symplectic field theory とその構成について

石川　卓　(京都大学数理解析研究所助教)*

1. 導入

簡単に説明するならば symplectic field theory (SFT) とは contact 多様体やその間の symplectic cobordism に対しての Floer homology のことである。その代数が適切な概正則曲線の数を数えることで構成されることは symplectic 多様体の Floer homology などと同様である。その構成のためには他の Floer homology の構成と同様の困難——例えば数を数えるために概正則曲線の空間を0次元の多様体にするにはどうすればよいか、あるいは多様体にできない場合にどのように数えるのか——といったことをケアする必要もあるが、 SFT 特有の問題もいくつか存在する。今回の講演ではこの SFT 特有の問題についての説明を行う。

SFT の代数的な理論に関しては Eliashberg, Givental, Hofer らにより [2] で詳しく調べられており、そこにおいて多くの応用の可能性が示されている。 SFT の一部である contact homology は Pardon ([6]) や Bao, Honda ([1]) により構成されていたが、一般の SFT に関しては私の [5] まで構成ができていなかった。本稿では、この論文で説明し、解決した SFT 特有の問題のうちの一つについて説明する。

まずは contact 多様体や symplectic cobordism についての基本的なことから説明する。 Y を $(2n-1)$次元閉多様体、$\xi \subset TY$ を余次元1の(余方向を持つ)部分束とする。 (Y,ξ) が contact 多様体であるとは、Y の1次微分形式 λ があって $\operatorname{Ker}\lambda = \xi$ かつ $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ が 0 をとらないことをいう。(λ の向きは ξ の余方向に一致するものみ考える。) このような微分形式 λ を contact form とよぶが、これは ξ に対して一意でには定まらない。実際、任意の正値函数 $f: Y \to \mathbb{R}$ に対して $f\lambda$ も同様の条件を満たし、逆に他の contact form は必ずこの形にかける。

一つ contact form λ を選んだとき、Y 上のベクトル場 R_λ が $i_{R_\lambda}\lambda = 1, i_{R_\lambda}d\lambda = 0$ により定まる。このベクトル場を Reeb ベクトル場とよぶ。 SFT ではこの周期解を考える。本稿では周期解とは滑らかな閉曲線 $\gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to Y$ であってある実数 $L > 0$ に対して方程式

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = L \cdot R_\lambda(\gamma(t))$$

を満たすものをいう。(L をこの周期解 γ の周期とよぶ。)

この周期解は次のようにある汎関数の臨界点ともみなせる。函数

$$\mathcal{A} : C^\infty(S^1, Y) \to \mathbb{R}$$

を

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^*\lambda$$

により定めれば、この臨界点がちょうど周期解であり、そこでの値 $\mathcal{A}(\gamma)$ がちょうど周期解に一致することは容易に確かめられる。定義域 S^1 の平行移動により臨界点集合 $P = \operatorname{Crit}\mathcal{A} \subset C^\infty(S^1, Y)$ には S^1 が作用する。この商 $\overline{P} = P/S^1$ はパラメータ付きでない周期解の空間となる。

contact form λ が Bott-Morse 条件を満たすとは、 P が多様体であって$TP = \operatorname{Ker} D^2\mathcal{A}$ を満たすことをいう。さらに P が S^1 の和集合のとき、 λ は Morse 条件

本研究は科研費(課題番号19K23404)の助成を受けたものである。

* 〒606-8317 京都市左京区北白川追分町　京都大学数理解析研究所
e-mail: suguru@kurims.kyoto-u.ac.jp

を満たすという。任意の contact 多様体について generic な contact form は Morse 条件を満たす。

さて、SFT とはこの函数 $\mathcal{A}$ を Morse 函数とみなした時の Morse 複体の理論である、と述べるのはいささか強引である。 symplectic 多様体の Hamiltoninan に対する Floer homology などでは汎関数に対する Morse 理論といって差し支えないものが構成され、SFT の場合にもそれをまねて理論、代数が構成されるのであるが、出来上がる代数はより複雑なものとなる。この代数に関しては [2] などを参照されたい。

