

# Pseudo-Anosov properties in cluster algebras

石橋 典 (京都大学)\*

## 概 要

本稿では曲面上の写像類に対する擬 Anosov 性の拡張としてクラスター代数における変異ループに対する符号安定性という条件を導入し、

- 針孔付き曲面の写像類については擬 Anosov 性と一様な符号安定性が同値となること、
- 一般に符号安定な代表 path をもつ変異ループについて、誘導されるクラスター変換の代数的エントロピーが クラスター伸縮因子の対数で評価できること

を説明する. 本稿の内容は東京工業大学の狩野隼輔氏との共同研究に基づく.

## 1. 序

はじめにクラスター代数の基本概念に触れておく. 次の節で Teichmüller-Thurston 理論との関係を述べる. クラスター代数 (cluster algebra) とは, Fomin–Zelevinsky [FZ02] により定式化された組み合わせ論の一分野である. 中心的な概念は種子 (seed) と呼ばれる 3 つ組  $(B, \mathbf{A}, \mathbf{X})$  およびその変異 (mutation) と呼ばれる操作である. ここで  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$  は反対称行列,  $\mathbf{A} = (A_i)_{i=1}^N$  および  $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1}^N$  はそれぞれ可換な変数の組である. 添字  $k \in \{1, \dots, N\}$  に対し,  $k$  方向の変異  $\mu_k : (B, \mathbf{A}, \mathbf{X}) \rightarrow (B', \mathbf{A}', \mathbf{X}')$  は次のルールで新しい種子を作り出す:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + [b_{ik}]_+ [b_{kj}]_+ - [-b_{ik}]_+ [-b_{kj}]_+ & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$A'_i = \begin{cases} A_k^{-1} (\prod_{j \in I} A_j^{[b_{kj}]_+} + \prod_{j \in I} A_j^{[-b_{kj}]_+}) & \text{if } i = k, \\ A_i & \text{if } i \neq k, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$X'_i = \begin{cases} X_k^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i (1 + X_k^{-\text{sgn}(b_{ik})})^{-b_{ik}} & \text{if } i \neq k. \end{cases} \quad (1.3)$$

ここで実数  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $[a]_+ := \max\{a, 0\}$  と書いた.

これらの式は一見複雑であるが, ここでは変数  $A_i$  および  $X_i$  たちの変換が引き算を用いない有理変換 (正有理変換, positive rational map) であること, どちらも変換式は行列  $B$  で統制されていること, さらにその変換ルール  $B$  自身が同時に変換されていること, などに着目されたい. 変換式 (1.2), (1.3) をそれぞれクラスター  $A$  変換, クラスター  $X$  変換と呼ぶ. クラスター代数の定式化以来, このような不思議な変換が表現論, 可積分系, ミラー対称性など数学の様々な分野に現れることが見出されてきた. 次の節では

本研究は JSPS 科研費 (18J13304) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 13F60

キーワード: 写像類群, クラスター代数, 擬 Anosov 性

\* 〒606-8502 京都市左京区追分町北白川 京都大学 数理解析研究所

e-mail: ishiba@kyoto-u.ac.jp

これらの変換が曲面の Teichmüller 空間および測度付きラミネーションの空間における座標変換として自然に現れることを見る。

## 2. Teichmüller 理論からクラスター代数へ

$\Sigma$  を種数  $g$  および  $h$  個の針孔をもつ向きづけられた曲面とする。Euler 数  $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - h < 0, h > 0$  を仮定する。  $\Sigma$  の Teichmüller 空間  $T(\Sigma)$  とは、  $\Sigma$  上の面積有限、完備な双曲構造全体の集合を恒等写像に isotopic な微分同相全体のなす群で割って得られる有限次元の多様体である。写像類群  $MC(\Sigma)$  が  $T(\Sigma)$  に自然に作用し、商オービフォールド  $T(\Sigma)/MC(\Sigma)$  は Riemann 面のモジュライ空間である。

### 2.1. Teichmüller 空間上のクラスター座標

Teichmüller 空間 (の 2 種の拡張) の上には曲面の理想三角形分割に付随した 2 種類の大域座標が存在する。構成について詳しくは [Pen, Chapter 2] を参照されたい。

$\Sigma$  上の単純弧  $\alpha$  であって両端点が  $P$  上にあるものの isotopy 類を理想弧 (ideal arc) と呼ぶ。  $P$  以外の点で互いに交わらない理想弧の族  $\Delta = \{\alpha_i\}_{i=1}^N$  であって極大なものを理想三角形分割 (ideal triangulation) と呼ぶ。本稿での仮定のもと理想三角形分割は常に存在し、それに含まれる理想弧 (辺とも呼ぶ) の数は常に  $N = N(\Sigma) := 6g - 6 + 3h$  である。与えられた理想三角形分割  $\Delta$  に対し、各辺に付随した非調和比を用いて Fock–Thurston 座標

$$X_\Delta = (X_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : T(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\Delta \ (\cong \mathbb{R}_{>0}^{6g-6+3h})$$

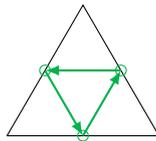
と呼ばれる大域座標 (埋め込み) が定義される。詳細は割愛するが、強化型 Teichmüller 空間 (enhanced Teichmüller space) と呼ばれるより大きな Teichmüller 空間  $\hat{T}(\Sigma)$  上にも非調和比による座標を拡張することができ、微分同相

$$X_\Delta = (X_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : \hat{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\Delta \tag{2.1}$$

