3 橋以上の双曲結び目についても，予想 3.1 を満たす結び目の無限系列が存在する．次の定理は canonical component C_0 上のすべてのパラボリック表現に対して成り立つ (プレッツェル結び目のねじれ Alexander 多項式については [2, 37] も参照のこと)．

定理 3.3 ([35]) 双曲的プレッツェル結び目 $P(2k+1, 2k+1, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1, 0$ に対して予想 3.1 が成り立つ．

予想 3.1 の種数に関する主張については，より広範な双曲結び目のクラスに対して等号が成り立つことが確かめられている [1, 39]．

3 次元球面 S^3 内の結び目 K は， $E(K)$ 内に互いに交わらない最小種数 Seifert 曲面の集合 $\Sigma = \sqcup_i \Sigma_i$ が存在して， $E(K) \setminus \Sigma$ が book of I -bundles の構造を持つ縫い目付き多様体の和集合となるときの libroid 結び目という．libroid 結び目はすべてのファイバー結び目を含んでおり，また，libroid 結び目のクラスが村杉和で閉じていることが示されている [1]．よって，向きの付いたバンドの plumbing から得られるすべての special arborescent 結び目 (これは 2 橋結び目を含む) や，自明な Alexander 多項式を持つ結び目の無限系列が libroid 結び目になることがわかる．

定理 3.4 ([1]) 双曲的 libroid 結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) = 4g(K) - 2$ が成り立つ．

一方，Porti [39] は双曲的 トーション多項式 $\mathcal{T}_K(t)$ の次数について次を示している．

定理 3.5 ([39]) 3 次元球面 S^3 内の双曲結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) \geq 2$ が成り立つ．特に $\mathcal{T}_K(t)$ は非自明である．

定理 2.6, 3.5 の系として次が成り立つ．

系 3.6 種数 1 の双曲結び目 K に対して $\deg \mathcal{T}_K(t) = 2$ が成り立つ．

種数 1 の双曲的ファイバー結び目は 8 の字結び目 (例 2.3) のみであることが知られているが，予想 3.1 のファイバー性に関する主張は種数 1 に限っても未解決である．

4. 双曲絡み目への一般化

4.1. 一般化された Dunfield-Friedl-Jackson 予想

本節では予想 3.1 の双曲絡み目への一般化について述べる．結び目と異なり，絡み目 ($\mu \geq 2$) の場合はそのファイバー性と種数は絡み目の向きに依存することに注意する．

$L = L_1 \cup \cdots \cup L_\mu$ を 3 次元球面 S^3 内の向きの付いた μ -成分双曲絡み目とする．また， $\bar{\rho}_0 : G(L) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ を $E(L)$ のホロノミー表現とする．このとき $\bar{\rho}_0$ の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ へのリフトは 2^μ 個存在する．ホロノミー表現のリフトと $E(L)$ のスピン構造の間には 1 対 1 の対応が存在することが知られている [5]．

ここでは L の各成分 L_i のメリディアン m_i に対して， $\mathrm{tr} \rho_0(m_i) = 2$ を満たすリフト $\rho_0 : G(L) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を考えることにする．一般に各メリディアン m_i の像がトレース 2 の行列となる非可換表現 $\rho : G(L) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ をパラボリック表現と呼ぶことにする．

定理 2.4, 2.6 と予想 3.1 の観点から，双曲絡み目に対して次が成り立つと予想される．

予想 4.1 ([34]) 3次元球面 S^3 内の向きの付いた双曲絡み目 L に対して $\deg \Delta_{L,\rho_0}^\alpha(t) = 2\|\alpha\|_T$ が成り立つ. さらに $\Delta_{L,\rho_0}^\alpha(t)$ がモニック多項式ならば, L はファイバー絡み目である.

注意 4.2 L が交代絡み目の場合には, $\|\alpha\|_T = \|\alpha\|_A$ が成り立つことが知られている. ここで $\|\alpha\|_A$ は $\alpha \in H^1(E(L); \mathbb{Z})$ の Alexander ノルム [30] を表す. Alexander ノルムは (多変数) Alexander 多項式で定まるので, $\|\alpha\|_A = \deg \Delta_L(t) - 1$ が成り立つ ($\Delta_L(t)$ は α で 1 変数に簡約化された Alexander 多項式である). よって, μ -成分双曲的交代絡み目 L については $\deg \Delta_{L,\rho_0}^\alpha(t) = 4g(L) + 2(\mu - 2)$ が成り立つと予想される².