次は私が実際に示したものよりもやや弱い主張ではあるが、 [5] では次が示されている。

定理 A ([5])**.** *λ が Bott-Morse 条件を満たすとき、SFT のチェイン複体を構成することができる。そのホモロジー $H_{\mathrm{SFT}}(Y,\xi)$ は (Y,ξ) のみにより定まり、 contact form λ や構成に用いる概複素構造等の取り方によらない。*

実際にはより強く、[2] の意味での generating function を、 contact 多様体、symplectic cobordism、symplectic cobordisms の族に対して構成している。 (これらから、それぞれチェイン複体、チェイン写像、チェインホモトピーに相当するものが構成される。)

さらに、Reeb ベクトル場の flow $\varphi_t^\lambda : Y \to Y$ が S^1-作用を生成する場合、つまりある $L > 0$ があって $\varphi_L^\lambda = \mathrm{id}$ のときには、ホモロジーを計算することが可能である。

定理 B ([5])**.** *ある $L > 0$ があって $\varphi_L^\lambda = \mathrm{id}$ のとき、 $H_{\mathrm{SFT}}(Y,\xi)$ は $H_*(\overline{P};\mathbb{R})$, $H_c^*(\overline{P};\mathbb{R})$ および変数 $\hbar$ により生成される代数のある完備化 (Novikov completion) となる。その積は次の例外を除き超可換である。*

$$[p_c, q_\alpha] = \langle c, \alpha\rangle \hbar$$

ここで $c \in H_*(\overline{P};\mathbb{R})$, $\alpha \in H_c^*(\overline{P};\mathbb{R})$ に対応する元をそれぞれ p_c, q_α としている。

本講演では SFT の代数についてはほとんど説明しない予定である。これについては先に挙げた [2] にも詳述されているので、それを参照されたい。

2. Floer homology の一般的な話

Morse 複体では臨界点が代数の生成元であり、チェイン複体の構成のためには臨界点の間の connecting orbit を数える必要がある。例えば多様体 M 上の Morse 函数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対する Morse チェイン複体では、(Sard-Smale 条件の下では)境界作用素

$$\partial\langle p\rangle = \sum_{\operatorname{ind} q = \operatorname{ind} p - 1} c_{p,q}\langle q\rangle \tag{1}$$

(ここで $\langle p\rangle$ は f の臨界点 $p \in M$ に対応する生成元) の係数 $c_{p,q}$ は、

$$\frac{d\ell}{dt}(t) + \nabla f(\ell(t)) = 0 \tag{2}$$

かつ

$$\lim_{t\to-\infty} \ell(t) = p, \quad \lim_{t\to\infty} \ell(t) = q \tag{3}$$

を満たす曲線 $\ell : \mathbb{R} \to M$ を、定義域 $\mathbb{R}$ に関する平行移動を除いて数えた数に一致する。この曲線 $\ell : \mathbb{R} \to M$ たちがこの場合の connecting orbit である。 (正確には

各生成元 $\langle p\rangle$ の向きを定めることで、connecting orbit も符号をつけて数えることになる。)

Floer homology においてもこの connecting orbit を数えることで代数が構成される。例としてまずは SFT や contact homology よりも簡単な Hamiltonian に対する Floer homology について考える。

symplectic 多様体 (M,ω) とは偶数次元多様体 M (その次元を$2n$とする)とその上の2次閉微分形式 ω であって ω^n が 0 を取らないようなものの組であった。この場合に函数 $H : M \to \mathbb{R}$ を Hamiltonian とみるとき、 M 上の Hamilton ベクトル場 X_H が $i_{X_H}\omega = -dH$ で定まるのであった。 Hamiltonian の Floer homology では、生成元はこの Hamilton flow の周期 1 の周期解、つまり閉曲線 $\gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ であって