が得られる。

次に、理想三角形分割  $\Delta$  を取り替えた時の座標変換を考える。針孔付き曲面  $\Sigma$  を固定した時、その任意の 2 つの理想三角形分割はフリップと呼ばれる基本変形 (図 1) を有限回施すことで移り合うことが古典的に知られている。  $\alpha \in \Delta$  に沿ったフリップを  $f_\alpha : \Delta \rightarrow \Delta'$  とすると、座標変換  $X_{\Delta'} \circ X_\Delta^{-1}$  は図 1 のように与えられる。

この変換公式は冒頭に述べたクラスター変換の一例となっている。任意の反対称行列  $B = (b_{ij})$  は  $b_{ij} = \#\{\text{arrows } i \rightarrow j\} - \#\{\text{arrows } j \rightarrow i\}$  となるような箭  $Q$  で表せることに注意し、理想三角形分割  $\Delta$  に付随した箭  $Q_\Delta$  を三角形上の箭



を貼り合わせて定義する。  $B^\Delta$  を対応する反対称行列とすると、  $f_\alpha : \Delta \rightarrow \Delta'$  について  $\mathcal{X}$  種子  $(B^{\Delta'}, X_{\Delta'})$  は  $(B^\Delta, X_\Delta)$  から  $\alpha$  に対応した方向の変異で得られることが確認できる。

クラスター座標を用いると、写像類群  $MC(\Sigma)$  の強化型 Teichmüller 空間  $\hat{T}(\Sigma)$  への作用を代数的な公式で記述することができる。ラベル付き Ptolemy グラフ (labeled Ptolemy graph)  $\text{Tri}_\Sigma$  を次のようなグラフとして定める：

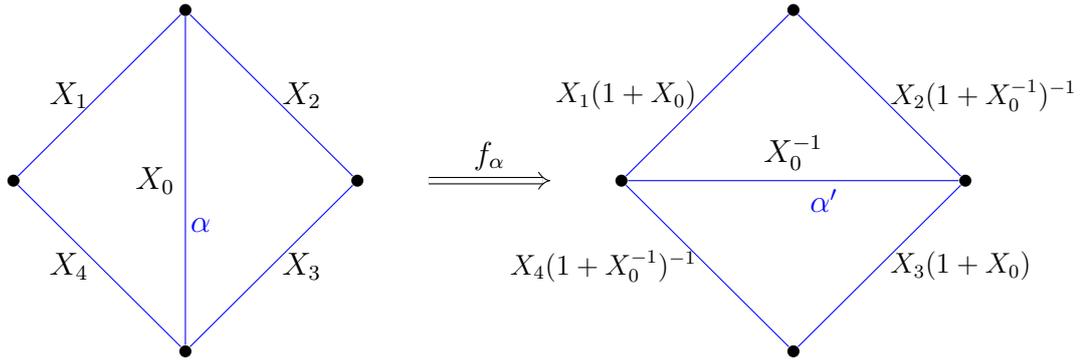


図 1:  $\alpha \in \Delta$  に沿ったフリップに対応する座標変換  $X_{\Delta'} \circ X_{\Delta}^{-1}$ .

- 頂点: ラベル付き理想三角形分割  $(\Delta, \ell)$ . ここで  $\ell: \{1, \dots, N\} \xrightarrow{\sim} \Delta$  は辺のラベル付けを与える全単射.
- 辺: 次の2種類の辺からなる.
  - (1)  $k = 1, \dots, N$  に対し, ラベル付きフリップ  $f_k: (\Delta, \ell) \rightarrow (\Delta', \ell')$ . ここで  $\Delta' := f_{\ell(k)}(\Delta)$  であり,  $\ell'$  は  $\ell'(i) := \ell(i)$  for  $i \neq k$ ,  $\ell'(k) \in \Delta' \setminus (\Delta \cap \Delta')$  として定まる  $\Delta'$  のラベル付け.
  - (2) 互換  $\sigma = (i j) \in \mathfrak{S}_N$  に対し, ラベルの互換  $\sigma: (\Delta, \ell) \rightarrow (\Delta, \sigma.\ell)$ . ここで  $\sigma.\ell(i) := \ell(\sigma^{-1}(i))$ .

ラベル付き Ptolemy グラフの頂点  $(\Delta, \ell)$  に対して座標系  $X_{(\Delta, \ell)} = (X_{\ell(i)}^{\Delta})_{i=1}^N: \widehat{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}^N$  が定まり, 辺  $(\Delta, \ell) \xrightarrow{f_k} (\Delta', \ell')$  には  $k$  方向の変異で与えられる座標変換  $f_k^x: \mathbb{R}_{>0}^N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^N$  が, 辺  $(\Delta, \ell) \xrightarrow{\sigma} (\Delta, \sigma.\ell)$  には座標の互換で与えられる座標変換  $f_{\sigma}^x: \mathbb{R}_{>0}^N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^N$  がそれぞれ付随する.  $\text{Tri}_{\Sigma}$  は連結であるから, 写像類  $\phi \in MC(\Sigma)$  および頂点  $(\Delta, \ell)$  に対し, edge path

$$f_{\phi}: (\Delta, \ell) \xrightarrow{k_1} (\Delta_1, \ell_1) \dots \xrightarrow{k_m} (\Delta_m, \ell_m) = \phi^{-1}(\Delta, \ell)$$