予想 4.1 が成り立つ例として, 図 1 のダブルツイスト絡み目 $L = J(2m + 1, 2n + 1)$ がある. L が双曲絡み目である必要十分条件は $m, n \notin \{-1, 0\}$ である.

定理 4.3 ([34]) 双曲的ダブルツイスト絡み目 $L = J(2m + 1, 2n + 1)$, $m, n \notin \{-1, 0\}$ の任意の向きに対して予想 4.1 が成り立つ.

定理 4.3 の証明は以下の方針で行う (定理 3.2, 3.3 も同様である). まず, 絡み目群 $G(L)$ の表示を固定する: $G(L) = \langle x, y \mid xw = wx \rangle$, $w = (y^{-1}x)^m ((yx^{-1})^m yx(y^{-1}x)^m)^n$. このとき Petersen, Tran [38] により, $X_{\text{irr}}(L)$ を具体的に記述することができる:

$$X_{\text{irr}}(L) = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid F(a, b, c) = 0\}, \quad a = \text{tr } \rho(x), \quad b = \text{tr } \rho(y), \quad c = \text{tr } \rho(xy^{-1}).$$

ここで $F(a, b, c)$ は Chebyshev 多項式を用いて表される. 次に, L のねじれ Alexander 多項式が種数 $g(L)$ と L のファイバー性を決定するような $X_{\text{irr}}(L)$ の部分集合 $X_g(L) = X_{\text{irr}}(L) \setminus Z_g$, $X_f(L) = X_{\text{irr}}(L) \setminus Z_f$ を特定する. 最後に, 我々のリフト $\rho_0 : G(L) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ (つまり $F(2, 2, c_0) = 0$, $c_0 \notin \mathbb{R}$ を満たす $\chi_{\rho_0} = (2, 2, c_0)$) が Z_g, Z_f のどちらにも含まれないことを示すことで主張が得られる. いずれのステップも初等的であるが, 具体的な計算はやや煩雑である.

最近 Nguyen, Tran [36] は, twisted Whitehead 絡み目 L の 2 変数ねじれ Alexander 多項式 $\Delta_{L,\rho}^{\alpha,t}(t_1, t_2)$ の明示公式を与えることで, この絡み目に対して予想 4.1 が成り立つことを示している. 次の定理はホロノミー表現のリフト χ_{ρ_0} を含む既約成分上のすべてのパラボリック表現に対して成り立つ.

定理 4.4 ([36]) 3次元球面 S^3 内の双曲的 twisted Whitehead 絡み目に対して予想 4.1 が成り立つ.

4.2. パラボリック表現

Dunfield, Friedl, Jackson [7] は, $p \leq 287$ を満たす双曲的非ファイバー 2 橋結び目 $K = S(p, q)$ (3,830 個) に対して, ホロノミー表現のリフトとは限らないパラボリック表現 $\rho : G(K) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に付随した $\Delta_{K,\rho}(t)$ が K のファイバー性と種数を決定することを計算機を用いて確かめている. また前節までに見てきたように, 予想 3.1, 4.1 を満たす双曲結び目・絡み目のパラボリック表現は, ファイバー性と種数に関してホロノミー表現のリフト ρ_0 と同等の情報を持っていることがわかる. そこで次の問題を考える.

問題 4.5 向きの付いた双曲絡み目 L の任意のパラボリック表現 $\rho : G(L) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して, $\Delta_{L,\rho}^\alpha(t)$ は L のファイバー性と Thurston ノルム $\|\alpha\|_T$ を決定するか.

² Crowell と村杉の結果により, μ -成分交代絡み目 L に対して $\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu - 1$ が成り立つ.

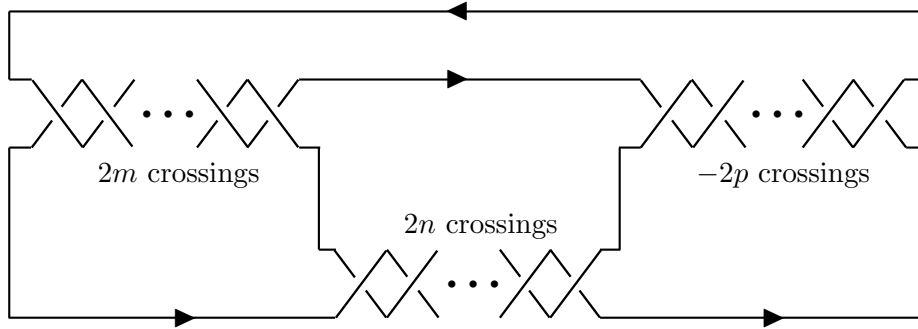


図 2: 2 橋絡み目 $L = C(2m, 2n, -2p)$.