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X_H(\gamma(t))$$

を満たすものである。 (通常は可縮な周期解のみを生成元とする。) Floer homology の場合、connecting orbit の定義にはまず概複素構造を一つ決める必要がある。この場合には M の概複素構造 J であって $\omega(\cdot, J\cdot)$ が正定値内積になるものを一つ固定して用いる。このとき周期解 γ_+ から γ_- への connecting orbit とは滑らかな曲線 $u = u(s,t) : \mathbb{R} \times S^1 \to M$ であって

$$\partial_s u + J(u)(\partial_t u - X_H(u)) = 0 \tag{4}$$

かつ

$$\lim_{s\to-\infty} u(s,\cdot) = \gamma_-, \quad \lim_{s\to\infty} u(s,\cdot) = \gamma_+ \tag{5}$$

を満たすものである。

Morse 函数の複体の場合には Sard-Smale 条件を満たすように計量を摂動することができ、その場合には $\operatorname{ind} q = \operatorname{ind} p - 1$ を満たす臨界点の組 p, q に対して p から q への connecting orbit は有限個となり、それを用いて (1) で定まる境界作用素はチェイン複体を構成する。一方一般に Floer homology の場合には概複素構造の変動等では connecting orbit が数えられる状況(つまり connecting orbit の空間が0次元の閉多様体になる状況)にはできない。([3] などを参照。) この場合を扱うために virtual technique とよばれる技術がいくつか開発されており、 [3] ではそのうち倉西理論とよばれるものが論じられ、それを用いている。

倉西理論の詳細については [3] や [4] などを参照してもらうことにして、ここではそれを用いるために何を調べる必要があるのかについて簡単に説明する。

まずは考えている空間(この場合は connecting orbit の空間)のコンパクト化を考える。(「閉」多様体に対応するものを構成する。) ただし、倉西理論のためには Morse 複体の時の「$\operatorname{ind} q = \operatorname{ind} p - 1$」のような場合(仮想次元が0次元になる場合)のみではなくすべての connecting orbit の空間を扱う必要がある。この場合にはコンパクト化の中には broken trajectory とよばれるもの (connecting orbit をいくつかつなげてできるもの) も含まれている。

次に、このコンパクト化した空間に倉西構造を与える。 (倉西空間にする。) 倉西空間とはおおよそ次のようなものである。倉西空間 X とは、コンパクト Hausodorff 空間であって、各点が倉西近傍とよばれる局所座標に対応するものを持ち、それら倉西近傍の間に座標変換の代わりに embedding とよばれる関係が与えられているものである。

点 $p \in X$ の倉西近傍 (V, E, s, ψ, G) とは、有限群 G、有限次元 G-ベクトル束 $\pi : E \to V$、 G-不変可微分切断 $s : V \to E$ および点 p の近傍の上への位相同相 $\psi : s^{-1}(0)/G \to X$ からなる組をいう。ただし G の V への作用が効果的であ

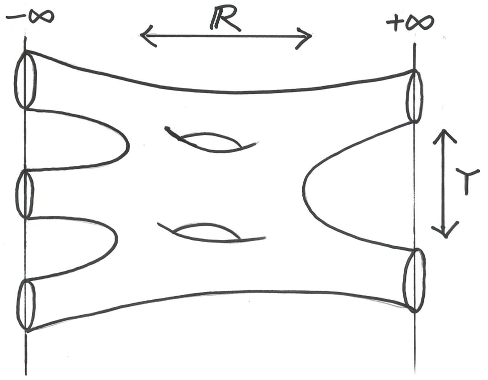

Figure 1: SFT での connecting orbit

ると仮定する。 (V', E', s', ψ', G') を別の倉西近傍とするとき、 (V, E, s, ψ, G) から (V', E', s', ψ', G') への embedding $(\varphi, \hat{\varphi})$ とは、orbifold の間の写像 $\varphi : V/G \to V'/G'$ および $\hat{\varphi} : E/G \to E'/G'$ の組であって次を満たすものをいう。