が存在する. ここで各  $k_i$  は番号  $1, \dots, N$  または互換であるとし,  $\phi^{-1}(\Delta, \ell) := (\phi^{-1}(\Delta), \phi^{-1} \circ \ell)$ . このとき座標の構成の  $MC(\Sigma)$  同変性から, 次の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_{>0}^N & \xrightarrow{f_{\phi}^x} & \mathbb{R}_{>0}^N & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}_{>0}^N \\ X_{(\Delta, \ell)} \uparrow & & \uparrow X_{\phi^{-1}(\Delta, \ell)} & & \uparrow X_{\Delta, \ell} \\ \widehat{T}(\Sigma) & \xlongequal{\quad} & \widehat{T}(\Sigma) & \xrightarrow{\phi} & \widehat{T}(\Sigma). \end{array}$$

ここで  $f_{\phi}^x := f_{k_m}^x \circ \dots \circ f_{k_1}^x$  はクラスター変換と互換たちの合成であるから正有理変換である. この図式から, 写像類の  $\widehat{T}(\Sigma)$  への自然な作用の座標表示は正有理変換で表されることが分かる.

**注釈 2.1** (飾り付き Teichmüller 空間とクラスター  $\mathcal{A}$  変換). クラスター  $\mathcal{A}$  変換は飾り付き Teichmüller 空間 (decorated Teichmüller space)  $\widetilde{T}(\Sigma)$  上の  $\lambda$  長座標の座標変換とし

て現れる.  $\Sigma$  の理想三角形分割  $\Delta$  に対して  $\alpha \in \Delta$  の  $\lambda$  長の組は微分同相

$$A_\Delta = (A_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : \tilde{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}^\Delta$$

を定め, フリップ  $f_\alpha : \Delta \rightarrow \Delta'$  に対する座標変換  $A_{\Delta'} \circ A_\Delta^{-1}$  はクラスター  $\mathcal{A}$  変換である. 写像類  $\phi$  の作用は対応した正有理変換  $f_\phi^a$  として座標表示される. 各種の Teichmüller 空間たちの関係は次の図式にまとめられる:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}(\Sigma) & & \\ \downarrow & \searrow p & \\ T(\Sigma) & \longleftrightarrow & \hat{T}(\Sigma) \end{array}$$

## 2.2. Thurston コンパクト化と測度付きラミネーション, 写像類の分類

次に, 写像類の分類定理である Nielsen–Thurston 分類について述べる. Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化  $\overline{T(\Sigma)} := T(\Sigma) \cup \mathcal{PML}(\Sigma)$  は閉円板に同相であり, Teichmüller 空間への写像類群作用はこの円板上に連続に拡張する. ここで  $\mathcal{PML}(\Sigma)$  は  $\Sigma$  上の測度付きラミネーション (measured lamination) の空間  $\mathcal{ML}(\Sigma)$  を, 測度への自然な  $\mathbb{R}_{>0}$  作用で割ったものである.  $\mathcal{ML}(\Sigma)$  は  $\mathbb{R}^{6g-6+2h}$  に同相な区分的線形多様体 (piecewise-linear manifold; 以下 PL 多様体と略記) であり, 正実数の重み付き multicurve (単純閉曲線の非交和の isotopy 類) 全体を稠密部分集合として含む.

**定理 2.2** (Nielsen–Thurston 分類, e.g. [FLP]).  $\Sigma$  上の任意の写像類  $\phi \in MC(\Sigma)$  は次のように 3 つの型に分類され, Thurston コンパクト化への作用の固定点の性質により特徴付けられる:

1. 周期的:  $\phi$  は有限位数をもつ. 写像類が周期的となるのは Teichmüller 空間  $T(\Sigma)$  に固定点をもつことと同値.
2. 可約:  $\phi$  は  $\Sigma$  上のある multicurve を固定する. 写像類が可約となるのは  $\mathcal{PML}(\Sigma)$  内のある arational でない射影的測度付きラミネーションを固定することと同値.
3. 擬 Anosov: 2 つの測度付きラミネーション  $L_\phi^\pm$  および実数  $\lambda_\phi > 1$  が存在し,  $\phi$  は

$$\phi(L_\phi^\pm) = \lambda_\phi^{\pm 1} \cdot L_\phi^\pm$$

をみtas. 写像類が擬 Anosov となるのは  $\mathcal{PML}(\Sigma)$  内のある arational な射影的測度付きラミネーションを固定することと同値.

力学系の観点から興味深いのは擬 Anosov 写像類である. 実数  $\lambda_\phi > 1$  を伸縮因子 (stretch factor) と呼ぶ. 擬 Anosov 写像類  $\phi$  は Thurston 境界  $\mathcal{PML}(\Sigma)$  の上で南北力学系 (North-South dynamics) をもつ. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{\pm n}([L]) = [L_\phi^\pm]$$

が任意の射影的測度付きラミネーション  $[L] \in \mathcal{PML}(\Sigma) \setminus \{[L_\phi^\mp]\}$  について成り立つ.

測度付きラミネーションの空間にも理想三角形分割  $\Delta$  に付随した座標 (剪断座標, shear coordinate) が存在する:  $x_\Delta = (x_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \Delta} : \widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\Delta$ . 詳細は割愛するが, こ

ここで  $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$  は強化型測度付きラミネーション (enhanced measured lamination) のなす PL 多様体である. また, フリップ  $f_\alpha: \Delta \rightarrow \Delta'$  に付随する座標変換  $x_\Delta \circ x_{\Delta'}^{-1}$  は図 2 に示されているように図 1 のトロピカル類似で与えられる. 正有理変換  $f$  の (max-plus) トロピカル類似  $f^T$  は

$$f^T(x_1, \dots, x_N) := \lim_{t \rightarrow 0} t \log f(e^{x_1/t}, \dots, e^{x_N/t})$$

で定義される PL 写像である. 詳しくは [FG07] を参照されたい.