問題 4.5 が肯定的な解を持てば、予想 3.1, 4.1 が正しいことが直ぐにわかる。しかしながら、以下で見るように、絡み目の場合は答えは否定的である。

正整数 m, n, p に対して、Conway の記号で $C(2m, 2n, -2p)$ によって表される双曲的 2 橋絡み目 L を考える (図 2)。問題 4.5 の部分解として次が成り立つ。

定理 4.6 ([34]) m, n, p を $m \neq p$ となる正奇数の組とする。このとき双曲的 2 橋絡み目 $L = C(2m, 2n, -2p)$ の任意の向きに対して、 $\Delta_{L, \rho}^{\alpha}(t)$ は L の種数を決定する。さらに、

- (1) $\gcd(m, p) = 1$ ならば、 $G(L)$ のすべてのパラボリック表現 $\rho : G(L) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して、 $\Delta_{L, \rho}^{\alpha}(t)$ は $g(L)$ を決定する。
- (2) $\gcd(m, p) \geq 3$ ならば、 $g(L)$ を決定しない $G(L)$ のパラボリック表現 ρ が存在する。

注意 4.7 図 2 の向きに対して $g(L) = 1$ となり、1 つの成分の向きを反対にすることで定まる L の向きについては $g(L) = m + p - 1$ となる。定理 4.6 (2) の種数を決定しないパラボリック表現は前者の場合に現れる。

定理 4.6 の証明では、絡み目 L のすべてのパラボリック表現を記述する Riley [41] の結果が本質的に用いられる。

最後に幾つか問題を挙げて本稿を終える。

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -指標多様体 $X(K)$ のパラボリック表現によるスライス上での $\mathcal{T}_K(t)$ の挙動の解析から予想 3.1 にアプローチするために、まずは次の点を明らかにしたい。

問題 4.8 ファイバー性もしくは種数を決定しない、双曲結び目のパラボリック表現は存在するか。

Friedl, Kim [9] は、定理 2.6 の等号が成り立つような表現 ρ の存在条件を縫い目付き多様体のホモロジーの言葉で記述している。定理 3.4 はこの判定条件を用いて示されるので自然に次の問題が考えられる。

問題 4.9 双曲的 libroid 結び目に対する結果を双曲絡み目の場合に一般化せよ。

また、定理 3.5 は、ねじれ Alexander 多項式の次数がねじれ係数コホモロジーの間の写像のランクから計算されることを用いて証明される。

問題 4.10 双曲的 トーション多項式の次数の評価に関する結果を双曲絡み目の場合に一般化せよ。特に種数 1 の双曲絡み目 L に対して $\deg \Delta_{L, \rho}^{\alpha}(t) = 2\|\alpha\|_T$ を示せ。

2橋結び目を含む幾つかの双曲結び目のクラスに対して、そのファイバー性と種数は、ある種の“有限性”を備えた曲線成分 $C \subset X_{\text{irr}}(K)$ (C は canonical component C_0 とは限らない)の存在によって特徴付けられる [32].

問題 4.11 この観点から双曲絡み目のファイバー性と Thurston ノルムを決定せよ.

謝辞. 第67回トポロジーシンポジウムにお招き下さった東京大学の河澄響矢氏, 逆井卓也氏, 広島大学の寺垣内政一氏, 北海道大学の大本亨氏に心から感謝いたします.