- $(\varphi, \hat{\varphi})$ はある束写像 $(\phi, \hat{\phi}) : (V, E) \to (V', E')$ から導かれる。ただし $\phi : V \to V'$ は埋め込み。

- 次はともに可換。

$$
\begin{tikzcd}
E/G \arrow[r, "\hat{\varphi}"] & E'/G' \\
V/G \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\varphi"] & V'/G' \arrow[u, "s'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
s^{-1}(0)/G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook, "\varphi"] & X \\
(s')^{-1}(0)/G' \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $d^{\perp}s' : TV'|_V/TV \xrightarrow{\cong} E'|_V/E$ は $s^{-1}(0)$ 上で同型を与える。

(embedding は一方向の関係であり、正確な倉西構造の定義には、それがいつ存在するか等の条件がある。) $\dim V - \dim E$ は連結成分上一定であり、これを X の次元という。 X の倉西構造が与えられると、倉西理論の一般論により切断 s たちを embeedding に関して整合性を持つように(多価切断として)摂動することができる。さらに X の向きと呼ばれるものが与えられるならば、 $\dim X = 0$ の場合には $\#X$ を定義することができることが知られている。 (一般の次元の場合には X からほかの位相空間 Y への strong continuous map と呼ばれるものが与えられたときに Y の特異チェインとして X の基本類に相当するものを定義することができる。)

3. SFT の場合

contact 多様体 (Y, ξ) の SFT の場合を考える。簡単のため λ が Morse 条件を満たす場合のみ考える。生成元として用いるのはこの場合 $\overline{P}$ となる。 (より正確には $\overline{P}$ の元のすべてを生成元とは考えず、そのうちある条件を満たすもののみが生成元に対応する。また、SFT 場合は加群ではなく代数としての生成元である。) connecting orbit に対応するのは $\mathbb{R} \times Y$ の中の概正則曲線である。ここで、$\mathbb{R} \times Y$ の概複素構造 J は次のように得られるもののみを考える。まず ξ の複素構造 J を、 $d\lambda(\cdot, J\cdot)$ が正定値の内積になるようにとる。分解 $T(\mathbb{R} \times Y) = (\mathbb{R}\partial_\sigma \oplus \mathbb{R}R_\lambda) \oplus \xi$ (ただし σ は $\mathbb{R}$-成分の座標) を用いて、 $\mathbb{R} \times Y$ の概複素構造 J をこの拡張として $J\partial_\sigma = R_\lambda$ により定める。

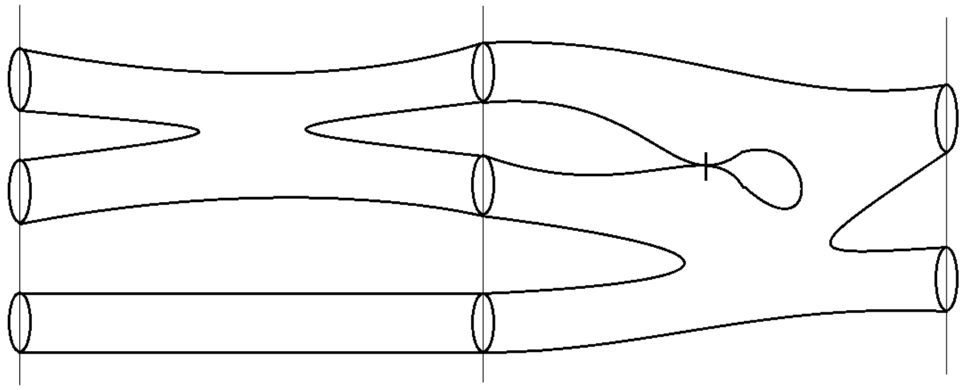

Figure 2: holomorphic building

SFT において考える connecting orbit は、この概複素構造 J に関する $\mathbb{R}\times Y$ の概正則曲線 $u:\Sigma\to\mathbb{R}\times Y$ たちであり、その定義域 Σ としては閉Riemann面からいくつかの点を除いて得られる曲面を考える。 SFT においては任意の種数の曲面を扱う。 Figure 1 のように、一般には曲面は $\{+\infty\}\times Y$、$\{-\infty\}\times Y$ 両方向にいくつかのエンドをもっており、条件 (3) や (5) の代わりに、これらすべてのエンドで Reeb flow の周期解に収束する。