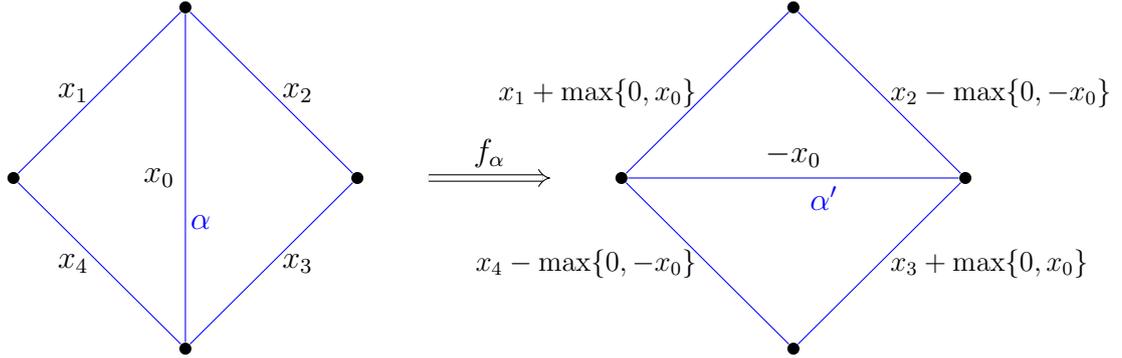


図 2:  $\alpha \in \Delta$  に沿ったフリップに対応する座標変換  $x_{\Delta'} \circ x_\Delta^{-1}$ .

写像類群の  $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$  への自然な作用の  $x_\Delta$  による座標表示は § 2.1 と同様の議論で計算でき, PL 写像  $(f_\phi^x)^T$  で表される. これらの事実から, 測度付きラミネーションの空間はある意味で Teichmüller 空間の “トロピカル類似” であり, これらの空間の背後には共通の代数構造が潜んでいることが見て取れる. これを抽出し, 一般化したものが次の節で述べるクラスター多様体の理論である. ここで, 筆者が本研究に取り組みきっかけとなった問いを挙げておく:

**問題 2.3** (Papadoulos–Penner [PP93]). 写像類  $\phi$  の Nielsen–Thurston 分類を, 正有理変換  $f_\phi^x, f_\phi^a$  あるいはそれらのトロピカル類似  $(f_\phi^x)^T, (f_\phi^a)^T$  を用いて特徴付けよ<sup>1</sup>.

符号安定性の理論はこの問いに対するひとつの回答を与える<sup>2</sup>.

### 3. クラスター多様体上の力学系

前節での観察をまとめると次のようになる:

- Teichmüller 空間  $\widehat{T}(\Sigma)$  は  $(\Delta, \ell) \in \text{Tri}_\Sigma$  に付随した大域座標を持ち, 辺  $(\Delta, \ell) \xrightarrow{k} (\Delta', \ell')$  に付随した座標変換はクラスター  $\mathcal{A}$  変換である.
- 測度付きラミネーションの空間  $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$  は  $(\Delta, \ell) \in \text{Tri}_\Sigma$  に付随した大域座標を持ち, 辺  $(\Delta, \ell) \xrightarrow{k} (\Delta', \ell')$  に付随した座標変換はクラスター  $\mathcal{A}$  変換のトロピカル類似である.

<sup>1</sup> [PP93] ではクラスター  $\mathcal{A}$  変換およびそのトロピカル類似のみが考察されているが, 後述の符号安定性の理論においては  $\mathcal{A}$  変換の符号が支配的であり,  $\mathcal{A}$  変換の符号はアンサンプル射を通して副次的に決まることが分かる. また, クラスター代数における  $c$ -vector の符号一貫性 (sign coherence) [GHKK18] により, 変異ループの周囲性はトロピカル  $\mathcal{A}$  変換のみで決定されることが知られている.

<sup>2</sup> ただし細かい点であるが, クラスター代数におけるトロピカル符号との整合性を優先し min-plus トロピカル類似  $f^{\text{top}}(x_1, \dots, x_N) := -f^T(-x_1, \dots, -x_N)$  を扱う.

- 上記の空間への写像類  $\phi \in MC(\Sigma)$  の作用の  $(\Delta, \ell)$  に付随した座標表示は,  $\text{Tri}_\Sigma$  内の edge path  $f_\phi : (\Delta, \ell) \rightarrow \phi^{-1}(\Delta, \ell)$  に付随したクラスター変換  $f_\phi^x$  およびそのトロピカル類似で与えられる.

クラスター多様体の理論はこれらの構造を代数的に抽象化したものと考えてよい.

### 3.1. クラスター多様体と変異ループ

§ 1で述べたクラスター代数の基本概念を Fock–Goncharov [FG09] に従って幾何学的に定式化する. 有限集合  $I$  を固定する. 基底付き格子  $N = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}e_i$  およびその上の反対称双線形形式  $(, ) : N \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  の組  $(N, (, ))$  を (Fock–Goncharov の意味での) 種子 (seed) と呼ぶ<sup>3</sup>.  $b_{ij} := (e_i, e_j)$  で定まる反対称行列  $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$  を交換行列 (exchange matrix) と呼ぶ. 組  $(N, B)$  を種子と呼ぶこともある.