参考文献

- [1] I. Agol and N. M. Dunfield, *Certifying the Thurston norm via $SL(2, \mathbb{C})$ -twisted homology*, What's Next?: The Mathematical Legacy of William P. Thurston, 1–20, Ann. of Math. Stud., 205, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2020.
- [2] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of $(-2, 3, 2n+1)$ -pretzel knots*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 43–57.
- [3] L. Bénard, J. Dubois, M. Heusener and J. Porti, *Asymptotics of twisted Alexander polynomials and hyperbolic volume*, Indiana Univ. Math. J. (to appear).
- [4] J. C. Cha, *Fibred knots and twisted Alexander invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4187–4200.
- [5] M. Culler, *Lifting representations to covering groups*, Adv. in Math. **59** (1986), 64–70.
- [6] M. Culler and P. B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109–146.
- [7] N. M. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math. **21** (2012), 329–352.
- [8] S. Friedl and T. Kim, *The Thurston norm, fibered manifolds and twisted Alexander polynomials*, Topology **45** (2006), 929–953.
- [9] S. Friedl and T. Kim, *Taut sutured manifolds and twisted homology*, Math. Res. Lett. **20** (2013), 289–303.
- [10] S. Friedl and M. Nagel, *Twisted Reidemeister torsion and the Thurston norm: graph manifolds and finite representations*, Illinois J. Math. **59** (2015), 691–705.
- [11] S. Friedl and S. Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, The mathematics of knots, 45–94, Contrib. Math. Comput. Sci., 1, Springer, Heidelberg, 2011.
- [12] S. Friedl and S. Vidussi, *Twisted Alexander polynomials detect fibered 3-manifolds*, Ann. of Math. **173** (2011), 1587–1643.
- [13] S. Friedl and S. Vidussi, *A vanishing theorem for twisted Alexander polynomials with applications to symplectic 4-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15** (2013), 2027–2041.
- [14] S. Friedl and S. Vidussi, *The Thurston norm and twisted Alexander polynomials*, J. Reine Angew. Math. **707** (2015), 87–102.
- [15] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **93** (2017), 61–66.
- [16] H. Goda, *Twisted Alexander polynomial and matrix-weighted zeta function*, Kyushu J. Math. **74** (2020), 211–221.
- [17] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), 51–61.
- [18] M. Heusener, *$SL_n(\mathbb{C})$ -representation spaces of knot groups*, RIMS Kôkyûroku No. 1991 (2016), 1–26.
- [19] J. Hillman, D. Silver and S. Williams, *On reciprocity of twisted Alexander invariants*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), 1017–1026.

- [20] A. Ishii and K. Oshiro, *Augmented Alexander matrices and generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants*, preprint (2018).
- [21] T. Kanenobu and T. Sumi, *Twisted Alexander polynomial of a ribbon 2-knot of 1-fusion*, Osaka J. Math. (to appear).
- [22] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999), 635–661.
- [23] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996), 431–442.
- [24] 北野 晃朗, 合田 洋, 森藤 孝之, *ねじれ Alexander 不変量*, 数学メモアール第5巻, (2006).
- [25] T. Kitano and T. Morifuji, *Divisibility of twisted Alexander polynomials and fibered knots*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), 179–186.
- [26] T. Kitano and T. Morifuji, *A note on Riley polynomials of 2-bridge knots*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **26** (2017), 1211–1217.
- [27] T. Kitano, T. Morifuji and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of torus links*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), 2050016, 16pp.
- [28] T. Kitayama, *Twisted Alexander polynomials and ideal points giving Seifert surfaces*, Acta Math. Vietnam. **39** (2014), 567–574.
- [29] X.-S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380.
- [30] C. T. McMullen, *The Alexander polynomial of a 3-manifold and the Thurston norm on cohomology*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **35** (2002), 153–171.
- [31] P. Menal-Ferrer and J. Porti, *Mutation and $SL(2, \mathbb{C})$ -Reidemeister torsion for hyperbolic knots*, Algebr. Geom. Topol. **12** (2012), 2049–2067.
- [32] T. Morifuji, *Representations of knot groups into $SL(2, \mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials*, Handbook of Group Actions. Vol. I, 527–576, Adv. Lect. in Math. (ALM), 31, Int. Press, Somerville, MA, 2015.
- [33] T. Morifuji and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of 2-bridge knots for parabolic representations*, Pacific J. Math. **269** (2014), 433–451.
- [34] T. Morifuji and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic links*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **53** (2017), 395–418.
- [35] T. Morifuji and A. T. Tran, *Hyperbolic torsion polynomials of pretzel knots*, Adv. Geom. DOI: 10.1515/advgeom-2020-0017.
- [36] H.-A. Nguyen and A. T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of twisted Whitehead links*, New York J. Math. **25** (2019), 1240–1258.
- [37] 大橋 明行, *プレツェル結び目のファイバー性とねじれアレキサンダー不変量について*, 東北大学修士論文 (2013).
- [38] K. Petersen and A. T. Tran, *Character varieties of double twist links*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), 3569–3598.
- [39] J. Porti, *Nontrivial twisted Alexander polynomials*, A mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia, 547–558, Dep. Geom. Topol. Fac. Cien. Mat. UCM, Madrid, 2016.
- [40] R. Riley, *Parabolic representations of knot groups, I*, Proc. London Math. Soc. **24** (1972), 217–242.
- [41] R. Riley, *Algebra for Heckoid groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 389–409.
- [42] W. Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), no. 339, i–vi and 99–130.
- [43] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), 241–256.