J の $\mathbb{R}$-方向不変性から、

$$u(z)=(\sigma,y):\Sigma\to\mathbb{R}\times Y$$

が概正則ならば任意の定数 $b\in\mathbb{R}$ に対して

$$z\mapsto(\sigma+b,y):\Sigma\to\mathbb{R}\times Y$$

も概正則である。このような値域 $\mathbb{R}\times Y$ の $\mathbb{R}$平行移動や、定義域 Σ の自己同型で得られる曲線は、同一のものとしてみなす。

倉西理論を用いるために、上のような曲線の空間のコンパクト化を考える必要がある。そのコンパクト化には概正則曲線を扱う場合に通常現れるバブルのみではなく、 Figure 2 のような、値域が $\mathbb{R}\times Y$ ではなくそれをいくつか並べたものになるものが含まれる。 (いわゆる broken orbit に対応する。) このような曲線を含めたコンパクト化の元を holomorphic building とよぶ。

4. local chart の構成の一般

倉西近傍の構成の説明のために簡単な場合としてまずは symplectic 多様体 (M,ω) の中の stable map の空間 $\overline{\mathcal{M}}=\overline{\mathcal{M}}(M,\omega,J)$ の場合を説明する。 (stable map の説明など詳しくは [3] 等を参照。ここで steble map の定義のために (M,ω) には一つ概複素構造 J が固定されている。) stable map $(\Sigma,z,u)\in\overline{\mathcal{M}}$ の倉西近傍の構成を考える。

stable map の空間は基本的には楕円型方程式の解の空間であるので、その方程式を Sobolev 空間等の Banach 空間の間の Fredholm 写像とみなし、その Fredholm map の零点集合として解空間を表示するというのは基本方針であるが、これにはいくつか問題がある。一つは、stable map の定義域の変形を許していることから来るもので、異なる定義域の上での方程式を、一組の Banach 空間の間の Fredholom 写像として表示できないことである。これは避けようがないので、定義域の変形ごとに Banach 空間の組とその間の Fredholom 写像を構成し、全体の空間をそれら Fredholm 写像の族の零点集合たちの和集合として表示する。図式的に書けば、

以下のように、定義域の変形空間 X 上の fibration の形で表示しておき、その各ファイバーを零点集合として表示する、ということになる。(ただし定義域の自己同型を無視している。)

$$\begin{array}{c}\overline{\mathcal{M}} \supset \bigcup_{a\in X}\{F^a = 0\} \\ \big\downarrow \\ X \ni a\end{array}$$

ここで各 $a \in X$ に対して $F^a : W_a \to L_a$ は $a \in X$ に対応する定義域写像の概正則条件の方程式を表す Fredholm 写像であり、W_a, L_a はそれを定義するための適切な Banach 空間の組を表している。

一般には stable map の定義域は自己同型を持つ。これが有限群であれば実際に $\overline{\mathcal{M}}$ の中にあるのはこの fibration 全体をその有限群で割ったものとなる。有限群でない場合はそもそも変形空間自体良い構造を持たないので、定義域にいくつか marked point をつけて自己同型が有限群になるようにしてからその変形空間を代わりに用いる。この場合には marked point をつけたことによって増えた自由度を相殺するために方程式 $F^a : W_a \to L_a$ にさらに連立方程式を加えるなどして調整することになる。いずれにせよ、このようにしてまずは $\overline{\mathcal{M}}$ の各点の近傍は、Fredholm 写像の零点集合をファイバーとする fibration の有限群による商として表せる。