**例 3.1** (理想三角形分割に付随した種子). 針孔付き曲面  $\Sigma$  の理想三角形分割  $\Delta$  に対し, 辺  $\alpha \in \Delta$  に付随した形式的な基底  $e_\alpha^\Delta$  で生成される格子  $N^\Delta := \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}e_\alpha^\Delta$  および § 2.1 で定義した交換行列  $B^\Delta$  を考えると,  $(N^\Delta, B^\Delta)$  は種子である.

$\mathbb{T}_I$  を,  $|I|$  価の正則木であって各辺が  $I$  の元でラベル付けられ, 各頂点のまわりでラベルが相異なるものとする. 種子形態 (seed pattern) とは  $\mathbb{T}_I$  の各頂点に種子を対応づける写像  $s : \mathbb{T}_I \ni t \mapsto (N^{(t)} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}e_i^{(t)}, B^{(t)})$  であって, 辺  $t \xrightarrow{k} t'$  について  $B^{(t)}$  と  $B^{(t')}$  が  $k$  方向の行列変異 (1.1) で関連づけられているようなものである.

クラスター多様体. 各  $t \in \mathbb{T}_I$  に対し,  $\mathcal{X}_{(t)} := \text{Hom}(N^{(t)}, \mathbb{G}_m)$  により代数的トーラスが定まる. ここで  $\mathbb{G}_m := \text{Spec } \mathbb{Z}[z, z^{-1}]$  は乗法的群スキーム<sup>4</sup>. 基底  $e_i^{(t)}$  から座標関数  $X_i^{(t)} : \mathcal{X}_{(t)} \rightarrow \mathbb{G}_m, \varphi \mapsto \varphi(e_i^{(t)})$  が定まる. 辺  $t \xrightarrow{k} t'$  について, クラスター  $\mathcal{X}$  変換  $\mu_k^x : \mathcal{X}_{(t)} \rightarrow \mathcal{X}_{(t')}$  を

$$(\mu_k^x)^* X_i^{(t')} := \begin{cases} (X_k^{(t)})^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i^{(t)} (1 + (X_k^{(t)})^{-\text{sgn}(b_{ik}^{(t)})} - b_{ik}^{(t)})^{-b_{ik}^{(t)}} & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

で定まる双有理写像とする. クラスター  $\mathcal{X}$  多様体 (cluster  $\mathcal{X}$ -variety) はこれらの貼り合わせデータから定まるスキームである:

$$\mathcal{X}_s := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_I} \mathcal{X}_{(t)}.$$

双対的な構成として, 双対格子  $M^{(t)} := \text{Hom}(N^{(t)}, \mathbb{Z})$  に付随した代数的トーラス  $\mathcal{A}_{(t)} := \text{Hom}(M^{(t)}, \mathbb{G}_m)$  たちをクラスター  $\mathcal{A}$  変換  $\mu_k^a : \mathcal{A}_{(t)} \rightarrow \mathcal{A}_{(t')}$  により貼り合わせてクラスター  $\mathcal{A}$  多様体  $\mathcal{A}_s = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_I} \mathcal{A}_{(t)}$  が得られる. 2つのクラスター多様体はアンサンブル射 (ensemble map)  $p : \mathcal{A}_s \rightarrow \mathcal{X}_s, p^* X_i^{(t)} = \prod_{j \in I} (A_j^{(t)})^{b_{ij}^{(t)}}$  で関連づけられる. 注釈 2.1 と比較されたい.

交換グラフ, 変異ループとクラスターモジュラー群. 与えられた種子形態  $s$  から, ラベル付き Ptolemy グラフの類似である交換グラフ (exchange graph)  $\text{Exch}_s$  を構成できる. 構成は紙数の関係で省略するが (詳しくは [IK] を参照),  $\text{Exch}_s$  の頂点は  $\mathbb{T}_I$  の頂点  $t$  と

<sup>3</sup> ここでは反対称種子であって氷結頂点 (frozen vertex を持たないものを考えている. 一般の定式化については [FG09, GHKK18] を参照されたい.

<sup>4</sup> 体  $K$  について  $\mathbb{G}_m(K) = K^\times$  なので, 以下  $\mathbb{G}_m$  を  $\mathbb{C}^\times$  などで読み替えても全く差し支えない.

置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_I$  の組  $(t, \sigma)$  の適切な同値類  $v = [t, \sigma]_{\text{triv}}$  であって、順序付き座標トーラスの対応

$$\text{Exch}_s \ni v = [t, \sigma]_{\text{triv}} \mapsto \mathcal{X}_{(v)} := \mathcal{X}_{(t, \sigma)}$$

が一意的な同型を除いて上手く定まるようなものである。特にクラスター多様体は  $\mathcal{X}_s = \bigcup_{v \in \text{Exch}_s} \mathcal{X}_{(v)}$  と書ける。  $k \in I$  について  $\text{Exch}_s$  内の辺  $v \xrightarrow{k} v'$  およびクラスター変換  $\mu_k^x : \mathcal{X}_{(v)} \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}$  が、互換  $\sigma \in \mathfrak{S}_I$  について辺  $v \xrightarrow{\sigma} v'$  および座標の置換  $\sigma^x : \mathcal{X}_{(v)} \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}$  が付随する。  $\text{Exch}_s$  内の edge path

$$\gamma : v = v_0 \xrightarrow{k_0} v_1 \xrightarrow{k_1} \dots \xrightarrow{k_m} v_m = v' \quad (3.1)$$

に対して (各  $k_i$  は  $I$  の元または  $\mathfrak{S}_I$  内の互換), クラスター変換および座標の互換の合成として正有理変換  $\mu_\gamma^x : \mathcal{X}_{(v)} \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}$  が定まる。閉曲線  $\gamma$  については  $\mu_\gamma^x = \text{id}$  である。

edge path (3.1) は  $B^{(v')} = B^{(v)}$  をみたすとき、「変異ループを代表する」という。このとき、双有理自己同型

$$\mathcal{X}_{(v)} \xrightarrow{\mu_\gamma^x} \mathcal{X}_{(v')} \cong \mathcal{X}_{(v)} \quad (3.2)$$

が定まる。ここで、後者の同型は種子  $(N^{(v)}, B^{(v)})$  と  $(N^{(v')}, B^{(v')})$  の間の自然な同型から誘導されるものである。変異ループを代表する2つの edge path は付随する双有理自己同型 (3.2) がクラスター多様体  $\mathcal{X}_s$  内の Zariski 開集合上で一致するとき同値であるといい、同値類  $\phi = [\gamma]_s$  を変異ループと呼ぶ。逆に、 $\gamma$  は  $\phi$  の代表 path (representation path) であるという。双有理自己同型 (3.2) は変異ループ  $\phi$  と頂点  $v \in \text{Exch}_s$  の選択のみで決まる。これを  $\phi$  の  $v$  における座標表示と呼び、 $\phi_{(v)}^x$  と書く。

変異ループ全体のなす群をクラスターモジュラー群と呼び、 $\Gamma_s$  と表す。ここで群演算は代表 path の連結で定める: 任意の変異ループ  $\phi$  は任意の頂点  $v \in \text{Exch}_s$  を始点とする代表 path を持つことから、これは上手く定義される。

各変異ループは双有理自己同型  $\phi_{(v)}^x$  の貼り合わせによりクラスター多様体  $\mathcal{X}_s$  上の (正則な) 自己同型を定め、 $\Gamma_s$  の  $\mathcal{X}_s$  への作用が得られる。この作用から生じる力学系が本稿での興味の対象である。

**半体値点の集合** 任意の半体 (semifield)  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$  および代数的トーラス  $T = \text{Hom}(N, \mathbb{G}_m)$  に対し、その  $\mathbb{P}$  値点の集合

$$T(\mathbb{P}) := \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P} \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}$$

が定まる。ここで  $M$  は  $N$  の双対格子である。正有理変換  $f : T \rightarrow T'$  は  $\mathbb{P}$  値点の間の写像  $f(\mathbb{P}) : T(\mathbb{P}) \rightarrow T'(\mathbb{P})$  を誘導することが知られている。これをクラスター変換に適用することで、クラスター多様体の  $\mathbb{P}$  値点の集合

$$\mathcal{X}_s(\mathbb{P}) := \bigcup_{v \in \text{Exch}_s} \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{P})$$

が定まる。  $\Gamma_s$  は  $\mathcal{X}(\mathbb{P})$  に自然に作用する。半体として次の2つの例がよく用いられる:

- 正実数の全体にふつうの和と積の構造を与えて得られる半体  $\mathbb{R}_{>0} = (\mathbb{R}_{>0}, +, \cdot)$ .

- 実数全体に和として2項演算  $\max$  を、積としてふつうの和  $+$  を考えて得られる半体  $\mathbb{R}^T = (\mathbb{R}, \max, +)$ . 同型な半体  $\mathbb{R}^{\text{trop}} = (\mathbb{R}, \min, +)$  もよく用いられる. どちらも実トロピカル半体と呼ばれる.

**例 3.2** (針孔付き曲面).  $s_\Sigma$  を針孔付き曲面  $\Sigma$  の理想三角形分割およびそのフリップから得られる種子形態とする. 付随した対象を下付き記号  $\Sigma$  で表すことにする.

- 交換グラフ  $\text{Exch}_\Sigma := \text{Exch}_{s_\Sigma}$  は  $\Sigma$  のタグ付き Ptolemy グラフ (tagged Ptolemy graph) と呼ばれるものに同型であり, Ptolemy グラフは  $\text{Exch}_\Sigma$  の部分グラフである. 写像類  $\phi \in MC(\Sigma)$  に付随した edge path  $f_\phi$  は変異ループを代表し, 群埋め込み  $MC(\Sigma) \rightarrow \Gamma_\Sigma$ ,  $\phi \mapsto [f_\phi]_{s_\Sigma}$  が得られる.
- § 2.1 で触れた Teichmüller 空間  $\widehat{T}(\Sigma)$  上の Fock–Thurston 座標により,  $MC(\Sigma)$  同変な同型  $X_\bullet : \widehat{T}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_s(\mathbb{R}_{>0})$  が得られる. 同様に測度付きラミネーションの空間  $\widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma)$  上の剪断座標により,  $MC(\Sigma)$  同変な同型  $x_\bullet : \widehat{\mathcal{ML}}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_s(\mathbb{R}^T)$  が得られる.

### 3.2. 変異ループの符号安定性

交換グラフの辺  $v \xrightarrow{k} v'$  に付随したトロピカルクラスター変換  $\mu_k^{\text{trop}} := \mu_k^x(\mathbb{R}^{\text{trop}}) : \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\text{trop}}) \rightarrow \mathcal{X}_{(v')}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  は  $w \in \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  に対し, 次のように書ける:

$$x_i^{(v')}(\mu_k(w)) = \begin{cases} -x_k^{(v)}(w) & \text{if } i = k, \\ x_i^{(v)}(w) + [\text{sgn}(x_k^{(v)}(w))b_{ik}^{(v)}]_+ x_k^{(v)}(w) & \text{if } i \neq k. \end{cases} \quad (3.3)$$

特に,  $\epsilon \in \{+, -\}$  に対して  $\epsilon x_k^{(v)} \geq 0$  で定義される半空間  $\mathcal{H}_{k,\epsilon}^{(v)}$  上線形であることがわかる. この線形写像の座標系  $(x_i^{(v)})_{i \in I}$  に関する表現行列を  $E_{k,\epsilon}^{(v)}$  と書く.