次に、一般にはこれらの Fredholm 写像が0に横断的ではないので、適切な有限次元ベクトル空間 E と線形写像の族 $K^a : E \to L_a$ を取り、$F^a \oplus K^a : W_a \oplus E \to L_a$ たちが0に横断的になるようにする。

$$\begin{array}{c}V = \bigcup_{a\in X}\{F^a \oplus K^a = 0\} \\ \big\downarrow \\ X \ni a\end{array}$$

により V を定め、写像 $s : V \to E$ を E への射影とすれば、s の零点が元の、$\overline{\mathcal{M}}$ における近傍となる。V の各ファイバーは $F^a \oplus K^a$ の零点集合として可微分構造を持っているが、実は V 全体にもこれらに整合的な可微分構造を入れることができる。

以上より、結局構成されたのは多様体 V、有限次元ベクトル空間 E、そしてその間の可微分写像 $s : V \to E$ であり、その零点集合 $s^{-1}(0)$ を自己同型に対応する有限群 G で割ったものが、$\overline{\mathcal{M}}$ における近傍と同相になっている。つまり、これらが $\overline{\mathcal{M}}$ の各点の倉西近傍になっている。marked point のつけ方や有限次元ベクトル空間 E と線形写像の族 $K^a : E \to L_a$ の取り方を適切なものとすれば、倉西近傍間の embedding も正しく定義される。詳しくは [5] あるいは [3] を参照せよ。

5. SFT の場合の問題と解決

前章で倉西近傍の構成の一般的な流れを簡単に説明したが、SFT の場合には一つ問題となることがある。それを説明するためにまずは Figure 3 のような holomorpic building が存在すると仮定し、このまわりの倉西近傍の構成を考えることにする。この holomorphic building の値域は $\mathbb{R} \times Y$ を二つ並べたものであり、もともとは $\mathbb{R} \times Y$ への写像であった概正則写像たちの極限として現れたもの (より正確にはコンパクト化により新しく追加されたもの)である。その近傍には一般には $\mathbb{R} \times Y$ が分裂する前の、$\mathbb{R} \times Y$ を値域とする holomorphic building が含まれる。この近傍を前章でのように fibration の形に表示するとき、以前と同様に定義

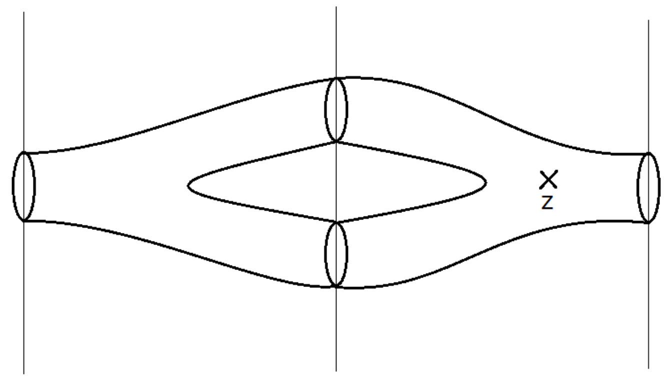

Figure 3: (Σ^0, z^0)

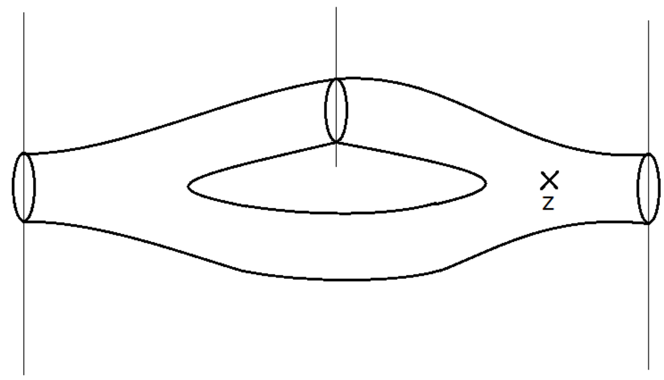

Figure 4: (Σ^1, z^1)