$\text{Exch}_s$  内の edge path (3.1) の点  $w \in \mathcal{X}_{(v)}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  における符号を, 次で定まる符号列  $\epsilon_\gamma(w) = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_{h-1}) \in \{+, 0, -\}^h$  として定義する:

$$\epsilon_\nu := \text{sgn}(x_{k_{i(\nu)}}^{(v_i(\nu))}(\mu_{\gamma_{\leq i(\nu)}}(w))), \quad \nu = 0, \dots, h-1.$$

ここで  $\gamma_{\leq i} : v_0 \xrightarrow{(k_0, \dots, k_{i-1})} v_i$  は  $v_0$  から  $v_i$  までの部分 path,  $(k_{i(0)}, \dots, k_{i(h-1)})$  は添字の列  $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_{m-1})$  の中で  $I$  の元に対応する部分列である.

符号  $\epsilon_\gamma(w)$  が strict, つまり  $\epsilon_\gamma(w) \in \{+, -\}^h$  が成り立つときには PL 写像  $\mu_\gamma^{\text{trop}} := \mu_\gamma^x(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  は  $w$  の近傍上で線形であり, その表現行列は  $E_\gamma^{\epsilon_\gamma(w)} = J_{k_m} \cdots J_{k_1}$  と分解される. ここで

$$J_{k_i} := \begin{cases} E_{k_{i(\nu)}, \epsilon_\nu}^{(v_i(\nu))} & (k_i = k_{i(\nu)} \in I \text{ のとき}), \\ P_{k_i} & (k_i \text{ が互換のとき}). \end{cases}$$

$P_\sigma$  は互換  $\sigma$  の表現行列である.

**定義 3.3** (符号安定性).  $\text{Exch}_s$  内の edge path (3.1) が変異ループ  $\phi := [\gamma]_s$  を代表すると仮定する.  $\Omega \subset \mathcal{X}_{(v_0)}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  を  $\mathbb{R}_{>0}$  による定数倍作用で不変な部分集合とする. このとき  $\gamma$  が  $\Omega$  上符号安定 (sign-stable) であるとは, strict な符号列  $\epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}} \in \{+, -\}^h$  が存在して, 任意の  $w \in \Omega \setminus \{0\}$  に対して自然数  $n_0 \in \mathbb{N}$  であって

$$\epsilon_\gamma(\phi^{n_0}(w)) = \epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}}$$

が全ての  $n \geq n_0$  について成り立つものが取れることをいう. 符号  $\epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}}$  を  $\gamma$  の  $\Omega$  における安定符号と呼ぶ. 行列  $E_{\phi, \Omega}^{(v_0)} := E_{\gamma}^{\epsilon_{\gamma, \Omega}^{\text{stab}}(w)}$  を安定表現行列と呼ぶ.

**定理 3.4** (Perron–Frobenius 性).  $\text{Exch}_s$  内の edge path (3.1) が変異ループ  $\phi = [\gamma]_s$  を代表し,  $\Omega$  上符号安定であると仮定する. このとき安定表現行列  $E_{\phi, \Omega}^{(v_0)}$  のスペクトル半径は正固有値  $\lambda_{\phi, \Omega} \geq 1$  で実現される. また, 対応する固有ベクトルが  $\Omega$  内に存在する.

各  $v_0 \in \text{Exch}_s$  に対し,  $\mathcal{C}_{(v_0)}^{\pm} := \{w \in \mathcal{X}_{(v_0)}(\mathbb{R}^{\text{trop}}) \mid \pm x_i^{(v_0)}(w) \geq 0, i \in I\}$  とおく. 任意の path  $\gamma : v_0 \rightarrow v$  はこれらの錐の内部で一定の符号を持ち, 種子形態  $\pm s$  に対するトロピカル符号と呼ばれるものに一致する. この意味で  $\mathbb{R}_{>0}$  不変集合

$$\Omega_{(v_0)}^{\text{can}} := \text{int } \mathcal{C}_{(v_0)}^+ \cup \text{int } \mathcal{C}_{(v_0)}^-$$

での符号安定性は最も基本的である. 変異ループ  $\phi$  が  $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$  上符号安定な代表 path を持つとき, 正固有値  $\lambda_{\phi} := \lambda_{\phi, \Omega_{(v_0)}^{\text{can}}}$  をクラスター伸縮因子 (cluster stretch factor) と呼ぶ.

上述の符号安定性は代表 path の選択に依存することに注意する. 変異ループ  $\phi$  は任意の代表 path  $\gamma : v_0 \rightarrow v$  が  $\mathbb{R}_{>0}$  不変集合  $\mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{X}_{(v_0)}(\mathbb{Q}^{\text{trop}})$  上で符号安定なとき, 一様に符号安定 (uniformly sign-stable) であるという. ここで  $\mathbb{Q}^{\text{trop}} := (\mathbb{Q}, \min, +) \subset \mathbb{R}^{\text{trop}}$ . 定義の仕方から, これは変異ループ自身の性質である. このとき特に各代表 path  $\gamma : v_0 \rightarrow v$  が  $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$  上で符号安定なことが分かり, クラスター伸縮因子が定まる.