域(あるいはそれに marked point をつけたもの)の変形空間を底空間に用いようとすると、問題が起こる。これは、定義域の変形空間には Figure 4 のような曲面も含まれるからである。

Figure 4 のような曲面に対しては、$\mathbb{R} \times Y$ またはそれを二つ並べたもののどちらを値域としても、写像を考えることができない。そのため当然概正則条件の方程式を立てることもできず、対応する Fredhom 写像も定義できない。このようなことが起こる原因は、定義域の曲面が変形するだけでなく値域 $\mathbb{R} \times Y$ も同時に変形することにある。

なお、このことは、種数 0 の曲面のみを扱っている場合(contact homology など)にははっきりとは現れず、私の [5] 以前の、Pardon [6] などでは定義域の変形空間を使う方針で、(多少のケアを行って)構成を行っている。この部分が [6] 等の contact homology を扱ったものと、 [5] の SFT との差の一つである。

このように単に定義域の変形空間を使うのではうまくいかない、というのが SFT 特有の問題の一つである。 [5] では、これを解決するために、定義域と値域の変形を同時にパラメータづける空間を構成したうえで、それをファイブレーションの底空間に用いた。 (必要なのは局所的なパラメータ空間のみで、大域的なものは構成する必要はない。) この空間 $\mathring{X}$ はおおよそ次のような空間である。 (正確な定義は少し複雑であり、それについては [5] を参照せよ。)

$\mathring{X}$ 自体は定義域の変形空間 X と、 $\mathbb{R}$ いくつかの直積の部分多様体である。($\mathbb{R}$ の数は、中心の holomorphic building の、$\mathbb{R} \times Y$ のつなぎ目にあるエンドの数になる。) $\mathring{X} \subset X \times \prod \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$-成分は、基本的には($\mathbb{R} \times Y$ が分裂した状態のものに

対しては)対応するエンドでの収束の速さを表すパラメータになっている。二つ(以上)の $\mathbb{R}\times Y$ がくっついて一つの $\mathbb{R}\times Y$ になる場合、つまりその二つの $\mathbb{R}\times Y$ にある曲面の無限に伸びるエンドの部分がすべてそれぞれくっついて有限のシリンダーになるときには、 $\mathbb{R}$-成分たちは基本的には $\mathbb{R}\times Y$ の変形を表している。上の、Figure 3 と Figure 4 の例に近い例を考えれば、定義域のエンドの変形については、写像の収束の速さとの関係が整合的でないと、たとえ $\mathbb{R}\times Y$ の数が一致したとしてもうまく一つの曲面としてつながらないことは容易にわかる。 $\mathring{X}\subset X\times\prod\mathbb{R}$ を部分多様体として定める定義式は、これがうまくいくように、定義域の変形パラメータ(X-成分)と $\mathbb{R}$-成分に与えるものである。なお、この条件式は$\mathbb{R}\times Y$ が分裂した状態のものに対してはいつでも成立する自明な式となっており、この場合には $\mathbb{R}$-成分はすべて自由なパラメータになっている。

このように定義される、定義域と地域の変形をパラメータづける空間を用いることで、 SFT において種数1以上の曲面を扱うことで現れるこの問題は解決される。講演においては、この部分についてもう少し詳しく説明する予定である。

References

[1] E. Bao and K. Honda, Semi-global Kuranishi charts and the definition of contact homology, arXiv: 1512.00580.

[2] Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, Introduction to symplectic field theory, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560–673.

[3] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, Topology 38 (1999), no. 5, 933–1048.

[4] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part II, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46.2. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2009. pp. i–xii and 397–805. ISBN 978-0-8218-4837-1.

[5] S. Ishikawa, Construction of general symplectic field theory, arXiv:1807.09455.

[6] J. Pardon, Contact homology and virtual fundamental cycles, (2015) arXiv: 1508.03873.