### 3.3. 主定理

(1) 擬 Anosov 性と符号安定性.  $s_{\Sigma}$  を針孔付き曲面から定まる種子形態とする (例 3.2). 特に各写像類  $\phi \in MC(\Sigma)$  は変異ループ  $\phi = [f_{\phi}]_{s_{\Sigma}} \in \Gamma_{\Sigma}$  を定める (同じ記号で表す). 次が写像類の擬 Anosov 性の符号安定性による特徴付けである:

**定理 3.5** ([IK]). 針孔付き曲面  $\Sigma$  上の写像類  $\phi$  に対し, 次は同値である:

1. 写像類  $\phi$  は擬 Anosov.
2. 変異ループ  $\phi$  は一様に符号安定.
3. 写像類  $\phi$  は  $S\mathcal{X}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  上で南北力学系をもち, 吸い込み/湧き出し点はいずれもアンサンブル射の像  $\mathcal{U}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}}) := p^{\text{trop}}(\mathcal{A}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}})) \subset \mathcal{X}_{\Sigma}(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  に属する.

このとき, 変異ループ  $\phi$  のクラスター伸縮因子は伸縮因子  $\lambda_{\phi}$  に一致する.

また, 一般の種子形態において一様に符号安定な変異ループは [Ish19] の意味でクラスター擬 Anosov である (逆は成り立たない).

(2) クラスター変換の代数的エントロピー. 代数的トーラス上の双有理写像  $\varphi : \mathbb{G}_m^N \rightarrow \mathbb{G}_m^N$  の代数的エントロピーは

$$\mathcal{E}_{\varphi}^{\text{alg}} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\deg(\varphi^n))$$

により定義される.  $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$  上で符号安定な代表 path をもつ変異ループ  $\phi$  については, その座標表示  $\phi_{(v_0)}^z, z \in \{a, x\}$  の代数的エントロピーを次のように評価できる. 代数的エントロピーは双有理写像による共役で不変であり,  $\mathcal{E}_{\phi}^z := \mathcal{E}_{\phi_{(v_0)}^z}^{\text{alg}}$  は頂点  $v_0$  の選択によらないことに注意する.

**定理 3.6** ([IK19]).  $\phi = [\gamma]_s$  を  $\Omega_{(v_0)}^{\text{can}}$  上符号安定な代表  $\text{path } \gamma : v_0 \rightarrow v$  をもつ変異ループとすると,

$$\begin{aligned}\log \rho(\check{E}_\phi) &\leq \mathcal{E}_\phi^a \leq \log R_\phi, \\ \log \rho(E_\phi) &\leq \mathcal{E}_\phi^x \leq \log R_\phi.\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで安定表現行列  $E_\phi := E_{\phi, \Omega}^{(v_0)}$  に対して  $\check{E}_\phi := (E_\phi^T)^{-1}$ ,  $R_\phi := \max\{\rho(E_\phi), \rho(\check{E}_\phi)\}$  である.

この評価は次の予想のもと, 等式に強められる:

**予想 3.7** (スペクトル双対性予想). 任意の変異ループ  $\phi$  の一般の代表  $\text{path } \gamma$  に対し, 各点での表現行列  $E_\gamma^{\epsilon_\gamma(w)}$  と  $\check{E}_\gamma^{\epsilon_\gamma(w)}$  の特性多項式は全体の符号を除いて等しい. 特にこれらの行列のスペクトル半径は等しい.

針孔付き曲面に付随する種子形態  $s_\Sigma$  においては, 予想 3.7 は任意の変異ループ, その代表  $\text{path}$  および  $\mathcal{U}_\Sigma(\mathbb{R}^{\text{trop}})$  上の任意の点における符号について正しい. 特に擬 Anosov 写像類  $\phi$  について, 定理 3.5 および定理 3.6 から

$$\mathcal{E}_\phi^a = \mathcal{E}_\phi^x = \log \lambda_\phi = \mathcal{E}_\phi^{\text{top}}$$

が結論される. ここで  $\mathcal{E}_\phi^{\text{top}}$  は  $\phi$  を代表する擬 Anosov 微分同相の位相的エントロピーである. また,  $s_\Sigma$  に対するクラスター多様体の幾何学的な記述から,  $\mathcal{E}_\phi^a$  (resp.  $\mathcal{E}_\phi^x$ ) は  $\Sigma$  上の飾り付き捻れ  $SL_2$  局所系 (resp. 棒付き  $PGL_2$  局所系) のモジュライ空間への作用の代数的エントロピーと解釈できる.

## 参考文献

- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [FG07] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichmüller theory, Vol. I, 647–684; IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [FG09] —, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., **42** (2009), 865–930.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poénaru, *Thurston’s work on surfaces*, Mathematical Notes, **48**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [GHKK18] M. Gross, P. Hacking and S. Keel and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 497–608.
- [IK19] T. Ishibashi and S. Kano, *Algebraic entropy of sign-stable mutation loops*, arXiv:1911.07587.
- [IK] —, *Sign stability of mapping classes on marked surfaces*, in preparation.
- [Ish19] T. Ishibashi, *On a Nielsen–Thurston classification theory for cluster modular groups*, Annales de l’Institut Fourier, **69** (2019), 515–560.
- [Pen] R. C. Penner, *Decorated Teichmüller theory*, QGM Master Class Series, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.
- [PP93] A. Papadopoulos and R. C. Penner, *The Weil–Petersson symplectic structure at Thurston’s boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), 891–904.